

История и методология механики

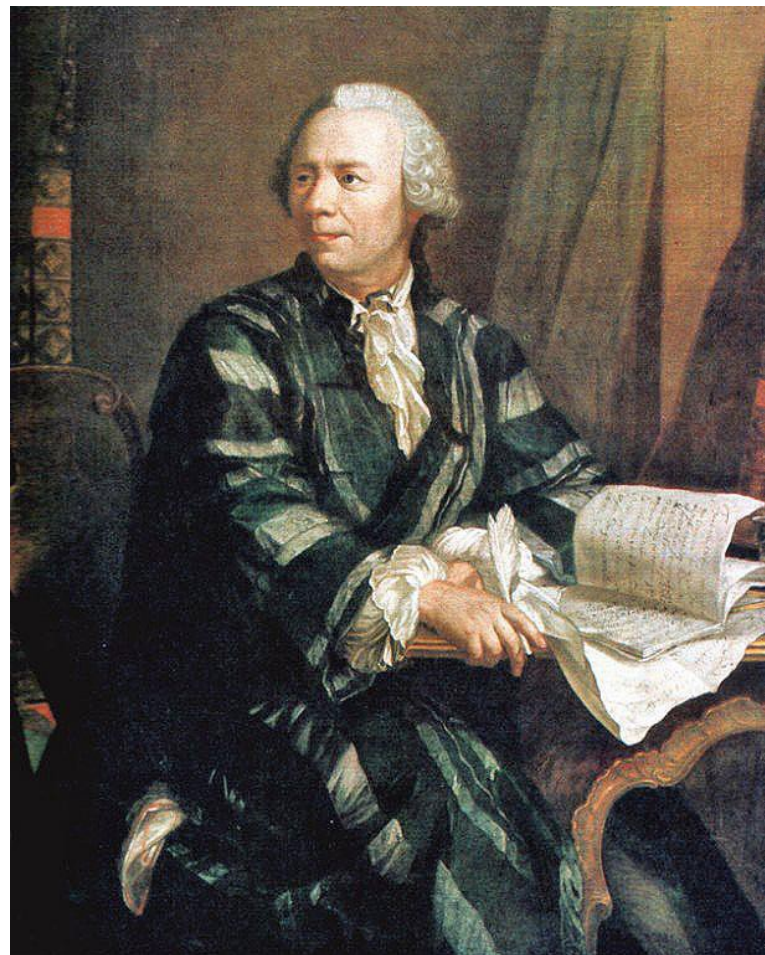
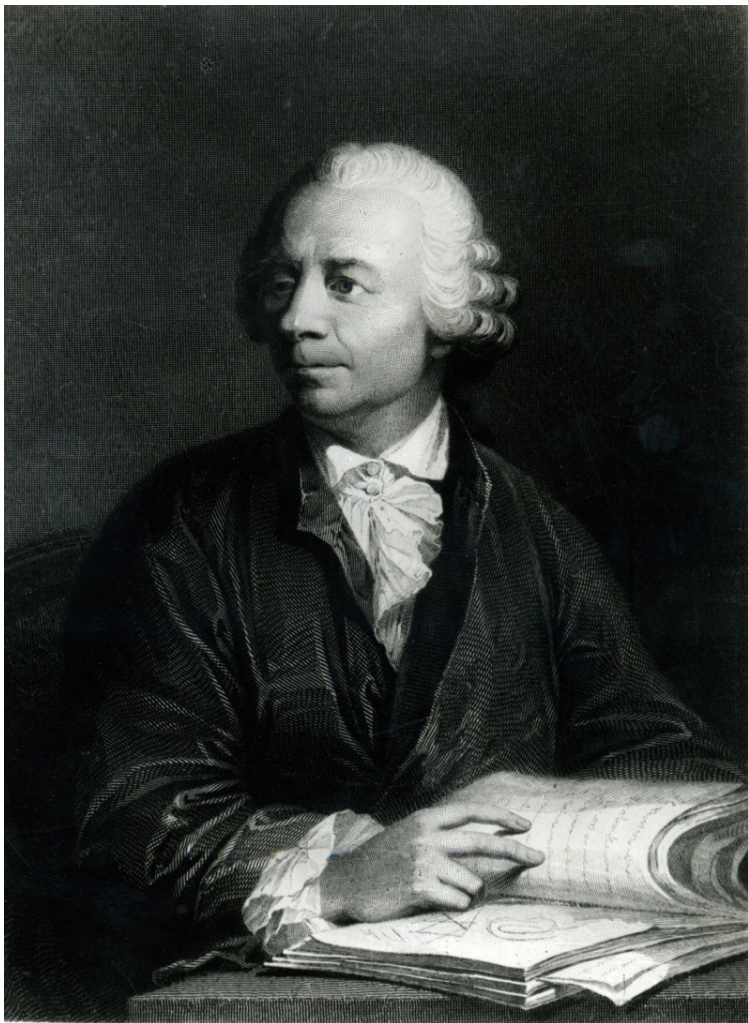
## Лекция 21

