Лекция 2

Чиненова Вера Николаевна

v.chinenova@yandex.ru

Элементарная трактовка принципа виртуальных скоростей в трудах Декарта

Р. Декарт (Descartes R.) 1596-1650

Элементарная трактовка принципа виртуальных скоростей в трудах Декарта

Р. Декарт **«Объяснение машин, при помощи которых можно малой силой поднимать весьма тяжелые грузы» (1637 г.)**

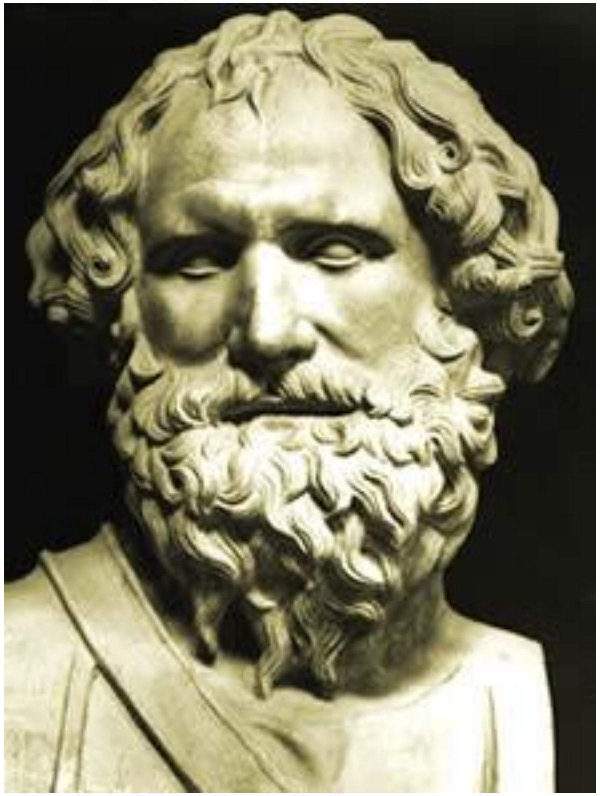
«Золотое правило» статики по-ДЕКАРТУ

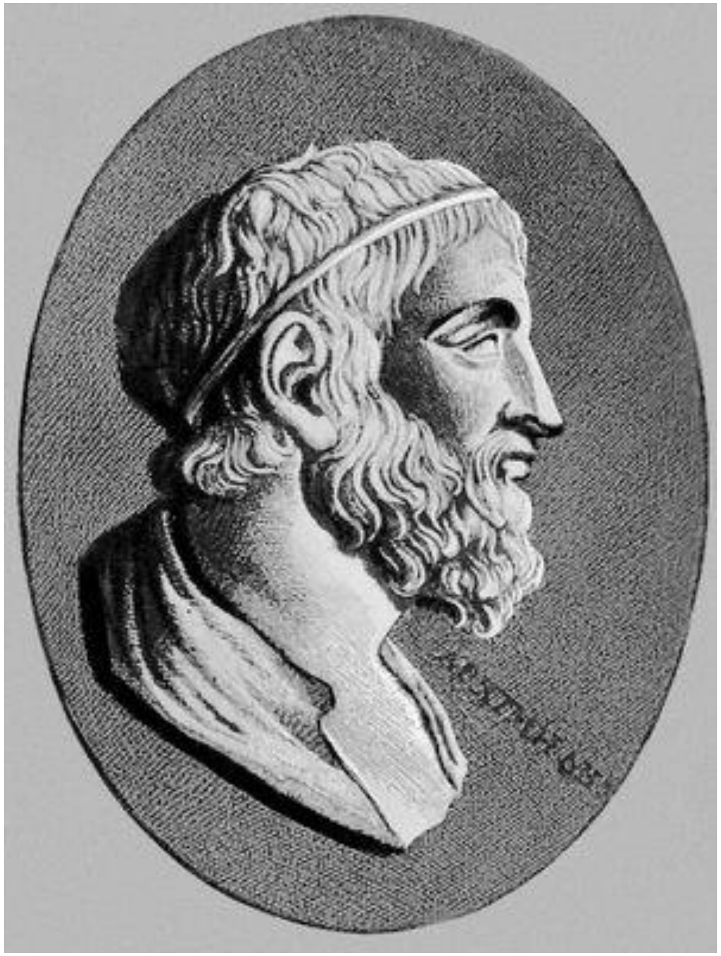
“Изобретение всех простых машин основано на одном единственном принципе, который гласит: та же сила, которая способна поднять груз, скажем, в 100 фунтов на высоту 2 футов, способна также поднять 200 фунтов на высоту 1 фута, или 400 фунтов на высоту 1/2 фута и т.д., если она будет приложена к этому грузу”.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ НАПРАВЛЕНИЕ УЧЕНИЯ О РАВНОВЕСИИ

ТРУДЫ АРХИМЕДА ПО МЕХАНИКЕ

Архимед (287-212 гг. до н.э.)






КОРСИКА
Рим
САРДИНИЯ
СИЦИЛИЯ
Карфаген
Сиракузы
АФРИКА

fondamenti e applicazioni di geometria descrittiva
rappresentazione due a.a. 2009-2010

Machine Designs by Archimedes: Drawings and Models

ResearchTeam:

Giacinto Taibi, Professor at University of Catania
Rita Valenti, Professor at University of Catania
Mariangela Liuzzo, Lecturer at University of Catania
Massimo D'Aiello, Tutor

World Conference
THE GENIUS OF ARCHIMEDES
23 Centuries of Influence on Mathematics, Science and Engineering
Syracuse (Sicily) Italy, 8-10 June 2010

Архимед (287-212 гг. до н.э.)

- До нашего времени дошли следующие сочинения Архимеда по механике:

«О равновесии плоских фигур, или о центрах тяжести плоских фигур‘»,

«Послание к Эрастосфену о механических теоремах"

«О плавающих телах»

Архимед (287-212 гг. до н.э.)

Центром тяжести некоторого тела является некоторая расположенная внутри него точка, обладающая тем свойством, что если за нее мысленно подвесить тяжелое тело, то оно остается в покое и сохраняет первоначальное положение .

