Лекция

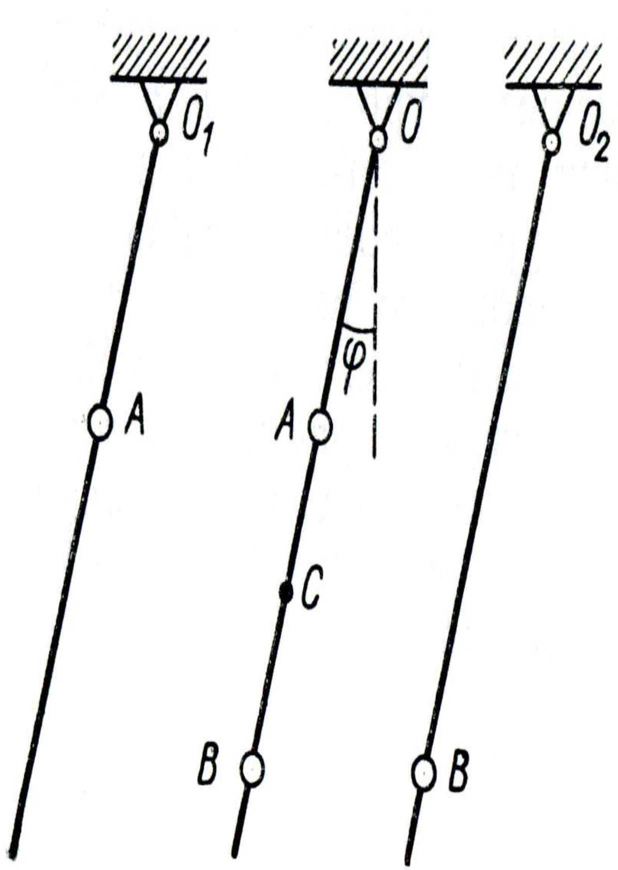
Принцип Даламбера

Разработка принципа виртуальных скоростей

Разработка принципа виртуальных скоростей в творчестве Жозефа Луи Лагранжа (1736-1813)

Я. Бернулли (1654-1705)

Задача Я.Бернулли (найти длину составного маятника *OAB*)



В составном маятнике наблюдается своеобразная передача количеств движений: груз ***A*, более близкий к точке подвеса ускоряет колебание более далекого груза *B***, **этот же последний замедляет колебание верхнего груза *A***.

Следовательно, между *A* и *B* должна существовать такая точка стержня *C*, которая не теряет и не приобретает количества движения по сравнению со свободным движением.

- Передача движений от точки *A* к точке *B* происходит по закону рычага, т. е. по закону статики.
- Я. Бернулли называл **свободными побуждениями** к движению активные силы, приводящие в движение маятник.
- Для всех трех точек *A, B и C* надо знать ускорения (в проекциях на касательные к траектории).
- **Истинные побуждения** к движению - произведение массы грузика на его тангенциальное ускорение в составном маятнике.
- **Потерянные (приобретенные) побуждения** к движению получаются вычитанием свободных и истинных побуждений к движению.

Задача Я.Бернулли

- Для точки *A* потерянное побуждение к движению равно

$$m_A g \sin\varphi(1 - OA / OC)$$

Для т. *B* приобретенное побуждение к движению равно

$$m_B g \sin\varphi(OB / OC - 1)$$

здесь φ - угол отклонения стержня от вертикали,

,

g – ускорение силы тяжести,

m_A m_B - массы точечных грузов.

$$OC = \frac{m_A OA^2 + m_B OB^2}{m_A OA + m_B OB}$$

Ж.Даламбер (1717-1783)

- 1735- окончил Коллеж Мазарини
- 1743 -«Трактат динамики…»
- 1744 – «Трактат о равновесии и движении жидкостей»
- 1775-1777- опыты по опред. сопротивл. тел, движущихся в каналах и в безграничной жидкости *(Н.Кондорсе, Ш. Боссю)*
- 1751-1757 – «Энциклопедия наук, искусств и ремесел» (с *Д.Дидро*)

Даламбер «Динамика…»

- Цель этого принципа – «…показать, каким образом все задачи динамики можно решать одним и при том весьма простым и прямым методом»
- 2-я часть «*Общий принцип для нахождения движения многих тел, произвольным образом действующих друг на друга, а также некоторые применения этого принципа*»
- Этот новый пр-п необходим для решения некоторых задач, например, дв-я тел, соударяющихся произвольным образом;

  дв-я тел, которые тянут друг друга при помощи нитей или стержней и др.