Чиненова Вера Николаевна

[v.chinenova@yandex.ru](mailto:v.chinenova@yandex.ru)

# Развитие динамики твердого тела в трудах Л. Эйлера на основе закона ускоряющих сил

# Леонард Эйлер (1707-1783)



Среди ученых всех времен и народов в области точного естествознания Леонарду Эйлеру принадлежит одно из первых мест. Как писал Д. Дидро: «Они (Бернулли, Эйлер, Д'Аламбер, Лагранж) поставят Геркулесовы столбы... Труды их будут жить в грядущих веках, подобно египетским пирамидам, которые своими испещренными иероглифами громадами пробуждают у нас ужасающую мысль о могуществе и богатствах людей, воздвигших их» .

## Леонард Эйлер (1707-1783)

- 15 апреля 1707 г. родился Леонард Эйлер, получил высшее образование в Базеле (Швейцария). Учителя – И.Бернулли и Я.Герман, 1722 – звание бакалавра,
- 1723 –окончил факультет искусств, 1724-магистерская диссертация (сравнение натуральной философии Декарта и Ньютона), 1727-защита диссертации о распространении звука.
- 1727 – приглашение из Петербурга в АН (адъюнкт высшей математики, затем кафедра теоретической и экспериментальной физики).
- 1733-профессор и академик, глава кафедры высшей математики (1738-ослеп на правый глаз)
- 1741 – переезд в Берлин: директор физ-мат класса Академии наук (президент с 1759 по 1766). Стажировка у Эйлера русских ученых: С.Котельников, С. Румовский, М.Сафронов и др.
- 1766 – возвращение в Петербург (слепота)
- 18 сентября 1783 скончался. В Петербургском некрополе находится его могила и памятник, по соседству с местом погребения М.В. Ломоносова
- Количество публикаций - около 850 (20 томов больших монографий)

Эйлер поставил задачу создать аналог ньютоновской механики, используя язык исчисления бесконечно малых, созданный оппонентом Ньютона – Лейбницем.

- При изложении законов механики Эйлер использует введенное им понятие функции. Под функцией Эйлер понимал «аналитическое выражение», состоящее из переменных и констант. Кроме обычных функций Эйлер рассматривал параметрические функции и неявно определенные функции. Эйлер был убежден, что все аналитические выражения могут быть заданы в виде бесконечных степенных рядов или обобщенных степенных рядов с дробными или отрицательными показателями.



MECHANICA  
SIVE  
MOTVS  
SCIENTIA  
ANALYTICE

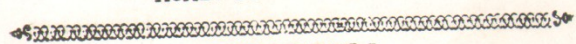
EXPOSITA  
AVCTORE  
LEONHARDO EVLERO  
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET  
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

---

TOMVS I.

---

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.  
ACAD. SCIENT. IMPER.



PETROPOLI

EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.

