МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

ЛЕКЦИИ С. Б. СТЕЧКИНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Том I

Москва 2012 год

УДК 517.

Рецензент — Доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Тихомиров

ЛЕКЦИИ С. Б. СТЕЧКИНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. Том I. / Под редакцией Т. В. Радославовой, Н. Н. Холщевниковой.– М.: Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2012 – 304 с.

Книга – результат обработки конспектов лекций по математическому анализу профессора С. Б. Стечкина, прочитанных на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова в 1967 – 1969 годах – в пору расцвета механико-математического факультета – и получивших высокую оценку его слушателей. Книга предназначена для преподавателей и студентов, изучающих математический анализ и, несмотря на давность лет, может вызвать значительный интерес.

Напечатано по инициативе кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ при поддержке механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сергей Борисович Стечкин. Рисунок В. И. Бердышева.

Предисловие

Несколько лет назад на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова было высказано пожелание издать лекции лучших лекторов прошлых поколений, читавших на кафедре курсы математического анализа, в том числе лекции выдающегося математика и замечательного лектора профессора Сергея Борисовича Стечкина.

Раскрытие перед слушателями логики и перспектив развития математического знания, обращение к литературным афоризмам, меткие выражения, подчеркивающие смысл обсуждаемых понятий и доказательств, выделяли эти лекции из других курсов.

Данный текст появился из расшифровки и минимального редактирования студенческих конспектов А.Б. Кукаркина, Б.С. Стечкина и Н.Н. Холщевниковой. Прочитали текст и сделали много полезных замечаний В.С. Панферов и И.Г. Царьков. Подготовили рисунки А.С. Кочуров и Ю.В. Малыхин. Оказали техническое содействие и помощь в применении системы TEX А.С. Кочуров, Ю.В. Малыхин и А.С. Стечкина. Любезно предоставил для печати свой рисунок В.И. Бердышев (см. с. 3).

Все мы благодарны за внимание к работе и поддержку и.о. декана механико-математического факультета МГУ профессору В.Н. Чубарикову, профессору Т.П. Лукашенко и многим другим сотрудникам кафедры математического анализа.

Разделы в основном определены лектором. В сносках помещены замечания и комментарии редакторов, а также некоторые изречения лектора. Нумерация сносок своя внутри глав. Нумерация рисунков сквозная внутри главы с указанием номера главы, например, рис. 3.8 – это восьмой рисунок в третьей главе.

Т.В. Радославова, Н.Н. Холщевникова

Оглавление

Часть I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Глава 1

Основные понятия

Лекция 1
(06.09.67)

Что такое математика?
Можно выделить следующие этапы развития математики:

а) период возникновения;

б) период элементарной математики;

в) период изучения постоянных математических объектов;

г) период математики переменных величин;

д) период современной математики.

"Математика есть наука о пространственных формах и количественных отношениях действительного мира."(Энгельс)
"Метод математики есть метод абстракции."(Энгельс)
Классический математический анализ – метод изучения переменных величин (изображение и исследование функций). Что значит их изучать?

1. Уметь изобразить функцию.
2. Уметь исследовать функцию.

Рекомендованная литература: [10], [11].

§ 1. Множества

Под понятием множества подразумевается коллективизация элементов. Природа элементов безразлична. Мы будем рассматривать множества, входящие в уже определенное нами множество E. Множества состоят из элементов ($a \in E$). Элементы множества различимы, т. е. $a = b$ означает, что a и b – один и тот же элемент множества. Если эти элементы разные, то $a \neq b$. $A \subset B$ означает, что все элементы множества A принадлежат множеству B. Множество всех подмножеств множества E будем обозначать $\mathcal{P}(E) = \{A\} = \mathcal{M}$.

Если множества A и B входили в E, то в множестве $\mathcal{P}(E)$ они будут элементами: $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(E)$.

Итак, пусть $A \subset E$, $B \subset E$. Простейшее отношение между A и B – отношение включения $A \subset B$. То, что $A \subset B$ – это либо верно, либо неверно. Пусть имеется множество M и элемен-

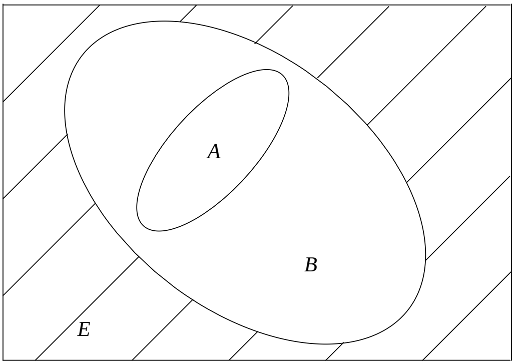

Рис. 1.1. $A \subset B$.

ты $x \in M$, $y \in M$. Рассмотрим множество упорядоченных пар $\{(x, y)\} = M^2$. *Отношение* есть отображение множества упорядоченных пар в двухэлементное множество $\{0, 1\}$. Задать отношение – задать подмножество N во множестве упорядоченных пар. Отношение – подмножество множества пар элементов некоторого множества[1].

[1] Для иллюстрации отношения "меньше" ($x \leq y$) можно рассмотреть пример отношения "меньше" между числами из отрезка $\{0 \leq x \leq 1\}$. Для этого возьмем квадрат $\{0 \leq x \leq 1\} \times \{0 \leq y \leq 1\}$ с диагональю, соединяющей точки (0,0) и (1,1), в котором в качестве множества N взят нижний треугольник.

При отношении включения между подмножествами прямой в качестве M

Символом $\varnothing$ будем обозначать *пустое множество.* $\varnothing \subset A$ для любого множества A.

Отношение включения транзитивно: если $A \subset B$, а $B \subset C$, то $A \subset C$.

Равенство множеств $A = B$ означает, что множества A и B состоят из одних и тех же элементов, т.е. одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$.

Операции над множествами (см. рис. 1.2).

Объединение множеств A и B : $A \bigcup B$.

Пересечение множеств A и B : $A \bigcap B$.

Симметрическая разность множеств A и B : $A \Delta B$ – совокупность элементов, принадлежащих либо A, но не B, либо B, но не A.

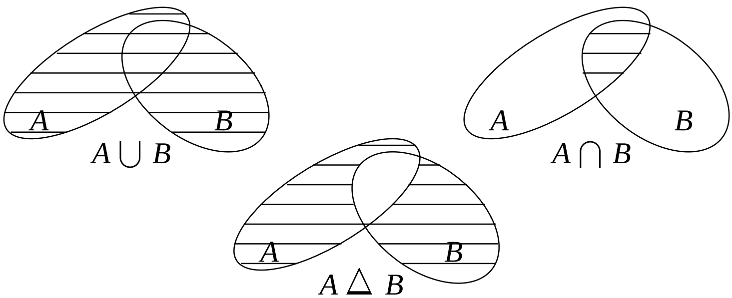

Рис. 1.2. Объединение, пересечение и симметрическая разность множеств.

Все эти операции коммутативны.

Справедливо соотношение: $A \bigcup B = (A \bigcap B) \bigcup (A \Delta B)$.

Лекция 2
(08.09.67)

Пусть даны множества $A_1, A_2, ..., A_n$; их объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ есть множество всех тех элементов, каждый из которых принадлежит

нужно взять множество подмножеств прямой, а N – множество тех пар подмножеств, которые и связаны отношением включения в обычном смысле. Это, естественно, не облегчает понимание включения, но вписывается в схему отношения. Об отношении смотри в [4]. (Ред.)

хотя бы одному из A_i, а пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ есть множество элементов, каждый из которых принадлежит всем A_i.

Пусть имеются два множества A и B.

