

История и методология механики

Лекция № 12

Евгений Алексеевич Зайцев

e_zaitsev@mail.ru

Тема лекции

Трактат Х. Гюйгенса «Маятниковые часы»
Его практическое и теоретическое значение

Христиан Гюйгенс (1629–1695)
Портрет работы Каспара Нечера (1671)



Христиан Гюйгенс (1629–1695)

Выдающийся математик, физик и астроном Христиан Гюйгенс - одна из главных фигур научной революции XVII в. Сын голландского поэта и дипломата Константина Гюйгенса, он еще в очень молодом возрасте проявил себя в математике и астрономии. Ранние достижения Гюйгенса включали исследования по классической математике (в традициях Архимеда и Аполлония), приближенное вычисление числа π , создание первого (печатного) трактата по теории вероятности, открытие одного из спутников Сатурна (Титана), правильное объяснение изменяющегося профиля Сатурна (гипотеза кольца), составление трактата по механике удара.

К 35 годам научный авторитет Гюйгенса был столь высоко, что его пригласили ко двору Людовика XIV для участия в формировании Королевской академии наук. Во Франции Гюйгенс оставался почти двадцать лет, за исключением поездок домой в периоды болезни.

Основные достижения Гюйгенса:

теория центробежной силы, теория удара, теория маятника, волновая теория света, техника изготовления линз для телескопов.

Математические работы молодого Гюйгенса

Математические способности Гюйгенса проявились в 1646 году, когда ему было всего семнадцать лет. Два примера.

1. Исследование цепной линии, которое Гюйгенс предпринял после прочтения работ С. Стевина в издании под редакцией Альбера Жирара. Жирар утверждал, что кривая, образованная провисающей цепочкой, является параболой. Такого же мнения придерживался Галилей. Гюйгенс опроверг это утверждение.

2. Примерно в то же время Гюйгенс познакомился с работой Хуана Лобковица, в который утверждалось, что расстояние, пройденное падающим телом, прямо пропорционально времени падения. Гюйгенс опроверг это утверждение.

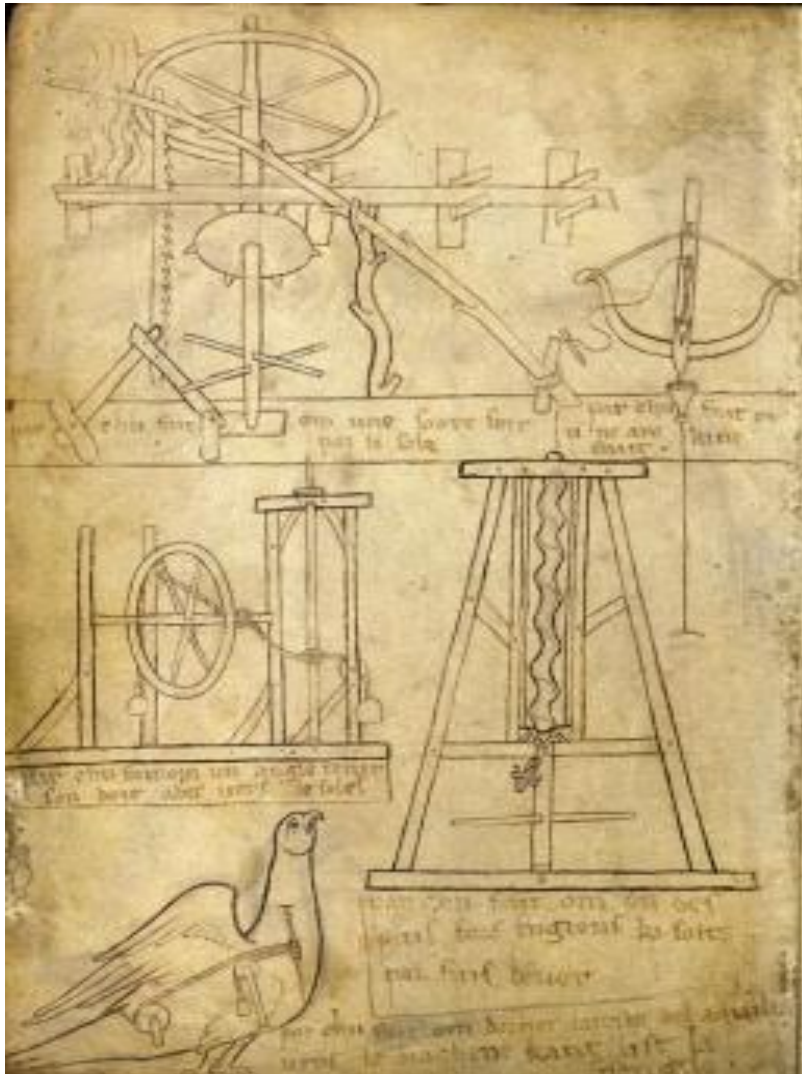
В письме брату от 3 сентября 1646 г. Гюйгенс сообщил, что может доказать параболичность траектории полета снаряда, выпущенного под углом. Вскоре он познакомился с книгой Галилея «Беседы и математические доказательства». По ее прочтении Гюйгенс отказался писать трактат на эту тему. Свой отказ он объяснил так: «Мне расхотелось писать “Илиаду” после того, как это уже сделал Гомер».

Из истории механических часов.

Проблема выравнивания равноускоренного движения под действием тяжести

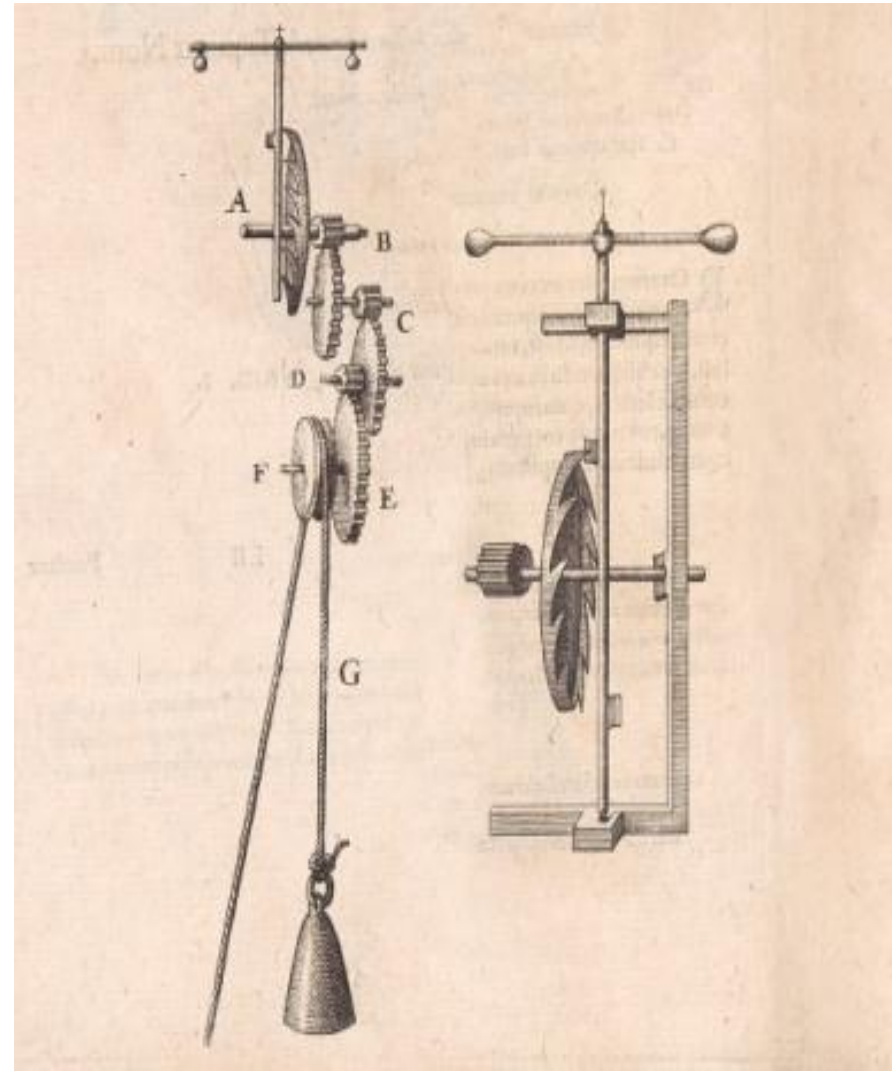
Простейшая регулировка часов при помощи противовеса.

Виллар де Оннекур (сер. XIII в.)



Регулировка часов при помощи анкера и балансира (verge and foliot)

(из трактата 1624 г.)

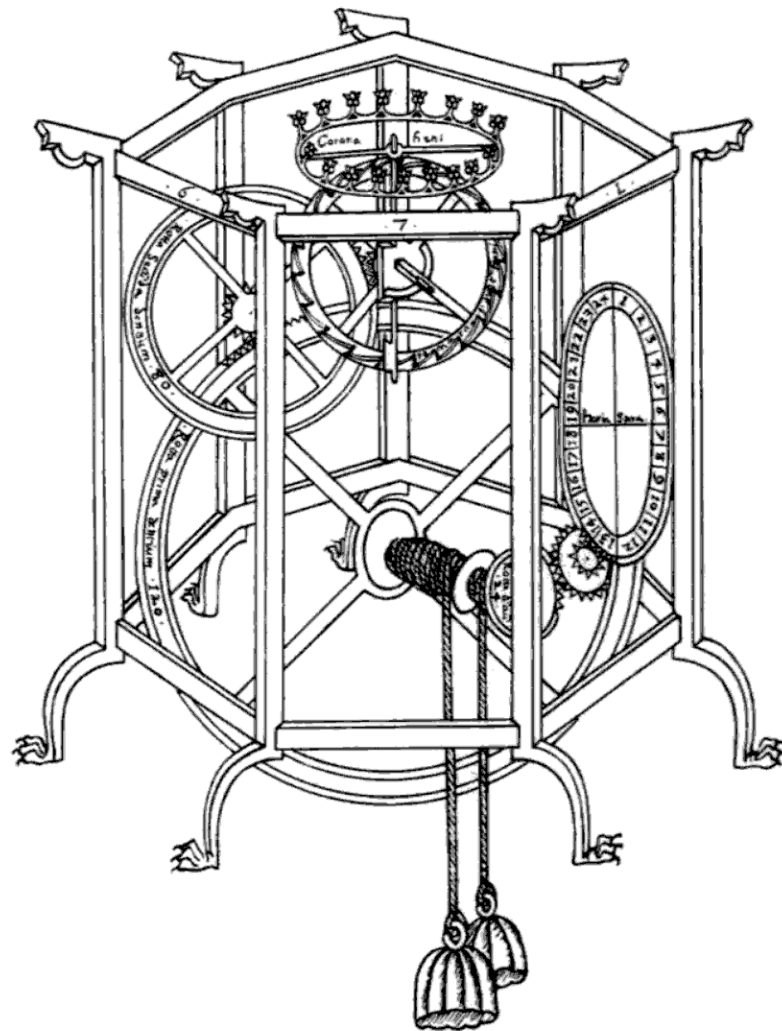


Из истории механических часов.

