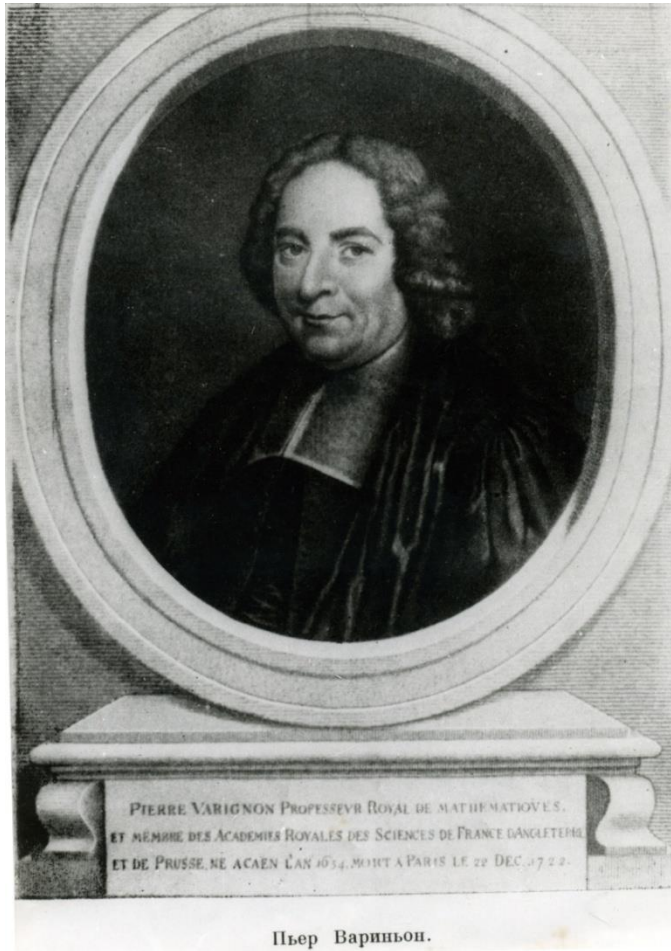


Лекция 15

- **Трактат Вариньона "Новая механика" - обобщение достижений статики до XVII в. включительно.**
- Трактат Вариньона – пример трактата, направленного на решение конкретных технических задач механики в переходный период. Он является весьма систематическим и содержательным изложением основных законов геометрического варианта технической статики.
- Студентам необходимо знать совокупность основных законов статики, развитых у Вариньона; принципы, положенные в основу трактата; метод сложения сил; самое понятие *силы*.

Геометрическая статика П.Вариньона (1654-1722)



Пьер Вариньон - выдающийся французский математик и механик, член Парижской академии наук, представил Парижской академии первый проспект своего трактата по механике в **1687г.** под названием **«Проект новой механики»**.

- **«Новая механики или статика»** напечатан уже после смерти автора и вышел в свет в Париже в **1725 Г.**

Геометрическая статика Вариньона

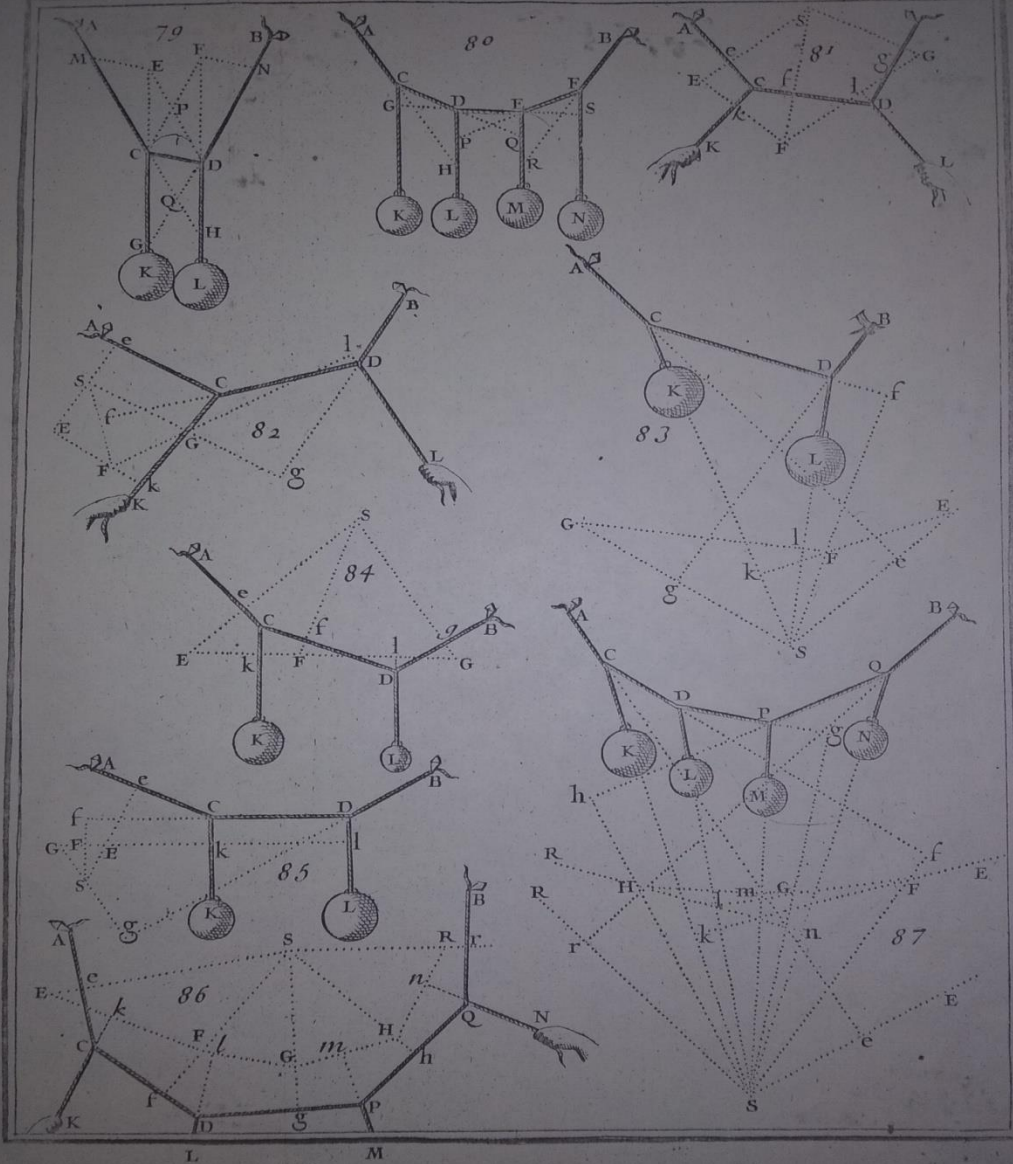
- **Новая механика или статика**, проект которой был опубликован в **1687** году - посмертное издание трудов г-на Вариньона, члена Королевских Академий Наук Франции, Англии и Пруссии, лектора философии Его Величества в Королевском колледже и профессора математики в Колледже Мазарини. Париж. **MDCCLXXXV**

