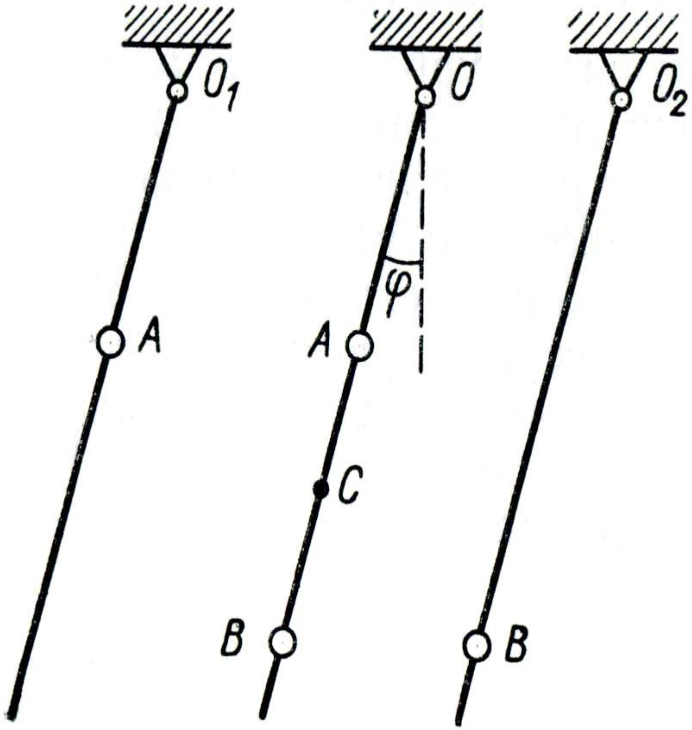
Лекция 14

Принцип Даламбера

Разработка принципа виртуальных скоростей

Я. Бернулли (1654-1705)

Задача Я.Бернулли (найти длину составного маятника *OAB*)



В составном маятнике наблюдается своеобразная передача количеств движений: груз *A*, **более близкий к точке подвеса ускоряет колебание более далекого груза** ***B***, **этот же последний замедляет колебание верхнего груза** ***A***.

Следовательно, между *A и B* должна существовать такая точка стержня *C*, которая не теряет и не приобретает количества движения по сравнению со свободным движением.

Задача Я.Бернулли

- Передача движений от точки *A* к точке *B* происходит по закону рычага, т. е. по закону статики.
- Я. Бернулли называл **свободными побуждениями** к движению активные силы, приводящие в движение маятник.
- Для всех трех точек *A, B и C* надо знать ускорения (в проекциях на касательные к траектории).

Задача Я.Бернулли

- **Истинные побуждения** к движению - произведение массы грузика на его тангенциальное ускорение в составном маятнике.
- **Потерянные (приобретенные) побуждения** к движению получаются *вычитанием свободных и истинных побуждений к движению.*

Задача Я.Бернулли

Для точки *A* потерянное побуждение к движению равно

$$m_A g \sin\varphi\ (1 - OA/OC)$$

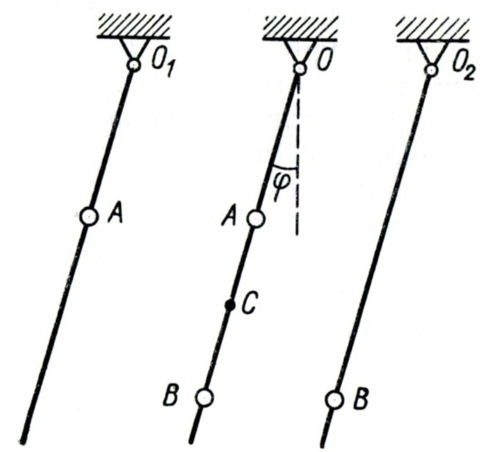
Для т. *B* приобретенное побуждение к движению равно

$$m_B g \sin\varphi\ (OB/OC - 1)$$

здесь φ - угол отклонения стержня от вертикали,

, *g* – ускорение силы тяжести,

m_A и m_B - массы точечных грузов.



