

# Лекция 25

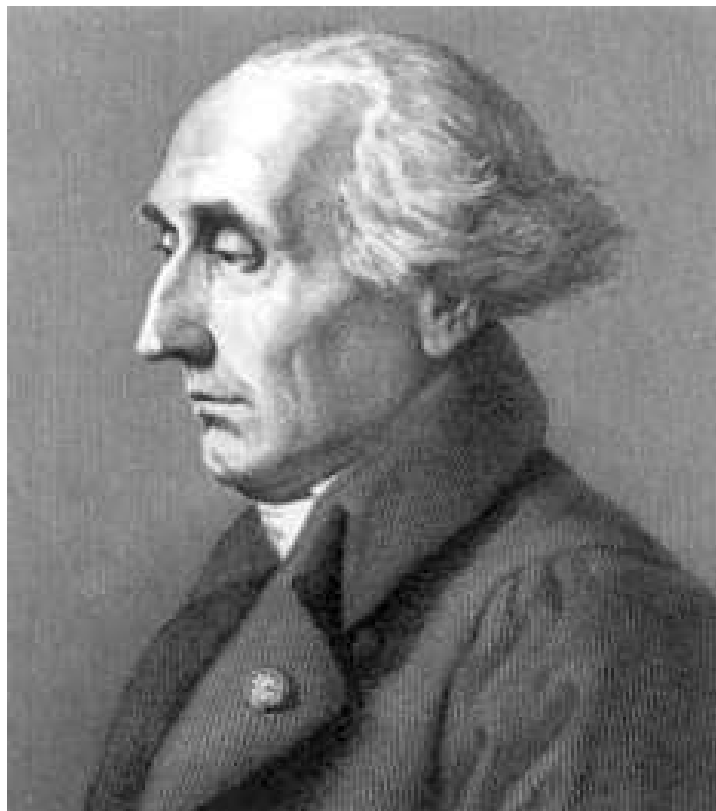
Чиненова Вера Николаевна

[v.chinenova@yandex.ru](mailto:v.chinenova@yandex.ru)

# Аналитическая механика Лагранжа

Общая формула динамики механической системы, вывод из этой формулы уравнений в обобщенных координатах.  
Уравнения Лагранжа 2-го рода

## Ж.Л.Лагранж (1736-1813)



## Общая формула динамики

- Лагранж применяет принцип виртуальных перемещений к потерянным силам, которые (по Даламберу) пребывают в равновесии. Он неявно считает связи идеальными, т.е.

$$\overset{\circ}{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^n R_i dr_i = 0$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^n [(X_i - m_i \ddot{x}_i) dx_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) dy_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) dz_i] = 0$$

$X_i, Y_i, Z_i$  проекции результирующей активных сил в каждой точке на декартовы оси координат,  $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$  проекции ускорения точки в той же системе.

Далее Лагранж переходит к изложению одного из важнейших оригинальных результатов своей аналитической динамики — к выводу из общей формулы динамики так называемых уравнений Лагранжа второго рода, а затем уравнений Лагранжа первого рода (с множителями  $\lambda$ ; они названы так, видимо, потому, что метод  $\lambda$  был изложен ранее).

## Уравнения Лагранжа «второго рода»

- Вводятся **обобщенные параметры** или координаты, число которых равно **числу степеней свободы системы**, т.е. меньше или равно числу обыкновенных координат.
- Выразив обычные координаты через обобщенные или независимые параметры, Лагранж подставляет соответствующие выражения для координат, скоростей и ускорений в общую формулу динамики.
- Вынося за скобки вариации независимых (обобщенных) параметров, он приравнивает нулю каждую скобку, используя полную произвольность и независимость вариаций обобщенных координат.

# Уравнения Лагранжа «второго рода»

Пусть  $q_i$ - обобщенные параметры;

$T$  –кинетическая энергия системы,  $U$  - силовая функция,  $l$  - число степеней свободы, тогда:

$$(i=1,2,\dots,l) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Из этих уравнений путем двукратного их интегрирования можно получить обобщенные координаты как функции времени, т. е. кинематические уравнения движения системы.