«Астральные» механические часы
Джованни ди Донди (1364)



Регулировка при помощи анкера и
балансира (корона вверху). Рис. ди Донди

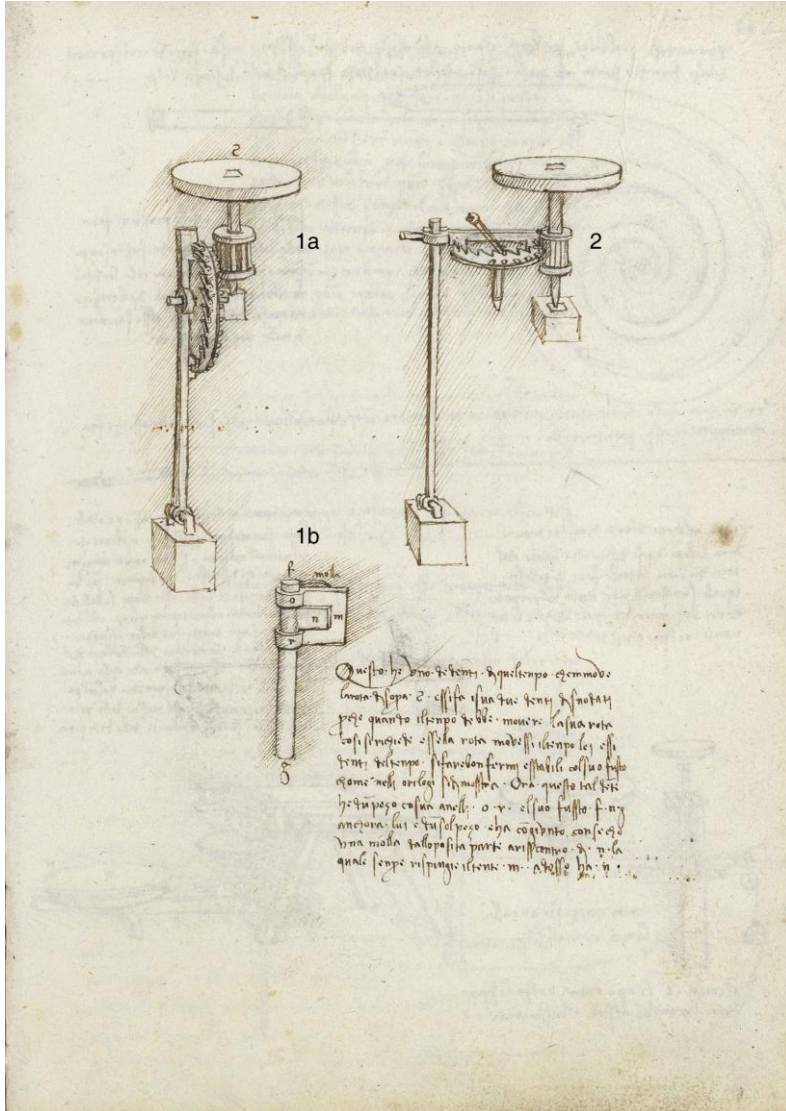


Из истории маятниковых механизмов. Технологические маятники

Леонардо да Винчи.

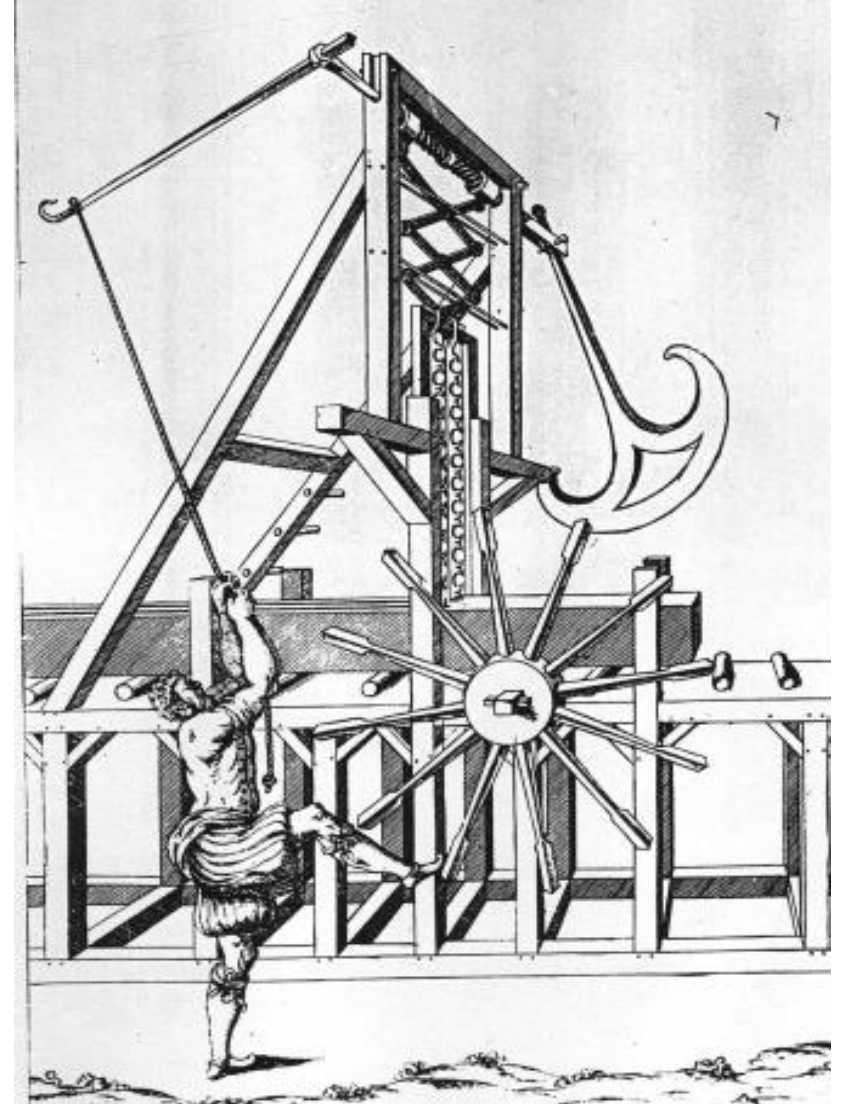
Маятниковый механизм.

Мадридский кодекс (ок. 1500)



Jacques Besson. *Théâtre des instruments mathématiques et mécaniques* (1578).

Пилорама с технологическим маятником



Проблема измерения времени и создание точных механических часов

Разработка часового механизма была одной из проблем, интересовавших Гюйгенса на протяжении всей его жизни.

В 1657 году он создал первый вариант механических часов, ход которых регулировался маятником, а год спустя выпустил брошюру, посвященную этой теме.

Одновременно начал работу над теорией движения маятника. Проблема состояла в том, что обычный маятник не является изохронным: период его колебаний зависит от амплитуды.

Один из способов решения этой проблемы состоял в том, чтобы снять зависимость от амплитуды, ограничив колебание двумя изогнутыми металлическими полосами, форма которых подбиралась опытным путем.

Проблема измерения времени и создание точных механических часов

Второй способ состоял в том, чтобы уменьшить амплитуду колебаний.

«В простом маятнике колебания, которые более отклоняются от вертикали, происходят медленнее, чем другие. Чтобы исправить этот дефект ..., я подвесил маятник между двумя изогнутыми пластинами, изгиб которых я установил экспериментально, чтобы уравновесить большие и меньшие колебания.

И я помню, что я так хорошо отрегулировал два часовых механизма, что за три дня разница их хода не превышала даже секунды... . Однако позже я обнаружил, что с этими пластинами малейший наклон часов изменяет длину маятника, и я избавился от пластин, сузив колебания маятника с помощью шестерен».

Из письма Гюйгенса к П. Пети

Третий, радикальный способ состоял в том, чтобы найти специальную кривую, движение по которой под действием тяжести было бы «таутохронным».

Иными словами, кривая должна была быть устроена так, чтобы период колебания по этой кривой, не зависел от амплитуды.

Структура трактата Гюйгенса «Маятниковые часы» (1673)

Первая часть трактата – описание устройства маятниковых часов, разработанных Гюйгенсом.

Вторая часть состоит из серии утверждений о движении тяжелого тела:

- о его свободном падении,
- о падении по наклонной плоскости,
- о падении по кривой траектории.

Кульминацией этой части трактата является доказательство того, что тело, падающее под действием тяжести по перевернутой циклоиде, достигает ее нижней точки за одно и то же время независимо от точки начала падения.

Отсюда следует изохронность осциллирующего качения шарика по циклоиде.

Третья часть посвящена теории эволют (эвольвент).

Структура трактата Гюйгенса «Маятниковые часы» (1673)

Четвертая часть трактата посвящена физическому маятнику. Движение маятника, масса которого распределена по длине нити, сводится к движению некоторого идеального (математического) маятника.

Гюйгенс вводит понятие центра качения физического маятника и дает общий метод его определения.

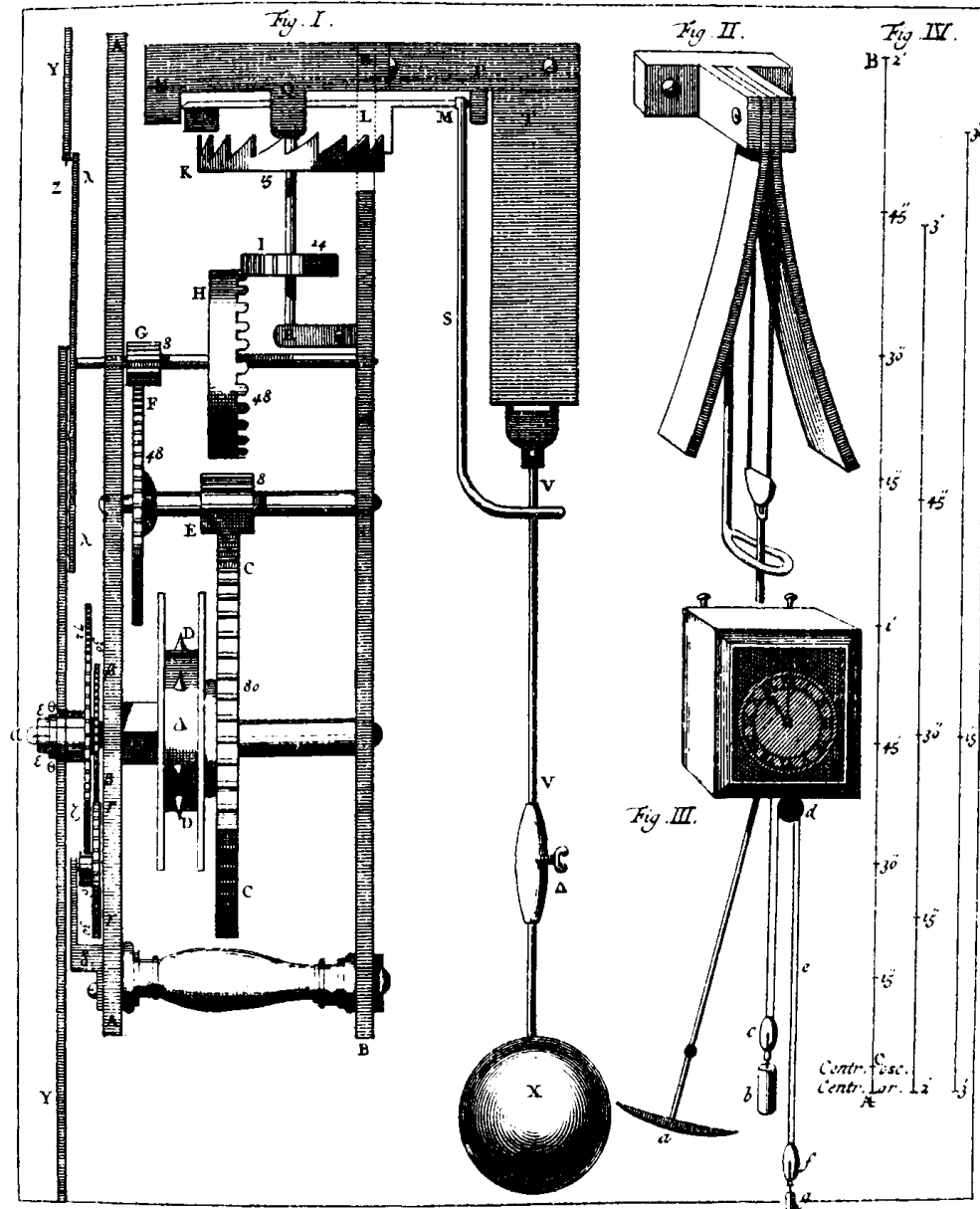
Это первый случай исследования вопроса, относящегося к механике системы точек (твёрдого тела).