Считая уравновешенными **потерянные** и **приобретенные** побуждения к движению грузов *A* и *B* , Бернулли применяет к ним закон рычага (второго рода):

$$m_A OA\,(1 - OA / OC) = m_B OB\,(OB / OC - 1)$$

ПОЛУЧАЛАСЬ ДЛИНА *OC* ТАКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА, КОТОРЫЙ ИМЕЛ БЫ КОЛЕБАНИЯ, ИЗОХРОННЫЕ ТЕМ, КАКИЕ ИМЕЛИСЬ БЫ В СОСТАВНОМ МАЯТНИКЕ *OAB:*

$$OC = \frac{m_A OA^2 + m_B OB^2}{m_A OA + m_B OB}$$

Ж.Даламбер (1717-1783)

- 1735- окончил Коллеж Мазарини
- 1743 -«Трактат динамики…»
- 1744 – «Трактат о равновесии и движении жидкостей»
- 1775-1777- опыты по опред. сопротивл. тел, движущихся в каналах и в безграничной жидкости *(Н.Кондорсе, Ш. Боссю)*
- 1751-1757 – «Энциклопедия наук, искусств и ремесел» (с *Д.Дидро*)
- 1754 - член Французской АН (адъюнкт с 1741)
- 1765 – член Парижской королевской АН
- 1764 – ин. член Петербургской АН
- 1746 – ин. член Берлинской АН

Даламбер «Динамика…»

- 2-я часть «*Общий принцип для нахождения движения многих тел, произвольным образом действующих друг на друга, а также некоторые применения этого принципа*»

Этот новый принцип необходим для решения некоторых задач, например, движения тел, соударяющихся произвольным образом; движения тел, которые тянут друг друга при помощи нитей или стержней и др.

Цель этого принципа – «…**показать, каким образом все задачи динамики можно решать одним и при том весьма простым и прямым методом**»

Ж. Даламбер «Динамика» (1743)

- Пусть дана система тел *A, B, C,…* и т.д. и пусть телам сообщены движения *a, b, c,…* и т.д., которые из-за связности тел видоизменяются в движения $a_1, b_1, c_1 ...$ тогда сообщенные движения *a, b, c,…* можно представить как геометрические суммы: $a = a_1 + \mathrm{a}$, $b = b_1 + \mathrm{b}$, $c = c_1 + \mathrm{g}$
  где $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{g}$ - геометрические составляющие исходных движений

Ж. Даламбер «Динамика» (1743)

- «Другими словами, - говорит Даламбер,- если бы тела получили только эти движения a, b, g … и т.д., то эти движения взаимно уничтожились бы и тела оставались бы в покое»

(a, b, g - их позже стали трактовать как потерянные силы).

Формы принципа Даламбера

- Аналогичный принцип в частных случаях применяли Я. Бернулли и его ученик Я. Герман (1678-1733)

  Во второй части первой книги «**Форономии**»(1716) Герман занимается нахождением приведенной длины физического маятника, состоящего из двух точечных грузиков. Он постулирует эквивалентность всех тангенциальных сил в связанном движении грузиков.
  Фактически это означает равенство нулю разности касательной составляющей силы тяжести каждого грузика и произведений их масс на тангенциальные ускорения.

Формы принципа Даламбера

- Эйлер более ясно выражает связь этого метода с соотношениями статики :
« **И так как эти подставленные силы (произведения масс точек на их тангенциальные ускорения) должны быть эквивалентны силам, действующим на тело, то из статики ясно, что если вместо них взять силы, равные по величине, но прямо противоположные по направлению, то тело должно быть в равновесии... Таким образом, все исследование, касающееся колебательных движений тел, приводится к принципам статики»**.

Формы принципа Даламбера

- В динамике машин в XIX в. было выработано **понятие сил инерции.** Изучение так называемого центробежного эффекта, возникающего в связи с большими скоростями вращающихся деталей машин (токарные, текстильные станки, центробежные регуляторы, турбины и пр.), привело к понятию **центробежной силы инерции, действующей на связи.**

Формы принципа Даламбера

- Французский ученый **Ш. Делоне в «Трактате рациональной Механики»** (1856) дал такую трактовку принципа Даламбера:
  «**в каждый момент времени имеет место динамическое равновесие приложенных к материальной точке, принадлежащей данной системе, активных сил, сил реакции внешних и внутренних связей и силы инерции точки. Последняя сила фиктивна и равна произведению массы точки на ее ускорение, взятое с минусом. Принцип Даламбера сводит задачу динамики системы к задаче о равновесии сил».**

кинетостатика

- В **векторной** форме условие равновесия всех перечисленных сил в некоторой точке принимает следующий вид:

$$\mathbf{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{0},$$

  где **F** - главный вектор активных сил,
  R - главный вектор реакций связей,
  Ф= - mw - главный вектор сил инерции.