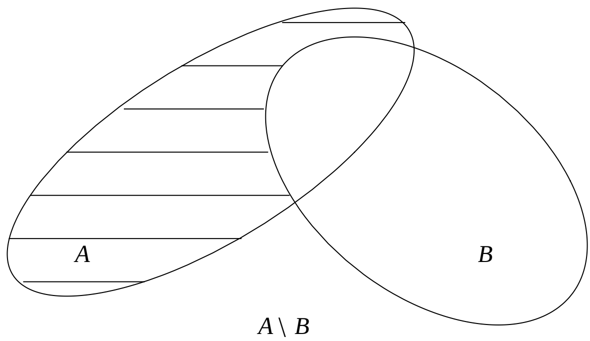

Рис. 1.3. Разность множеств.

Определение. *Разностью* $A \setminus B$ называется множество таких элементов из A, которые не принадлежат B.

Разность множеств не коммутативна.

Справедливо соотношение:

$$A\Delta B = (A\setminus B)\bigcup(B\setminus A).$$

$A \subset B$ означает, что $A\bigcup B = B$, $A\bigcap B = A$ (рис. 1.1).

Свойства отношений:

$$A\bigcup\left(B\bigcap C\right) = \left(A\bigcup B\right)\bigcap\left(A\bigcup C\right),$$

$$A\bigcap\left(B\bigcup C\right) = \left(A\bigcap B\right)\bigcup\left(A\bigcap C\right).$$

Допустим, что множество E зафиксировано и $A \subset E$.

Определение. *Дополнение* $\complement A$ множества A – это совокупность тех элементов из E, которые не входят в A.

Должно быть известно, относительно какого множества берется дополнение, например, $\complement_E A$ – дополнение A относительно E.

Свойства дополнения:

$$\complement\complement A = A;$$

$$A \subset B \quad \text{означает, что} \quad A \bigcap \complement B = \varnothing \quad \text{или} \quad (\complement A) \bigcup B = E\,;$$

$$\complement\left(A \bigcup B\right) = (\complement A) \bigcap (\complement B)\,;$$

$$\complement\left(A \bigcap B\right) = (\complement A) \bigcup (\complement B)\,.$$

§ 2. Логические символы

Теперь мы будем рассматривать различные высказывания A, B, ... Высказывание – это такая величина, которая может принимать два значения: либо И – истина, либо Л – ложь. Например, $\{2 < 3\} =$ И – верное высказывание; $\{1 > 2\} =$ Л – ложное высказывание; $\left\{\begin{array}{l}\{2 < 3\}\\ \{1 > 2\}\end{array}\right.$ – новое (ложное) высказывание.

Высказывание "A или B" будем записывать $A \vee B$; высказывание верно, если верно хоть одно из A и B. "Либо" и "или" – разные вещи.

"A либо B" – не одновременное выполнение A и B. "A и B" будем записывать $A \wedge B$.

Таблица истинности.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\overline{A}$
И	И	И	И	И	И	Л
Л	И	И	Л	И	Л	И
И	Л	И	Л	Л	Л	
Л	Л	Л	Л	И	И	

$A \Rightarrow B$ мы называем следованием: "если A, то B". Высказывание $A \Rightarrow B$ верно, если левая и правая части истинны, или левая часть неверна. При обычном употреблении этой операции между посылкой и заключением подразумевается логическая, доказательная или причинная связь. Здесь мы пользуемся таблицей истинности, поэтому, например следование $\{1 < 2\} \Rightarrow \{\pi < 4\}$ является истинным высказыванием [2)]. Понятие следования определено для любых значений A (и истина и ложь).

[2)] В [7] на с. 20 приведен пример истинного сдедования: если $1 + 1 = 2$, то Париж есть столица Франции. В [7] также обсуждается истинностно-функциональная операция следования (Ред.)

$A \Leftrightarrow B$ означает эквивалентность. A эквивалентно B, если они или оба истинны или оба ложны.

$\overline{A}$ означает отрицание A. $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ – отрицание отрицания равносильно исходному высказыванию.

$\equiv$ – равносильность. $C \equiv D$, если $C \Leftrightarrow D$ есть истина при любых значениях элементарных высказываний, которые входят в данные высказывания C и D.

Правила отрицания:

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B};$$

$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}.$$

Пусть высказывания $A(x)$ строятся с помощью элементов x из некоторого множества M – поля высказываний и, в зависимости от x, принимают истинное или ложное значения. Если x пробегает все элементы M, получаем *предикат* высказывания A. При этом множество M разбивается на два подмножества P и Q такие, что $P \bigcap Q = \varnothing$, $P \bigcup Q = M$. Если $x \in P$, то $A(x) =$ И, если $x \in Q$, то $A(x) =$ Л. Таким образом, предикату соответствует область истинности P. Если предикат зафиксирован, то для $x \in P$ высказывание истинно. И обратно, если известна область истинности P, то известно, для каких x высказывание верно, а для каких нет.

Пусть, например, $A(x) \vee B(x) = C(x)$. Тогда $P_A \subset M$, $P_B \subset M$, и $P_C = P_A \bigcup P_B$.

Аналогично,

если $A(x) \wedge B(x) = C(x)$, то $P_A \bigcap P_B = P_C$;

если $A(x) \Rightarrow B(x) = C(x)$, то $P_A \subset P_B$;

если $\{A(x) \Leftrightarrow B(x)\} = C(x)$, то $P_A = P_B$;

если имеем $\overline{A}(x)$, то $P_{\overline{A}} = \complement P_A$.

$\forall$ – квантор “для всех”. $\forall x \ A(x)$ означает: для всех x имеет место высказывание $A(x)$.

$\exists$ – квантор “найдется, по крайней мере, один такой, что”, т. е. “существует”. $\exists x \ A(x)$ означает: существует x, для которого имеет место высказывание $A(x)$. Т. е. найдется x, для которого $A(x)=$ И.

Квантор из предиката образует высказывание, например,

$$\overline{\forall x \ A(x)} = \exists x \ \overline{A}(x); \quad \overline{\exists x \ A(x)} = \forall x \ \overline{A}(x).$$

Пример геометрической интерпретации предиката. Пусть есть высказывание $A(x,y)$ (рис. 1.4). P_A – область истинности высказывания A – это множество в поле высказываний, для элементов которого высказывание $A(x,y)$ истинно, т. е. $\forall\,(x,y) \in P_A$ $A(x,y) = \text{И}$. Построим новое высказывание $B(x) = \{\exists\, y\ A(x,y)\}$. Тогда проекция множества P_A на ось Ox будет область истинности P_B высказывания B.

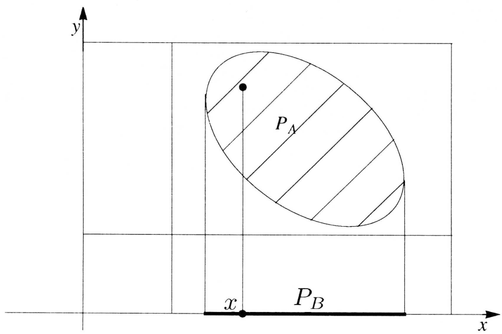

Рис. 1.4. Геометрическая интерпретация предиката.

Лекция 3
(13.09.67)

§ 3. Понятие функции

3.1. Определение функции

Будем обозначать $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Пусть задано числовое множество $X \subset \mathbb{R}$. Если каждому числу x из X поставлено в соответствие действительное число y, то говорят, что *на X задана функция* со значениями в $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in X \qquad x \to y \in \mathbb{R}.$$

“На” X значит: “для каждой точки” из X. “В” $\mathbb{R}$ значит, что множество тех y, которые соответствуют x, вообще говоря, всего множества действительных чисел не исчерпывает.

Мы определили *однозначную* функцию, т. е. функцию, для которой каждому x соответствует только один элемент y. Будем говорить, что

X – *область определения* функции;

x – *аргумент* или *независимая переменная*;

y – *значение* функции или *зависимая переменная.*

Множество значений функции будем обозначать через Y.

Две функции *совпадают*, если совпадают их области определения и законы соответствия.