Пятая часть — описание часов с коническим маятником, вращающимся вокруг вертикальной оси.

В конце трактата перечислены (без доказательства) тринадцать теорем о *центробежной* силе.

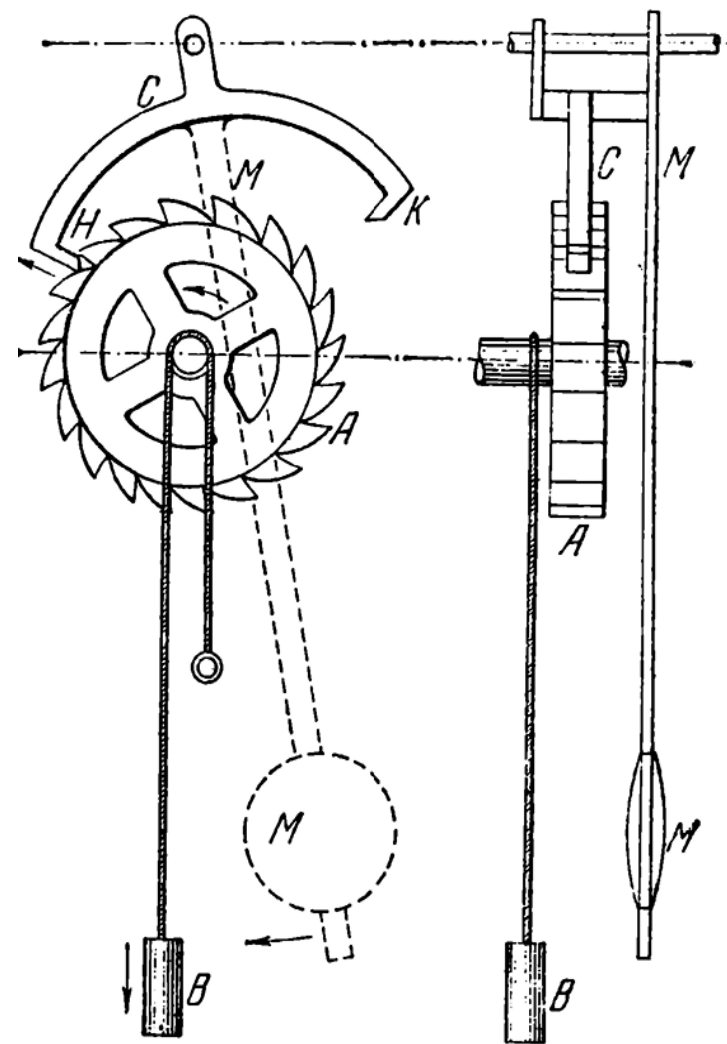
Их доказательства приведены в посмертно опубликованном трактате Гюйгенса «О центробежной силе» (1703).

Первая часть трактата Гюйгенса «Маятниковые часы».
Чертеж маятниковых часов с анкером (рис. из трактата)



Принцип работы маятниковых часов с анкером (по Гюйгенсу)

Анкер C , лежащий в плоскости колеса A , наглухо соединен с маятником MM , сам маятник MM лежит за плоскостью чертежа и потому он начерчен пунктиром. Анкер снабжен зубцами H и K . В момент, изображенный на рисунке, колесо A удерживается левым зубцом H анкера C . Когда маятник качнется влево, зубец H отпустит захваченный зубец колеса, и колесо повернется, но только на ползубца, потому что зубец K попадет в промежуток между зубцами колеса и задержит его. Когда после этого маятник снова качнется вправо, зубец на этой стороне будет задержан анкером. При каждом полном качании маятника (туда и обратно) колесо повернется ровно на один зубец, т.е. на определенную долю окружности. Движение колеса будет равномерным. Поэтому размах маятника (амплитуда колебания) не будет уменьшаться. Таким образом, гиря сообщает энергию и колесам часов, и самому маятнику, — маятник же регулирует ход часов.



**Маятниковые часы, сделанные по проекту Гюйгенса (1658)
Часовщик Соломон Костер (1620-1659)**



Salomon Coster (Museum Boerhaave)

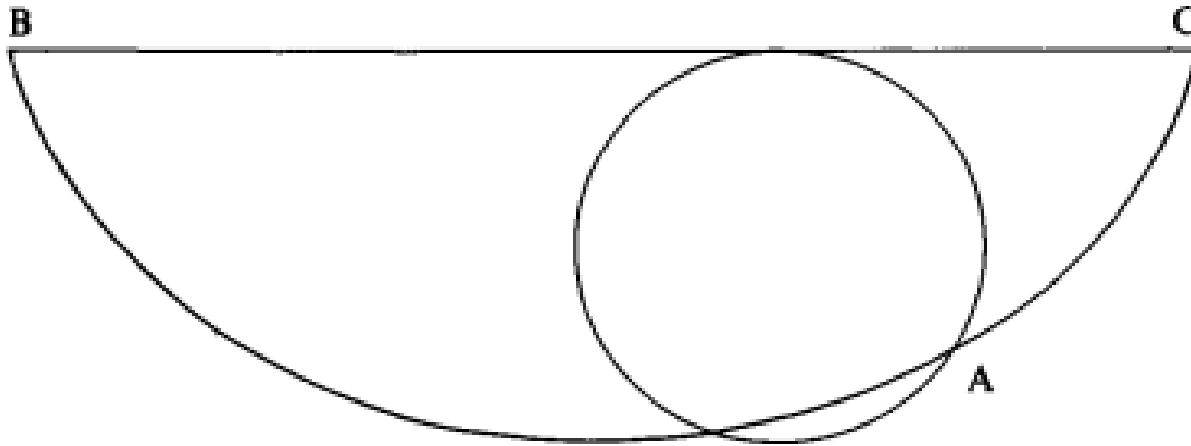


**Маятниковые часы, сделанные по проекту Гюйгенса (1658)
Часовщик Соломон Костер (1620-1659)**



Вторая часть трактата «Маятниковые часы» Таутохронность (изохронность) циклоидального маятника

Циклоида. Примем горизонтальную ось координат в качестве прямой, по которой катится окружность радиуса r . Точка на окружности («гвоздь на ободке колеса», как говорил Б.Паскаль) описывает кривую. Это и будет циклоида.



Уравнение циклоиды в параметрической форме

$$x = r(t - \sin t)$$

$$y = r(1 - \cos t)$$

Длина арки циклоиды равна $8r$ (доказал Кристофер Рен, 1658).

**Доказательство таутохронности (изохронности) циклоидального маятника
По мотивам доказательства Гюйгенса**

Изучить самостоятельно!

Г.Н. Берман «Циклоида» (1980)
С. 89-93.

Таутохронная кривая Гюйгенса

Не пугайтесь, читатели, страшного греческого слова. «*Таутохрона*» значит попросту «равновременная». Так назвал Гюйгенс кривую, которую он начал разыскивать, т. е. такую кривую, по которой должен двигаться центр тяжести маятника, для того чтобы

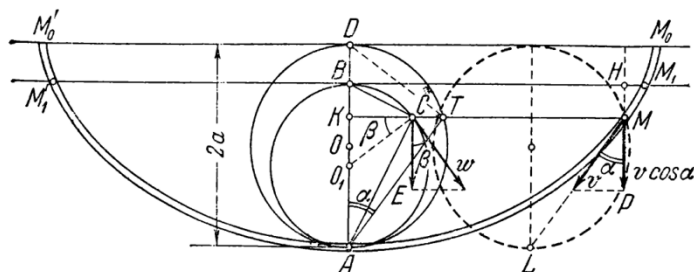


Рис. 94. К теории циклоидального маятника.

период его качания не зависел от величины размаха. Поиски увенчались успехом: таинственная таутохрона оказалась незадолго перед тем изученной циклоидой. При этом Гюйгенс проявил исключительное остроумие. Достаточно сказать, что учение об эволютах было создано в процессе решения именно этой задачи.

Гюйгенс рассуждал следующим образом *). Представим себе желобок в форме циклоиды, как это изображено на рис. 94. По этому желобку катится тяжелый шарик M . Мы рассмотрим идеальный слу-

чай, — тот случай, когда трение и сопротивление воздуха отсутствуют.

Обозначим точки возврата циклоиды через M_0 и M'_0 , а радиус производящего круга через a . Начертим круг радиуса a , касающийся циклоиды в вершине (круг с центром O) и производящий круг в положении, соответствующем точке M циклоиды (дан штриховой линией). Допустим, что мы положили шарик в точку M_1 желобка и отпустили его без толчка. Под действием тяжести он покатится вниз. Изучим его движение.

Какова будет скорость шарика, когда он опустится до точки M циклоиды? Это нетрудно подсчитать. Опустившись из точки M_1 в точку M , шарик израсходует некоторое количество потенциальной энергии. Эта потеря энергии равна произведению веса шарика mg (m — масса шарика, g — ускорение силы тяжести) на «потерю высоты», т. е. на разность высот шарика в положениях M_1 и M , причем высоты отсчитываются от какого-то определенного уровня, например, от уровня земли. От какого уровня ни отсчитывать высоты, разность их в нашем случае будет равна отрезку NM . Итак, потеря потенциальной энергии шарика будет равна $mg \cdot NM$.

Но в силу закона сохранения энергии потерянная потенциальная энергия шарика превратится в кинетическую энергию его движения, равную, как известно, $\frac{mv^2}{2}$, если через v обозначить пока неизвестную скорость шарика. Приравнявая эту кинетическую энергию потерянной потенциальной, получим уравнение

$$\frac{mv^2}{2} = mg \cdot HM,$$

из которого сразу находим значение искомой скорости

$$v = \sqrt{2g \cdot HM}.$$

Направление этой скорости тоже определить нетрудно. Она будет направлена по касательной к циклоиде, т. е. по хорде ML (рис. 94), где L — «наини́зшая» точка производящего круга.