A. 1736.

Л. Э Й Л Е Р

МЕХАНИКА,

Т. Е. НАУКА О ДВИЖЕНИИ,  
ИЗЛОЖЕННАЯ  
АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ [1]

## Леонард Эйлер

- Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. **Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, - затем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы.** В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. **В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие.**

В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одно препятствует другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать. **В-шестых, будем рассматривать движение жидких тел.** По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, предоставленные сами себе, продолжают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т. е. силы (с.89)



**Леонард Эйлер «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически (1736)**

- В основу динамики Эйлер полагает три закона:
- закон инерции,
- закон независимости действия сил и
- принцип ускоряющих сил (второй закон Ньютона).

## Леонард Эйлер «Механика, или наука о движении»

- Принцип ускоряющих сил: «... приращение скорости прямо пропорционально действующей силе и пропорционально времени и обратно пропорционально силе инерции тела» (то есть массе тела) он записал в виде дифференциального уравнения прямолинейного движения точки:

$$dc = \frac{npdt}{A}$$

где  $c$  - скорость движения точки,  $p$  - действующая на точку сила,  $A$  - масса точки,  $t$  - время,  $n$  - коэффициент пропорциональности (с.125-126)

## Леонард Эйлер «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически»

- Теорема об изменении кинетической энергии точки:

$$cdc = \frac{npds}{A}$$

- где  $ds$  - элемент расстояния (с.126)

## Леонард Эйлер «Механика, или наука о движении»

- Для случая **криволинейного движения точки** Эйлер записывает дифференциальное уравнение движения **в проекциях на касательную  $\tau$  к траектории точки и на главную нормаль  $\eta$  к этой траектории в исследуемой точке:**

$$Ac dc = nP ds \qquad r = \frac{Ac^2}{nN},$$

где  $P$ ,  $N$  составляющие силы, по касательной и главной нормали через  $r$  - радиус кривизны траектории, через  $ds$  - элемент дуги (с.130)

## **Леонард Эйлер «Механика, или наука о движении»**

- В механику был введен **единообразный математический аппарат** решения задач динамики: **запись дифференциальных уравнений движения материального объекта, их интегрирование при известных начальных условиях.**
- Эйлером были получены и использованы **теорема изменения кинетической энергии точки**
- **теорема о кинетическом моменте системы.**



## Колин Маклорен (1698 - 1746)



- К. Маклорен - профессор Эдинбургского университета  
«Трактат о флюксиях» (1742).
- Идея Маклорена: разложение перемещения, скорости, ускорения и силы по трем взаимно перпендикулярным неподвижным направлениям в пространстве.

## Леонард Эйлер (1707-1783)

- В **1765** г. вышел в свет второй фундаментальный трактат Эйлера по аналитической динамике **«Теория движения твердых или жестких тел, установленная на основных принципах нашего познания и приспособленная ко всяким движениям, которые могут иметь названные тела»**

THEORIA MOTVS  
CORPORVM  
SOLIDORVM SEV RIGIDORVM

EX  
PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS  
STABILITA  
ET AD OMNES MOTVS,  
OVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,  
ACCOMMODATA.

---

AVCTORE  
LEONH. EVLERO.  
ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE  
ACADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO  
ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISIINAE  
ET LONDINENSIS MEMERO



---

ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE  
LITTERIS ET IMPENSIS A. F. RÖSE. MDCCCLXV

THEORIA MOTVS  
CORPORVM  
SOLIDORVM SEV RIGIDORVM

EX  
PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS  
STABILITA  
ET AD OMNES MOTVS,  
QVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,  
ACCOMMODATA.