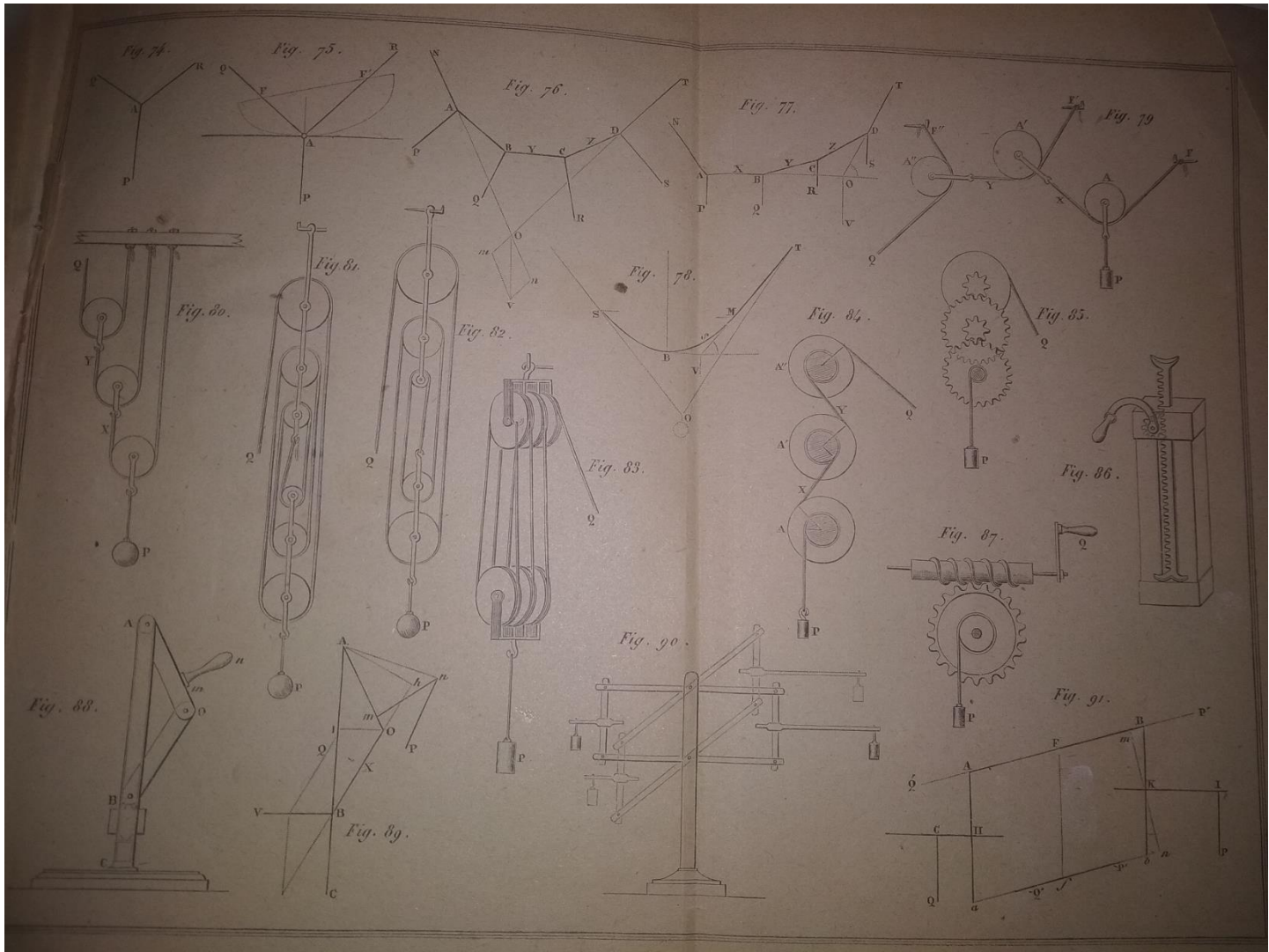
Геометрическая статика Вариньона

- **Машина или механизм** - приспособление для передвижения грузов и тел.

Сила, это то, что приводит в движение машину или все то, что способно сдвинуть тело при помощи машины или без нее.

Сила, которая стремится двигать тело сверху вниз по прямой линии, направленной к центру Земли называется **тяжестью** или **весом**.





Геометрическая статика Вариньона

- Аксиома I: Действия всегда пропорциональны причинам, или действующим силам, т.к. последние являются причинами, если они вызывают какое-либо действие и находятся в соответствии с ним.

Геометрическая статика Вариньона

- Аксиома II: Равные силы или сопротивления, действующие в одном направлении, вызывают равные или одни и те же действия, и следовательно, сила, заменяющая равную себе по величине и имеющую то же направление, вызовет то же действие.

Геометрическая статика Вариньона

- Аксиома III: Когда на тело действуют две равные противоположно направленные силы, оно должно быть неподвижно, т.е. в состоянии покоя, [они] взаимно уничтожаются, или в равной степени мешают друг другу, полностью *удерживая* одна другую", то есть, имеется в виду, что эти силы уравнивают друг друга.
- То же справедливо, если одна из сил является "сопротивлением"
- (Это - элементарная форма принципа освобожденности от связей).

Геометрическая статика Вариньона

- В Аксиоме IV утверждается обратное предложение.
- **Аксиома V**: Тело, на которое действуют две неравные противоположно направленные силы, должно двигаться в сторону большей, как если бы на него действовала одна сила в этом же направлении, равная величине разности этих двух сил.
- (Причем отмечается, что меньшая из этих сил может быть силой сопротивления).