Примеры. Функция $y = x^2$, определенная на множестве $X_1 \subset \mathbb{R}$: $X_1 = \{0 \leq x \leq 1\}$, и функция $y = x^2$, определенная на множестве $\{-1 \leq x \leq 1\} = X_2$, не совпадают, а функции $y = |x|$ для любого x, и $y = \sqrt{x^2}$ для любого x, совпадают, хотя алгоритмы вычисления их значений различны.

Функцию можно обозначать по-разному, например,

$$y = f(x)\,; \quad u = f_t\,; \quad u = u(s)\,.$$

3.2. Образование понятия функции

Понятие функции образовалось при отвлечении от физического смысла причинной связи.

3.3. Исторические замечания

Понятие функции исторически расширялось. Функция есть соответствие, а не формула. Понятие функции использует понятие числового подмножества X и понятие соответствия, при этом не для каждой функции можно указать аналитическое выражение. Математический анализ выделяет из общего понятия функции такие классы функций, которые можно изучать.

3.4. Примеры элементарных функций

1) $y = x \quad (x \in \mathbb{R})$;

2) $y = a$, $(x \in \mathbb{R})$, $a = \text{const}$;

3) $y = y_n \quad (n = 1, 2, ...)$ (последовательность или функция натурального аргумента).

3.5. Способы задания функции

а) Аналитический способ. Функция, заданная аналитическим выражением, считается заданной на всей области определения. Например, выражением $y = x+1$ задается функция для любого действительного x; выражением $y = \frac{x^2}{x-1}$ задается функция на множестве $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Функция определяется аналитическим выражением, но не является им.

б) Задание словесной формулировкой, описание правила соответствия.

в) Параметрический способ задания:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad \text{где} \quad t \in T \subset \mathbb{R}\,.$$

При этом для любых $t_1, t_2 \in T$, для которых $f(t_1) = f(t_2)$, должно выполняться условие $g(t_1) = g(t_2)$. Иначе функция будет неоднозначной. Поэтому пара параметрических функций, вообще говоря, функцию не определяет.

Пример функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi\,.$$

г) Неявное задание посредством уравнения $F(x,y) = 0$. Уравнение $F(x,y) = 0$ определяет функцию, если для всех $x \in X$ это уравнение имеет единственное решение.

д) Комбинированный способ задания функции. *Разбиением* $X = \bigcup\limits_i X_i$ называется такая система подмножеств множества X, что объединение всех подмножеств есть X, и для любых i, j, $i \neq j$, $X_i \bigcap X_j = \varnothing$.

Функция будет определена на всем X, если она будет определена на каждом из подмножеств, входящих в разбиение X.

Упражнение. Найти формулу, задающую ломаную, линейную на каждом заданном отрезке (см. рис. 1.5).

е) Функцию можно задать графически. Рассмотрим всевозможные пары чисел (x,y). Это будет плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Для графического определения функции, определенной на множестве $X \subset \mathbb{R}$, надо задать подмножество $M \subset \mathbb{R}^2$, причем в каче-

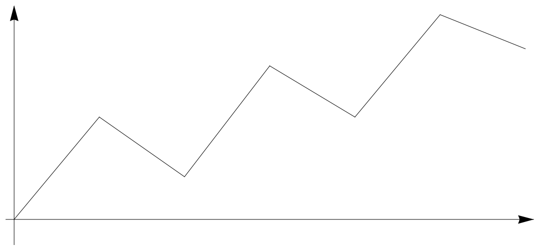

Рис. 1.5. Найти формулу.

стве первого элемента пары из M число $x \in X$ должно встречаться только один раз. Такую пару будем называть *функциональной*, а множество M *униформным* (однозначным) множеством (рис. 1.6).

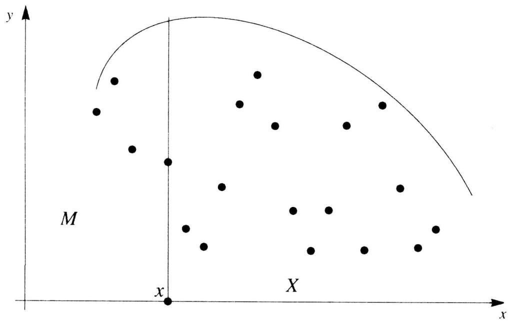

Рис. 1.6. Униформное множество.

3.6. Действия над функциями

Все функции, над которыми мы производим арифметические действия сложения, вычитания, должны быть определены на одном и том же множестве X . Множество всех функций, заданных на X , образует кольцо функций. Их можно складывать, вычитать, перемножать:

$$f + g = h_1\,, \quad f - g = h_2\,, \quad f \cdot g = h_3\,.$$

Деление определяет новую функцию $\frac{f}{g} = F$. Эта функция, вообще говоря, определена на новом, более узком множестве

$$X \bigcap \{g(x) \neq 0\} .$$

Множество всех функций, заданных на фиксированном множестве X , образует кольцо, но не образует поля.

Лекция 4
(15.09.67)

3.7. Обратная функция

При определении обратной функции мы отказываемся от понятия однозначности.

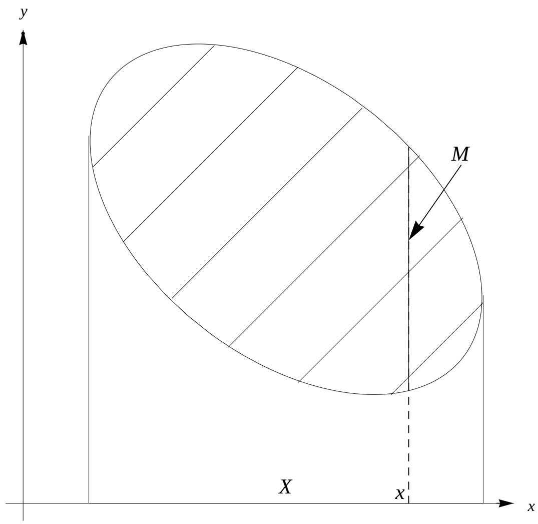

Рис. 1.7. Многозначная функция.

Пусть задано множество $X \subset \mathbb{R}$. Если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие множество M действительных чисел ($M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$), то мы говорим, что на множестве X определена *многозначная функция* $M = F(x)$, $x \in X$ (рис. 1.7). Функция будет неоднозначной, если хотя бы одному x из X соответствует более одного значения y.

Определение. Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}$ задана многозначная функция $M = F(x)$ ($x \in X$). Однозначная функция $y = f(x)$ называется *однозначной ветвью функции* $M = F(x)$, если для всех x из X $f(x) \in F(x)$ (рис. 1.8).

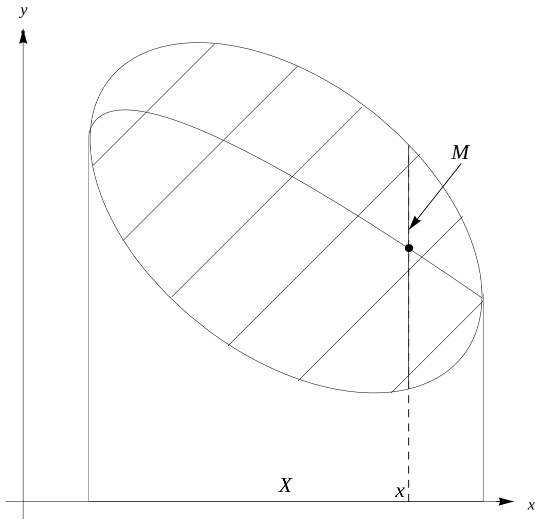

Рис. 1.8. Однозначная ветвь многозначной функции.

