

# **Лекция 14-15**

# **Разработка принципа виртуальных скоростей**

## Лазар Карно (1753 -1823)



## Лазар Карно (1753 -1823)

- 1783г. - Л.Карно «Опыт о машинах вообще»
- 1803г. – «Общие принципы равновесия и движения» (3-е издание )
- Вывод **условия равновесия (а затем и условия движения) обобщенной машины или механической системы со связями методом расчета баланса виртуальной мощности.**

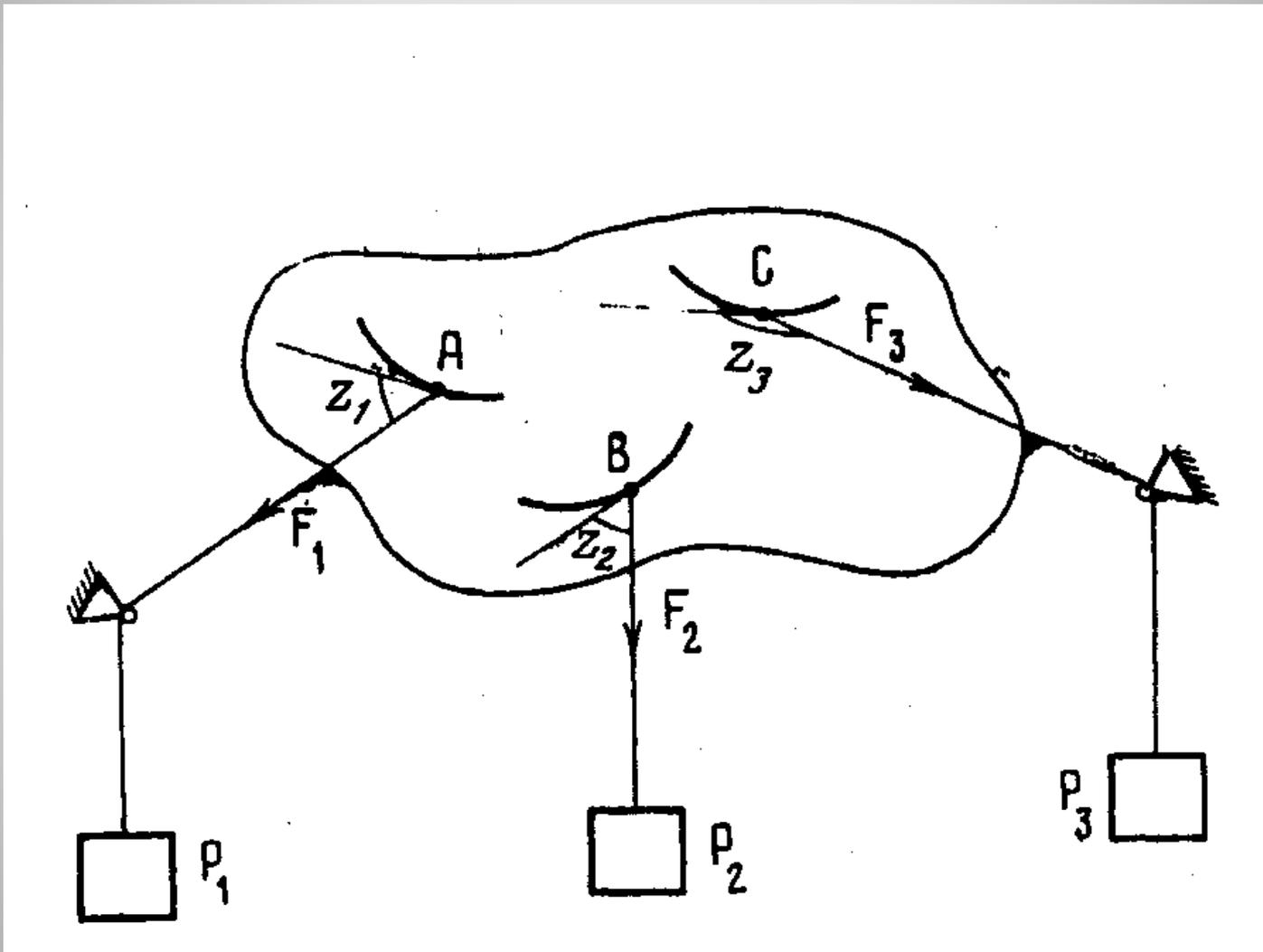
- **Понятие Карно «геометрического движения» соответствует абстракции виртуального перемещения точки или бесконечно малого ее перемещения, допустимого связью в данный момент времени.**

$$SF_i \cdot u_i \cdot \cos z_i = 0$$

## Разработка принципа виртуальных скоростей

- Идея вводить **заменяющую схему грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины,** использовалась многими учеными парижской Политехнической школы для обоснования принципа возможных перемещений.