Архимед (287-212 гг. до н.э.)

Всякое тяжелое тело, подвешенное за какую-нибудь свою точку, остается неподвижным в таком положении, когда **точка подвеса и центр тяжести находятся на одной отвесной линии**

Архимед (287-212 гг. до н.э.)

«О равновесии…»

- «1. Равные тяжести, подвешенные на равных длинах, уравновешиваются.
- 2. Две равные тяжести, подвешенные на различных длинах, не находятся в равновесии, и та, которая подвешена на большей длине, падает вниз.
- 3. Если две тяжести, подвешенные на данных длинах, находятся в равновесии, то, если прибавить нечто к одной из них, они уже не будут в равновесии, но та, к которой нечто прибавлено, упадет вниз.
- 4. Аналогично, если отнять нечто от одной из таких тяжестей, то они не будут в равновесии, но та, от которой ничего не отнималось, упадет вниз.
- 6. Если некоторые тяжести на некоторых расстояниях уравновешиваются, то другие равные им тяжести на таких же расстояниях так же уравновешиваются»

Архимед (287-212 гг. до н.э.)
«О равновесии плоских фигур…»

- **Постулаты 5 и 7** - о расположении ц.т. для плоской модели, не имеющей толщины пластины, имеющей одну и ту же плотность во всех своих частях. Этот поверхностный удельный вес считается для всех рассматриваемых фигур одинаковым, вследствие чего, *вес плоской фигуры пропорционален ее площади,* причем коэффициент пропорциональности считается одинаковым для всех рассматриваемых фигур.
- В постулатах 5 и 7 говорится о том, что равные и совмещающиеся при наложении фигуры имеют центры тяжести, также совмещающиеся при наложении фигур, что для подобных фигур центры тяжести расположены подобным образом и что, для *выпуклой фигуры* центр тяжести расположен *внутри нее.*

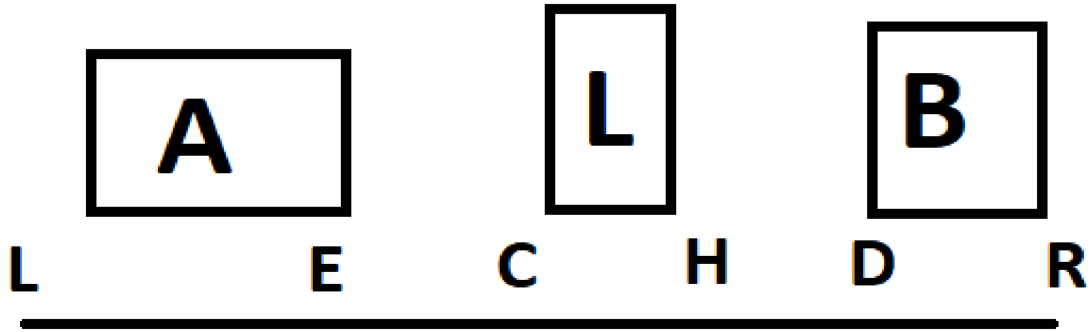
Архимед (287-212 гг. до н.э.)
«О равновесии плоских фигур…»

- **Теоремы** 4 и 5 устанавливают возможности совершать над грузами, подвешенными к рычагу, операции сосредоточения и рассредоточения этих грузов, **не меняющие расположения общего центра тяжести**, и, следовательно, не нарушающие равновесия, если это имело место до этой операции, ибо **основным критерием равновесия считается признак расположения центра тяжести подвешенного тела на вертикали, проведенной через точку подвеса**.

Архимед (287-212 гг. до н.э.)

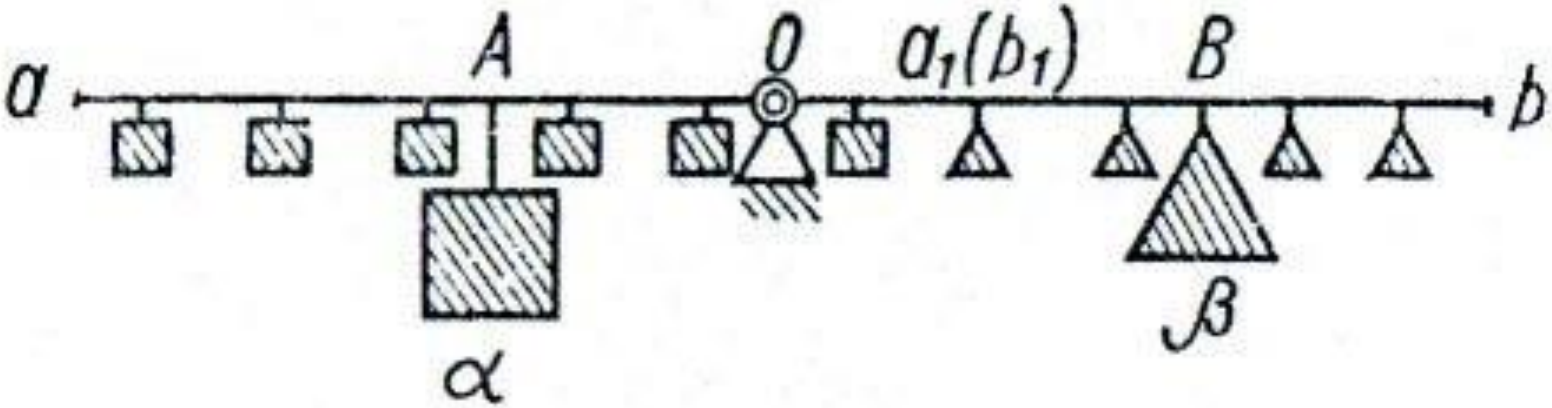
«О равновесии плоских фигур…»

Теорема 6 (с.274-276*)