- Развивая теорию равновесия на основе принципа сложения и разложения сил, Вариньон увязывает с этим принципом и принцип сравнения моментов сил.

Геометрическая статика Вариньона

- **Основной принцип:**
- **Каково бы ни было число сил, направленных произвольным образом, которые действуют одновременно на одно и то же тело (Вариньон имеет в виду - в одной точке), это тело либо совсем не будет двигаться, либо будет двигаться по единственному пути вдоль линии, которая будет такой же, как если бы на тело действовала лишь одна сила в том направлении, называемая результирующей всех этих сил.**
- (говоря о результирующей, эквивалентной заданной системе сил, Вариньон указывает лишь на возможность замены нескольких сходящихся сил одной, ничего не утверждая о величине этой силы).

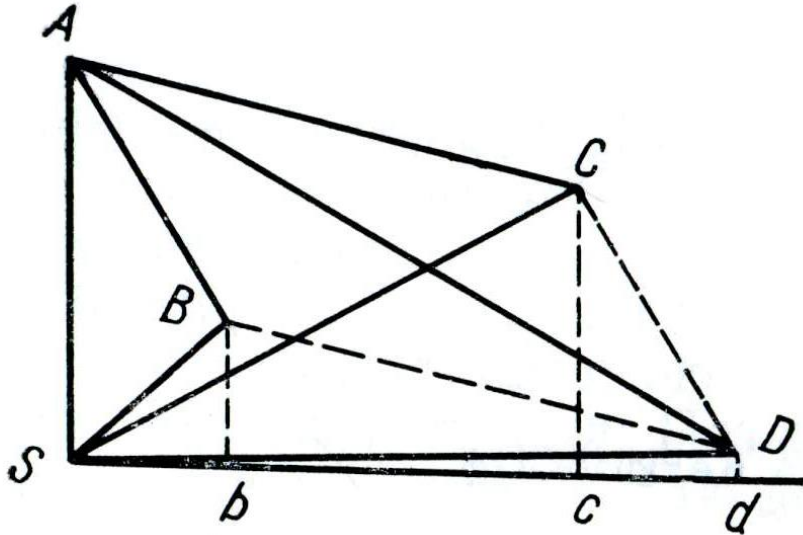
Геометрическая статика Вариньона

- **Леммы I и II**, заключают в себе принцип геометрического сложения и разложения сходящихся сил по правилу параллелограмма.
- (здесь речь идет о сложении двух элементарных перемещений, которые получило бы тело под влиянием каждой силы в отдельности, т.е. дано **геометрическое правило сложения скоростей**, а не сил).

Геометрическая статика Вариньона

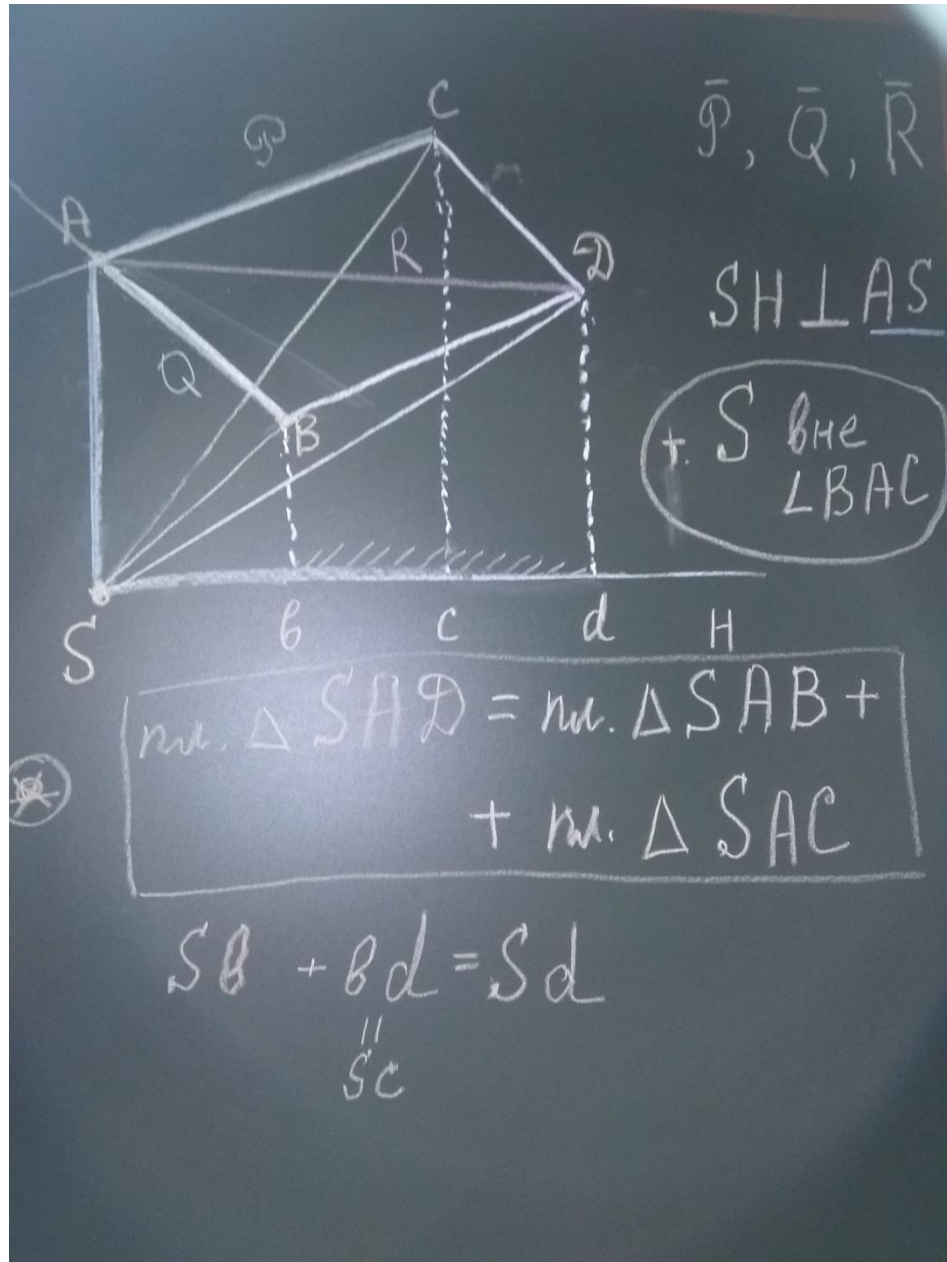
- В **Следствии VI** дается геометрическое построение результирующей многих сходящихся сил, строя замыкающую сторону их **силового многоугольника**.
- Вариньон доказывает возможность **переноса отрезка, изображающего силу, в твердом теле по линии ее действия без изменения состояния равновесия тела**.