- Очевидно, записанное равенство эквивалентно принципу ускоряющих сил в сочетании с принципом освобождаемости от связей, применимым к рассматриваемой точке:

$$\mathbf{mw} = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

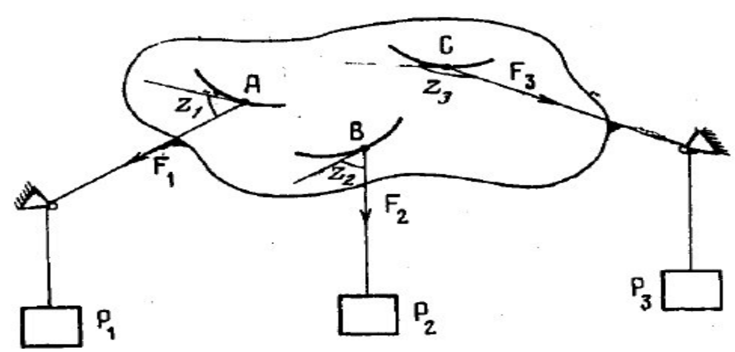
Лазар Карно (1753 -1823)

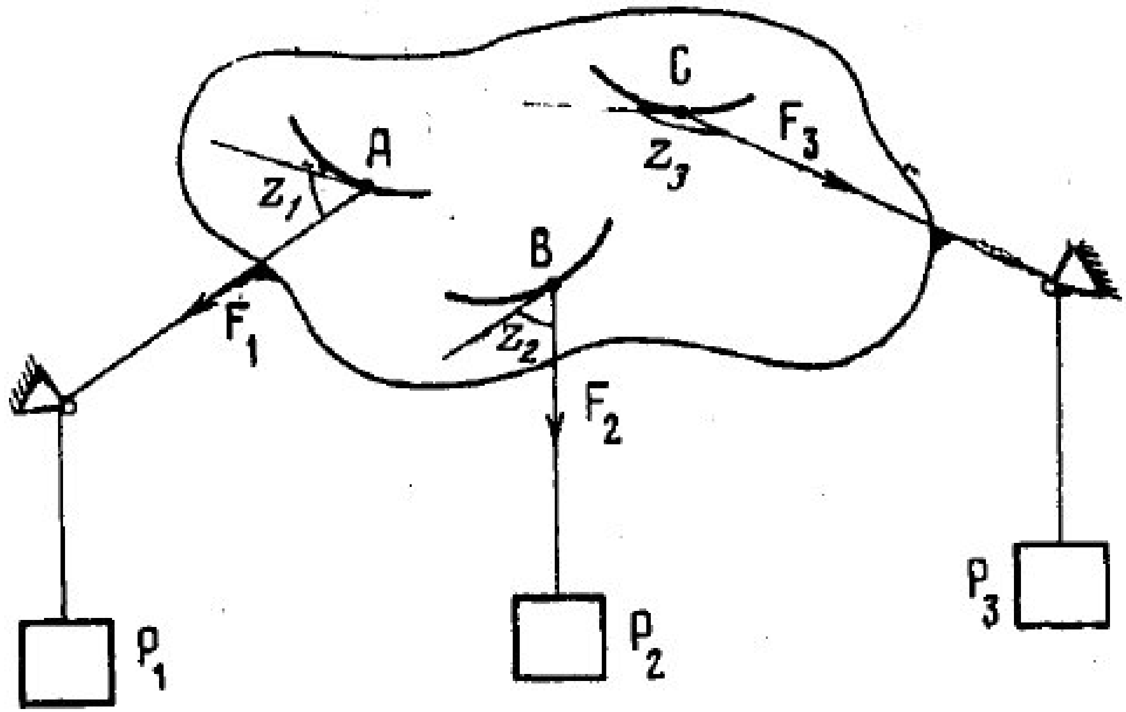
- 1783г. - Л.Карно «Опыт о машинах вообще»
- 1803г. – «Общие принципы равновесия и движения» (3-е издание)