Ж. Даламбер «Динамика» (1743)

- Пусть дана система тел *A, B, C,…* и т.д. и пусть телам сообщены движения *a, b, d, c,…* и т.д., которые из-за связности тел видоизменяются в движения $a_1, b_1, c_1 ...$ тогда сообщенные движения *a, b, c,…* можно представить как геометрические суммы: $a = a_1 + \alpha,$ $b = b_1 + \beta,$ $c = c_1 + \gamma$

где α, β, γ - геометрические составляющие исходных движений

Ж. Даламбер «Динамика» (1743)

- «Другими словами, - говорит Даламбер,- если бы тела получили только эти движения α, β, γ … и т.д., то эти движения взаимно уничтожились бы и тела оставались бы в покое»

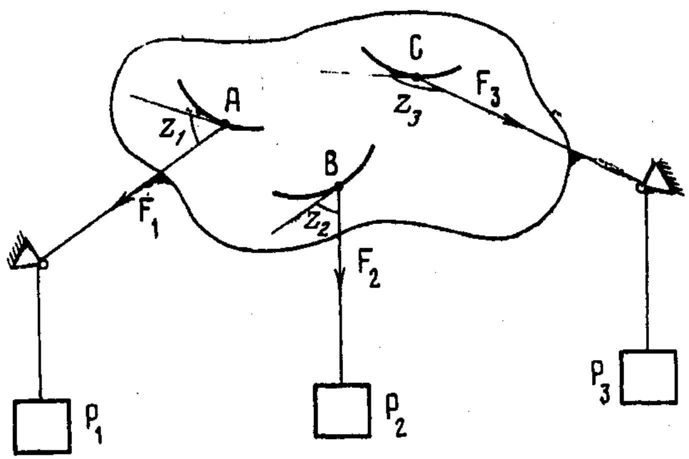
(α, β, γ - их позже стали трактовать как потерянные силы).

Формы принципа Даламбера

- Эйлер более ясно выражает связь этого метода с соотношениями статики :

  « **И так как эти подставленные силы (произведения масс точек на их тангенциальные ускорения.) должны быть эквивалентны силам, действующим на тело, то из статики ясно, что если вместо них взять силы, равные по величине, но прямо противоположные по направлению, то тело должно быть в равновесии... Таким образом, все исследование, касающееся колебательных движений тел, приводится к принципам статики»**.

Лазар Карно (1753 -1823)



$$SF_i \cdot u_i \cdot \cos z_i = 0$$

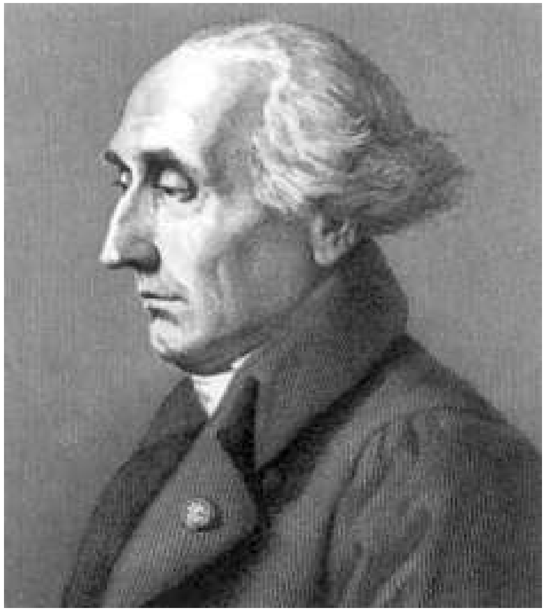
- Необходимое и достаточное условие равновесия системы состоит в том, что **сумма работ активных приложенных сил для каждого возможного перемещения системы должна быть равна нулю**:

- Карно придавал большое значение суммарному «**моменту активности**» в теории машин, подчеркивая, что это количество нужно по возможности экономить, чтобы извлечь наибольший полезный эффект при действии машины.