Лемма XVI (теорема Вариньона)



Момент
равнодействующей двух
сходящихся сил
относительно некоторой
точки плоскости сил
равен алгебраической
сумме моментов
составляющих
относительно той же
точки

- Если из какой-либо точки, лежащей в плоскости параллелограмма, опустить перпендикуляры на диагональ и на обе стороны, заключающие эту диагональ, то произведение диагонали на ее перпендикуляр равно сумме произведений обеих сторон на соответствующие им перпендикуляры, если точка лежит вне угла, образованного этими сторонами, и равно разности этих произведений, если она лежит внутри этого угла, (когда точка S находится на диагонали; в этом случае величины площадей треугольников, построенных на сторонах, равны)



$\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$

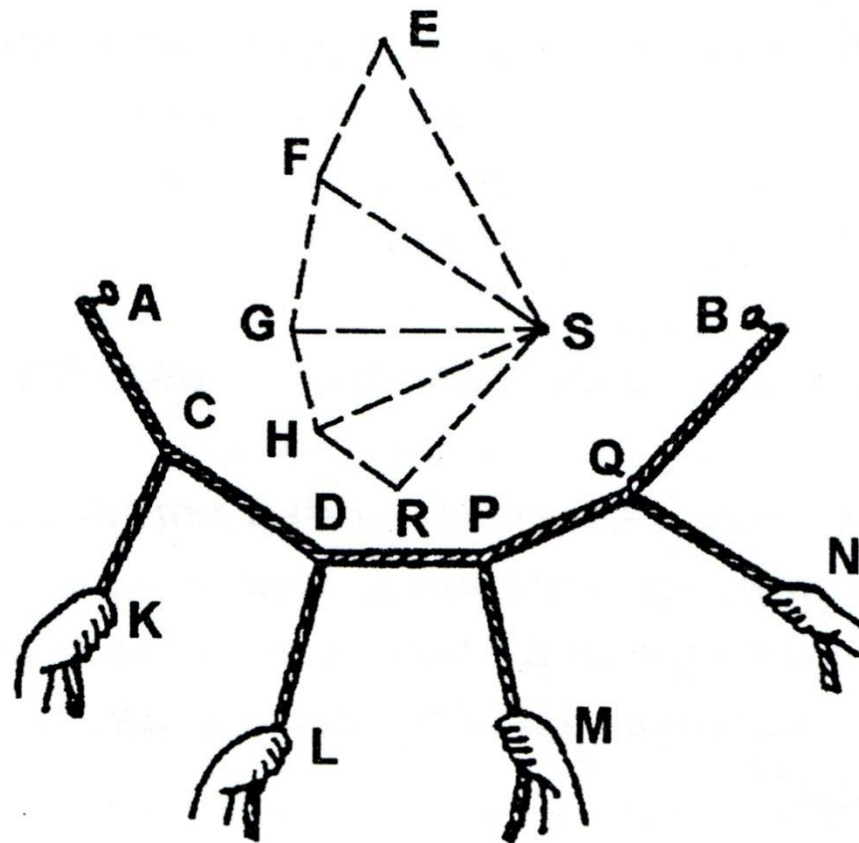
SH LAS

+ S bne
LBAC

$$m. \Delta SAD = m. \Delta SAB + m. \Delta SAC$$

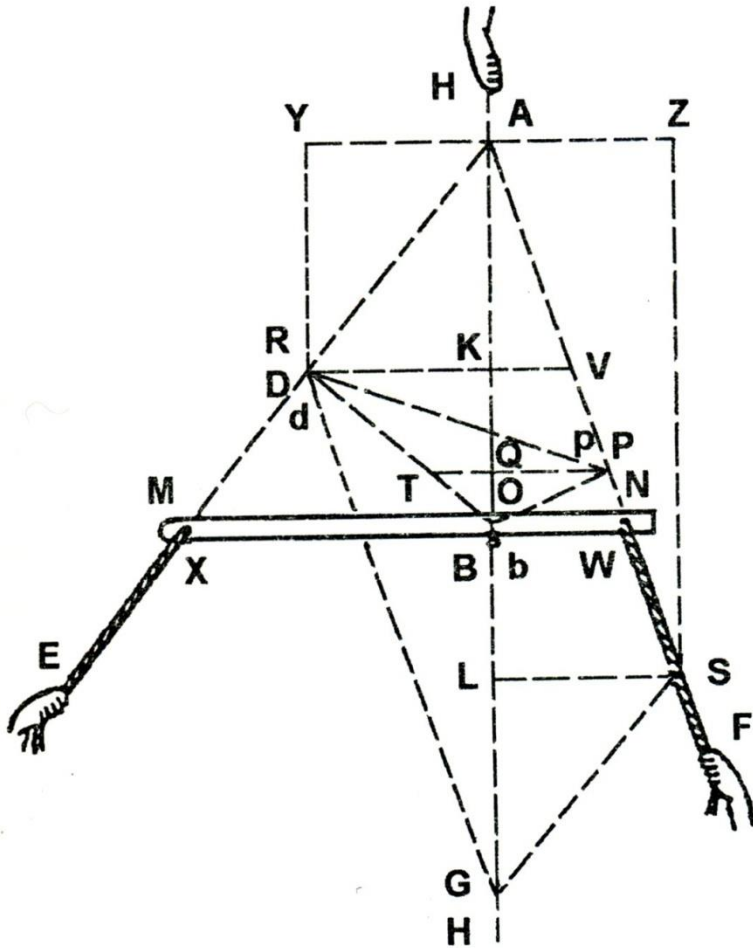
$$SB + \underset{\parallel SC}{BD} = SD$$

Метод графической статики – оперирование двумя взаимными (веревочными и силовыми) плоскими многоугольниками.