# Заменяющая схема грузов Карно



- Необходимое и достаточное условие равновесия системы состоит в том, что **сумма работ активных приложенных сил для каждого возможного перемещения системы должна быть равна нулю**:  $SF_i \cdot u_i \cdot \cos z_i = 0$

- Карно придавал большое значение суммарному «**моменту активности**» в теории машин, подчеркивая, что это количество нужно по возможности экономить, чтобы извлечь наибольший полезный эффект при действии машины.

## Лазар Карно (1753 -1823)

- 1753 г., 13 мая – Родился в г. Нолэ (Франция) в семье адвоката
- 1771-73 – Мезьерская школа, начал службу в чине инженер-поручика в г.Кале
- 1782 – книга «Опыт о машинах вообще»
- 1791 – депутат Национального Собрания
- 1792 – член Конвента
- 1793 – член «Комитета общественного спасения»
- 1794 – избран Президентом Конвента
- 1793-95 – руководил обороной Французской Республики от интервенции коалиции европейских монархий. Создание 14 армий.
- 1795 – избран в Институт Франции (Академия наук)- класс физ-мат наук
- 1795-97 – Член Директории

## Лазар Карно (1753 -1823)

- 1796 – рождение старшего сына С. Карно – будущего основателя термодинамики
- 1797 – «Фрюктидор»: бегство в Швейцарию.
- Исключение из Академии наук.
- 1797-1800 – пребывание в Швейцарии; первая эмиграция
- 1800 – военный министр Консульства.
- Вторичное избрание в АН.
- 1803 – «Основные принципы равновесия и движения»
- 1802-1813 – многочисленные экспектизы по различным предложениям, поступающим на отзыв в Нац. Институт
- 1810- «Об обороне крепостей»
- 1814 – руководство обороной Антверпена

## Л. Карно в битве при Ватиньи



## Лазар Карно (1753 -1823)

- 1815 – министр внутренних дел в правительстве Наполеона («100 дней»).
- 1815 – изгнание из Франции после вторичной реставрации Бурбонов;
- 2-я эмиграция, вторичное исключение из АН
- 1816 – визит в Варшаву; отъезд в Пруссию
- 1816-23 – жизнь в эмиграции (Магдебург, Пруссия)
- 1823 г., 2 авг. – смерть и похороны в Магдебурге
- 1883 г.- прах перенесен в Пантеон в Париж

## Лазар Карно (1753 -1823)



- Подробно исследуя явление удара, Карно выводит уравнение сохранения суммарного количества движения соударяющихся тел, а затем приходит к **теореме**, носящей его имя: **при соударении произвольного числа жестких тел сумма живых сил перед соударением равна сумме живых сил после удара, сложенной с суммой живых сил отдельных тел, если бы они свободно двигались со скоростями, потерянными в процессе удара.**
- В современной терминологии эта теорема Карно верна для абсолютно неупругих ударов.

## Лазар Карно (1753 -1823)

- Идея механической машины «вообще» и идеальной машины, как образца для сравнения с реальной
- Концепция о безударной передаче «живой силы» в машинах при  $\Delta v \rightarrow 0$
- Положение о потере «живой силы» при трении и ударе.
- Идея о КПД (effet utile) равном 100% у идеальной машины.

**Разработка принципа виртуальных  
скоростей в творчестве  
Жозефа Луи Лагранжа (1736-1813)**

## Ж. Лагранж (L.Lagrange) (1736-1813)



## **Ж.Л.Лагранж (1736-1813)**

- Родился 25 января 1736г. В Турине
- Туринский университет; «Записки Туринской академии наук» (статья о распространении звука)
- Переписка с Л. Эйлером
- 1756 – ин. член Берлинской АН
- 1764- «Исследование о либрации Луны» (1-я премия Парижской королевской академии наук)
- 1766-1787 – директор физ-мат класса Берлинской АН
- 1766 – иссл-е о движении спутников Юпитера (премия Парижской королевской академии наук)
- 1772 – поч. чл. Парижской королевской АН
- 1776 – поч. член Петербургской АН