Нас будет интересовать не столько сама скорость u , сколько ее вертикальная проекция, т. е. «скорость

опускания шарика», скорость изменения его высоты. Эту вертикальную проекцию легко вычислить: она равна $v \cos \alpha$, где α — угол между хордой ML и вертикалью. Хорда AT круга с центром O , очевидно, равна и параллельна хорде ML , а потому угол LMP равен углу KAT , что и отмечено на рис. 94. Итак:

$$v_{\text{верт.}} = MP = v \cos \alpha = \sqrt{2g \cdot HM} \cos \alpha.$$

Неравномерное движение по циклоиде, с которым мы пока совершенно незнакомы, будем сравнивать с равномерным движением по окружности, которое подробно изучается в школе. С этой целью построим вспомогательную окружность. Гюйгенс предложил строить эту окружность так: через вершину A циклоиды проводится перпендикуляр AD (диаметр круга с центром O), а через начальную точку M_1 движения шарика проводится параллель M_1B к ее основанию. Пусть точка пересечения этих параллели и перпендикуляра будет обозначена буквою B . Окружность, построенная на AB , как на диаметре, и будет искомой вспомогательной окружностью. Пока неясно, чем именно она лучше других окружностей. Это выяснится постепенно, при изложении хода мыслей Гюйгенса.

Начнем с того, что вертикальную составляющую скорости движения шарика свяжем с элементами вспомогательной окружности. Имеем:

$$MP = \sqrt{2g \cdot HM} \cos \alpha = \sqrt{2g \cdot BK} \cos \alpha, \quad (*)$$

потому что $HM = BK$. Из треугольника AKT получим:

$$\cos \alpha = \frac{KA}{AT}.$$

Но $AT = 2a \cos \alpha$, а потому $\cos \alpha = \frac{KA}{2a \cos \alpha}$, или $\cos^2 \alpha = \frac{KA}{2a}$, откуда

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{AK}}{\sqrt{2a}}.$$

Подставим найденное значение косинуса в выражение для MP , отмеченное звездочкой (*). Получим:

$$\begin{aligned} MP &= \sqrt{2g \cdot BK} \cos \alpha = \sqrt{2g \cdot BK} \cdot \sqrt{\frac{AK}{2a}} = \\ &= \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \sqrt{BK \cdot AK}. \end{aligned}$$

Последний корень равен средней пропорциональной между отрезками BK и AK , т. е. между отрезками гипотенузы AB треугольника ABC , на которые последняя разделяется высотой CK . Но эта средняя пропорциональная, по известной теореме о пропорциональных линиях в прямоугольном треугольнике, равна как раз высоте CK :

$$BK \cdot AK = CK^2.$$

Поэтому для вертикальной составляющей MP скорости движения шарика по циклоиде получим окончательно:

$$MP = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot KC.$$

Величины a и g даны нам с самого начала и не связаны ни с точкою M , ни с ее начальным положением M_1 . Таким образом, движение шарика по циклоиде вполне определяется хордой KC вспомогательной окружности, т. е. в конечном итоге положением точки C на этой окружности.

Рассмотрим равномерное движение точки C по вспомогательной окружности с угловой скоростью $\sqrt{\frac{g}{a}}$ радианов в секунду, т. е. $\frac{360}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{a}}$ градусов в секунду. При этом скорость точки C по окружности будет равна произведению радиуса окружности на угловую скорость, выраженную в радианах (в секунду), т. е. равна

$$\frac{AB}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Чему равна вертикальная составляющая этой скорости? Иными словами, с какой скоростью опускается точка C , с какою скоростью меняется ее расстояние от прямой $M_0M'_0$ при равномерном движении точки C по окружности? Это нетрудно подсчитать.

Скорость w движения точки окружности направлена по касательной к окружности, т. е. перпендикулярно радиусу. Ее проекция на вертикаль равна самой скорости w , умноженной на косинус угла β (рис. 95). Но угол β равен, очевидно, углу KCO_1 ; оба получаются путем вычитания угла O_1CE из прямого угла. Косинус угла KCO_1 равен $KC : \frac{1}{2}AB$. Для

вертикальной проекции скорости равномерного движения по окружности находим:

$$w \cos \beta = \frac{AB}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{KC}{\frac{1}{2}AB} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot KC = MP.$$

Получается замечательный результат: когда точка движется равномерно по окружности, ее проекция на вертикаль движется точно так же, как проекция на вертикаль шарика, катящегося по циклоиде. Проекции обеих скоростей в любой момент времени равны друг другу. Но отсюда следует, что точка окружности из B в A и шарик на циклоиде из M_1 в A придут в одно время. Это время легко определить. Мы говорили уже, что точка на вспомогательной окружности делает $\sqrt{\frac{g}{a}}$ радианов в секунду, иными словами, на один радиан она повернется за $\sqrt{\frac{a}{g}}$ секунд, а на π радианов (на полуокружность) — за $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$. Точно такое же время нужно и нашему шарiku, чтобы скатиться по циклоиде из точки M_1 в точку A . Такое же время понадобится ему, чтобы по инерции подняться до точки M'_1 , такое же — чтобы снова спуститься, и такое же — чтобы подняться и вернуться в исходное положение (в точку M_1). Значит, время полного колебания шарика (период колебания) будет равняться $4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$:

$$t = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Это — весьма замечательная формула. Мы видим, что период движения шарика по циклоидальному желобку вполне определяется размерами желобка (радиусом производящего круга циклоиды) и ускорением силы тяжести. Положение точки M_1 на циклоиде, ее расстояние от прямой $M_0M'_0$ не имеет никакого значения. С какой бы точки циклоиды ни начинал движения шарик, период его колебания будет один и тот же.

Именно за это циклоиду называют «кривой равных времен» — таутохроной.

Третья часть «Маятниковых часов». Эволюты и эвольвенты

Третья часть трактата – это теория эволют и эвольвент, которая лежит на стыке между физикой и математикой.

В настоящее время эта теория рассматривается в рамках чистой математики (раздел дифференциальной геометрии).

Гюйгенс же задумал ее как механическую.

Механическое происхождение отражено в терминологии: оба термина – эволюта и эвольвента – происходят от причастий, образованных от латинского глагола «evolvere» (развертывать).

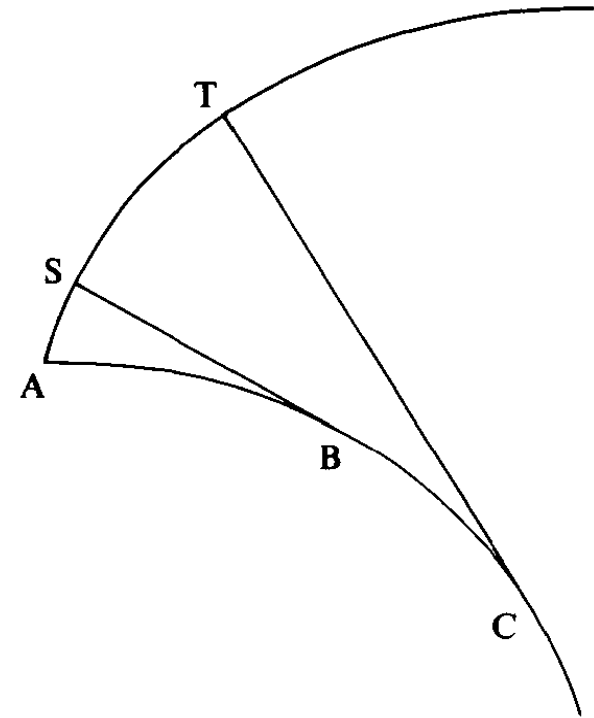
Эволюты и эвольвенты

Задана выпуклая кривая - дуга AC . Представим, что к дуге AC в точке C прикреплена гибкая нерастяжимая нить такой же длины, как сама дуга AC , причем эта нить «навернута» на кривую и плотно прилегает к ней.

Будем «развертывать» — распрямлять нить, держа ее натянутой, так что ее свободная часть будет все время направлена по касательной к дуге AC . Конеч нити опишет некоторую кривую AST . Эта кривая называется *разверткой* или, по-латыни, эвольвентой исходной кривой. Соответственно, исходная кривая называется *эволютой*.

Можно поступить наоборот — определить *эволюту* через *эвольвенту*. Эволютой будет геометрическое место центров кривизны эвольвенты.

Основной результат Гюйгенса: разверткой (эвольвентой) циклоиды является точно такая же циклоида (только сдвинутая). И соответственно, эволютой циклоиды также является точно такая же сдвинутая циклоида.

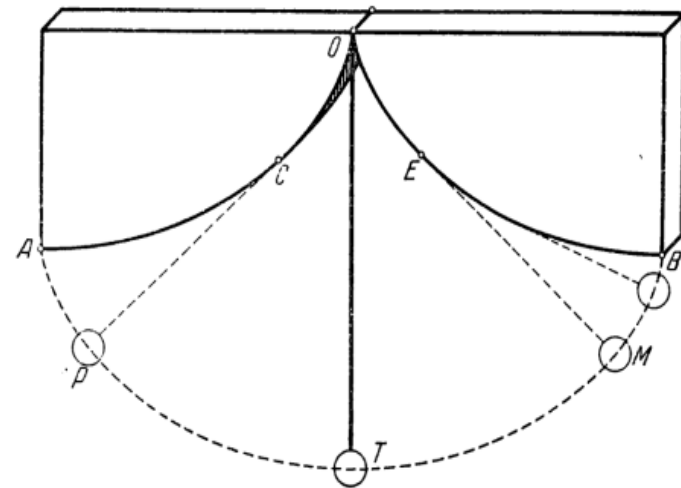


Вопрос о циклоидальной форме пластин маятниковых часов

Пусть пластины сделаны в форме двух одинаковых полуарок циклоиды и закреплены вертикально. Пусть радиус производящего круга равен a . В точке O привяжем нить, длина которой равна длине полуарки, т. е. $4a$. Свободный конец нити снабжен тяжелым шариком.

При качении шарика нить, находясь в натянутом положении, наматывается на циклоидальную арку, поэтому шарик будет описывать кривую, являющуюся разверткой (эвольвентой) циклоиды $ACOEB$. Но разверткой циклоиды является такая же циклоида. Поэтому кривая $BMTPA$, по которой движется шарик, также будет циклоидой, порожденной кругом радиуса a .

Маятник будет совершать колебания, период которых не зависит от выбора начальной точки движения M . Если даже под влиянием трения и сопротивления воздуха, размах колебаний будет уменьшаться, период колебания останется неизменным.