Определение. Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}$ задана функция $y = f(x)$. Обозначим через $Y = f(X)$, $Y \subset \mathbb{R}$, область значений этой функции. Тогда *обратной функцией* (рис. 1.9) к функции $f(x)$ называется следующая многозначная функция, определенная на множестве Y: для всех $y \in Y$ в качестве значений этой функции берется множество всех $x \in X$, для которых $f(x) = y$, т. е.

$$y \to \{x \in X : \quad f(x) = y\}.$$

Обратную к $f(x)$ функцию будем обозначать $\overset{-1}{f}(y)$. Обратная функция будет однозначной, если для всех x, $x' \in X$ таких, что

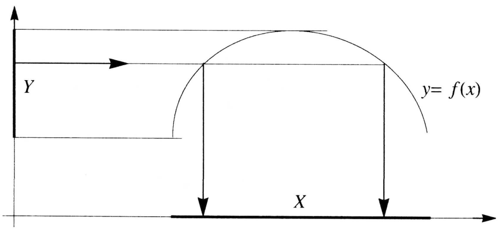

Рис. 1.9. Обратная функция.

$x \neq x'$, $f(x) \neq f(x')$.

3.8. Сложная функция

Под сложной функцией понимают функцию от функции или суперпозицию (композицию) функций.

Определение (простейший случай). Пусть на множестве X из $\mathbb{R}$ определена функция $y = f(x)$. Пусть $f(X)$ – область значений функции f и $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}$. Пусть на множестве Y задана функция $z = g(y)$ ($y \in Y$). Новое соответствие

$$x \to z : \quad x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

называется *сложной функцией* $z = g(f(x)) = G(x)$, которая вновь определена на множестве X . Можно обозначать сложную функцию $g \circ f(x)$.

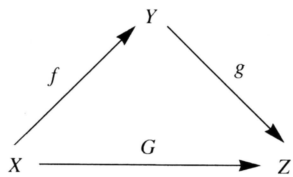

Рис. 1.10. Композиция отображений.

Более общее определение сложной функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X . На множестве Y определена функция $z = g(y)$. Если y , в который x переведен функцией

f , принадлежит Y , то мы можем построить *сложную функцию* $z = g(f(x))$, если нет, то мы такой функции построить не можем. Сложная функция определена для тех x , для которых $f(x) \in Y$. Если $y \in f(X) \bigcap Y$, то $\left\{ \overset{-1}{f}(y) \right\} = X_1$ (рис. 1.11). Таким образом, область определения сложной функции $z = g(f(x))$ есть множество

$$X_1 = \overset{-1}{f}(f(X) \bigcap Y) .$$

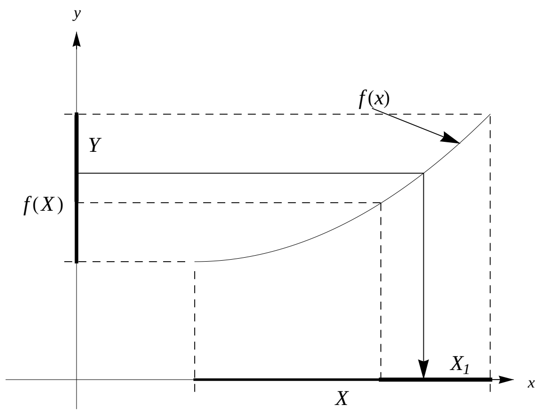

Рис. 1.11. Область определения сложной функции.

3.9. Элементарные функции

Простейшие элементарные функции:

1) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – рациональная функции;
2) x^{α} – степенная функция;
3) a^x – показательная функция, $a > 0$, $a \neq 1$;
4) $\log_a x$ – логарифмическая функция , $a > 0$, $a \neq 1$;
5) тригонометрические функции: $\sin x$,..., $\operatorname{cosec} x$;
6) обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$,. . . .

Определение. *Элементарной функцией* называется такая функция, которая получается из простейших элементарных функций путем конечного числа арифметических действий и операций образования сложной функции.
Областью определения элементарной функции считается область определения ее аналитического выражения.

§ 4. Отображения

Пусть даны два произвольных множества A и B и пусть для любого $x \in A$ определено соответствие f: каждому $x \in A$ поставлен в соответствие элемент $y \in B$. Тогда мы имеем *отображение* A в B:

$$\forall x \in A \quad x \to y = f(x) \in B\,.$$

Рассмотрим $A_1 \subset A$ и множество всех тех $\{f(x)\}$, для которых x пробегает все элементы A_1: $\bigcup\limits_{x \in A_1} \{f(x)\} = f(A_1)$; $f(A_1)$ – *образ* множества A_1 при отображении f.
Отметим следующие свойства подмножеств и их образов:

$$f(A_1 \bigcup A_2) = f(A_1) \bigcup f(A_2)\,;$$

$$f(A_1 \bigcap A_2) \subset f(A_1) \bigcap f(A_2)\,.$$

Отображение f есть отображение *на* B, если образ всего A есть все B.
Отображение f множества A на B называется *взаимно однозначным*, если обратное отображение однозначно.
Если существует взаимно однозначное отображение множества A на множество B, то эти множества называются *равномощными*, обозначается $A \sim B$. *Мощность множества* – это обобщение числа, количества элементов множества.
Определение. Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots n, \ldots\}$.
Существуют несчетные множества. Множество *несчетно*, если его элементы нельзя перенумеровать. Бесконечные множества могут состоять из разного количества элементов, *могут быть разной мощности.*

Теорема (Канторова диагональ). *Множество* M, *состоящее из всех последовательностей* $M=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_2,...)\}$, *где* ε_n *либо* 0, *либо* 1, *несчетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы должны показать, что нельзя получить взаимно однозначного соответствия между M и множеством натуральных чисел. Допустим, что мы нашли это взаимно однозначное соответствие:

1) $(\varepsilon_1^{(1)},\varepsilon_2^{(1)},...,\varepsilon_n^{(1)},...)$

2) $(\varepsilon_1^{(2)},\varepsilon_2^{(2)},...,\varepsilon_n^{(2)},...)$

. . . .

n) $(\varepsilon_1^{(n)},\varepsilon_2^{(n)},...,\varepsilon_n^{(n)},...)$

. . . .

Составим последовательность $(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n,...)\in M$ таким образом, что $\eta_1\neq\varepsilon_1^{(1)}$, $\eta_2\neq\varepsilon_2^{(2)}$, $\ldots$, $\eta_n\neq\varepsilon_n^{(n)}$ $\forall n$. Тогда эта последовательность не совпадает ни с какой последовательностью, которые мы перенумеровали. Таким образом, мы построили элемент из M, отличный от всех перечисленных. Но это противоречит нашему предположению, что элементы множества M можно перенумеровать. Следовательно, множество M несчетно. ▶

Свойство подмножеств счетных множеств. *Всякое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A=\{a_n\}$ – счетное множество и $B\subset A$. Начнем перебирать элементы множества A. Пусть a_{n_1} – элемент с наименьшим номером из A, который принадлежит также и множеству B, назовем его первым в B: $b_1=a_{n_1}$. Затем найдем элемент a_{n_2}, принадлежащий B, с наименьшим номером $n_2>n_1$, который назовем вторым: $b_2=a_{n_2}$, и так далее. Каждый элемент из B встретится на некотором шаге, так как $B\subset A$, и все элементы из B окажутся перенумерованными [3]. ▶

---

[3] При доказательстве используется вполне упорядоченность множества натуральных чисел и утверждение, что всякое ограниченное подмножество натуральных чисел конечно. (Ред.)

Глава 2

Числовая прямая

Лекция 5
(20.09.67)

§ 5. Действительные числа

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ обозначают множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел, соответственно. Понятие числа и множества чисел развивалось исторически в следующем направлении расширяясь:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}.$$

Переход от $\mathbb{N}$ к $\mathbb{Z}$ добавляет в множестве чисел операцию вычитания, от $\mathbb{Z}$ к $\mathbb{Q}$ – операцию деления и от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{R}$ – полноту множества действительных чисел, что дает возможность измерения длин произвольных отрезков.