Вывод **условия равновесия (а затем и условия движения) обобщенной машины или механической системы со связями методом расчета баланса виртуальной мощности.**

Разработка принципа виртуальных скоростей

- Понятие Карно **«геометрического движения» соответствует абстракции виртуального перемещения точки или бесконечно малого ее перемещения, допустимого связью в данный момент времени.**
- Идея вводить **заменяющую схему грузов** вместо **системы сил**, приложенных к точкам машины, использовалась многими учеными парижской Политехнической школы для обоснования принципа возможных перемещений.





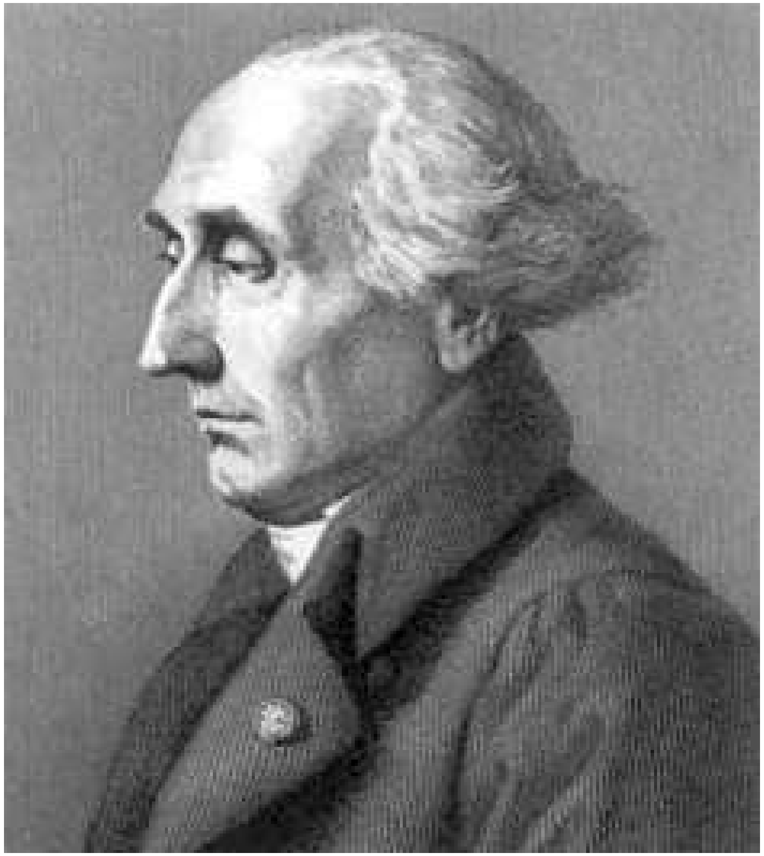
C
A
F_3
z_3
z_1
B
F_1
z_2
F_2
P_1
P_2
P_3

- Необходимое и достаточное условие равновесия системы состоит в том, что сумма работ активных приложенных сил для каждого возможного перемещения системы должна быть равна нулю.

$$SF_i \times u_i \times \cos z_i = 0$$

- Карно придавал большое значение суммарному «моменту активности» в теории машин, подчеркивая, что это количество нужно по возможности экономить, чтобы извлечь наибольший полезный эффект при действии машины.

Разработка принципа виртуальных скоростей в творчестве
Жозефа Луи Лагранжа (1736-1813)



Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)