*Если поставлена задача Коши, то можно найти единственное решение системы дифференциальных уравнений 2-го порядка.*

Но иногда (особенно в технике) требуется определить не только характер движения системы и ее частей, но и силы давления на опоры, или реакции связей. Для решения проблем такого характера Лагранж создал другой математический аппарат, обобщив на динамику метод неопределенных множителей, подробно рассмотренный им при изложении статики. Умножив соотношения для вариаций связей, как это делалось в статике, на неопределенные множители  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  (по числу условных уравнений, выражающих на нашем языке соотношения для двухсторонних голономных стационарных связей), Лагранж прибавляет полученные соотношения к Общему уравнению динамики. Так получается уравнение

## «Аналитическая механика» (1788)

Дифференциальные уравнения первого рода:

$$X_i - m_i \dot{x}_i + \left| \frac{\partial L}{\partial x_i} + m_i \frac{\partial M}{\partial x_i} + \dots = 0, \right.$$

$$Y_i - m_i \dot{y}_i + \left| \frac{\partial L}{\partial y_i} + m_i \frac{\partial M}{\partial y_i} + \dots = 0 \right.$$

$$Z_i - m_i \dot{z}_i + \left| \frac{\partial L}{\partial z_i} + m_i \frac{\partial M}{\partial z_i} + \dots = 0 \right.$$

# «Аналитическая механика» (1788)

Кроме  $3n$  неизвестных  $x_i, y_i, z_i$   
как функций  $t$ , для определения множителей  
Лагранжа  $\lambda, \mu, \nu, \dots$   
привлекаются  $k$  уравнений связей

$$L(x_i, y_i, z_i) = 0$$

$$M(x_i, y_i, z_i) = 0$$

- Заметим, что связи, рассматриваемые Лагранжем при выводе обеих форм дифференциальных уравнений, в современной терминологии являются геометрическими или голономными, что видно из контекста.

В задаче о колебании простого маятника заданной длины Лагранж поясняет: «...натяжение, обозначенное через  $\lambda$ , определится следующим образом...»<sup>37</sup> — значит, механический смысл множителя  $\lambda$  здесь — натяжение нити.

Изучая движение несжимаемой жидкости, он пишет: «...мы докажем, что величина  $\lambda$ , отнесенная к поверхности жидкости, выражает давление, которое здесь производит жидкость и которое, если оно не равно нулю, должно уравниваться сопротивлением или действием стенок»<sup>38</sup>.

Относительно метода неопределенных множителей Лагранжа удачно выразился Н. И. Идельсон: «Таким образом, и здесь... не было необходимости проводить внутренние сечения и изучать действующие на них поверхностные силы, не пришлось пользоваться принципом отвердевания или усиления реакции связей — единая формула и здесь сделала свое дело: она как бы автоматически привела нас к уравнениям движения изучаемых систем, а множитель  $\lambda$ , как некий Протей, приобретал в ней каждый раз особенное механическое значение»<sup>39</sup>.

Лагранж отмечает далее, что из системы дифференциальных уравнений движения консервативной системы со стационарными связями можно получать интегралы движения центра инерции и интегралы площадей. Интеграл живых сил Лагранж подробно выводит из уравнений движения:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left[ \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] + \Pi = \text{const},$$

где  $\Pi$  — некоторая функция, в нашей терминологии — потенциальная энергия.

Лагранж не довольствовался созданием стандартного математического аппарата аналитической механики, с помощью которого любую проблему механики можно выразить в виде дифференциальных уравнений второго порядка. Он стремился и сумел найти наиболее общие и наиболее эффективные пути решения этих уравнений и доведения до числовых результатов обширной группы динамических задач.

Лагранж замечает, что дифференциальные уравнения движения системы «требуют еще интегрирований, которые зачастую превышают возможности известного нам анализа; поэтому приходится прибегать к приближениям, и наши формулы дают также наиболее подходящие средства для этой цели»<sup>40</sup>.