5.1. Свойства рациональных чисел

I. $\mathbb{Q}$ **есть поле** с обычными операциями сложения и умножения.

II. Упорядоченность (линейная упорядоченность). В поле $\mathbb{Q}$ задано бинарное отношение: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$. Отношение нестрогого неравенства определено для любых $a, b \in \mathbb{Q}$. Это означает, что $\mathbb{Q}$ обладает полной упорядоченностью:

1. $\forall a, b \in \mathbb{Q}$ или $a \le b$, или $b \le a$.
2. $a \le b$ и $b \le a$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

Определение строгого неравенства. Если $a \le b$ и $a \ne b$, то $a < b$.

3. Если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$.
4. Если $a \le b$, то $a + c \le b + c$.
5. Если $a \ge 0$, $b \ge 0$, то $ab \ge 0$.

III. Архимедовость. Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел есть архимедовски упорядоченное поле: для всякого $a > 0$ и всякого $b \ge 0$ найдется натуральное число n такое, что $na > b$.

IV'. Неполнота множества рациональных чисел. Между точками прямой и рациональными числами нет взаимно однозначного соответствия.

Определение. Говорят, что *множество* E *разбивается на два подмножества* A и B, если $E = A \bigcup B$ и $A \bigcap B = \varnothing$.

Множество $\mathbb{Q}$ можно разбить на два подмножества A и B так, что для любого $a \in A$ и для любого $b \in B$ выполняется неравенство $a < b$, но в A нет наибольшего, а в B нет наименьшего элемента. Например, можно взять A – множество рациональных чисел, меньших $\sqrt{2}$, а B – больших $\sqrt{2}$.

5.2. Множество действительных чисел

Поле $\mathbb{Q}$ неполное, но может быть пополнено до множества $\mathbb{R}$, которое обладает кроме свойств I, II, III еще и свойством полноты.

IV. Полнота.

Свойство полноты (принцип непрерывности Дедекинда). *Для любого разбиения* $\mathbb{R}$ *на два непустых подмножества* A *и* B *таких, что для любого* $a \in A$ *и для любого* $b \in B$ *выполняется неравенство* $a < b$, *либо существует такой элемент* $c \in A$, *что* $\forall a \in A \;\; a \le c$, *либо существует элемент* $c \in B$ *такой, что* $\forall b \in B \;\; c \le b$.

Такое разбиение $\mathbb{R} = A \bigcup B$, что $A \ne \varnothing$ и $B \ne \varnothing$, называется *сечением* в множестве действительных чисел. Принцип Дедекинда утверждает, что такое сечение всегда будет проведено по действи-

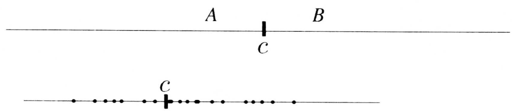

Рис. 2.1. Сечение в области действительных чисел.

тельному числу (а во множестве рациональных чисел, как было показано, такие сечения не всегда возможны).
Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ – это такое расширение поля рациональных чисел, которое обладает свойствами I, II, III, IV. Таким образом, поле рациональных чисел содержится в качестве подполя в поле действительных чисел [1].

Возникает вопрос, нельзя ли дальше расширить множество чисел. Ответ на него зависит от того, все ли свойства I, II, III, IV мы хотим сохранить. Если все, то ответ отрицательный, если нет – то расширение возможно:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

При переходе от поля $\mathbb{R}$ к полю комплексных чисел $\mathbb{C}$ мы теряем свойство упорядоченности. Для дальнейшего расширения придется пожертвовать коммутативностью умножения.

5.3. Простейшие множества действительных чисел

Пусть a, b – два действительных числа и $a \le b$. Отметим простейшие множества действительных чисел, определяемые при помощи упорядоченности.
Множество действительных чисел x таких, что $a \le x \le b$, называется *отрезком* $[a,\, b]$. Отрезок может вырождаться в точку. Иногда вместо “отрезок” говорят “сегмент”.
Пусть $a < b$. Множество действительных чисел x таких, что $a < x < b$, называется *интервалом* $(a,\, b)$.
Будем рассматривать также полуинтервалы

$$\{a \le x < b\} = [a,\, b)\,, \quad \{a < x \le b\} = (a,\, b]\,.$$

[1] "Существует ли оно? Опять философия. Здесь мы не доказываем, что множество действительных чисел существует." (С. Б. С.)

Лекция 6
(22.09.67)

§ 6. Принцип непрерывности (различные формулировки)

6.1. Теорема отделимости

Первая формулировка принципа непрерывности уже была дана (принцип непрерывности Дедекинда) (см. п. 5.2), но такая формулировка не очень удобна. Мы дадим другие эквивалентные формулировки.

Теорема отделимости. *Пусть даны два непустых подмножества A и B множества действительных чисел. И пусть* $\forall\, a \in A$ $\forall\, b \in B$ $a < b$. *Тогда* $\exists\, c \in \mathbb{R}$ $\forall\, a \in A$ $\forall\, b \in B$ $a \leq c \leq b$.

Доказательство. Построим сечение $A_1 \bigcup B_1 = \mathbb{R}$. Для этого определим B_1 как множество чисел b_1, для каждого из которых найдется элемент b из B, такой что $b \leq b_1$. Положим $A_1 = \mathbb{R} \backslash B_1$. Тогда $A \subset A_1$, $B \subset B_1$, $a_1 < b_1$, если $a_1 \in A_1$ и $b_1 \in B_1$. В силу принципа непрерывности Дедекинда существует такое число c, что $a_1 \leq c \leq b_1$ для любых $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$. Отсюда следует, что $a \leq c \leq b$ для любых $a \in A$, $b \in B$. ▶

Замечание. Теорема справедлива, если строгое неравенство $a < b$ заменить на нестрогое $a \leq b$.

6.2. Принцип непрерывности Вейерштрасса

Определение. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ ($M \neq \varnothing$). Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *верхней границей* для множества M, если $\forall\, a \in M$ $a \leq \alpha$.

Если множество имеет хоть одну верхнюю границу, то оно называется *ограниченным* сверху.

Если множество имеет одну верхнюю границу, то оно имеет их бесконечно много. Действительно, если α – верхняя граница, то рассмотрим $\beta > \alpha$. Тогда β тоже будет являться верхней границей.

Элемент $\alpha \in M$ называется *максимальным* элементом множества M, если $\forall\, a \in M$ $a \leq \alpha$.

Пример. Множество чисел из интервала $(a,\, b)$ ограничено сверху, но не имеет максимального элемента.

Определение. *Верхней гранью* [2] числового множества называется наименьшая из его верхних границ.

Итак, $\alpha \in \mathbb{R}$ является верхней гранью множества M, если

1) $\forall a \in M \ \ a \le \alpha$;

2) $\forall \beta < \alpha \ \ \exists a = a(\beta) \in M \quad a > \beta$.

Пример. Для интервала (a, b) и отрезка $[a, b]$ верхней гранью является число b.

Верхнюю грань α числового множества обозначим $\alpha = \sup\limits_{x \in M} x$.

Из определения верхней грани следует такое свойство: если $\forall x \in M$ $x \le B$, то $\sup\limits_{x \in M} x \le B$.

Аналогично вводится *нижняя грань* β, которую обозначим $\beta = \inf\limits_{x \in M} x$.

Теорема о существовании верхней грани. *Всякое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет верхнюю грань.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество B, составленное из всех верхних границ множества M. Тогда $\forall a \in M$ и $\forall x \in B \ \ a \le x$. Следовательно, M и B удовлетворяют условиям теоремы об отделимости, а это значит, что существует такое c, что $\forall a \in M$ и $\forall x \in B \ \ a \le c \le x$. Из этого неравенства следует, что $c \in B$ и что c – наименьшая верхняя граница множества M, т. е. $c = \sup\limits_{x \in M} x$. ►

Теорема единственности. *Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет не более одной верхней грани.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если α и β – две верхние грани некоторого множества и $\alpha \ne \beta$, то или $\alpha < \beta$, и тогда α не будет верхней гранью, или $\beta < \alpha$, и тогда β не будет верхней гранью. Противоречие. ►

Замечание. Если $\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \ a < b$, то $\sup\limits_{a \in A} a \le \inf\limits_{b \in B} b$.