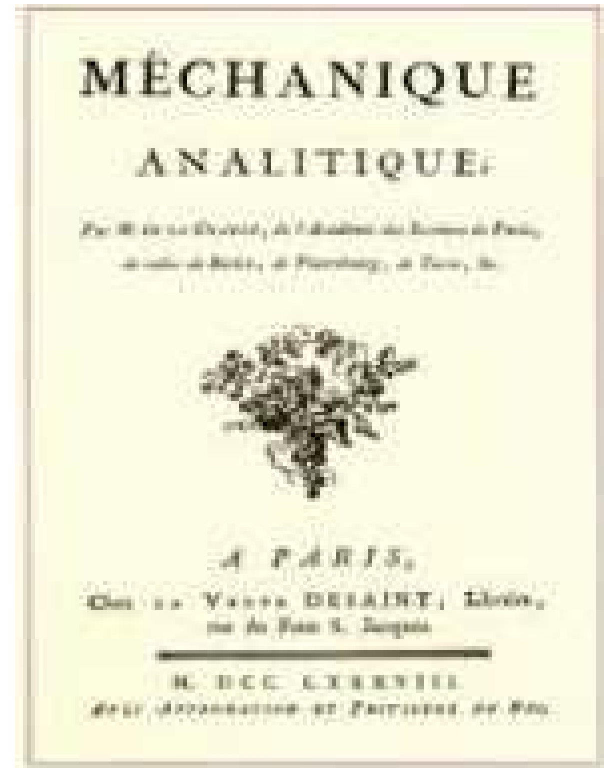
- **1788 – «Аналитическая механика»**
- **1787** – переезд во Францию
- Бюро консультаций по вопросам прикладного искусства и ремесел (организованного якобинским Конвентом),
- Комиссия по разработке метрической системы,
- Лагранж был мобилизован на решение проблем обороны Франции
- администратор Монетного двора Франции
- Участие в создании (по замыслу Конвента) Нормальной и Политехнической школ,
- **1797** -«Теория аналитических функций»
- **1801** -«Лекции по исчислению функций»
- **1813** - орден Почетного легиона.
- **10 апреля 1813г. Лагранж скончался**.

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»1788

Трактат Лагранжа «Аналитическая механика» начинается со статики, с научно-исторического исследования «О различных принципах статики».

Проследив историю развития основных принципов статики — принципа рычага, принципа сложения и разложения сил, принципа виртуальных скоростей, Лагранж приходит к выводу, что два первых принципа могут быть выведены из третьего — самого общего принципа статики.

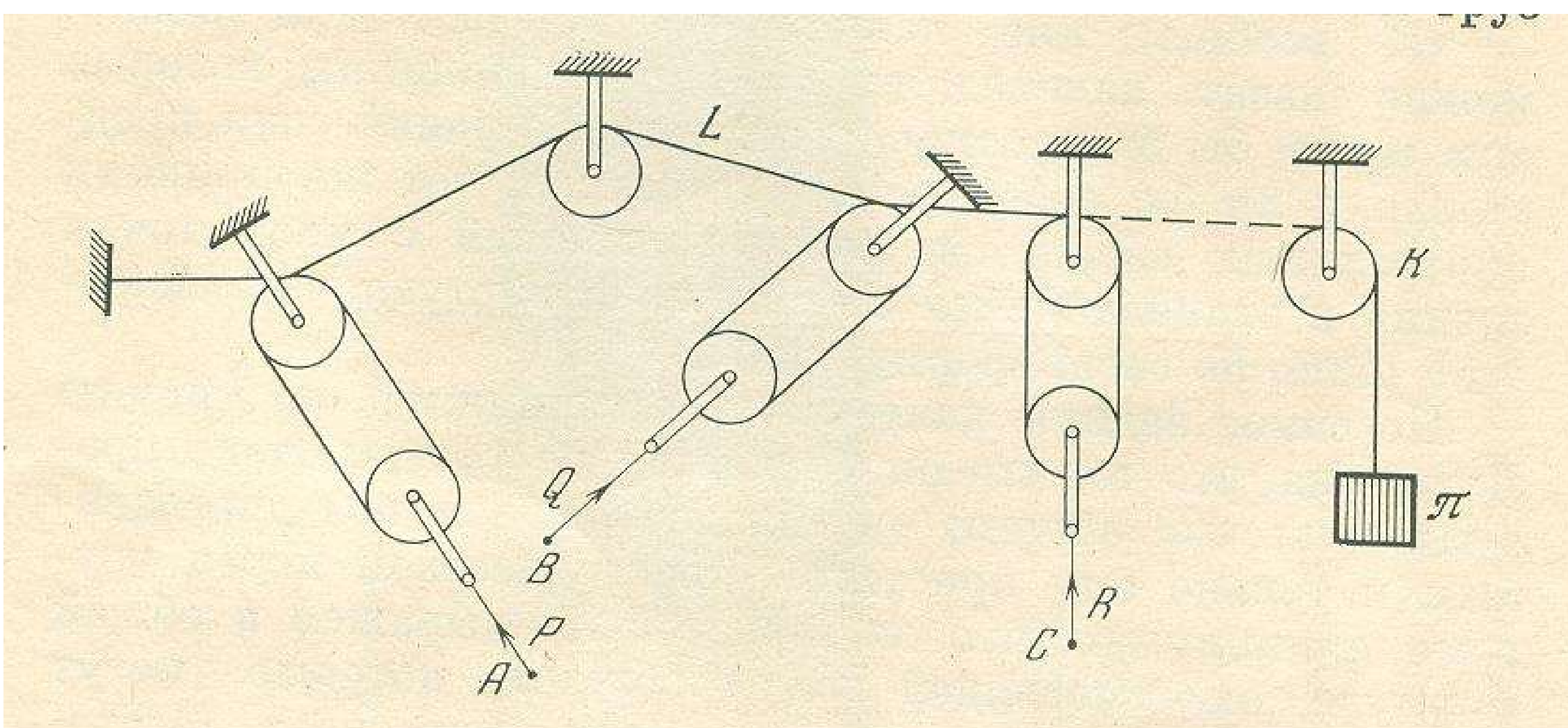
Для обоснования принципа возможных перемещений Лагранж использует идею вводить **заменяющую схему грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины**