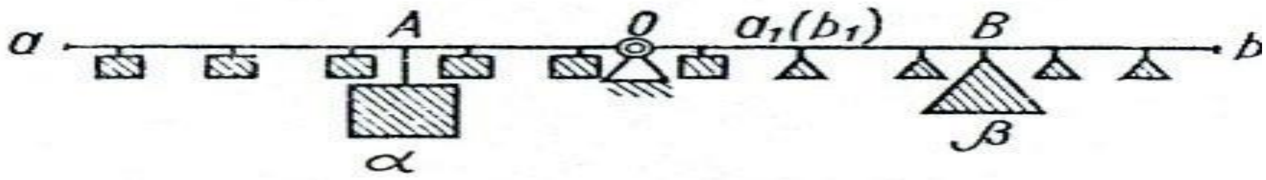
Архимед. «О равновесии…»

Теорема 6

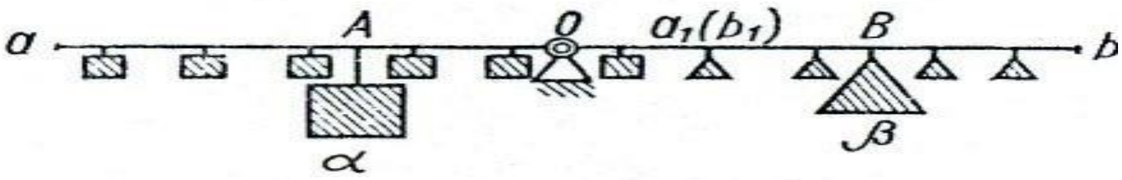


«соизмеримые величины уравновешиваются на длинах, которые будут обратно пропорциональны тяжестям»

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{OB}{OA}$$



- *AO = Bb = Bb,* в обе стороны от *B (от точки B – конца большого плеча)*
- *BO = Aa = Aa,* в обе стороны от *A (от точки A – конца малого плеча)*
- *Так получается равноплечный рычаг* ***ab****, с опорой в середине.*
- *Пользуясь пропорцией (1), Архимед рассредотачивает грузы, подвешивая* ***по половине единицы веса на единицу отрезка аа, (груз*** α ***),*** *а также и груз* β *«распыляет» по половине единицы веса на единицу длины отрезка bb, .*

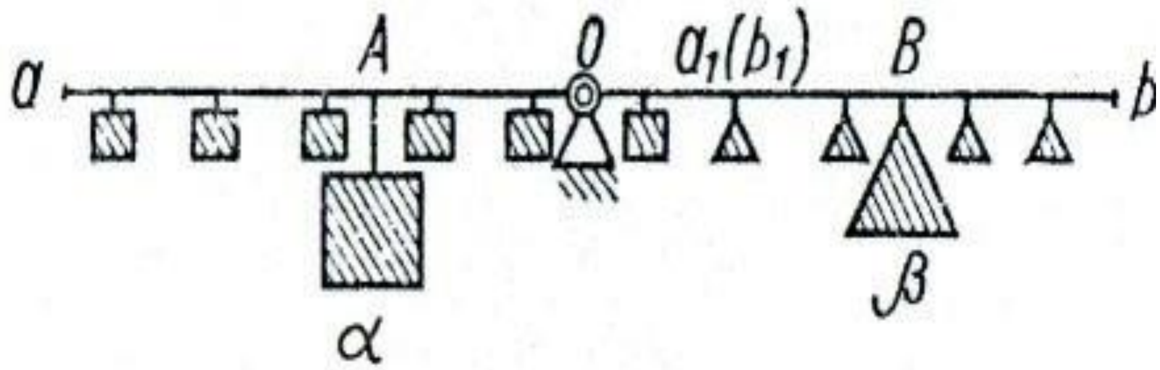


- «соизмеримые величины уравновешиваются на длинах, которые будут обратно пропорциональны тяжестям»
- *AO = Bb = Bb,* в обе стороны от *B (от точки B – конца большого плеча)*
- *BO = Aa = Aa,* в обе стороны от *A (от точки A – конца малого плеча)*
- *Так получается равноплечный рычаг **ab**, с опорой в середине.*
- *Пользуясь пропорцией (1), Архимед рассредотачивает грузы, подвешивая **по половине единицы веса на единицу отрезка aa, (груз α),** а также и груз β «распыляет» по половине единицы веса на единицу длины отрезка bb, .*

Полученный однородный стержень эквивалентен исходному неравноплечному рычагу ***AB***, т.к. по *Теореме 4* операции рассредоточения грузов α и β не могли нарушить состояния равновесия исходного рычага, то исходный рычаг ***AB*** также находится **в равновесии**.

Следовательно, исходный рычаг ***AB*** также должен пребывать в состоянии равновесия.

Архимед (287-212 гг. до н.э.)
«О равновесии плоских фигур…»



Полученный однородный стержень эквивалентен исходному неравноплечному рычагу ***AB***, т.к. по *Теореме 4* операции рассредоточения грузов α и β не могли нарушить состояния равновесия исходного рычага, то исходный рычаг ***AB*** также находится **в равновесии**.

Следовательно, исходный рычаг ***AB*** также должен пребывать в состоянии равновесия.

Архимед (287-212 гг. до н.э.)

Остальные теоремы трактата «О равновесии плоских фигур, или о центрах тяжести плоских фигур» посвящены вопросам расположения центра тяжести различных плоских фигур с однородным распределением веса по их площади:

- параллелограмма, треугольника,
- трапеции,
- параболического сегмента и пр.

Архимед
«О плавающих телах»

- В 1-й книге излагаются теоремы относительно *гидростатического давления*.

- **Два принципа**:
- **1)** *каждая часть жидкости, испытывающая меньшее давление, выталкивается соседней частью жидкости, испытывающей большее давление, и каждая часть жидкости сжимается расположенной над нею жидкостью в отвестном направлении*

Архимед
«О плавающих телах»

- **2)** *тело, погруженное в жидкость*, *выталкивается жидкостью в отвесном направлении вдоль линии, проходящей через центр тяжести тела*

- Архимед доказывает, что **поверхность жидкости**, все части которой тяготеют к центру Земли, **при равновесии имеет сферическую форму** (представление о Земле, как о сфере и направлении силы тяжести в каждой точке поверхности Земли к ее центру).