Вопрос о малых колебаниях маятника с пластинами

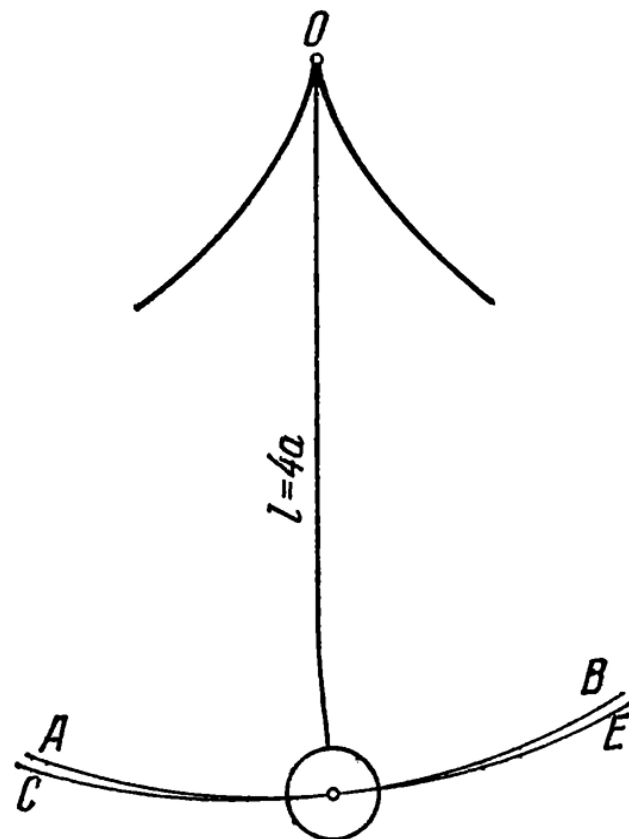
Рассмотрим вопрос о том, как себя будет вести такой маятник в случае малых колебаний. Если колебания очень малы, то влияние направляющих пластин практически не будет ощущаться, и маятник будет двигаться почти как обыкновенный математический маятник длиной $l = 4a$, подвешенный в точке O . Путь AB циклоидального маятника практически не будет отличаться от пути CE кругового маятника.

Подставляя в формулу

$$t = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

вместо a величину $l/4$, получим (хорошо знакомое) выражение периода малых колебаний кругового маятника через его длину:

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



Четвертая часть «Маятниковых часов». Колебание физического маятника

В этом разделе Гюйгенс излагает теорию физического (составного) маятника.

В этой теории движение маятника, масса которого некоторым образом распределена по его длине, отождествляется с движением идеального маятника (с грузиком точечной массы на невесомой нити).

Гюйгенс вводит понятие центра качения физического маятника и дает общий метод его определения.

В основу решения задачи о движении физического маятника Гюйгенс положил «энергетический принцип», сформулированный следующим образом:

«Система весомих тел, движущихся под влиянием силы тяготения, не может двигаться так, чтобы общий центр тяжести тел поднялся выше первоначального положения».

Четвертая часть «Маятниковых часов». Колебание физического маятника

Гюйгенс считал «энергетический принцип» само собой разумеющейся аксиомой – выражением идеи, что тяжелые тела не могут двигаться вверх без внешнего воздействия.

«Энергетический принцип» Гюйгенс использует при доказательстве центрального предложения IV, которое гласит:

«Если маятник, состоящий из многих весоных частиц, совершив часть колебаний, ударится о плоскость и распадется на все его составляющие частицы, и эти частицы будут двигаться вверх до той высоты, до которой они могут при приобретенной скорости, то центр тяжести общий поднимется на ту же высоту, на которой он был до начала колебания маятника».

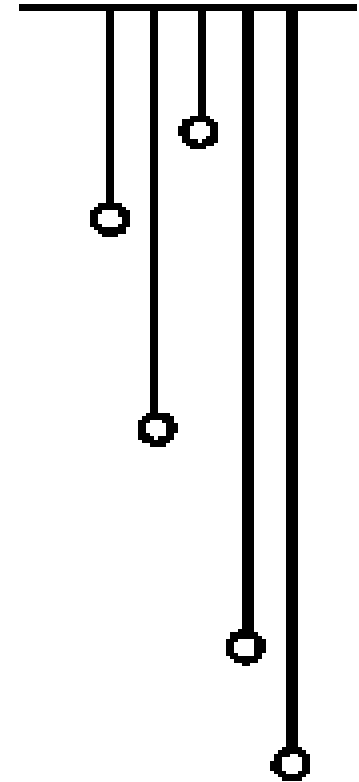
В этом разделе трактата была также впервые определена с достаточной точностью величина ускорения свободного падения.

Колебание физического маятника

Важнейшее достижение Гюйгенса – определение центра колебания физического маятника. Здесь мы выходим за рамки вопроса о динамике движения *одного* тела: в этой задаче приходится определять движение *многих* тел, *взаимно влияющих* друг на друга.

Представим физический маятник – тяжелое тело, которое может совершать колебания. Каждая часть этого тела, рассматриваемая в отдельности, имеет свой собственный период колебания. Представим себе много нитяных маятников неравной длины; более короткие будут колебаться быстрее, а более длинные — медленнее.

Однако, если эти части будут соединены, то вследствие их связи все тело (физический маятник) будет колебаться одним общим движением.



Колебание физического маятника

Поскольку все частичные маятники связаны в один, то колебания более длинных маятников *ускоряются*, а колебания более коротких *замедляются*.

В результате получается один «усредненный» период колебаний.

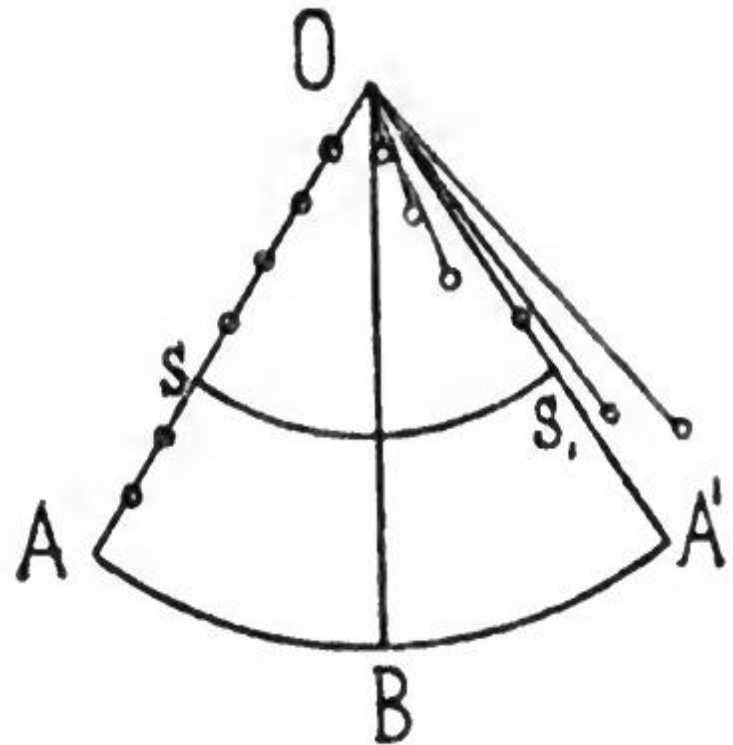
Это означает, что существует математический маятник, длина которого есть нечто среднее между длиной самого короткого и самого длинного маятника и который имеет ту же продолжительность колебания, что и исходный физический маятник.

Это будет маятник, период колебания которого равен периоду колебания исходного физического маятника.

Колебание физического маятника (по Гюйгенсу)

Пусть OA — линейный маятник, состоящий из нескольких масс, обозначенных точками. Предоставленный самому себе, он из OA через точку B перемещается в OA' , причем $AB = BA'$. Его центр тяжести S поднимется столь же высоко, насколько он вначале опустился.

Если в положении OB освободить эти массы от связей (маятник «ударится о плоскость и распадется на все его составляющие частицы»), то каждая из них, имея скорость, обусловленную связью, достигнет некоторой высоты. При этом общий центр тяжести этих масс S будет находиться на той же высоте, с которой начал падать центр тяжести маятника. Зафиксируем каждую из свободно колеблющихся масс на *наибольшей высоте*; тогда более короткие маятники окажутся ниже линии OA' , а более длинные — выше ее. Центр тяжести всей системы останется на OA' в прежнем своем положении (симметричном).



**Физический маятник (нахождение центра колебаний)
По мотивам решения Гюйгенса**

Изучить самостоятельно!

Э. Мах «Механика. Историко-критический очерк ее
развития» (2000) (первое немецкое издание 1883 г.)
С. 148-150.

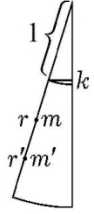


Рис. 117

19. После этих замечаний мы можем перейти к рассмотрению самой задачи. Вырежем из линейного сложного маятника часть = 1 от оси. Если маятник перемещается из крайнего своего положения в положение равновесия, то точка его, находящаяся на расстоянии = 1 от оси, падает на величину k . Массы $m, m', m'', \dots$ на расстояниях $r, r', r'', \dots$ получают при этом глубины падения $rk, r'k', r''k'', \dots$ и глубина падения центра тяжести будет:

$$\frac{mrk + m'r'k' + m''r''k'' + \dots}{m + m' + m'' + \dots} = \frac{k \sum mr}{\sum m}.$$

Пусть точка, находящаяся на расстоянии = l от оси, получает при прохождении через положение равновесия неопределенную еще скорость v . Высота ее подъема после разрушения связи между массами будет $\frac{v^2}{2g}$. Соответствующие высоты поднятия других масс будут $\frac{(rv)^2}{2g}, \frac{(r'v)^2}{2g}, \frac{(r''v)^2}{2g}, \dots$. Высота подъема центра тяжести свободных масс будет:

$$\frac{m \frac{(rv)^2}{2g} + m' \frac{(r'v)^2}{2g} + m'' \frac{(r''v)^2}{2g} + \dots}{m + m' + m'' + \dots} = \frac{v^2 \sum mr^2}{2g \sum m}.$$

Согласно же основному принципу Гюйгенса,

$$k \frac{\sum mr}{\sum m} = \frac{v^2 \sum mr^2}{2g \sum m}. \quad (1)$$

Этим дано отношение между глубиной падения k и скоростью v . Но так как все движения маятника с равными амплитудами форономически подобны, то и исследуемое движение этим вполне определено.

Чтобы найти длину простого маятника, имеющего с предложенным сложным маятником одну и ту же продолжительность колебания,

заметим, что между его глубиной падения и скоростью должно существовать то же отношение, какое существует при свободном падении. Если y есть длина этого маятника, то ky будет его глубина падения и vy — его скорость, так что

$$\frac{(vy)^2}{2g} = ky$$

или

$$y \cdot \frac{v^2}{2g} = k. \quad (2)$$

Если перемножить уравнения (1) и (2), то находим, что

$$y = \frac{\sum mr^2}{\sum mr}.$$

Пользуясь форономическим подобием, мы можем поступать и иначе. Из уравнения (1) мы находим,

$$v = \sqrt{2gk} \cdot \sqrt{\frac{\sum mr}{\sum mr^2}}.$$

Простой маятник с длиной l имеет при соответствующих условиях скорость $v_1 = \sqrt{2gk}$.