Рычаги всех родов, различных форм и размеров под действием всевозможных сил и грузов

Задача о равновесии обобщенного рычага (теорема XXI)



Для равновесия такого тела необходимо и достаточно, чтобы силы E , F и «сила сопротивления» V могли образовать замкнутый треугольник и чтобы прямая действия силы V проходила через точку пересечения двух активных сил E и F .

Следствия II и III важны для предельного перехода от двух сходящихся сил к двум параллельным.

Принцип виртуальных скоростей

*Из письма Иоганна Бернулли (от
26.01.1717.) П.Вариньону*

«При всяком равновесии
любых сил, каким бы
способом они ни были
приложены и в каком бы
направлении они ни
действовали одна на
другую, посредственно
или непосредственно,
сумма энергий
положительных будет
равна сумме энергий
отрицательных, взятых с
положительным знаком».



- Выявление количественного смысла характеристики энергии дается Вариньоном более четко.

Он определяет энергию как произведение величины силы на перемещение точки ее приложения вдоль прямой действия силы; при этом учитывается знак энергии.

Развитие геометрического и аналитического направления статики в XVIII и XIX веках

Развитие геометрической
статики

Развитие геометрической статики в XVIII - начале XIX в. (работы Д. Бернулли, Л. Пуансо).

Аксиомы и леммы статики в трактате Пуансо «Начала статики».

Трактат Л. Пуансо «Начала статики».

Элементы теории пары сил.

Условия равновесия свободного твердого тела.

Объяснение парадокса весов Роберваля.



Даниил Бернулли
(1700 – 1782)

Д.Бернулли «Исследование принципов механики и геометрическое доказательство сложения и разложения сил» (1726)



Даниил Бернулли
(1700 – 1782)

- Д. Бернулли критикует два фундаментальных положения механики Вариньона: пропорциональность силы величине той скорости, которую эта сила сообщает телу, и независимость движений, сообщаемых отдельными силами телу.
- Действительно, согласно шестой аксиоме Вариньона скорость тела пропорциональна той силе, которая вывела тело из состояния покоя, сообщив ему данную скорость за некоторое время.
- Возражая против этого тезиса, Д. Бернулли выписывает равенство: $dv = pdt$, выражающее принцип ускоряющих сил для прямолинейного неравномерного движения точки. Формула Бернулли, в которой ускорение точки приравнивается силе, отнесенной к единице массы p , является одной из первых записей дифференциального уравнения движения точки. Эта формула Д. Бернулли явно показывает ошибочность суждения Вариньона о пропорциональности скорости приложенной силе: **на самом деле ей пропорционально ускорение.**
- Второе положение Вариньона, существенно использованное им при «доказательстве» параллелограмма сил (лемма II), игнорирует разницу между переносным и относительным перемещением точки в сложном движении.

Д.Бернулли «Исследование принципов механики и геометрическое доказательство сложения и разложения сил» (1726)



Даниил Бернулли
(1700 – 1782)

- У Д.Бернулли понятие силы является основным.
- Изображается сила отрезком, длина которого соответствует величине силы.
- В основу его теории положены гипотезы о возможности замены сил эквивалентными им силами:
 - 1. Две любые силы могут быть заменены эквивалентными силами.
 - 2. Две силы, имеющие одинаковое направление, эквивалентны одной силе, равной их сумме, и две силы, прямо противоположные по направлению, эквивалентны одной силе, равной их разности.
 - 3. Данная сила, эквивалентная двум равным сходящимся силам, является одинаково наклоненной к той и другой из них, т.е. направленной вдоль внутренней биссектрисы угла, образованного этими двумя силами.
- Правило параллелограмма сил у Д. Бернулли доказывается геометрически и имеет довольно сложный вид.

Луи Пуансо (Poinsot) (1777-1859)

«Начала статики» (Les éléments de statique), Р., 1803



- Окончил Политехническую школу в Париже (1797), с 1809 профессор там же.
- Член Парижской АН(Академия наук) с 1813
- В период Июльской монархии — в Министерстве народного образования. Пэр Франции (1846), сенатор (1852).

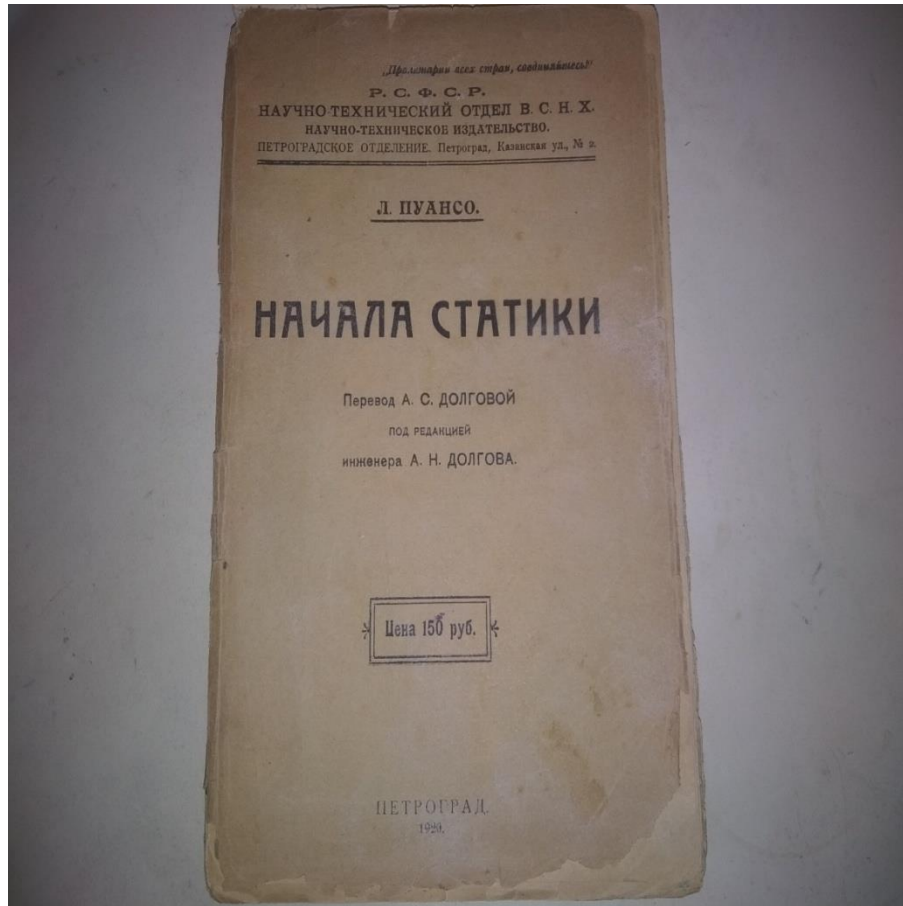


POINSOT,

(Louis)

Membre de la Légion d'honneur.