Первоначально приближенный метод интегрирования уравнений движения динамики был навеян Лагранжу спецификой задач небесной механики и теми способами последовательных приближений, которые использовались в астрономической практике XVIII в.

Сущность метода, позже превратившегося в общий метод вариации произвольных постоянных, сводилась к тому, что, зная движение планеты под действием притяжения одного только Солнца, пытались найти движение, близкое к данному невозмущенному и вызванное также и действием соседней планеты, масса которой много меньше солнечной массы.

## Лагранжиан

Эта функция, равная разности кинетической и потенциальной энергии консервативной системы, была введена Лагранжем и обозначена через  $Z$ . Теперь, видимо, в честь Лагранжа, ее обозначают через  $L$  — начальную букву его фамилии:

$$L = T - \Pi.$$

Уравнения Лагранжа, называемые теперь уравнениями второго рода, с введением функции  $L$  принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (4)$$

Мы будем придерживаться современных традиционных обозначений, хотя у самого Лагранжа обобщенные координаты обозначались не через  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , как записано выше, а через  $\xi, \varphi, \psi \dots$ . Их число равно  $m$  — числу степеней свободы системы.

Можно еще больше модернизировать форму рассуждений Лагранжа, не изменяя ее духа, введя обобщенные импульсы  $p_i$ , определяемые соотношениями такого вида:  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . Тогда уравнение (4) принимает вид

$$dp_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} dt, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Если систему таких уравнений проинтегрировать, то обобщенные координаты  $q_1, q_2, q_3, \dots$  будут функциями времени  $t$  и  $2m$  произвольных постоянных  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{2m}$ .

- Затем Лагранж задает другую совокупность вариаций координат, которым соответствуют вариации произвольных постоянных  $\Delta y$
- Соответствующие изменения обобщенных координат и обобщенных импульсов можно обозначить теми же символами  $\delta q_i, \delta p_i, \Delta p_i, \Delta q_i$ .

По правилам вариационного исчисления, одним из основателей которого был Лагранж, а именно: по свойству перестановочности операций  $\delta$  и  $d$ , можно записать и применить к равенству (5):

$$\delta d p_i = d \delta p_i = \delta \frac{\partial L}{\partial q_i} dt,$$

$$\Delta d p_i = d \Delta p_i = \Delta \frac{\partial L}{\partial q_i} dt.$$

Суммируя по всем координатам, он получает

$$\sum_{i=1}^m (\delta p_i \Delta q_i - \delta q_i \Delta p_i) = \text{const.}$$

В результате варьирования обобщенных координат и обобщенных импульсов время  $t$  исключается; сумма, стоящая в левой части равенства, сохраняет свою величину во время движения. Этот ценный результат часто называют основной леммой Лагранжа в теории вариации произвольных постоянных<sup>42</sup>. Он сам заметил фундаментальное значение полученного им соотношения. Он придает ему вид, который в современной символике записывается так:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_k} \frac{\partial p_i}{\partial \gamma_s} - \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_s} \frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k} \right) = 0.$$

Сумму, стоящую под знаком производной, называют скобкой Лагранжа и обозначают  $[\gamma_k, \gamma_s]$ . Его основная лемма утверждает постоянство всех таких «скобок» за время движения (если подставить туда вместо  $q_i$  и  $p_i$  их выражения через  $t$  и произвольные постоянные  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ ,

Он не мог еще предугадать всех тех выгод, которые из этой формулы смогли в дальнейшем извлечь его продолжатели: С. Д. Пуассон, Р. Гамильтон, К. Г. Якоби, М. В. Остроградский, Ж. Лиувиль, А. Пуанкаре и др.

Итак, чрезвычайно плодотворной оказалась идея Лагранжа рассматривать произвольные постоянные интегрирования уравнений движения не как постоянные, а как искомые функции времени, при подстановке которых в выражения для  $q_i$  и  $p_i$  и затем в уравнения движения последние превращались бы в тождества.