Архимед
«О плавающих телах»

- Тело , более легкое, чем равная по объему жидкость, будучи погружено в эту жидкость, выталкивается вверх с силой, равной превышению веса вытесненной жидкости над весом погруженного тела.

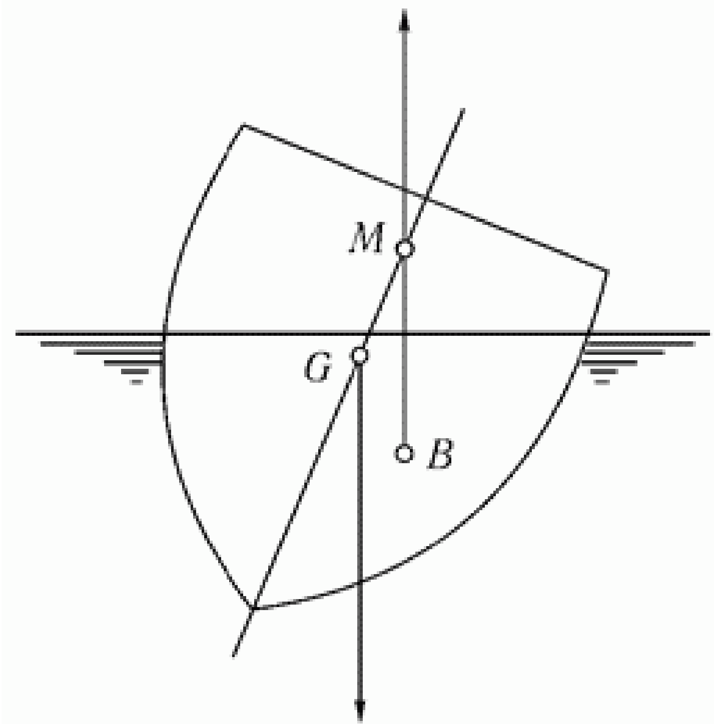
- Тела, более тяжелые, чем жидкость, в том же объеме теряют в ней часть своего веса, равную весу вытесненной жидкости
- (*архимедов закон гидростатического давления*).

Архимед
«О плавающих телах»

- Во **2-й книге** Архимед полагает, что силы тяжести во всех точках Земли параллельны друг другу, т.е. понятие центра тяжести имеет место только при таком предположении.

- Он формулирует критерий равновесия плавающего корабля. **Корабль не опрокинется, если три точки – центр тяжести всего тела, центр тяжести подводной части тела и центр тяжести надводной части тела корабля – лежат на одной отвесной прямой**
- **(***сила тяжести тела и сила гидростатического давления действуя в разные стороны могут взаимно уравновеситься***)**

(*критерий устойчивого равновесия*)


M
G
B

- Арабские ученые раннего средневековья использовали и комментировали учение Архимеда о центре тяжести, они применяли эту теорию (и особенно гидростатику Архимеда) к расчету равновесия коромысел весов (с учетом не только грузов на них, но и их собственного веса), к расчету гидростатических весов, для определения удельных весов материалов и пр.

Труды последователей Архимеда в XVI-XVII веках

Труды последователей Архимеда в XVI-XVII веках

Последователи Архимеда XVIв. объявили учение о равновесии, связанное с рассмотрением перемещений в статике, лишенным научного значения.

- Глава архимедовой школы в Италии в XVI в. **Гвидо Убальди (маркиз Дель Монте**) считал, что в вопросе о равновесии и устойчивости весов Иордан Неморарий «нагромоздил развалины».

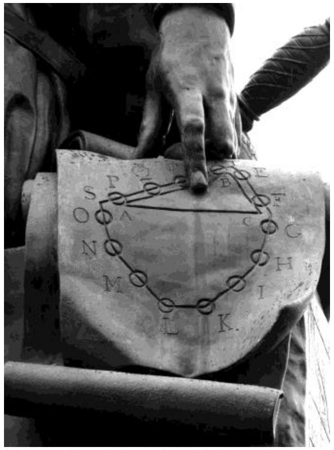
- **Симон Стевин** также резко критиковал методику оперирования перемещениями грузов при изучении равновесия:

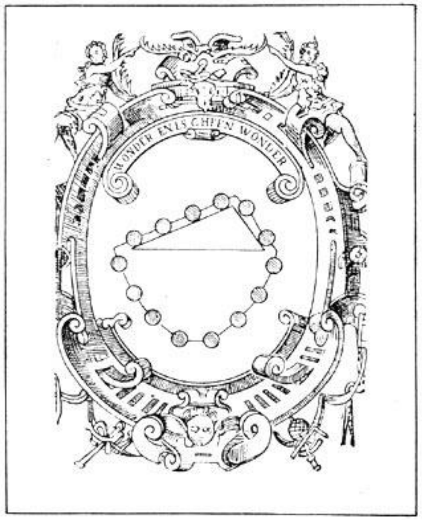
Симон Стевин (1548-1620)

Симон Стевин (1548-1620)

- Принимая за основу законы гидростатики Архимеда (его постулаты), Стевин формулирует в качестве основного постулата еще один:
- **«Давление на поверхность частичного объема жидкости не зависит от того, чем заполнен этот частичный объем, его можно мыслить твердым»** («поверхностный сосуд»).
- Из этих постулатов Стевин выводит ряд свойств уравновешенной жидкости и, в частности, **способ определения гидростатического давления на боковые стенки сосуда, важный для расчетов плотин.**

Симон Стевин (1548-1620)