Né à Paris, le 3 Janvier 1777, dit en 1819.



- В 1803 опубликовал **«Элементы статики»**, в которых применил разработанные им геометрические методы исследования к учению о равновесии твёрдых тел и их систем.
- В 1834 построил теорию вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Впервые ввёл понятие эллипсоида вращения.

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

- **Статика** - учение о равновесии сил, приложенных к твердому телу.
- **Сила** характеризуется отрезком, т.е. длиной (величиной), направлением и точкой приложения.
- **Абсолютно твердого тело** – совокупность точек, неизменно связанных между собой.

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

- **Принцип освобождаемости от связей:**

сопротивления, испытываемые телом от постоянных причин, могут быть заменены соответственными силами, после такой замены сопротивлений силами можно считать тело свободным в пространстве

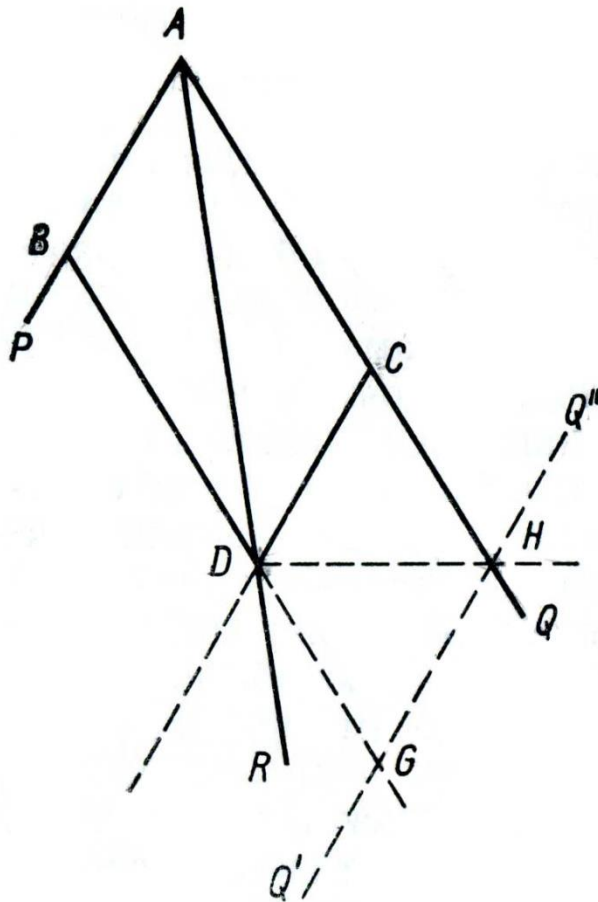
Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

- Аксиома I: две равные, противоположно направленные силы, приложенные к одной точке, уравниваются.
- **Следствие** констатирует возможность переноса силы по линии ее действия в твердом теле.
- Аксиома : **равнодействующая двух равных сходящихся сил проходит по биссектрисе внутреннего угла между линиями действия сил**
- *(утверждение, эквивалентное третьей гипотезе Д. Бернулли)*

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

- **Первые две теоремы** утверждают, что равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону и приложенных в твердом теле, равна сумме величин сил и делит отрезок, соединяющий точки приложения составляющих в отношении, обратном отношению величин сил.
- **Третья и четвертая** теоремы обосновывают фундаментальное правило геометрической статики, называемое **правилом параллелограмма** (для сложения двух сходящихся сил).

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

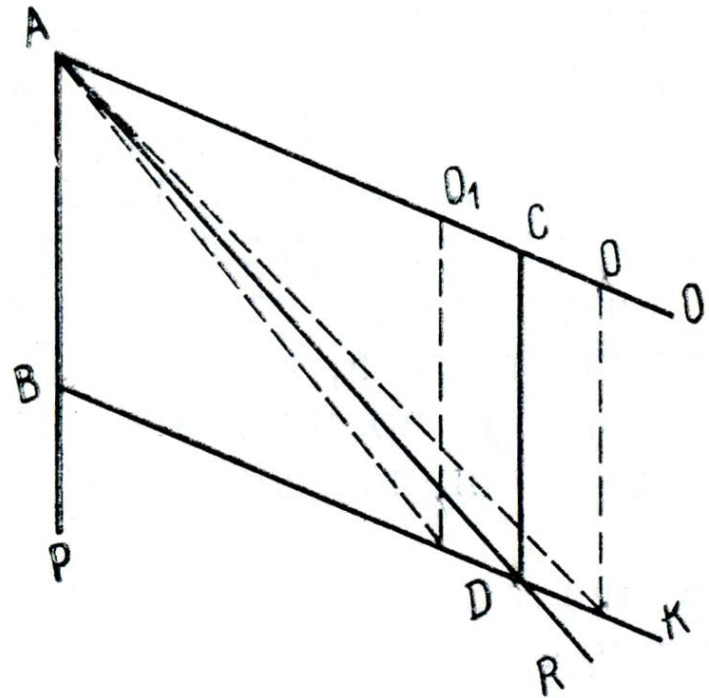


- Теорема III.
Равнодействующая двух каких-либо сил P , Q , приложенных к одной и той же точке A и действующих под некоторым углом, направлена по диагонали параллелограмма $ABCD$, построенного на линиях AB и AC выражающих по величине и направлению силы P и Q .