Р. Гамильтон во «Втором очерке об общем методе в динамике»<sup>44</sup> разработал алгоритм, с помощью которого при использовании скобок Пуассона можно найти все  $\gamma_k$  в зависимости от времени. Это составляет основу современного метода вариации произвольных постоянных.

Исключительно большое влияние идей Лагранжа чувствуется в работах М. В. Остроградского. Например, в своей ранней работе «Заметка о вариации произвольных постоянных»<sup>46</sup> Остроградский развил идею Лагранжа о вариации произвольных постоянных для получения интегралов сохранения энергии, движения центра масс системы и площадей. В другой работе — «О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики»<sup>47</sup> — он продолжает разрабатывать метод Гамильтона — Якоби интегрирования канонических уравнений Гамильтона, опирающийся на использование скобок Пуассона.

В дальнейшем идею, изложенную Лагранжем в его основной лемме (о сохранении за время движения постоянной величины, называемой теперь скобкой Лагранжа), развивали Ж. Лиувилль<sup>48</sup> и А. Пуанкаре<sup>49</sup>.

## Решение задач

- Уравнениями Лагранжа можно пользоваться для изучения движения любой механической системы с геометрическими или сводящимися к геометрическим (голономными) связями, независимо от того, сколько тел (или точек) входит в систему, как движутся эти тела и какое движение (абсолютное или относительное) рассматривается.
- Чтобы для данной механической системы составить уравнения Лагранжа, надо:
  - 1) установить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты;
  - 2) изобразить систему в произвольном положении и показать на рисунке все действующие силы (для систем с идеальными связями только активные);
  - 3) вычислить обобщенные силы  $Q$ ; при этом во избежание ошибок в знаках каждое сообщаемое системе возможное перемещение должно быть направлено так, чтобы приращение соответствующей координаты было положительным;

4) определить кинетическую энергию  $T$  системы в ее абсолютном движении *и выразить эту энергию через обобщенные координаты и обобщенные скорости* ;

5) подсчитать соответствующие частные производные от  $T$  по обобщенным координатам и обобщенным скоростям и подставить все значения в уравнения Лагранжа

Указанным путем уравнения Лагранжа составляются независимо от того, рассматривается ли абсолютное (по отношению к инерциальной системе отсчета) или относительное движение механической системы.

Но в последнем случае возможен и другой путь, а именно кинетическую энергию системы определять в ее относительном движении, но зато при нахождении обобщенных сил присоединить к силам, действующим на систему, переносные силы инерции (чего при использовании первого пути делать не надо).

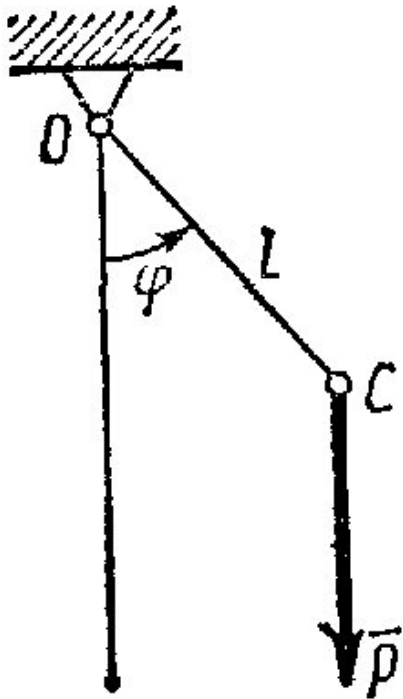
Из полученных уравнений, если заданы действующие силы и начальные условия, можно, интегрируя эти уравнения, найти закон движения системы. Если же задан закон движения, то составленные уравнения позволяют определить действующие силы.

Когда все приложенные к системе силы являются потенциальными, уравнения Лагранжа можно составлять в виде (4), т.е. заданием только одной функции Лагранжа.

При этом вместо вычисления обобщенных сил надо определить потенциальную энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты, и затем, определив еще и кинетическую энергию, составить функцию Лагранжа.