AVCTORE  
LEONH. EVLERO  
ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE  
ACADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO  
ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISIENAE  
ET LONDINENSIS MEMBRO



ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE  
LITTERIS ET IMPENSIS A. F. ROSE. MDCCLXV

Л. ЭЙЛЕР

ТЕОРИЯ  
ДВИЖЕНИЯ  
ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

ВЫВЕДЕННАЯ ИЗ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ  
ПРИНЦИПОВ НАШЕГО ПОЗНАНИЯ  
И ПРИМЕНЕННАЯ КЪ ВСЕМ ДВИЖЕНИЯМ,  
КОТОРЫЕ МОГУТ ИМЕТЬ  
ЭТОГО РОДА ТЕЛА [47]

## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел» (1765)

- Механика изучает перемещение в пространстве реальных тел, тел непроницаемых. Взаимодействия таких тел Эйлер называет **силой**.
- «Два тела действуют друг на друга в том случае, когда они сходятся так, что каждое из них в отдельности не может сохранить своего состояния, не проходя сквозь другое тело... Силы, изменяющие в этом случае состояние тел, порождаются непроницаемостью этих последних...»
- (отказ от дальнодействия через пустоту и признание только контактного взаимодействия тел и сред! )

## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел» (1765)

- «**Массой** тела, или количеством материи, называется величина заключенной в теле **инерции**, вследствие которой тело стремится сохранить, свое состояние в противодействии всякому его изменению»(с.383)



При изложении законов движения Эйлер подчеркивает целесообразность *изучения сначала движения точки*, а затем движения твердого тела. Он пишет: «Подобно тому, как в геометрии, в которой излагается измерение тел, изложение обыкновенно начинается с точки, точно так же и движение тел конечной величины не может быть объяснено, пока не будет тщательно исследовано движение точек, из которых, как мы принимаем, составлены тела. Ведь нельзя наблюдать и определить движения тела, имеющего конечную величину, *не определив сначала, какое движение имеет каждая его маленькая частичка или точка. Вследствие этого изложение вопроса о движении точек есть основа и главная часть всей механики, на которой основываются все остальные части*»

## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

- Три дифференциальных уравнения движения материальной точки массы  $A$  в проекциях на неподвижные декартовы оси координат:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\lambda P}{A}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\lambda Q}{A}; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\lambda R}{A};$$

где  $x, y, z$  - координаты точки, отнесенные к неподвижной декартовой системе осей;  $A$  - масса точки,  $P, Q, R$  - проекции на те же оси результирующей силы, приложенной в данной точке,  $\lambda$  - коэффициент (с.401)



## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

- Замечая, что «**вся механика основывается на одном-единственном принципе**», Эйлер дает количественную формулировку этому важнейшему принципу динамики: «**Таким образом, приращение скорости, взятое по направлению действия силы, прямо пропорционально произведению действующей силы на промежуток времени и обратно пропорционально массе тельца**» (с.403)

## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

- Аксиома («новый принцип») о том, что принцип ускоряющих сил, или три дифференциальных уравнения движения материальной точки, справедлив и **для мысленно выделенного элемента твердого тела или жидкости.**
- **Модель сплошной среды** была введена Эйлером в 1750 г. в мемуаре «Открытие нового принципа механики»

## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

- При суммировании таких элементарных соотношений, выражающих принцип ускоряющих сил для массы  $dm$ , Эйлер упоминает о взаимной нейтрализации внутренних сил взаимодействия между элементом и окружающей средой, при этом он вводит новые (чрезвычайно важные в динамике твердого тела) количественные характеристики распределения масс в твердом теле.

В теории движения твердого тела Эйлер нашел формулы для определения проекций скорости какой-либо точки тела на декартовы оси координат в случаях движения около неподвижной оси и неподвижной точки. Эти формулы известны в механике как *формулы Эйлера*.

Соответственно трем степеням свободы твердого тела с неподвижной точкой им были введены так называемые *углы Эйлера* и получены кинематические формулы, выражающие проекции мгновенной угловой скорости тела на подвижные и неподвижные оси.

## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

- Эйлер доказал существование трех взаимно перпендикулярных осей, относительно которых **моменты инерции тела имеют экстремальное значение**. Эти оси Эйлер назвал **главными**.