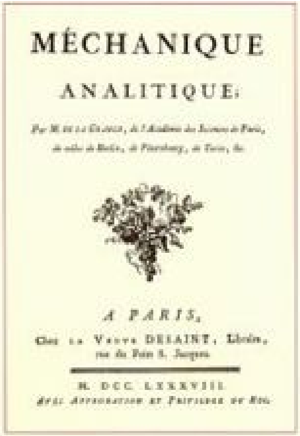
Ж. Лагранж (L.Lagrange) (1736-1813)

Необходимое условие равновесия сил, приложенных к механической системе

«Если какая-либо система любого числа тел, или точек, на каждую из которых действуют любые силы, находится в равновесии и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными»



1788 – «Аналитическая механика»

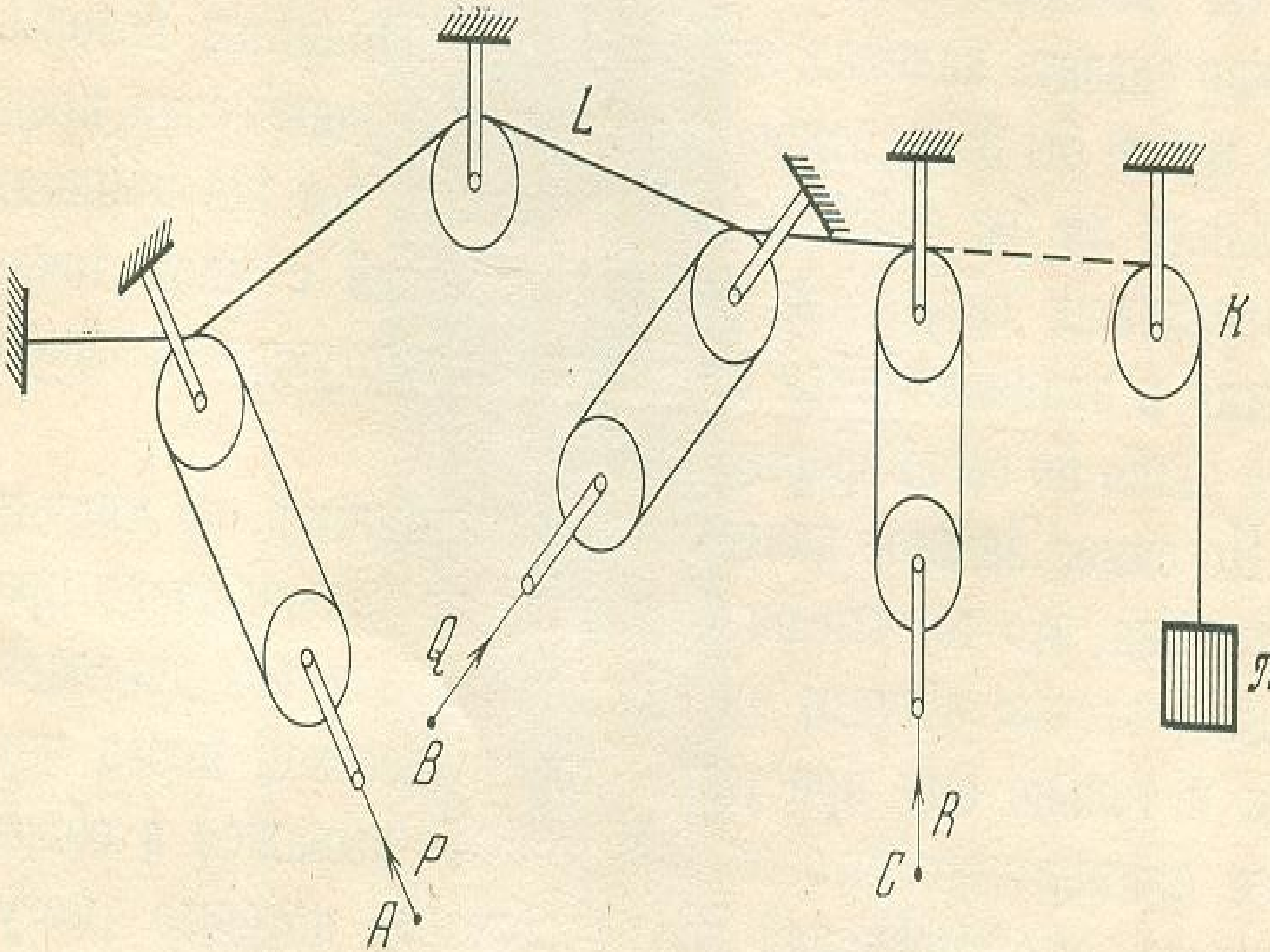


MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

A PARIS,

M. DCC. LXXXVIII.


L
K
π
Q
B
P
A
R
C

Лагранж обозначает через α, β, γ... возможные бесконечно малые смещения точек системы вдоль линии действия сил P, Q, R... Тогда высота h, на которую груз мог бы опуститься, выражалась бы так:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = \frac{h}{2}.$$

Необходимым условием равновесия системы является равенство нулю величины h, т. е.

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = 0.$$

- Достаточность этого условия Лагранж доказывает только для двусторонних связей.
- Если допустить, что это равенство имеет место, то оно должно удовлетворяться

как положительными перемещениями, так и отрицательными, и, таким образом, не существует никаких оснований для того, чтобы равновесие было нарушено в ту или другую сторону.

Следовательно, должно иметь место равновесие.

Сумма работ активных сил для возможных перемещений точек их приложения должна быть равна нулю

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots = 0$$

- Далее Лагранж поясняет, как пользоваться этой формулой для расчета состояния равновесия системы: сначала рассматривается случай системы, допускающий поступательное или вращательное движение без изменения относительного взаимного расположения точек системы.
- В отделе третьем Лагранж вводит функцию *П*, являющуюся потенциальной энергией системы, хотя он этого термина не употреблял.
- Необходимое и достаточное условие равновесия системы под действием консервативных сил характеризуется экстремумом этой функции. При этом Лагранж доказывает, что положение равновесия, соответствующее *минимуму* функции *П*, *устойчиво*, а *максимуму* — *неустойчиво*.