## Задача.

Составить, пользуясь методом Лагранжа, дифференциальное уравнение колебаний физического маятника.



$P$  - вес маятника,

$a$  - расстояние  $OC$  от центра масс до оси подвеса,

$J$  - момент инерции маятника относительно оси подвеса.

Положение маятника определяется углом  $\varphi$  отклонения линии  $OC$  от вертикали.

## Вращение твердого тела около неподвижной точки

Одним из важных технических запросов XVIII в. была проблема колебательного движения корабля при качке. Петербургская академия наук сформулировала эту проблему как задачу об остойчивости корабля. В процессе многолетней работы по этой проблеме Эйлер увидел необходимость построения теории вращательного движения твердого тела. Такие же проблемы выдвигала и астрономия. Необходимо было изучить вращение Земли, Луны и других небесных тел около собственной оси, а также прецессию и нутацию этой оси. Наконец, уже в то время начали пользоваться гироскопическими устройствами, нуждающимися в расчете вращения твердого тела около неподвижной точки.

Указав, что исследованием этого важного случая занимались Даламбер и Эйлер, Лагранж излагает их результаты, доводя решение уравнений до квадратур. Затем он переходит к постановке задачи для второго фундаментального случая вращения твердого тела (получившего впоследствии имя Лагранжа), когда точка опоры или подвеса не совпадает с центром тяжести. Лагранж вводит упрощающие предположения о динамической симметрии тела и о расположении точки опоры на оси симметрии:  $A=B$ . Тогда из третьего уравнения (С) движения он получает интеграл, носящий теперь его имя:  $r=\text{const}$ .

Сама постановка задачи и нахождение нового алгебраического интеграла  $r = \text{const}$  представляли важное открытие в области аналитической механики. Кроме того, Лагранж раскрыл механический смысл последнего интеграла, означающего постоянство угловой скорости вращения эллипсоида инерции около гироскопической оси. Затем он пошел еще дальше — наметил путь интегрирования двух первых уравнений движения, доведя вычисления до квадратур в эллиптических функциях. Как частный случай, он рассматривает условия, при которых ось тела совершает очень малые колебания (они могут быть коническими) около вертикальной линии, когда само тело вращается около собственной оси. Эти исследования Лагранж не закончил, фрагменты других его вычислений в той же области помещены в конце второго тома под рубрикой «Из черновых записей Ж. Лагранжа».

## **«Аналитическая механика» (1788)**

- Лагранж смог все многообразие механических явлений облечь в единую формулу. В этой общей формуле динамики заключена
- теория движения и равновесия небесных и земных тел,
- гидростатика и гидродинамика,
- динамика твердого тела, значительно продвинутая в сочинении Лагранжа ``Аналитическая динамика'',
- теория малых колебаний;
- условие устойчивости консервативной системы; построена теория устойчивости невозмущенного

**Выдающийся инженер, механик, математик и историк механики А.Н. Крылов, считал:**

...Лагранж был прав, что не останавливаясь на частностях, придал своему изложению самую общую аналитическую форму; поэтому его методы одинаково приложимы и к расчету движения небесных тел, и к качаниям корабля на волне, и к расчету гребного вала на корабле, и к расчету полета 16-дюймового снаряда, и к расчету движения электрона в атоме.

Успехи точных наук в XX в. все более подтверждают правильность такой оценки творчества Лагранжа. Большинство новейших методов дифференциальной геометрии, вариационного исчисления и теории оптимального управления, аналитической динамики основаны на идеях Лагранжа. Известная монография Дж. Лича «Классическая механика» посвящена анализу выхода аппарата аналитической механики за рамки классической механики в область квантовой механики, статистической физики и теории поля. В ней говорится:

«Наиболее замечательные результаты применения методов Лагранжа и Гамильтона к непрерывным средам получаются при изучении идеализированных сред, называемых полями. Еще одной особенностью, которая может быть здесь отмечена, является релятивистская инвариантность. Оказалось, однако, что изложенную здесь теорию можно принять, в сущности, без изменений»<sup>7</sup>.