Если мы обозначим продолжительность колебания сложного маятника через T , а ту же продолжительность простого маятника с длиной l через $T_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, то, сохраняя допущение о равных амплитудах, мы находим:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{v_1}{v} \quad \text{и, следовательно,} \quad T = \pi \sqrt{\frac{\sum mr^2}{g \sum mr}}.$$

20. Нетрудно видеть, что в принципе Гюйгенса содержится познание, что *работа определяет скорость или, точнее, так называемую живую силу*. Под живой силой системы масс $m, m_1, m_2, \dots$ с соответственными скоростями $v, v_1, v_2, \dots$ мы понимаем сумму

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \dots.$$

Принцип Гюйгенса тождествен с принципом живых сил. То, что к этому прибавили позднейшие исследователи, не столько относится к самой мысли, сколько к форме ее выражения.

Возьмем теперь совершенно общий случай. Представим себе систему грузов $p, p', p'', \dots$, которые, в связи друг с другом или без этой связи, падают на расстояния $h, h', h'', \dots$ и достигают при этом скоростей $v, v', v'', \dots$. Согласно принципу Гюйгенса, существует равенство *глубин падения и высот поднятия* центра тяжести, а следовательно, и уравнение

$$\frac{ph + p'h' + p''h'' + \dots}{p + p' + p'' + \dots} = \frac{p\frac{v^2}{2g} + p'\frac{v'^2}{2g} + p''\frac{v''^2}{2g} + \dots}{p + p' + p'' + \dots}$$

или

$$\sum ph = \frac{l}{g} \sum \frac{pv^2}{2}.$$

Раз получено понятие «массы», которого не хватало еще Гюйгенсу в его исследованиях, то можно $\frac{p}{g}$ заменить массой m , и мы получаем тогда уравнение $\sum ph = \frac{1}{2} \sum mv^2$, которое легко обобщить для сил непостоянных.

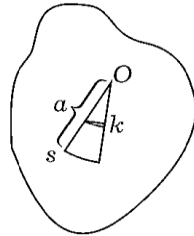


Рис. 118

21. С помощью принципа живых сил мы можем определить продолжительность бесконечно малых колебаний какого угодно маятника. Из центра тяжести s мы опускаем перпендикуляр на ось; пусть длина его будет a . На этом перпендикуляре мы отрезаем часть от оси $= l$. Пусть глубина падения соответственной точки до положения равновесия будет k и v достигнутая скорость. Так как работа падения определяется движением центра тяжести, то мы имеем, что работа падения равна живой силе, т. е.

$$akgM = \frac{v^2}{2} \sum mr^2.$$

При этом мы обозначаем через букву M всю массу маятника и вводим выражение живой силы. Рассуждая, как и раньше, мы находим

$$T = \pi \sqrt{\frac{\sum mr^2}{agM}}.$$

Трактат Гюйгенса «О центробежной силе» (1703)

На пути к общему понятию силы

Понятие силы. Всеобщее и особенное

- Понятие силы играет ключевую роль в теории движения. Начиная со времен античности, сила считается началом, которое ответственно за движение и покой тела. Понятие силы по-разному трактовалось в различные эпохи.
- Различия в трактовке силы можно описать, исходя из оппозиции «особенное - всеобщее». Всякое «всеобщее» понятие своим логическим и генетическим основанием имеет некоторое особенное. Понятие силы имеет характер всеобщего и одновременно черты особенного, которое его породило.
- В классической механике, берущей начало от работ Ньютона, всеобщий характер понятия силы находит отражение во втором законе Ньютона: всякая сила, приложенная к телу – вне зависимости от ее природы – изменяет движение, вызывая его ускорение или замедление.
- В основе всеобщего понятия силы в классической механике лежит особенная сила – сила тяжести, обладающая свойством вызывать ускорение (или замедление) движения.

Понятие силы. Всеобщее и особенное

- Иначе обстояло дело в механике доклассической, которая в своей трактовке общего понятия силы ориентировалась на опыт совершения мускульного усилия человеком или животным. Общее представление о силе формировалось под влиянием представлений, порожденных физическим усилием одушевленных «двигателей» – человека и животных. Именно они были «образцом» для прочих сил, включая механические, свойства которых трактовались по аналогии с ним.
- Одной из трудных проблем истории науки является вопрос о том, как происходила переориентация понятия силы с усилия одушевленного «двигателя» на механические силы.
- Важную роль в этом процессе сыграла сила тяжести, которая вытеснив из механики одушевленное усилие, заняла его место и стала образцом по аналогии с которым рассматривалось действие прочих сил.

Понятие силы. Сила тяжести

В качестве примера того, как можно заменить мускульное усилие силой тяжести, приведем рассуждение, разъясняющее понятие силы из курса физики под редакцией Г.С. Ландсберга.

Фрагмент, посвященный этой теме (Том 1, 34-37), начинается с рассмотрения упругой силы, как наиболее близкой по своей природе мускульному усилию.

Для того, чтобы построить количественную физику, необходимо вначале решить вопрос, как измерить силу упругости?

Задача решается при помощи – всем хорошо известного со школьных времен – пружинного динамометра, который дает численное значение упругой силы в виде линейной величины – отрезка, характеризующего степень растяжения пружины.

Понятие силы. Сила тяжести

Такой способ измерения силы имеет, однако, очевидный недостаток: растяжение пружины зависит от множества факторов – температуры, степени деформации (линейная зависимость между силой и деформацией сохраняется только при малом растяжении), степени износа и т.д.

Для устранения этого недостатка можно использовать силу тяжести. А именно, силу растянутой пружины можно уравновесить подвешенным к ней грузом.

Тем самым упругая сила пружины будет сведена к силе тяжести:

«трудную задачу изготовления и сохранения эталонной пружины при определенном растяжении мы заменяем более простой – изготовлением и сохранением эталонной гири» [с. 85].

В итоге, получается следующая логическая цепочка:

мышечное усилие находит свое выражение в механической упругой силе пружины, которая, в свою очередь, количественно выражается посредством силы тяжести.

Логическая схема Ландсберга и реальный исторический процесс

В логической схеме, рассмотренной Ландсбергом, замещение мускульного усилия силой тяжести осуществляется в ситуации равновесия.

В рамках статической задачи, не связанной с динамикой перемещения, усилие руки оказывается выраженным в виде упругого усилия пружины динамометра, а затем в виде тяжести соответствующего груза.

На деле, подобное отождествление мускульного усилия с тяжестью груза еще со времен античности практиковалось в простых машинах – блоке, воротах, полиспасте, наклонной плоскости и винте, в которых физическая сила рабочего уравнивала действие тяжести.

К перевороту в понимании силы такое замещение (в статической ситуации), однако, не привело.

Логическая схема Ландсберга и реальный исторический процесс

Переворот, приведший к выделению силы тяжести в качестве образца для прочих сил, произошел при решении специальной задачи динамики – задаче о вращении, в которой выделяется особый класс сил – центробежные силы.

В отличие от силы тяжести, величина которой не зависит от скорости движения тела, центробежная сила от нее зависит.

Основная заслуга здесь принадлежит Х. Гюйгенсу, который выделил класс центробежных сил и сопоставил им силу тяжести.

Гюйгенс показал, что центробежная сила, возникающая при вращении груза на веревке (удерживаемого усилием руки), в случае обрыва веревки, приводит к движению груза, которое аналогично его свободному падению под действием тяжести.

В случае обрыва веревки груз под действием центробежной силы будет удаляться от наблюдателя, вращающегося с той же угловой скоростью, по прямой линии с постоянным ускорением. То есть, закон движения груза будет аналогичен закону свободного падения.

Этот результат был опубликован без доказательства в трактате «Маятниковые часы» (1673). Доказательство было дано в трактате «О центробежной силе» (1703), опубликованном посмертно.

Ньютон о результате Гюйгенса

О его значении для небесной механики:

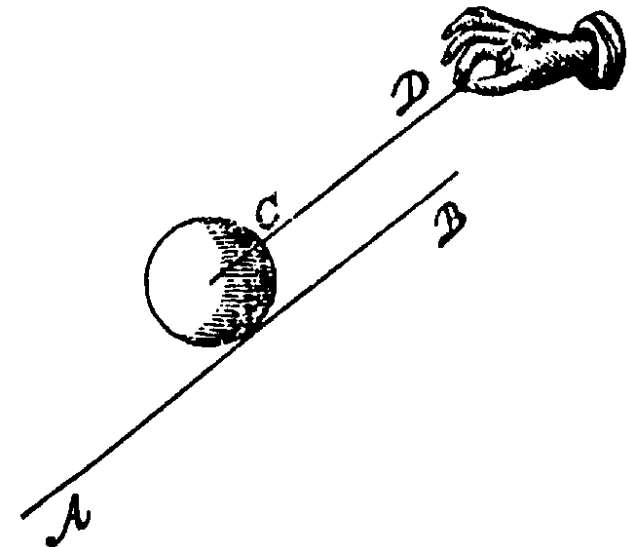
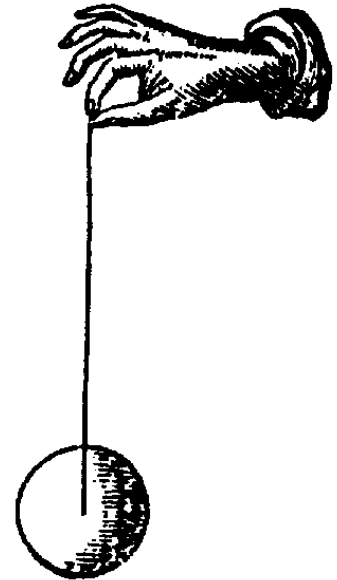
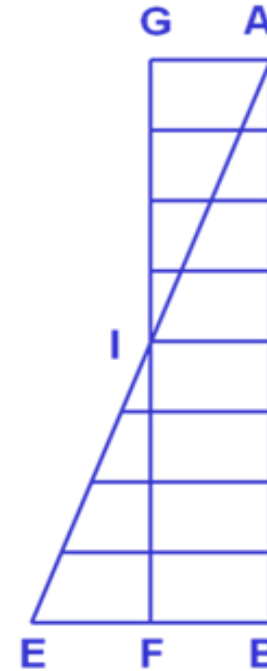
«... если тело обращается около Земли по кругу под действием силы тяжести, то эта сила и есть центростремительная.

Такого рода предложениями Гюйгенс в превосходном своем сочинении «Маятниковые часы» и сопоставил силу тяжести с центробежными силами обращающихся тел».

И.Ньютон, «Математические начала натуральной философии».