«Аналитическая механика» (1788, 1811 – 2-е изд.)

- «Динамика - это наука об ускоряющих и замедляющих силах и о переменных движениях, которые они должны вызывать»
- Лагранж придал аналитическую форму так называемым «потерянным силам», введенным Даламбером, под действием которых материальная система находится в состоянии равновесия; в каждой материаль-ной точке массой составляющие потерянных сил принимают вид:

$$X_i - m_i \ddot{x}_i \qquad Y_i - m_i \ddot{y}_i \qquad Z_i - m_i \ddot{z}_i$$

Формы принципа Даламбера

- Эйлер более ясно выражает связь этого метода с соотношениями статики :

  « **И так как эти подставленные силы (произведения масс точек на их тангенциальные ускорения.) должны быть эквивалентны силам, действующим на тело, то из статики ясно, что если вместо них взять силы, равные по величине, но прямо противоположные по направлению, то тело должно быть в равновесии... Таким образом, все исследование, касающееся колебательных движений тел, приводится к принципам статики»**.

  Принцип Германа-Эйлера есть не что иное, как форма принципа Даламбера. Современная формулировка пр-па Даламбера, использующая термин сил инерции, эквивалентна предложению Эйлера.

Общая формула динамики

- **Лагранж применяет принцип виртуальных перемещений к потерянным силам, которые (по Даламберу) пребывают в равновесии. Он неявно считает связи идеальными, т.е.**

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \delta r_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0$$

X_i, Y_i, Z_i **проекции результирующей активных сил в каждой точке на декартовы оси координат,** $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ **проекции ускорения точки в той же системе.**

«Аналитическая механика» (1788)

Аналитическая запись составляющих для ускорения точки (по терминологии XVIII в. «ускоряющей силы») показывает, что по-Лагранжу **сила пропорциональна ускорению:**

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$$

Из общей формулы динамики Лагранж вывел три фундаментальных теоремы динамики системы.