Рассмотрение динамических уравнений движения в подвижных осях (неизменно связанных с твердым телом) позволило Эйлеру создать наиболее простой метод изучения движения твердого тела, так как относительно подвижных осей моменты инерции тела остаются постоянными во все время движения, и мы всегда можем направления подвижных осей совместить с главными осями инерции тела для данной неподвижной точки.

## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

- Эйлер установил **свойство вращения твердого тела без действия внешних сил вокруг главной оси инерции, проходящей через центр масс, с неизменной угловой скоростью: такую ось Эйлер назвал свободной осью.**
- Эскизы геометрии масс находим в сочинении «Корабельная наука», созданном Эйлером в 1749г.

## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

- Рассматривая произвольное движение свободного твердого тела, подверженного действию произвольных сил, Эйлер замечает, что это движение разлагается на **поступательное движение, соответствующее движению центра инерции тела, и вращательное движение вокруг некоторой оси, проходящей через центр инерции.**



## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

- Задание **движения твердого тела** заключается в задании:
  - **1)** скорости движения центра инерции;
  - **2)** направления, в котором движется центр инерции;
  - **3)** проходящей через центр инерции мгновенной оси, вокруг которой тело вращается;
  - **4)** угловой скорости вращения тела вокруг этой оси.
- Эти элементы вполне определяют движение твердого тела в данный момент времени.

# Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

$$\iiint \frac{d^2 x}{dt^2} dm = P, \quad \iiint \frac{d^2 y}{dt^2} dm = Q \quad \iiint \frac{d^2 z}{dt^2} dm = R;$$

$$\iiint z \frac{d^2 y}{dt^2} dm - \iiint y \frac{d^2 z}{dt^2} dm = S \quad \iiint x \frac{d^2 z}{dt^2} dm - \iiint z \frac{d^2 x}{dt^2} dm = T$$

$$\iiint y \frac{d^2 x}{dt^2} dm - \iiint x \frac{d^2 y}{dt^2} dm = U$$

## Леонард Эйлер «Теория движения твердых или жестких тел»

Уравнения вращательного движения твердого тела (другая форма) для определения вращательного движения тела в системе осей, жестко связанных с движущимся твердым телом и направленных вдоль главных центральных осей инерции:

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr + L$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + M$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + N$$

- Эта вторая форма эйлеровых уравнений вращательного движения твердого тела была указана им в «Записках Берлинской Академии наук» за 1758 г.
- Здесь  $p, q, r$  — проекции угловой скорости вращения твердого тела на три главные оси, жестко связанные с телом;  $A, B, C$  — главные моменты инерции тела относительно осей;  $L, M, N$  — суммарные моменты всех сил, приложенных к точкам рассматриваемого тела, относительно тех же осей.

## Леонард Эйлер

- В небесной механике наиболее важными работами Эйлера, использующими динамику твердого тела, были два сочинения: **«Теория движения Луны» (1753)** и **«Новая теория движения Луны» (1772)**, связанные с потребностью в способах **определения долготы местности при кораблевождении**

## Леонард Эйлер

- Теория движения Луны приводит к задаче трех тел: Луна, Земля и Солнце. Во втором сочинении 1772 г. Эйлер умело использовал тот факт, что масса Солнца велика по сравнению с массами двух других тел, а расстояние от них до Солнца много больше взаимного расстояния Луны и Земли.
- Чрезвычайно удачным оказался выбор Эйлера декартовых прямоугольных координат, определяющих положение Луны в переносном и относительном движениях.

## Леонард Эйлер

- Обширный цикл работ, начатый в 1748, Эйлер посвятил **математической физике: задачам о колебании струн, пластинок, мембраны и др.** Все эти исследования стимулировали развитие теории дифференциальных уравнений, приближённых методов анализа, специальных функций, дифференциальной геометрии и т.д. Многие чисто математические открытия Эйлера содержатся именно в этих его работах.

# **Леонард Эйлер (1707-1783)**

- **По выражению П.Лапласа, Эйлер явился общим учителем математиков второй половины XVIII века.**