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

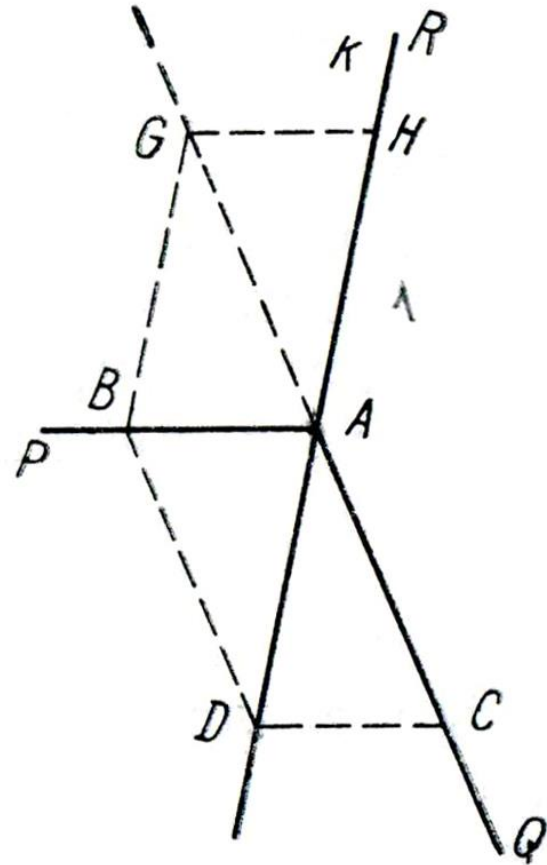
- Следствие.

Если бы были известны одни только направления сил: P , Q и их равнодействующей R , то мы могли бы определить отношение между величинами сил P и Q .



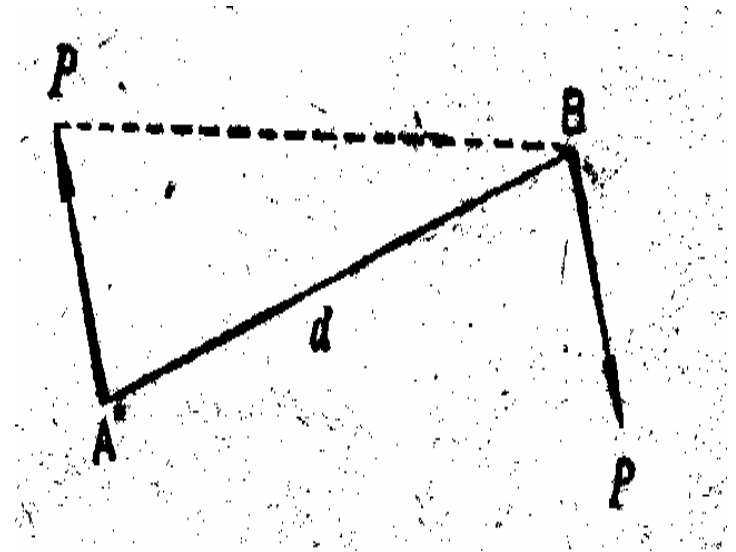
Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

- Теорема IV.
Равнодействующая двух каких-либо сил P и Q , приложенных к одной и той же точке A , выражается и **по величине** диагональю параллелограмма $ABDC$, построенного на линиях AB и AC , которые изображают собой величину и направление сил P и Q .



Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

- **Пара сил** - совокупность двух равных, параллельных и противоположно направленных сил, приложенных не к одной точке.
- Расстояние по перпендикуляру между этими двумя силами называется **плечом рычага** $d=AB$
- Произведение одной из сил на плечо – **моментом пары** Pd



Луи Пуансо «Начала статики» (1803)

- Любую пару сил можно переносить любым образом в ее плоскости, а так же переносить в любую плоскость, параллельную первой.
- Пару сил, не изменяя ее действия, можно повернуть в ее плоскости около любой точки плоскости.
- Не меняя ничего в отношении данного тела к другим, его окружающим, **точку приложения силы**, действующей на данное тело, **можно перенести во всякое другое место** тела, **прибавляя** лишь при этом к телу еще **некоторую пару**.
- Не меняя «эффекта» или «усилия» пары сил, ее можно заменять любой другой, расположенной в той же плоскости и имеющей то же направление вращения, при условии **сохранения неизменной величины момента пары**, изменяя модуль сил обратно пропорционально плечу пары.

Луи Пуансо «Начала статики» (1803)

- **Изображение пары при помощи направленного отрезка, длина которого численно равна моменту пары сил, который направлен по перпендикуляру к плоскости пары в ту сторону, откуда направление вращения пары усматривается с левой руки на правую («по солнцу»).**
- Пуансо сводит правила сложения пары сил (на плоскости и в пространстве), приложенных к твердому телу, к операции геометрического сложения моментов пар.
- Правила «сложения сил, направленных в пространстве произвольно»:
произвольная система сил, приложенных к твердому телу, может быть приведена к одной результирующей силе и к одной паре сил.

Луи Пуансо «Начала статики» (1803)

- В следствии I излагаются **«законы равновесия произвольной свободной системы»**, заключающиеся в равенстве нулю результирующей силы и результирующей пары.
- Важным следствием теории пар явилась возможность приведения произвольной системы сил, приложенных в **твердом теле, к заданному центру**.
- Пуансо провел исследование всех возможных случаев приведения произвольной системы сил к центру, указав его инварианты.
- Для статики интересен **случай равновесия всей системы сил, что возможно тогда и только тогда, как показал Пуансо, когда результирующая сила и результирующая пара равны нулю**.

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики», гл. II

- Шесть уравнений равновесия твердого тела под действием некоторой системы сил

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \sum_{i=1}^n Z_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \qquad \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

- **Итак, для равновесия свободного твердого тела необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на прямоугольные оси координат равнялись нулю и чтобы суммы моментов всех сил относительно каждой из осей координат также равнялись нулю.**

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

- Пуансо разработал теорию равновесия **важнейших случаев несвободного** твердого тела: тела с одной неподвижной точкой, затем - с двумя; тела, опирающегося на неподвижную плоскость, затем - на несколько плоскостей
- В каждом случае подробно исследован вопрос о нахождении давления тела на опоры.