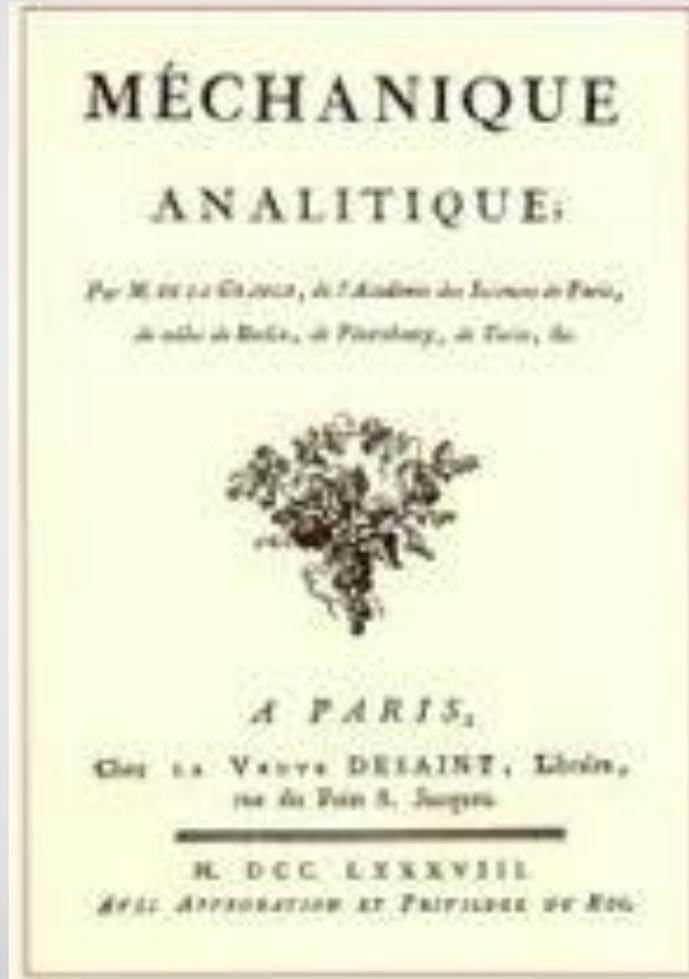
- **1788 – «Аналитическая механика»**
- 1787 – переезд во Францию
- Бюро консультаций по вопросам прикладного искусства и ремесел (организованного якобинским Конвентом),
- Комиссия по разработке метрической системы,
- Лагранж был мобилизован на решение проблем обороны Франции
- администратор Монетного двора Франции

## **Ж.Л.Лагранж (1736-1813)**

- Участие в создании (по замыслу Конвента) Нормальной и Политехнической школ,
- 1797 - «Теория аналитических функций»
- 1801 - «Лекции по исчислению функций»
- 1813 - орден Почетного легиона.
- 10 апреля 1813г. Лагранж скончался.

- Для обоснования принципа возможных перемещений Лагранж использует идею вводить **заменяющую схему грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины**

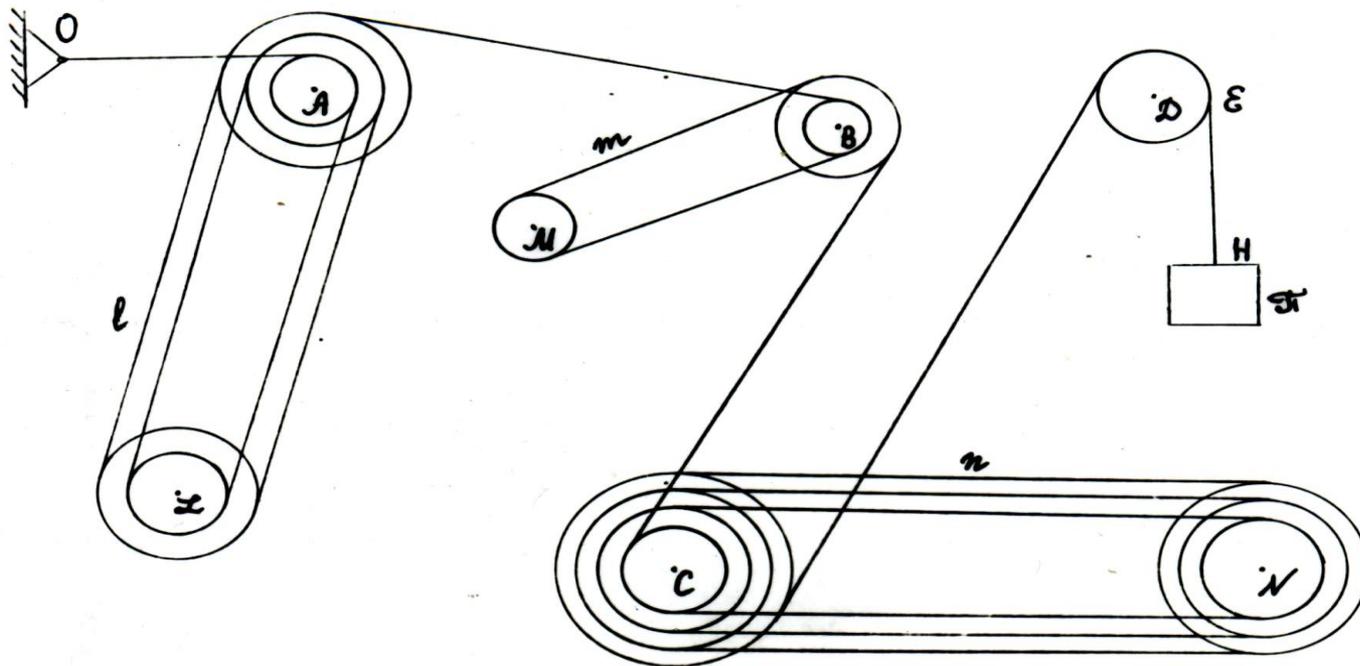
# Ж.Лагранж «Аналитическая механика»1788