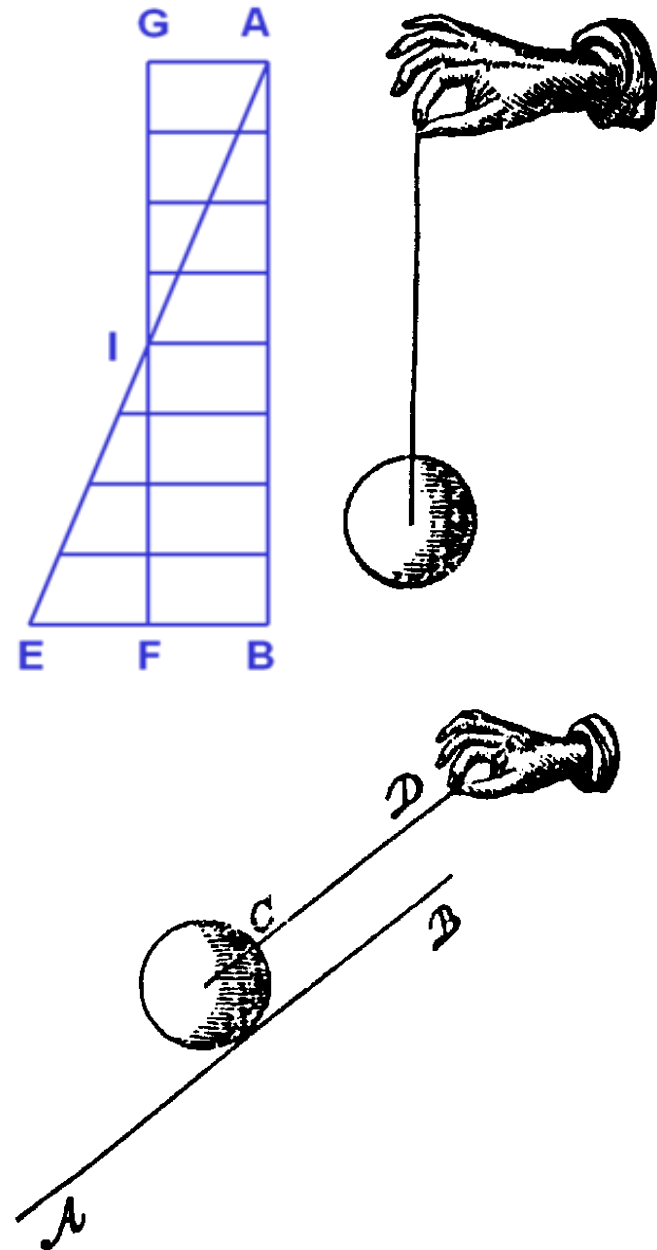
Х. Гюйгенс. «О центробежной силе» (1703)

- Гюйгенс начинает с изложения теории Галилея о свободном падении тяжелого тела и его падении (спуске) по наклонной плоскости.
- Основной характеристикой этих движений является постоянство ускорения.
- Далее он вводит для груза понятие «стремление к движению» (лат. *conatus*).
- Стремление груза к движению можно измерить движением, которое будет произведено грузом в случае его отрыва от нити.



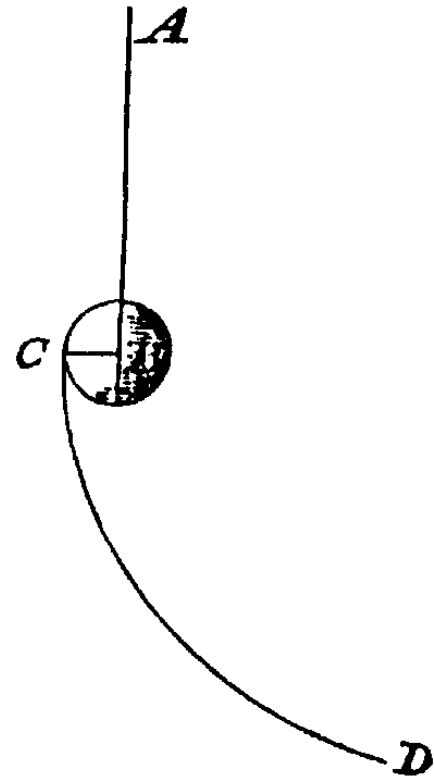
Х. Гюйгенс. «О центробежной силе» (1703)

- Рассматриваются два случая:
 - стремление к движению шара, подвешенного вертикально, и
 - стремление к движению шара, удерживаемого нитью на наклонной плоскости.
- В обоих случаях отделившийся от нити шар будет спускаться вниз по *правилу нечетных чисел*:
 - в последовательные единицы времени он будет проходить расстояния, находящиеся в соотношении: $1, 3, 5, 7, \dots$;
 - при этом общее пройденное им расстояние будет увеличиваться согласно правилу квадратов (пропорционально квадрату времени): $1, 4, 9, 16, \dots$



Рождение современного понятия силы (Х. Гюйгенс. «О центробежной силе»)

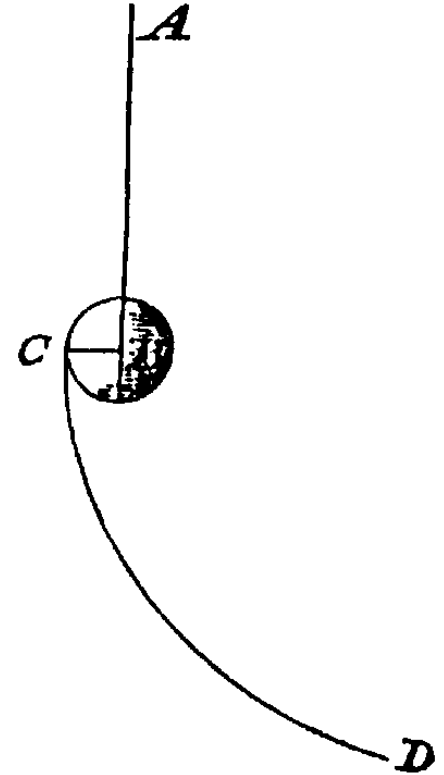
- Однако, измерять «стремление» шара расстоянием, на которое он падает за конечное время, будет неверно.
- Пусть шар, подвешенный на нити, касается гладкой изогнутой поверхности в точке С, в которой поверхность вертикальна. В этом случае начало движения шара будет точно таким же, как в случае, когда поверхность целиком вертикальна, т.е. не изгибается.
- Однако, если шар находится ниже, не на вертикальной, а на вогнутой части поверхности, то он будет падать медленнее.
- Поэтому, если мы хотим оценить стремление шара посредством движения, реализуемого при его отделении от нити, то для этого следует оценить величину перемещения, происходящего за бесконечно малый промежуток времени, сразу после отделения шара от нити.



Рождение современного понятия силы (Х. Гюйгенс. «О центробежной силе»)

Гюйгенс:

«Если мы хотим изучить это стремление к движению, то нам не нужно рассматривать, что произойдет с телом некоторое время спустя после отделения от нити, а надо рассмотреть *возможно меньший промежуток времени*, начиная от начала движения».



Гюйгенс. Рождение современного понятия силы

Х. Гюйгенс. «О центробежной силе»

Идея восходит к анализу
Декарта («Первоначала философии»)

«Рассмотрим теперь какое и с
какой силой стремление удалиться от
центра имеют тела, прикрепленные к
вращающейся нити или колесу».

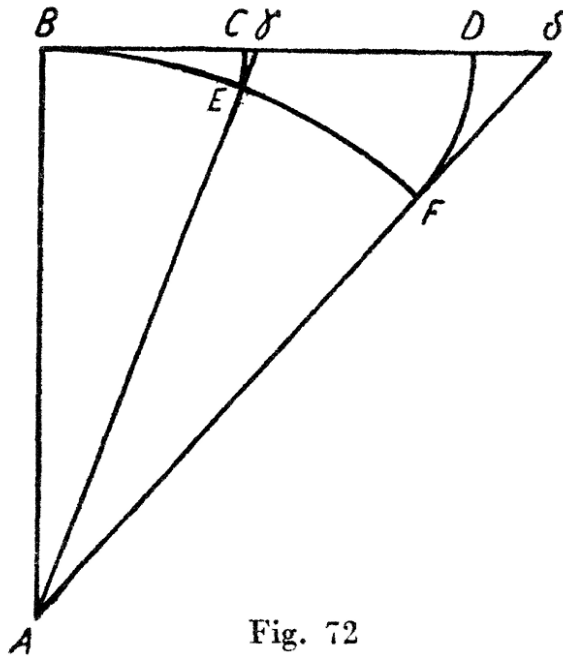
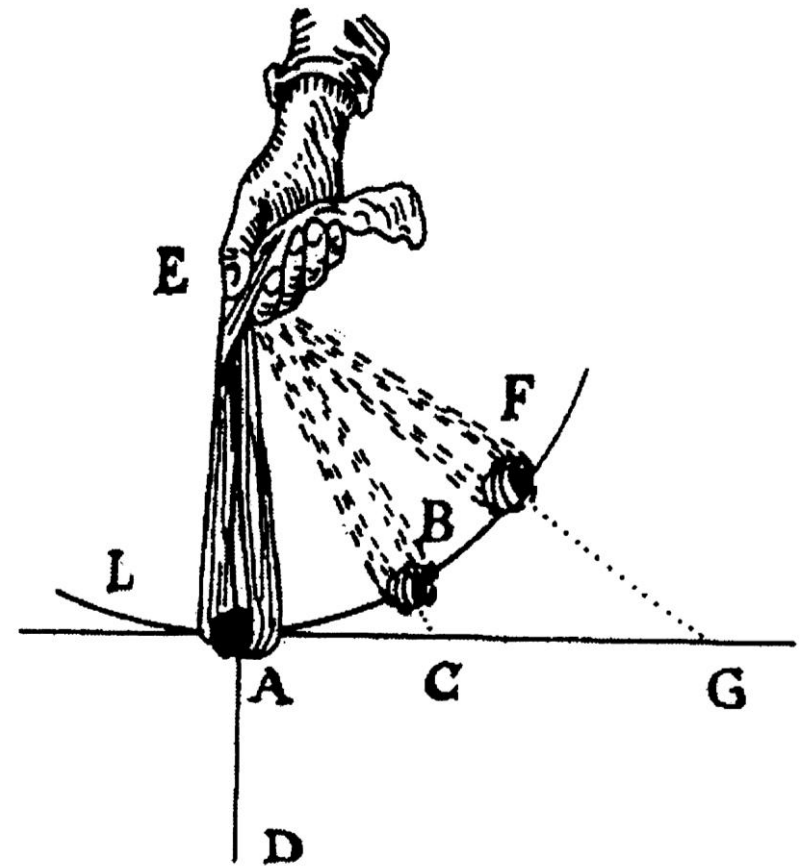
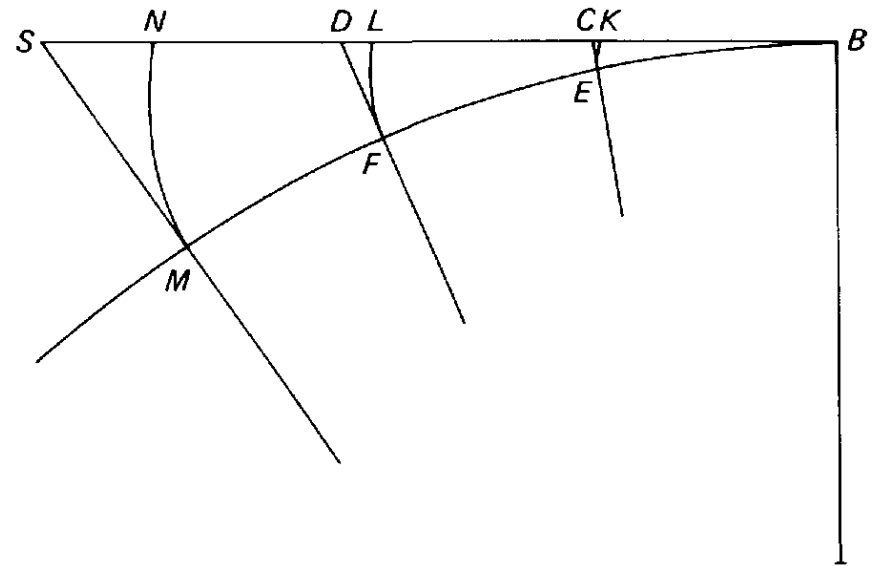