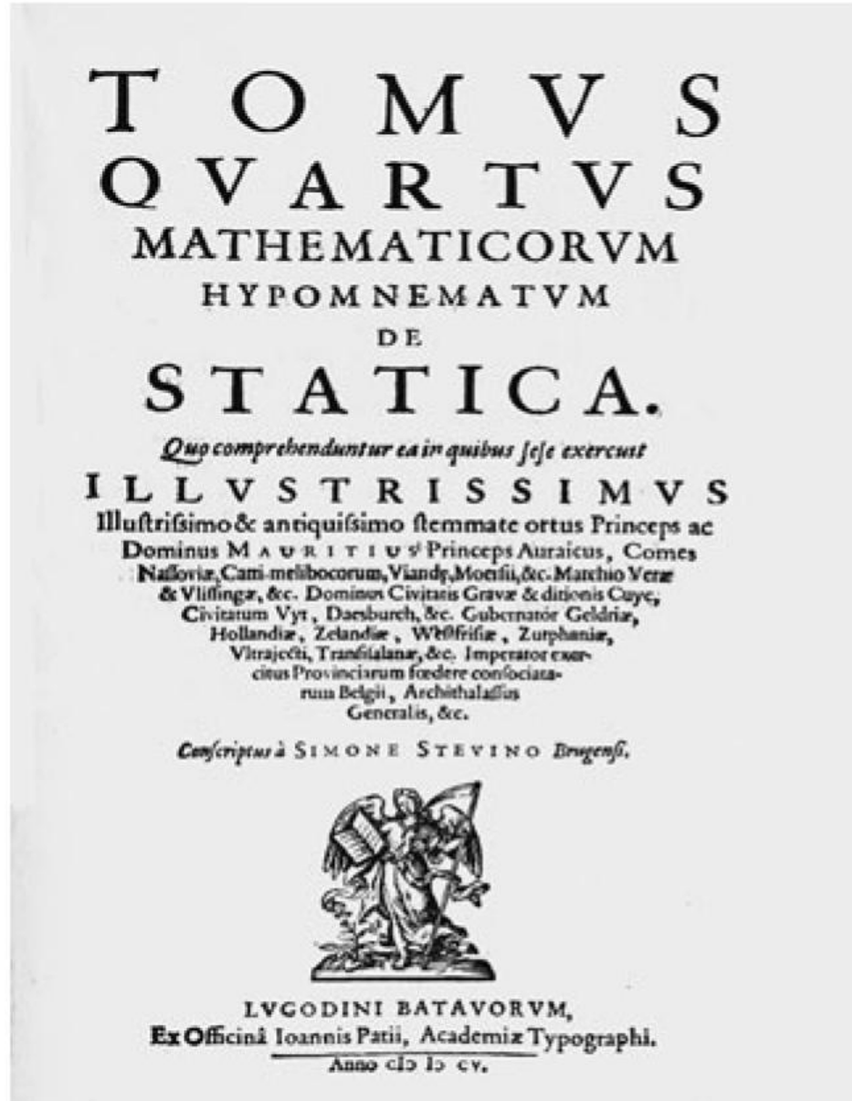




Голландское (1586) и латинское (1605) издания «**Начал статики**» Стевина

DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.

TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
cIↃ. IↃ. LXXXVI.



TOMVS
QVARTVS
MATHEMATICORVM
HYPOMNEMATVM
DE
STATICA.

Quo comprehenduntur ea in quibus sese exercuit
ILLVSTRISSIMVS
Illustrissimo & antiquissimo stemmate ortus Princeps ac Dominus MAVRITIVS Princeps Auraicus, Comes Nassoviæ, Catti-melibocorum, Viandæ, Moersii, &c. Marchio Veræ & Vlissingæ, &c. Dominus Civitatis Gravæ & ditionis Cuyc, Civitatum Vyt, Daesburch, &c. Gubernator Geldriæ, Hollandiæ, Zelandiæ, Westfrisiæ, Zutphaniæ, Vltrajecti, Transisalanæ, &c. Imperator exercitus Provinciarum foedere consociatarum Belgii, Archithalassus Generalis, &c.

Conscriptus à SIMONE STEVINO *Brugensi.*

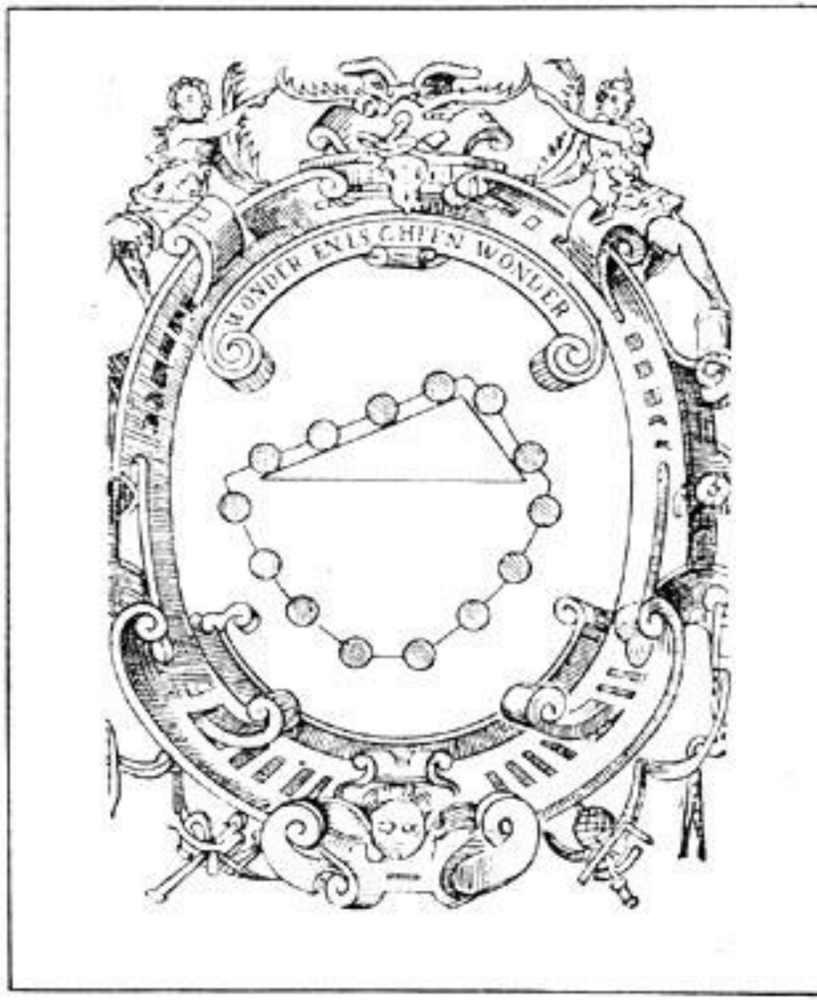
LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ Ioannis Patii, Academiæ Typographi.
Anno cIↃ IↃ CV.