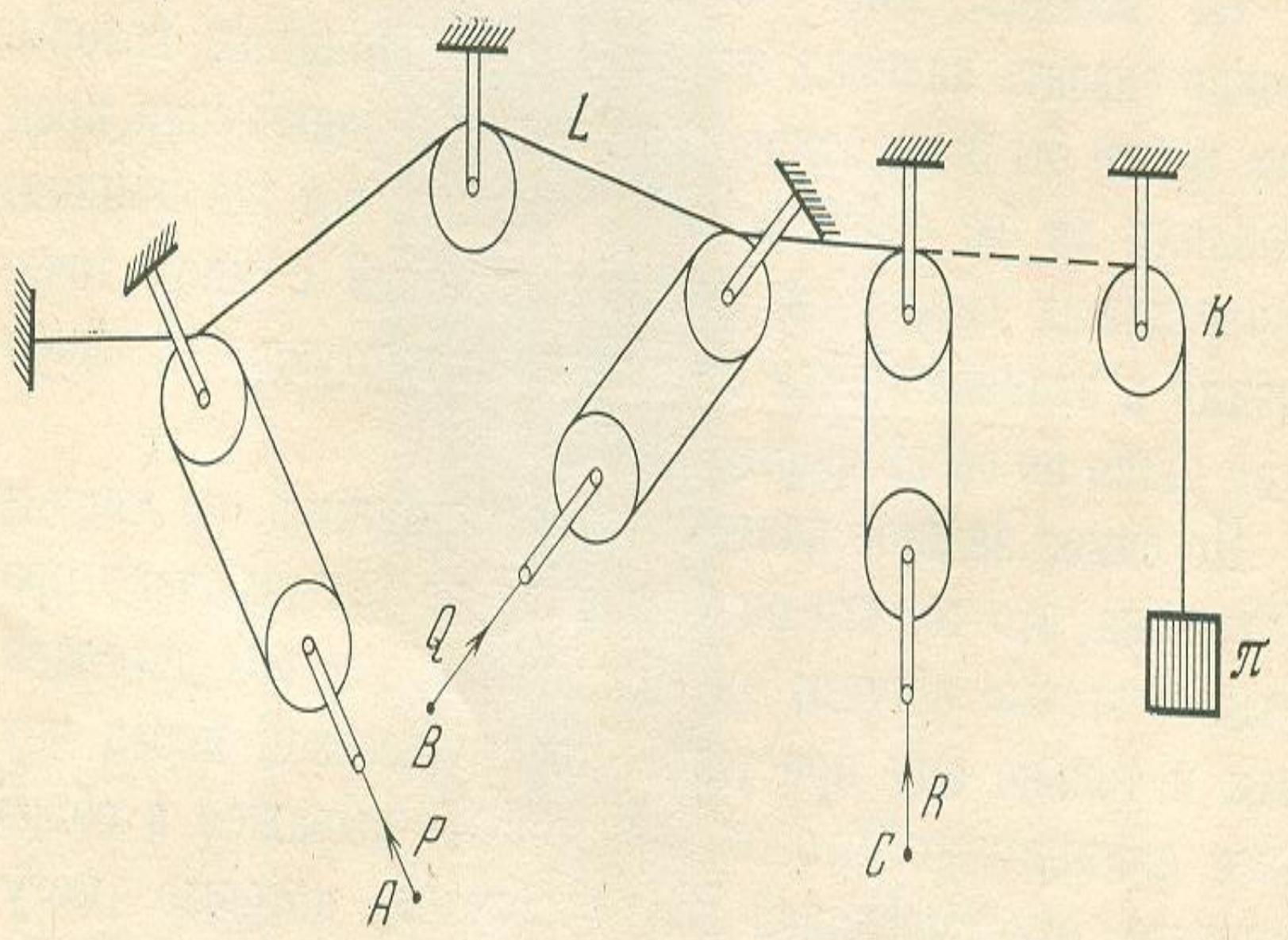
- Тракат Лагранжа «Аналитическая механика» (1788) начинается со статики, с научно-исторического исследования «О различных принципах статики». Проследив историю развития основных принципов статики — принципа рычага, принципа сложения и разложения сил, принципа виртуальных скоростей, Лагранж приходит к выводу, что два первых принципа могут быть выведены из третьего — самого общего принципа статики.