Принцип наименьшего действия

- Любая из трех общих теорем справедлива для **любой** материальной системы, так как от связей можно освободиться, применив так называемый **принцип освобождаемости от связей.**
- Обычно **вводят силы реакций связей и считают систему свободной, если к активным силам добавить силы реакции связей.**
- У Лагранжа - метод неопределенных множителей
- Вариационный принцип наименьшего действия был введен в 1744 г. в работах астронома и механика **П. Мопертюи**. Он считал, что количество действия в механических, оптических и некоторых других явлениях природы расходуется минимально.
- Мерой действия, по Мопертюи, была **сумма произведений количеств движения частиц на элементы пройденных расстояний**.
- Действие, по Мопертюи, должно быть минимальным в истинных движениях по сравнению с кинематически возможными;

Лагранж ввел величину действия для материальной системы, суммируя (интегрируя) величину действия, введенную Эйлером, **для всех точек (частиц) системы:**

$$A = \sum m_i \int_A^B v_i ds_i = \int_{t_A}^{t_B} m_i v_i^2 dt = \int_{t_A}^{t_B} 2T dt$$

- Лагранж, утверждает, что **истинное движение системы отличается от ее возможных движений, тем, что вариация действия для истинного движения равна нулю.**
- Лагранж сумел вывести этот принцип из общей формулы динамики.
- **Класс сравнимых движений при варьировании переменных характеризуется изоэнергетичностью: не только для каждого «окольного пути» выполняется интеграл энергии, но постоянная полной энергии *h* сохраняет свою арифметическую величину для всех сравнимых движений.**

Уравнения Лагранжа «второго рода»

- Вводятся обобщенные параметры или координаты, число которых равно числу степеней свободы системы, т.е. меньше или равно числу обыкновенных координат.
- Выразив обычные координаты через обобщенные или независимые параметры, Лагранж подставляет соответствующие выражения для координат, скоростей и ускорений в общую формулу динамики. Вынося за скобки вариации независимых (обобщенных) параметров, он приравнивает нулю каждую скобку, используя полную произвольность и независимость вариаций обобщенных координат.

Уравнения Лагранжа «второго рода»

Пусть q_i- обобщенные параметры;

T –кинетическая энергия системы, *U* - силовая функция, *l* - число степеней свободы, тогда:

(i=1,2,…,l)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Если поставлена задача Коши, то можно найти единственное решение системы дифференциальных уравнений 2-го порядка.

«Аналитическая механика» (1788)

Дифференциальные уравнения первого рода:

$$X_i - m_i \ddot{x}_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_i} + \ldots = 0,$$

$$Y_i - m_i \ddot{y}_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_i} + \ldots = 0$$

$$Z_i - m_i \ddot{z}_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_i} + \ldots = 0$$

«Аналитическая механика» (1788)

Кроме *3n* неизвестных x_i, y_i, z_i
как функций *t*, для определения множителей Лагранжа $\lambda, \mu, \nu \ldots$
привлекаются *k* уравнений связей

$$L(x_i, y_i, z_i) = 0 \qquad M(x_i, y_i, z_i) = 0$$

- Заметим, что связи, рассматриваемые Лагранжем при выводе обеих форм дифференциальных уравнений, в современной терминологии являются геометрическими или голономными, что видно из контекста.

«Аналитическая механика» (1788)

- Лагранж смог все многообразие механических явлений облечь в единую формулу. В этой общей формуле динамики заключена
- теория движения и равновесия небесных и земных тел,
- гидростатика и гидродинамика,
- динамика твердого тела, значительно продвинутая в сочинении Лагранжа ``Аналитическая динамика'',
- теория малых колебаний;
- условие устойчивости консервативной системы; построена теория устойчивости невозмущенного

Выдающийся инженер, механик, математик и историк механики А.Н. Крылов, считал:

- …Лагранж был прав, что не останавливаясь на частностях, придал своему изложению самую общую аналитическую форму; поэтому его методы одинаково приложимы и к расчету движения небесных тел, и к качаниям корабля на волне, и к расчету гребного вала на корабле, и к расчету полета 16-дюймового снаряда, и к расчету движения электрона в атоме.