Необходимое условие равновесия сил, приложенных к механической системе

«Если какая-либо система любого числа тел, или точек, на каждую из которых действуют любые силы, находится в равновесии и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными»

Основанием для принципа виртуальных скоростей Лагранж считает принцип блоков, или принцип полиспастов.



Лагранж обозначает через $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ возможные бесконечно малые смещения точек системы вдоль линии действия сил $P, Q, R \ldots$ Тогда высота h, на которую груз мог бы опуститься, выражалась бы так:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = \frac{h}{2}.$$

Необходимым условием равновесия системы является равенство нулю величины h, т. е.

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = 0.$$

Общая формула статики

Сумма работ активных сил для возможных перемещений точек их приложения должна быть равна нулю

$$P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \ldots = 0$$

- *Далее Лагранж поясняет, как пользоваться этой формулой для расчета состояния равновесия системы: сначала рассматривается случай системы, допускающий поступательное или вращательное движение без изменения относительного взаимного расположения точек системы.*
- *В отделе третьем Лагранж вводит функцию* ***П****, являющуюся потенциальной энергией системы, хотя он этого термина не употреблял.*
- *Необходимое и достаточное условие* ***равновесия*** *системы под действием консервативных сил характеризуется экстремумом этой функции. При*
- *этом Лагранж доказывает, что положение равновесия, соответствующее минимуму функции* ***П****, устойчиво, а максимуму — неустойчиво.*

- В отделе **четвертом** Лагранж выводит условия равновесия для систем со связями и дает метод, называемый сейчас методом неопределенных множителей Лагранжа.
- В отделе **пятом** рассматривается применение этого метода и общей формулы статики к решению отдельных конкретных задач о системах материальных точек, связанных нитями или стержнями, жесткими или упругими, о равновесии упругой пластинки, о равновесии твердого тела од действием любой системы сил.
- В последующих отделах излагается гидростатика.

- Учение о равновесии механической системы, включая гидростатику идеальной (несжимаемой и сжимаемой жидкости), изложено Лагранжем единообразным методом, с большим числом разработанных им приложений.

- Этот новый системный метод получил после Лагранжа широкое распространение и именуется **аналитической статикой.**

- Отметим, что обобщенные силы у Лагранжа не являются векторами, поэтому вопросы приведения систем к простейшему виду полностью выпадают из рассмотрения. Связи у Лагранжа являются связями идеальными.
- Поэтому совершенно естественно, что на практике к изложению Лагранжа пришлось добавить большое количество материала весьма разнородного качества: произошло разделение механики на теоретическую и техническую.
- Принцип виртуальных скоростей Лагранжа был создан не в 1788 г., когда вышла «Аналитическая механика». Первое упоминание о нем встречается в мемуаре о либрации Луны (1764 г.), помещенном в трудах Парижской Академии.