Действительно, каждое b – верхняя граница множества A, и каждое a – нижняя граница множества B. Тогда $a \le \inf\limits_{b \in B} b$ и $\sup\limits_{a \in A} a \le \inf\limits_{b \in B} b$. ►

[2] Часто для верхней (нижней) границы и верхней (нижней) грани используются и другие названия, например, *точная верхняя грань* вместо используемого здесь *верхняя грань.* (Ред.)

6.3. Принцип непрерывности Кантора

Определение. Последовательность $\{[a_n, b_n]\}$ отрезков, $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, называется *вложенной*, если для любого натурального n $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

Как показывает следующая теорема, для вложенной последовательности отрезков найдется, по крайней мере одно, действительное число, которое принадлежит всем этим отрезкам.

Теорема Кантора (теорема о вложенных отрезках) *Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ ($n \in \mathbb{N}$) – система вложенных отрезков.*

Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$, *т. е. существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $c \in [a_n, b_n]$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в качестве множества A множество всех a_n: $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Аналогично возьмем $B = \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что для любых n и m $a_n \leq b_m$.

Пусть $n \leq m$, тогда $a_n \leq a_m$, так как отрезок с номером m будет вложен в отрезок с номером n. Тогда $a_n \leq a_m \leq b_m$.

Аналогично рассматривается случай, когда $n > m$.

Теперь, согласно теореме отделимости (см. замечание к теореме на с. 33), существует такое действительное число c, что для всех a_n и b_n $a_n \leq c \leq b_n$. Значит $\forall n \in \mathbb{N}$ $c \in [a_n, b_n]$. ►

Замечание. Пересечение бесконечного числа вложенных интервалов может оказаться пустым. Например, система $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$ ($n \in \mathbb{N}$) вложенных интервалов не имеет ни одной общей точки.

§ 7. Мощность множества действительных чисел

Теорема (о счетности множества рациональных чисел). *Множество рациональных чисел счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждому рациональному числу, представленному в виде несократимой дроби $\frac{k}{l}$, где $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, поставим в соответствие элементы вида (k, l) – упорядоченные пары чисел (нулю будет поставлена в соответствие пара $(0, 1)$). Множество таких пар равномощно множеству $\mathbb{Q}$ и является бесконечным подмножеством множества всевозможных пар вида (k, l), где $k \in \mathbb{Z}$,

$l \in \mathbb{N}$. Расположим последнее множество в бесконечную таблицу

$$\begin{array}{|cccc} \hline (0,1) & (0,2) & (0,3) & \ldots. \\ (-1,1) & (-1,2) & \ldots. & \\ (1,1) & (1,2) & \ldots. & \\ \ldots.. & & & \end{array} .$$

В первую строку поместим пары вида $(0, l)$ в порядке возрастания l . Во вторую строку пары вида $(-1, l)$, в третью – вида $(1, l)$, в четвертую – вида $(-2, l)$, и так далее. Все элементы расположим в строках в порядке возрастания второго числа. Элементы этой таблицы могут быть перенумерованы, например, следующим образом ("по конечным диагоналям") (см. рис. 2.2): $(0,1)$ – первый элемент, $(-1,1)$ – второй, $(0,2)$ – третий, $(1,1)$ – четвертый, $(-1,2)$ – пятый, $(0,3)$ – шестой, и так далее. Таким образом, множество $\{(k,l)\}$, а вместе с ним и $\mathbb{Q}$ – счетно (как бесконечное подмножество счетного множества). ►

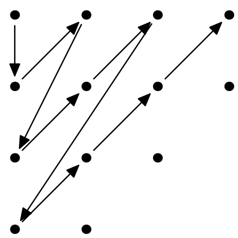

Рис. 2.2. Нумерация элементов таблицы.

Упражнение. Доказать следующие утверждения.

1) Множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

2) Множество бесконечных подмножеств счетного множества несчетно.

Теорема (о несчетности континуума). *Множество всех действительных чисел несчетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем теорему методом от противного. Предположим, что все действительные числа перенумерованы: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Построим систему вложенных отрезков σ_n таких, что (см. рис. 2.3)

$$
\begin{aligned}
& a_1 \notin \sigma_1, \\
& a_2 \notin \sigma_2 \subset \sigma_1, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& a_{n+1} \notin \sigma_{n+1} \subset \sigma_n, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

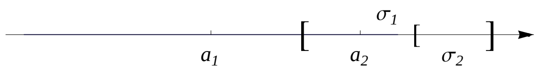

Рис. 2.3. К теореме о несчетности континуума.

По теореме Кантора $\exists c \;\; \forall n \;\; c \in \sigma_n$. Пусть $c = a_m$ для некоторого m . Тогда $a_m \notin \sigma_m \;\; \Rightarrow \;\; a_m \neq c \in \sigma_m$. Мы пришли к противоречию. ►

Глава 3

Теория пределов

Лекция 7
(27.09.67)

§ 8. Точечные множества на числовой прямой

Пусть $M \subset \mathbb{R}$.

Определение. Пусть a – точка на числовой прямой. *Окрестностью* $O(a)$ точки a называется произвольный интервал (α, β), содержащий точку a. Множество $M \bigcap O(a)$ будем называть *порцией* множества M.

Определение. Точка a на числовой прямой называется *внутренней* точкой множества M, если существует окрестность $O(a)$ точки a, целиком лежащая в M: $O(a) \subset M$.

Определение. Точка a на числовой прямой называется *внешней* точкой множества M, если найдется такая окрестность $O(a)$ точки a, что $O(a) \bigcap M = \varnothing$.

Определение. Точка на действительной прямой называется *граничной* точкой множества, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой множества.

Множество всех внутренних точек множества M называется *внутренностью* M_i этого множества.

Внешность множества M – это множество $(\complement M)_i$ – внутренность дополнения.
Множество граничных точек множества M называется *границей множества* M и обозначается ∂M.
Определение. Точка a называется *предельной* точкой множества M, если пересечение любой окрестности этой точки с M содержит точку из множества M, отличную от a: $O(a)\bigcap(M\backslash a) \neq \varnothing$.
M' – совокупность всех предельных точек множества M, называется *производным множеством* множества M.
Определение. Точка, принадлежащая множеству, называется *изолированной*, если она не является предельной точкой, т. е. найдется такая окрестность $O(a)$, что $O(a)\bigcap(M\backslash a) = \varnothing$.
Если $M = M_i$, то M называется *открытым* множеством.
Если $M \supset M'$, то множество M называется *замкнутым*.
Примеры. 1) Множество $M = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, состоит из изолированных точек и имеет предельную точку $\{0\}$: $M' = \{0\}$.

2) Любой интервал $(\alpha, \beta) = M$ является открытым множеством, т. е. $M = M_i$.

3) Отрезок $[\alpha, \beta] = M$ – замкнутое множество, $M \supset M'$.

§ 9. Пределы

Пусть $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$, на M задана функция $y = f(x)$ $(x \in M)$ и a – предельная точка множества M.

Понятие предела в точке a характеризует поведение функции вблизи точки a, но не в самой этой точке. Предел не зависит от значения функции в точке.

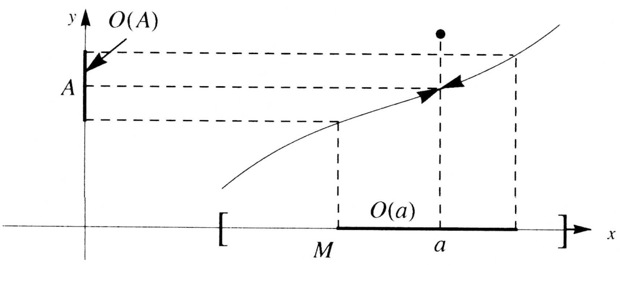

Рис. 3.1. К определению предела.