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

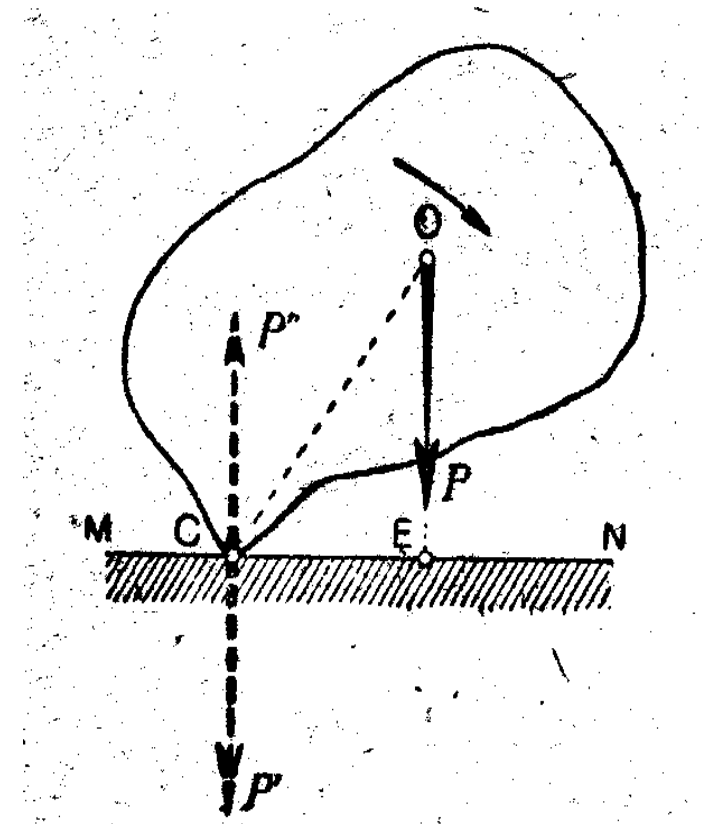
- Условия равновесия тела, имеющего одну неподвижную точку

Теорема. Для равновесия несвободного тела, имеющего одну неподвижную точку, необходимо, чтобы сумма моментов относительно осей координат равнялась нулю:

$$L_x = 0, L_y = 0, L_z = 0$$

**Равновесие тяжелого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость.
Тело имеет ОДНУ точку опоры.**

- **Для равновесия тяжелого тела, имеющего одну неподвижную точку, необходимо, чтобы центр тяжести его лежал на вертикальной линии, проходящей через точку опоры.**



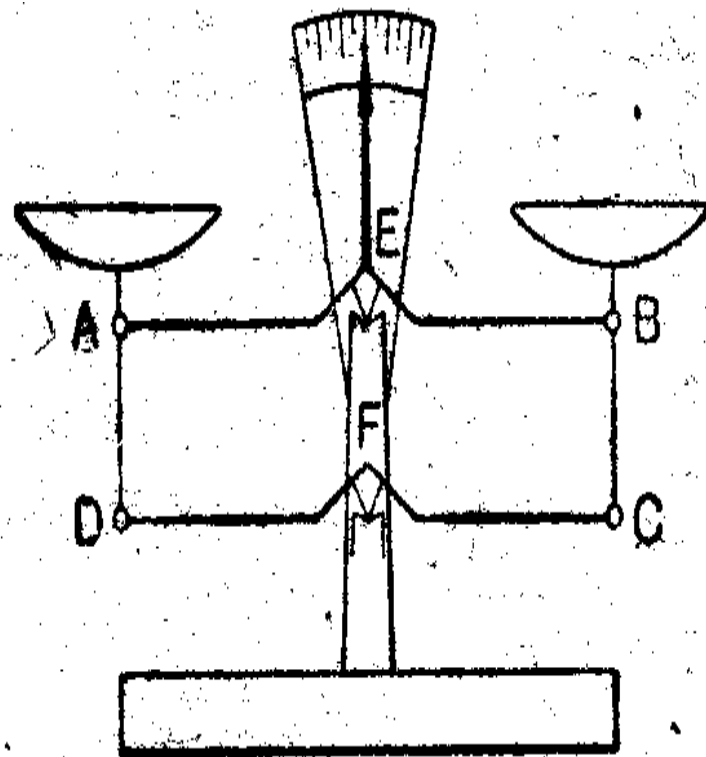
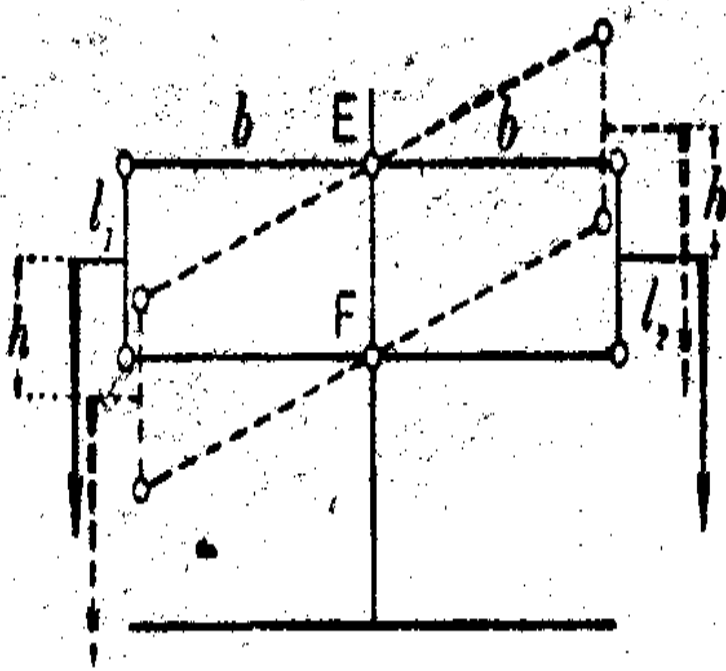
Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»

- В разделе «О центрах тяжести» определяются центры тяжести тел и общие формулы для центра параллельных сил.
- Раздел: «О машинах».
«Машины суть не что иное, как тела или системы тел, движения которых стеснены некоторыми препятствиями»

- Набор машин, рассматриваемых Пуансо, начинается с «простых машин», или орудий (весы, ворот, винт, наклонная плоскость) и завершается сложными машинами типа домкрат, весы Роберваля.

Дано правильное решение парадокса весов Роберваля, основанное на параллельном переносе силы тяжести с добавлением присоединенной пары, а также на свойствах эквивалентного преобразования пар.

Луи Пуансо (1777-1859) «Начала статики»,
весы Роберваля



Аксиоматика статики

- «... существует много чисто математических доказательств верности предположения о параллелограмме сил, но во всех этих математических доказательствах все же всегда имеются некоторые части, принимаемые без доказательств. Мы примем без математического доказательства само правило параллелограмма сил, рассматривая его не как математическую теорему, а как факт естествознания, доказываемый лишь опытным путем»

(А.И Некрасов)