Fig. 72



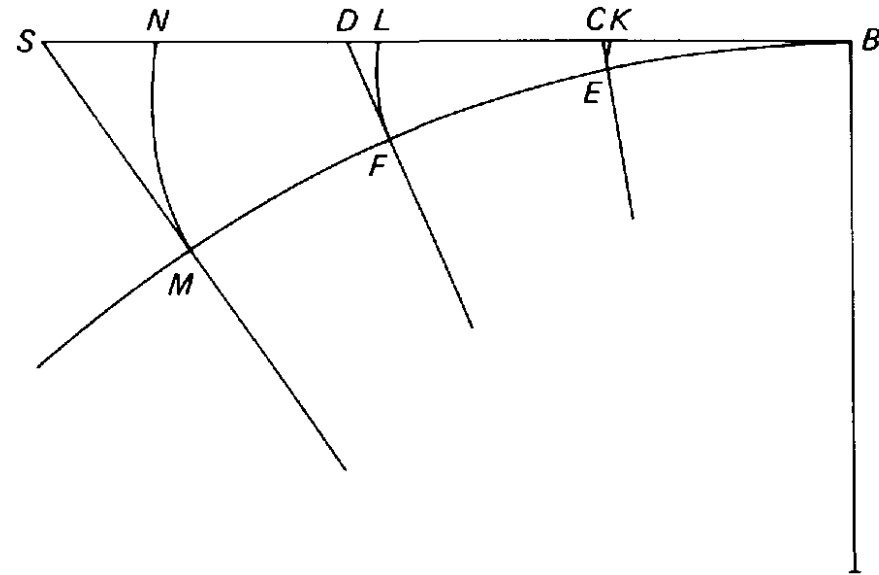
Рождение современного понятия силы (Х. Гюйгенс. «О центробежной силе»)

- Все рассуждения ведутся в системе отсчета, связанной с «колесом», которое вращается в горизонтальной плоскости вокруг точки O (на рисунке не изображена). Наблюдатель находится на «колесе».
- По закону инерции, после отрыва от колеса в точке B шар будет двигаться по касательной BS с постоянной скоростью: в равные бесконечно малые промежутки времени он будет проходить равные бесконечно малые расстояния BC , CD и DS .
- По отношению к наблюдателю, находящемуся на колесе, шар будет удаляться: на расстояние EC (за один отрезок времени), на расстояние FD (за два отрезка времени), на расстояние MS (за три отрезка времени) и т.д..



Рождение современного понятия силы (Х. Гюйгенс. «О центробежной силе»)

- Найдем закон возрастания величин расстояний EC , FD , MS .
- Обозначим CB – через d , а EC через δ . Пусть радиус колеса равен R . Три величины d , δ и R будут связаны соотношением $(R + \delta)^2 - R^2 = d^2$. Пренебрегая членом δ^2 , получаем $2R\delta = d^2$ или $EC = \delta = d^2/2R$.
- Аналогично получаем $FD = (2d)^2/2R$ и $MS = (3d)^2/2R$. Таким образом, величины EC , FD , MS будут приблизительно возрастать как последовательность квадратных чисел 1, 4, 9 ... Чем короче дуги BK , KL , LN , тем точнее будет это соответствие.
- Вывод: «стремление» шара к движению (conatus) после отрыва от колеса подобно «стремлению» к падению тяжелого тела, подвешенного на нити после отрыва от нее.



Понятие тяжести и теория центробежной силы по Х. Гюйгенсу

«О центробежной силе» (1703)

Гюйгенс:

«Отсюда мы заключаем, что центробежные силы разных тел, движущихся по одинаковым кругам с одинаковой скоростью, относятся друг к другу, как веса тел или как количества материи.

Как все весомые тела стремятся падать вниз с одинаковой скоростью и одинаковым ускоренным движением, и притом это стремление обладает тем большей силой, чем они больше, так должно быть и с теми телами, которые стремятся удалиться от центра, так как их стремление, как мы показали, совершенно подобно тому, которое происходит от тяготения.

Но в то время как стремление падать у одного и того же шара всегда одно и то же, всякий раз, когда он подвешен на пути, центробежное стремление — разное, в зависимости от скорости вращения. Остается еще исследовать величину стремления в зависимости от скорости. Сначала мы определим, с какой скоростью надо вращать колесо, чтобы натяжение нити шаром было бы такое же, какое получается при подвешивании того же шара на нити».

Х. Гюйгенс. «О центробежной силе» (1703)

Важные результаты

Предложение V

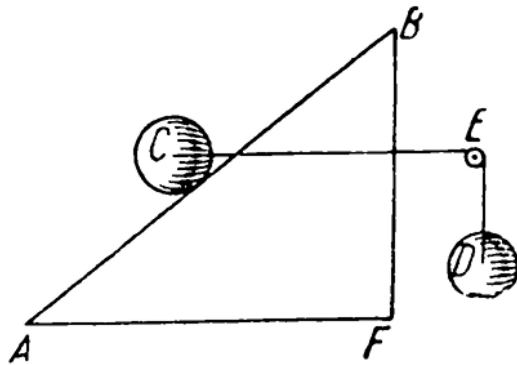
«Если тело движется по кругу с той скоростью, которую оно приобретает при падении с четвертой части поперечника (т.е. диаметра круга), то оно обладает стремлением удалиться от центра равным тяжести, т. е. оно тянет нить с той же силой, как если бы было к ней подвешено».

Тем самым исчерпывающим образом показана параллель между двумя разнородными «стремлениями». По сути, Гюйгенс свел центробежную силу к силе тяжести, показав возможность их количественного сравнения. .

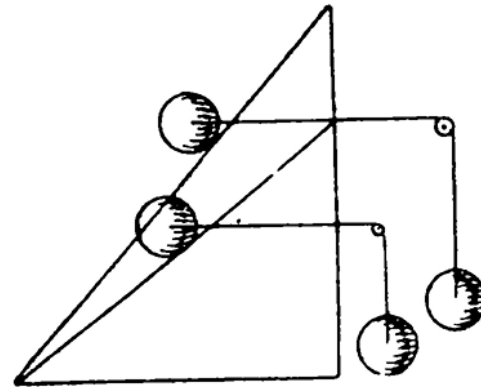
Сила тяжести оказывается (по производимому действию) количественным эквивалентом центробежной силы.

Лемма 1

Если груз C (фиг. 13) удерживается на наклонной плоскости AB свободно свешивающимся грузом D , причем



Фиг. 13.

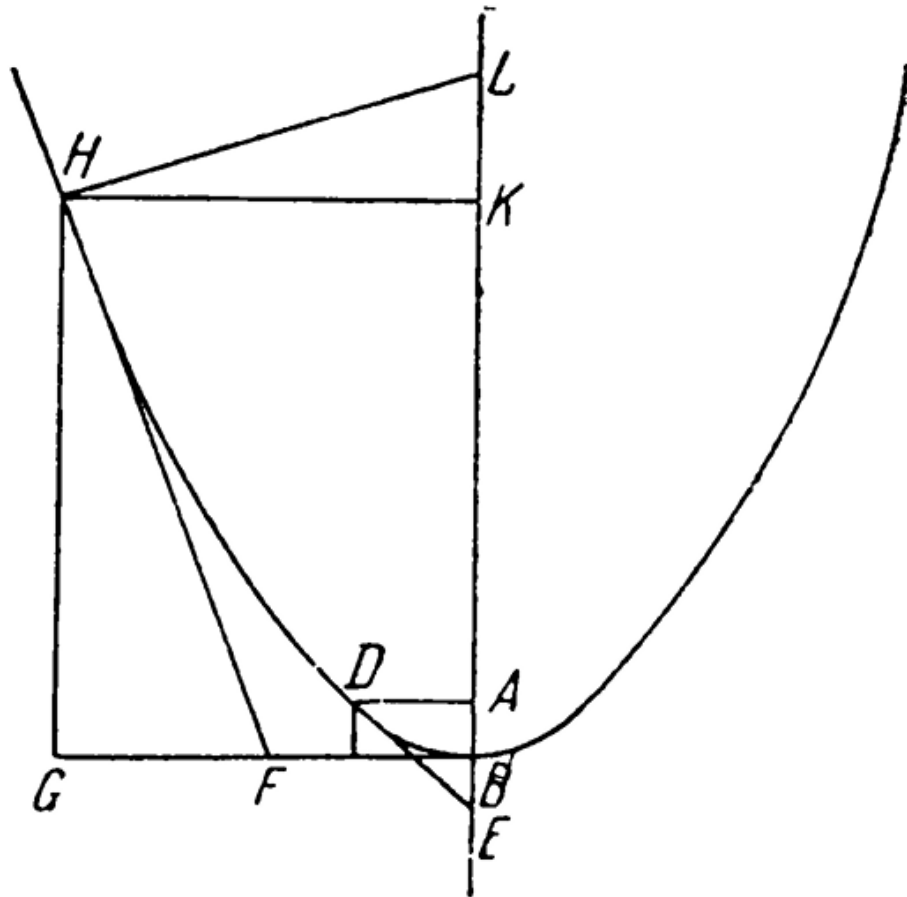


Фиг. 14.

шнур CE горизонтален, то отношение груза D к грузу C равно отношению высоты BF к основанию AF . Это — известное положение механики. Следовательно, в случае, если $BF = AF$, то и $C = D$.

Предложение VII

Имеем параболоид вращения с вертикальной осью. Время обращения тела, вращающегося по горизонтальному кругу на кривой поверхности параболоида, одинаково, независимо от того, совершается ли вращение по большому или малому кругу, и равно времени двух колебаний маятника, длина которого равна полупараметру.



Гюйгенс и механистическая философия

Гюйгенс – представитель механистической философии XVII в. В «Трактате о свете» он называет «истинной такую философию, в которой причину всех естественных явлений постигают при помощи соображений механического характера». Вслед за Декартом он считал, что основой процессов в природе является движение и непосредственное (контактное) взаимодействие частичек материи. Гюйгенс скептически относился к объяснению тяжести через взаимное притяжение. Он не принимал теорию тяготения Ньютона, считая, что она ничего не объясняет. Природу тяжести Гюйгенс, как и Декарт, объяснял действием вихрей, состоящих из «эфирной» материи. При этом теорию вихрей самого Декарта Гюйгенс считал ложной, иронически называя ее «романом о природе» (*le roman de la nature*). В отличие от Декарта Гюйгенс признавал наличие вакуума между частицами.

Другое отличие от Декарта состояло в том, что Гюйгенс отвергал тезис о возможности постижения природы исключительно средствами разума. Кроме того, Гюйгенс считал, что в физике невозможно создать абсолютно истинную теорию. Теоретическое описание природы может претендовать только на ту или иную степень правдоподобия. В то время, как Декарт, полагавшийся в познании на силу разума, мало интересовался реальным экспериментированием, Гюйгенс, напротив, был поборником опыта, считал его важным средством познания природы.