Труды последователей Архимеда в XVI-XVII веках

С. Стевин «Начала статики» (1586).

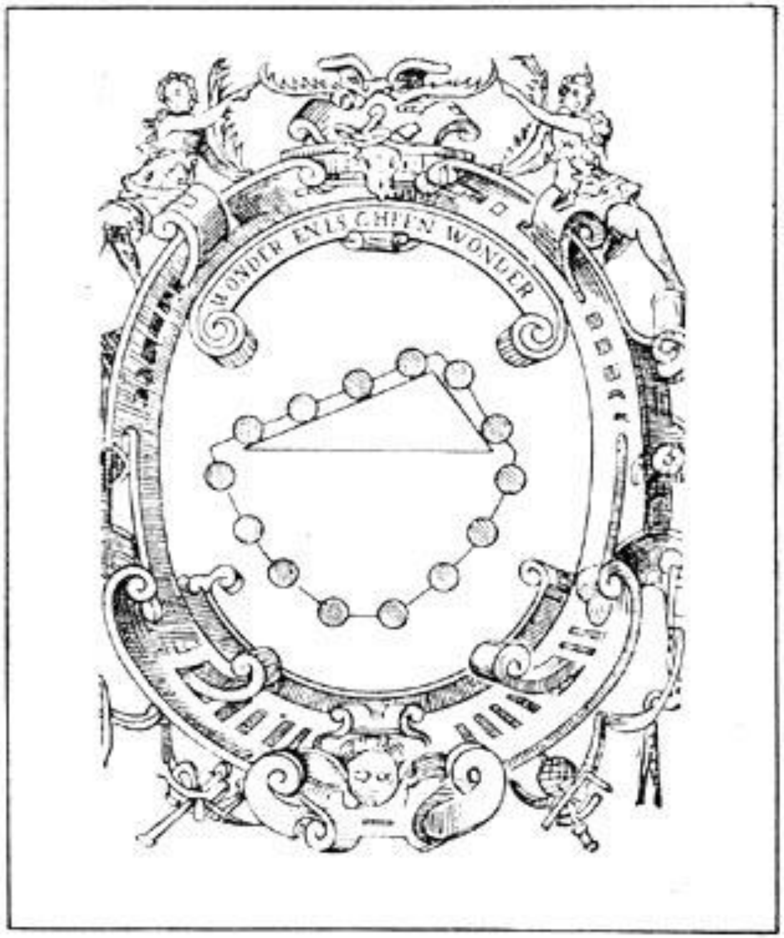
- В основу исследования равновесия тел С. Стевин полагал совокупность основных **постулатов Архимеда**

  \+ **принцип невозможности вечного движения.**



Симон Стевин (1548-1620)
«Начала статики» (1586)

- **Правило равновесия грузов на двух наклонных плоскостях**.(«Чудо не есть чудо»)
- Изображен треугольник , расположенный в вертикальной плоскости: одна его сторона – горизонтальная, две другие наклонны и правая – вдвое меньше левой. Стевин мысленно располагает на этой трехгранной призме цепь из 14 равномерно нанизанных шаров так, что 4 шара – на более длинной стороне, а 2 – на более короткой, а остальные 8 свободно и симметрично свисают.