## *Необходимое условие равновесия сил, приложенных к механической системе*

**«Если какая-либо система любого числа тел, или точек, на каждую из которых действуют любые силы, находится в равновесии и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными»**



**Основанием для принципа виртуальных скоростей Лагранж считает принцип блоков, или принцип полиспастов.**



Лагранж обозначает через  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  возможные бесконечно малые смещения точек системы вдоль линии действия сил  $P, Q, R \dots$ . Тогда высота  $h$ , на которую груз мог бы опуститься, выражалась бы так:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots = \frac{h}{2}.$$

Необходимым условием равновесия системы является равенство нулю величины  $h$ , т. е.

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \dots = 0.$$

## Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- Достаточность этого условия Лагранж доказывает только для двусторонних связей.
- Если допустить, что это равенство имеет место, то оно должно удовлетворяться как положительными перемещениями, так и отрицательными, и, таким образом, не существует никаких оснований для того, чтобы равновесие было нарушено в ту или другую сторону.  
Следовательно, должно иметь место равновесие.

- Общая формула статики:

$$P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots = 0$$

**Сумма работ активных сил для возможных перемещений точек их приложения должна быть равна нулю**

- Далее Лагранж поясняет, как пользоваться этой формулой для расчета состояния равновесия системы: сначала рассматривается случай системы, допускающий поступательное или вращательное движение без изменения относительного взаимного расположения точек системы.
- В отделе третьем Лагранж вводит функцию  $P$ , являющуюся потенциальной энергией системы, хотя он этого термина не употреблял.
- Необходимое и достаточное условие равновесия системы под действием консервативных сил характеризуется экстремумом этой функции. При этом Лагранж доказывает, что положение равновесия, соответствующее *минимуму* функции  $P$ , *устойчиво*, а *максимуму* — *неустойчиво*.

В отделе четвертом Лагранж выводит условия равновесия для систем со связями и дает метод, называемый сейчас методом неопределенных множителей Лагранжа.

В отделе пятом рассматривается применение этого метода и общей формулы статики к решению отдельных конкретных задач о системах материальных точек, связанных нитями или стержнями, жесткими или упругими, о равновесии упругой пластинки, о равновесии твердого тела под действием любой системы сил.

В последующих отделах излагается гидростатика.

- Учение о равновесии механической системы, включая гидростатику идеальной (несжимаемой и сжимаемой жидкости), изложено Лагранжем единообразным методом, с большим числом разработанных им приложений.
- Этот новый системный метод получил после Лагранжа широкое распространение и именуется **аналитической статикой**.

- Отметим, что обобщенные силы у Лагранжа не являются векторами, поэтому вопросы приведения систем к простейшему виду полностью выпадают из рассмотрения. Связи у Лагранжа являются связями идеальными. Поэтому совершенно естественно, что на практике к изложению Лагранжа пришлось добавить большое количество материала весьма разнородного качества: произошло разделение механики на теоретическую и техническую.
- Принцип виртуальных скоростей Лагранжа был создан не в 1788 г., когда вышла «Аналитическая механика». Первое упоминание о нем встречается в мемуаре о либрации Луны (1764 г.), помещенном в трудах Парижской Академии.