Определение предела функции (окрестностное). Пусть $y = f(x)$ – числовая функция, определенная на множестве M. Пусть a есть предельная точка этого множества, $a \in M'$. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке a, если для любой окрестности точки A найдется такая окрестность точки a, что для всех точек $x \in M$, входящих в окрестность точки a и отличных от a, $f(x)$ входит в окрестность точки A, т. е. (рис. 3.1)

$$\forall\, O(A)\ \ \exists\, O(a)\ \forall\, x \in M,\ x \in O(a),\ x \neq a,\ \ f(x) \in O(A).$$

Обозначение предела: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.
Примеры функций, имеющих предел, смотри на рисунках 3.2 и 3.3.

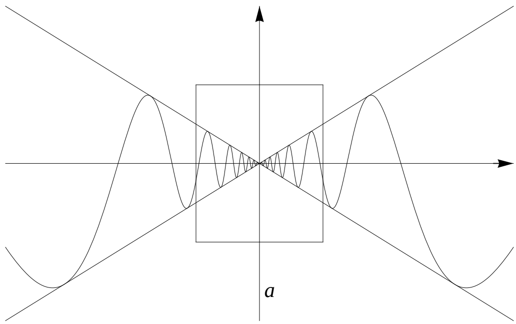

Рис. 3.2. Предел при $x \to a$ существует.

Пример. Для функции $y = \sin\frac{1}{x}$ (рис. 3.4) никакое заданное число не является пределом функции в точке 0.

Определение предела по Коши. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in M$ таких, что $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Замечание. Под окрестностью $O(+\infty)$ бесконечно удаленной точки будем подразумевать множество вида $\{x > \alpha\}$, под $O(-\infty)$ – множество вида $\{x < \beta\}$. Определим $O(\infty) = O(+\infty) \bigcup O(-\infty)$.

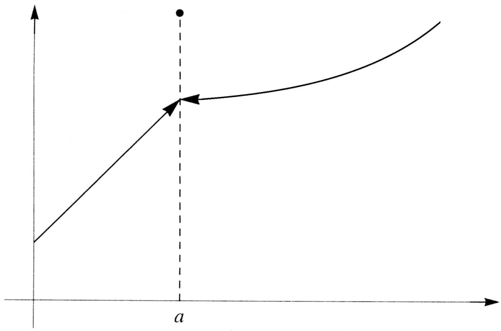

Рис. 3.3. Предел при $x \to a$ существует.

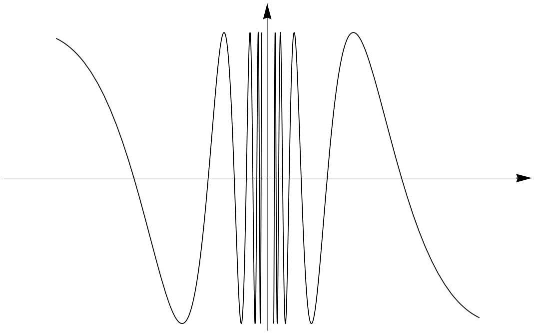

Рис. 3.4. Никакое число не является пределом функции $\sin \frac{1}{x}$ в точке 0.

Это позволяет дать определение предела, если функция стремится к $\pm\infty$ или к ∞, или если x стремится к $\pm\infty$ или к ∞. Например, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ означает, что $\forall\, B > 0 \;\; \exists\, N \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\; x > N\,,$ $f(x) < -B\,.$

Пусть дана функция натурального аргумента, т. е. числовая последовательность $\{a_n\}$.

Определение. Число A есть *предел последовательности* $\{a_n\}$, обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N \quad |a_n - A| < \varepsilon\,.$

Замечание. Пусть даны числовая последовательность $\{a_n\}$ и возрастающая последовательность $\{m_n\}$ натуральных чисел. Будем называть $\{a_{m_n}\}$ подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$. Можно доказать, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то существует равный ему $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n} = A$. Обратное утверждение неверно.

Упражнение. Доказать утверждения этого замечания.

Под словом "критерий" будем подразумевать "необходимое и достаточное условие".

Множество $O(a)\backslash a$ будем называть *выколотой окрестностью* точки a.

Лекция 8 (29.09.67)

Пусть $f(x)$ – многозначная функция, заданная на множестве M и a есть предельная точка этого множества.

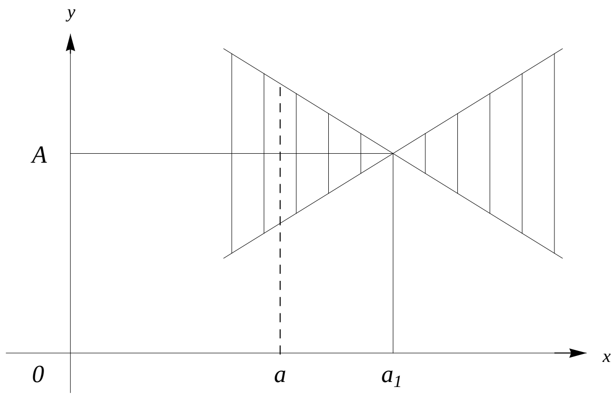

Рис. 3.5. Предел многозначной функции.

Определение. Число A называется *пределом многозначной функции* $f(x)$ при $x \to a$, обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in M$, $0 < |x - a| < \delta$, $\forall y \in \{f(x)\}$ $|y - A| < \varepsilon$.

§ 10. Свойства пределов

10.1. Теоремы о пределах

Теорема 1. *Пусть дана функция* $y = f(x)$, $x \in M$, $a \in M'$ *и существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > B$. *Тогда найдется такая окрестность* $O(a)$ *точки a, что* $\forall\, x \in O(a) \bigcap (M\backslash a) \quad f(x) > B$.

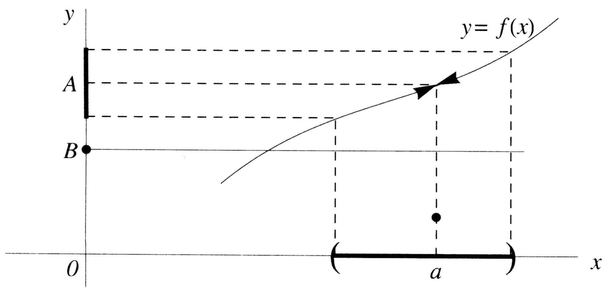

Рис. 3.6. К теоремам о пределах. $f(x) > B$.

Доказательство. Возьмем $0 < \varepsilon_0 < A - B$ (рис. 3.6). По определению предела $\exists\, O(a) \;\; \forall\, x \in O(a) \bigcap (M\backslash a) \;\; |f(x) - A| < \varepsilon_0$. Следовательно, $f(x) - A > -\varepsilon_0$ и значит, $f(x) > B$. ▶

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть дана функция* $y = f(x)$, $x \in M$, $a \in M'$ *и существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A < C$, *тогда найдется окрестность* $O(a)$ *такая, что* $\forall\, x \in O(a) \bigcap (M\backslash a) \quad f(x) < C$.

Определение. Функция, определенная на множестве M, называется *ограниченной* на этом множестве, если множество ее значений ограничено.

Таким образом, функция на множестве M является ограниченной, если $\exists\, K > 0 \;\; \forall x \in M \quad |f(x)| \le K$.

Теорема 3. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет предел* A *в точке* a, *то существует такая окрестность* $O(a)$ *точки* a, *в которой функция ограничена на множестве* $O(a) \bigcap (M\backslash a)$.

Доказательство. Пусть $B < A < C$. По теореме 1 и теореме 2 $\exists\, O(a) \quad \forall\, x \in O(a) \bigcap (M\backslash a) \quad B < f(x) < C$. Если $f(a)$ определена, то $f(x)$ ограничена на множестве $O(a) \bigcap M$, в качестве K из определения ограниченного множества можно взять число $K = \max\{|B|,\ |C|,\ |f(a)|\}$. ▶

Замечание. Дальше, вплоть до односторонних пределов, для простоты обозначений будем считать, что функции определены в окрестности точки a. Формулировки следующих теорем и утверждений без труда переносятся и на случай пределов в предельной точке множества определения функции.