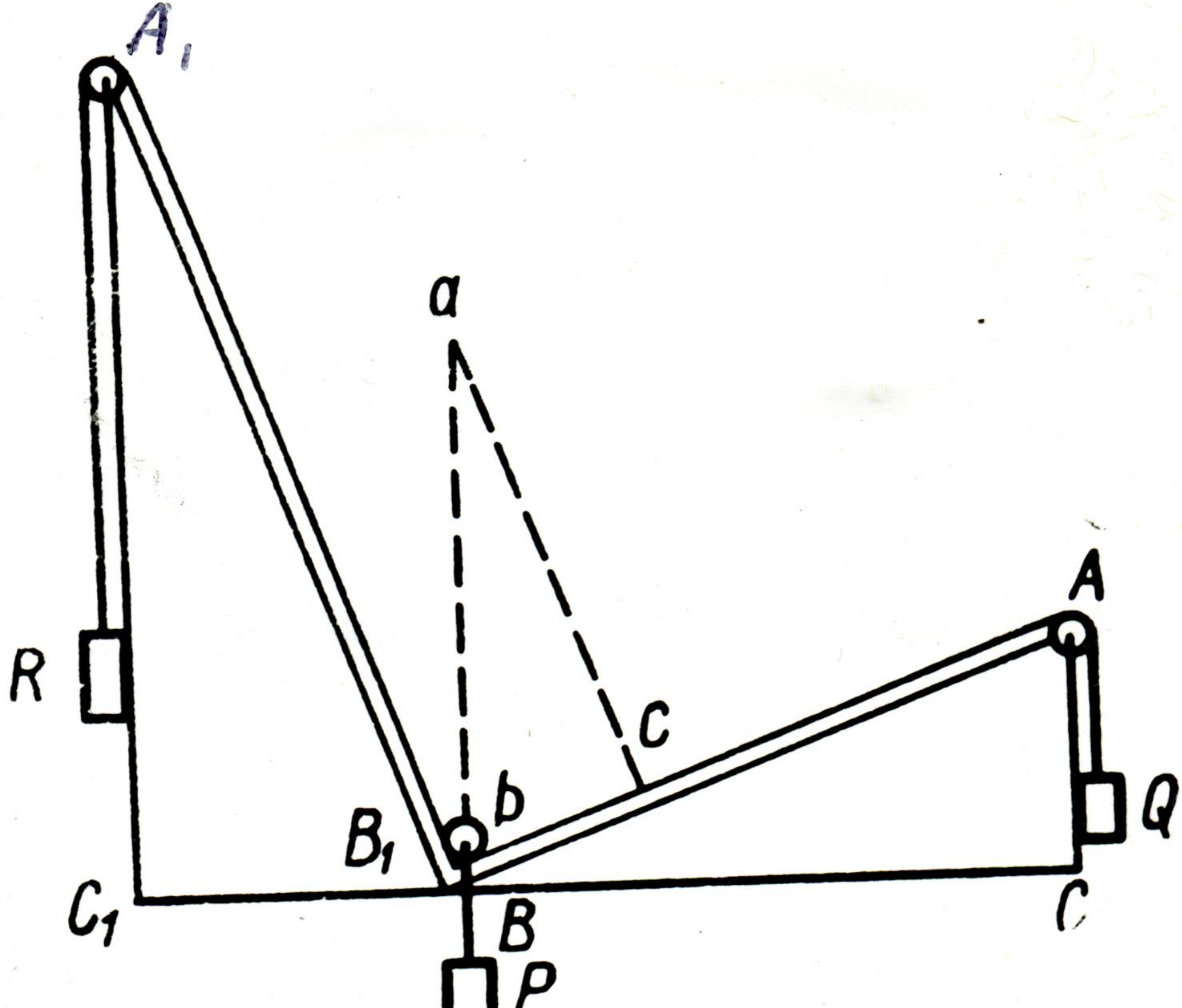


Симон Стевин (1548-1620)

«Начала статики» (1586)

(«Чудо не есть чудо»)

- Шары не могут не находиться в равновесии, т.к. вечного движения не существует. Когда, наконец, они уравновесятся, то нижняя часть цепи сама себя уравновесит (из-за симметрии), а шары на обеих плоскостях уравновесятся в **прямо пропорциональном отношении длинам наклонных плоскостей.**

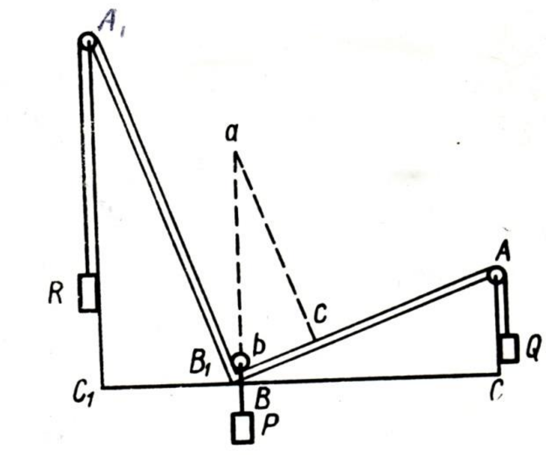


A_1
a
A
R
c
Q
b
B_1
C_1
B
C
P

Закон сложения и разложения сил у Стевина

Груз P, уравновешенный на двух нитях, составляющих между собой прямой угол. Каковы должны быть величины грузов на других концах нитей (R и Q)?

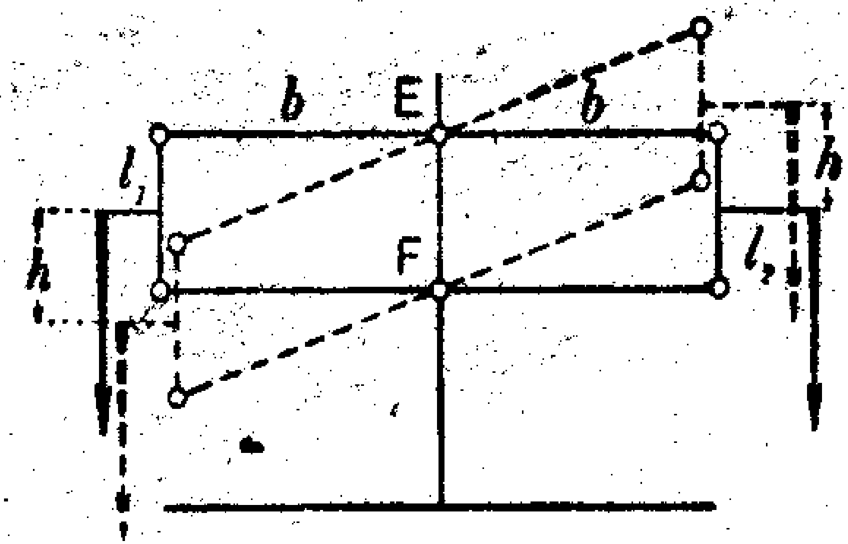
Вместо нити ***A,B,*** можно ввести наклонную плоскость ***AB*** **(она действует эквивалентно нити, перпендикулярной *AB*).** Вместо правой нити ***AB*** можно ввести другую наклонную плоскость ***A,B,.*** Рассмотрим груз ***P,*** уравновешенный противовесом ***Q*** на наклонной плоскости ***AB,*** запишем: ***Q/P=AC/AB.*** Аналогично для равновесия груза ***P*** : ***R/P=A,C,/A,B, .***
Далее Стевин откладывает на нитях отрезки, по длине равные ***P*** и ***Q,*** и строит прямоугольник с диагональю ***ab,*** доказывая, что ***ab = P***.

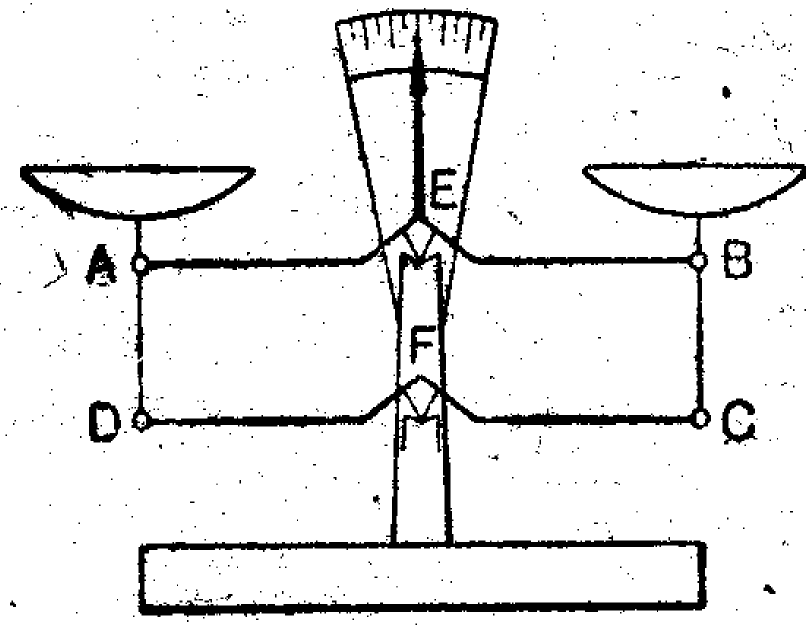


Запишем пропорциональность трех грузов, уравновешенных на нитях под прямым углом, получаем:

P : Q : R = ab : bc : ac

Схема весов Роберваля





Попытки синтеза кинематического и геометрического методов статики

Принцип Торричелли и задача о гидравлическом прессе Паскаля

Э.Торричелли 1608-1647

Э.Торричелли 1608-1647

- Трактат *Торричелли* «**О движении тяжелых тел, нисходящих естественным движением, и тел брошенных**» явился развитием идей Галилея; в частности, Торричелли переработал и дополнил таблицы стрельбы, составленные Галилеем.
- В этом же сочинении можно найти материал, относящийся к теории равновесия системы тяжелых тел, например, двух грузов, связанных нитью и помещенных на двух сомкнутых равновысоких наклонных плоскостях.
- *Основой этой теории служит следующее предложение*

Принцип Торричелли

«Когда тяжелое тело составлено так, что его центр тяжести не может никоим образом опускаться, то оно, заведомо, пребудет в покое в занимаемом им положении»

(«О движении тяжелых тел, нисходящих естественным движением, и тел брошенных»)

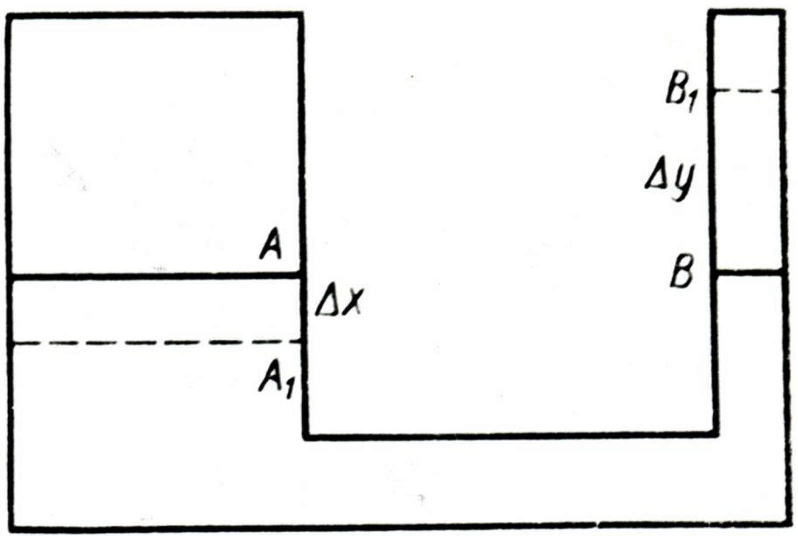
- Синтез методов кинематической статики и геометрического учения о равновесии наблюдается в XVIIв., позже это стало развиваться более эффективно.
- Уже в XVIIIв. стали трактовать принцип Торричелли - Паскаля, как требования **минимальной высоты центра тяжести системы при равновесии**, однако, математическая запись была более широкой.

Блез Паскаль 1623-1662

Блез Паскаль 1623-1662

- Б.Паскаль использует *принцип возможных перемещений и барицентрический критерий равновесия* для получения важных результатов гидростатики.
- Приведем пример его рассуждений о действии гидравлического пресса, где рассматриваются мысленные перемещения поршней для выявления поведения центра тяжести системы поршней.

Задача о гидравлическом прессе Паскаля



- Представим себе сообщающийся сосуд с широкой и узкой трубками, закрытыми поршнями A и B соответственно. Каково соотношение весов поршней при равновесии несжимаемой жидкости в сосуде?

Для ответа на поставленный вопрос Паскаль придает мысленное перемещение Δx левому поршню A, отчего правый поршень B переместился бы на высоту Δy.

Б.Паскаль «О равновесии жидкостей и о тяжести массы воздуха» 1663г.

- Из условия несжимаемости жидкости

$$S_A\,\Delta x = S_B \Delta y$$

$P_A\,\Delta x - P_B\,\Delta y = (P_A - P_B)\,\Delta_{ц.т.} = 0$ – принцип возможных перемещений;

$\Delta_{ц.т}$ – центр тяжести обоих грузов (тяжелых поршней) не перемещается: это служит условием сохранения равновесия жидкости

Следовательно, $P_A\,\Delta x = P_B\,\Delta y$ и

$$\mathbf{\Delta y/\Delta x = S_A/\,S_B = P_A\,/\,P_B}\ ,$$

т.е. силы тяжести поршней пропорциональны их площадям

- *Так теоретически обоснован принцип действия гидравлического пресса, когда весьма малой силой P_B можно поднимать весьма тяжелый груз P_A .*

Задача о гидравлическом прессе Паскаля

- Паскаль сформулировал для всей статики следующий принцип:

«Я принимаю за принцип, что никогда тело не движется под действием своего веса без того, чтобы центр тяжести его не понижался»,

т.е. необходимым условием равновесия системы тяжелых тел является **минимальность высоты ее центра тяжести**.

- **Это утверждение равносильно ранней формулировке принципа Торричелли, когда критерием истинного равновесия системы наблюдаемого в природе, признается такое состояние ее покоя, из которого любое “пробное” перемещение грузика или части системы приводит к элементарному повышению центра тяжести грузов либо к сохранению его высоты; если же на “пробном” перемещении какой-либо части цент тяжести системы стал понижаться, то система и далее будет продолжать движение (неинерционное, как сказали бы после XVIII в.).**