Теорема 4 (единственность предела). *Если у функции существует предел, то он единственен.*

Доказательство. Пусть $A_1 \neq A_2$ и оба числа A_1 и A_2 являются пределами функции в точке a. Пусть для определенности $A_1 < A_2$. Возьмем C такое, что $A_1 < C < A_2$. Тогда по теоремам 2 и 1 $\exists O_1(a) \quad \forall x \in O_1(a)\backslash a \quad f(x) < C$ и $\exists O_2(a) \quad \forall x \in O_2(a)\backslash a$ $f(x) > C$. Возьмем $O(a) = O_1(a) \bigcap O_2(a)$. Тогда $\forall x \in O(a)\backslash a$ $f(x) < C$ и $f(x) > C$. Противоречие. ▶

Теорема 5 (переход к пределу в неравенстве). *Пусть в проколотой окрестности* $O(a)\backslash a \quad f(x) \geq B$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. *Тогда* $A \geq B$.

Доказательство. Допустим, что $A < B$. По теореме 2 $\exists O_1(a) \quad \forall x \in O_1(a)\backslash a \quad f(x) < B$. Возьмем $O_2(a) = O(a) \bigcap O_1(a)$. Тогда $\forall x \in O_2(a)\backslash a \quad f(x) \geq B$ и $f(x) < B$. Противоречие. ▶

Замечание. При переходе к пределу строгое неравенство может превратиться в нестрогое.

10.2. Действия над пределами

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $f(x)$ называется *бесконечно малой* функцией при $x \to a$.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *– бесконечно малые при* $x \to a$. *Тогда* $\alpha(x) + \beta(x)$ *– бесконечно малая при* $x \to a$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется окрестность $O_1(a)$ такая, что $\forall x \in O_1(a)\backslash a \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и найдется окрестность $O_2(a)$ такая, что $\forall x \in O_2(a)\backslash a \quad |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем окрестность $O(a) = O_1(a) \bigcap O_2(a)$. Тогда $\forall x \in O(a)\backslash a$

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon. \quad ▶$$

Свойство 1 (предел суммы). *Пусть*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A\,, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B\,.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

Доказательство. $f(x) = A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0 \quad (x\to a)$, $g(x) = B+\beta(x)$, где $\beta(x)\to 0 \quad (x\to a)$. Тогда

$$f(x)+g(x) = A+B+\alpha(x)+\beta(x) = A+B+\gamma(x),$$

где $\gamma(x) = \alpha(x)+\beta(x)\to 0 \quad (x\to a)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,. \quad \blacktriangleright$$

Лемма 2. *Пусть* $|f(x)|\le K$ *в некоторой окрестности точки* a, *а* $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to a$. *Тогда* $f(x)\cdot\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to a$.

Доказательство. Пусть функция ограничена в окрестности $O_1(a)$ точки a и $\varepsilon>0$. По определению бесконечно малой $\exists\, O_2(a)$ $\forall\, x\in O_2(a)\backslash a \quad |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{K}$. Обозначим $O(a) = O_1(a)\bigcap O_2(a)$. Тогда

$\forall\, x\in O(a)\backslash a \quad |f(x)\cdot\alpha(x)| < K\cdot\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. $\blacktriangleright$

Свойство 2 (предел произведения). *Если* $f(x)\to A \quad (x\to a)$, $g(x)\to B \quad (x\to a)$, *то* $f(x)\cdot g(x)\to AB \quad (x\to a)$.

Доказательство. $f(x) = A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0 \quad (x\to a)$, $g(x) = B+\beta(x)$, где $\beta(x)\to 0 \quad (x\to a)$. Тогда

$$f\,(x)\cdot g\,(x) = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x) = AB+\gamma(x),$$

где $\gamma(x)\to 0 \quad (x\to a)$. Следовательно, $f(x)\cdot g(x)\to AB \quad (x\to a)$. $\blacktriangleright$

Свойство 3 (предел частного). *Если* $f(x)\to A \quad (x\to a)$, $g(x)\to B \quad (x\to a)$, $B\ne 0$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{A}{B} \quad (x\to a)$.

Доказательство. Функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ может быть не определена на множестве M, она определена на $M\bigcap\{g(x)\ne 0\}$. Но $g(x)\ne 0$ в $O_2(a)\backslash a$. Поэтому существует такая порция, где $\frac{f(x)}{g(x)}$ определена, так как $|g(x)|>C>0$, и $\left|\frac{1}{g(x)}\right|\le\frac{1}{C}=K$. Покажем, что

$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \to 0$ при $x \to a$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{Bf(x) - Ag(x)}{g(x)B} =$$

$$= \frac{\alpha(x)B - \beta(x)A}{g(x)B} = \gamma(x)\frac{1}{g(x)B} \to 0 \quad (x \to a)\,,$$

где $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, $\gamma(x) = B\alpha(x) - A\beta(x) \to 0$ $(x \to a)$. ►

§ 11. Признаки существования предела функции

11.1. Односторонние пределы

Определение. A есть *предел функции слева*, $f(x) \to A \;\; (x \to a{-}0)$, если в определении предела рассмотреть функцию на множестве $(-\infty, a) \bigcap M$. Аналогично, A есть *предел функции справа*, $f(x) \to A$ $(x \to a+0)$, если рассмотреть функцию на $(a, \infty) \bigcap M$.
Замечание. Можно доказать, что $f(x) \to A \;\; (x \to a)$ тогда и только тогда, когда $f(x) \to A \;\; (x \to a{-}0)$ и $f(x) \to A \;\; (x \to a{+}0)$.
Упражнение. Доказать это утверждение.

11.2. Оценочный признак

Теорема (оценочный признак существования предела функции). *Если* $g(x) \le f(x) \le h(x)$ *и* $g(x) \to A$ *при* $x \to a$, $h(x) \to A$ *при* $x \to a$, *то* $f(x) \to A$ *при* $x \to a$.
Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется окрестность $O(a)$ такая, что $\forall\, x \in O(a) \backslash a \quad h(x) < A + \varepsilon$, $g(x) > A - \varepsilon$. Значит, $\forall\, x \in O(a) \backslash a$

$$A - \varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < A + \varepsilon\,,$$

откуда следует, что $|f(x) - A| < \varepsilon$. ►
Теорема. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

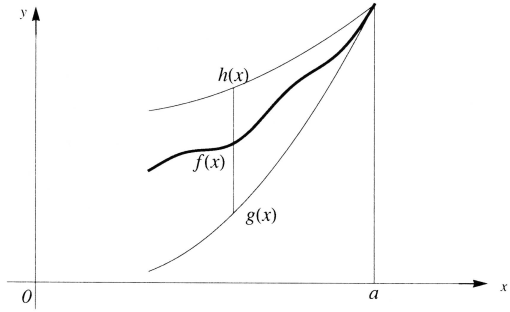

Рис. 3.7. Оценочный признак существования предела.

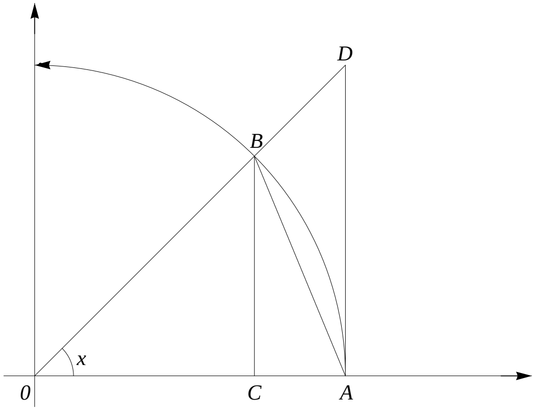

Рис. 3.8. Первый замечательный предел.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем окружность радиуса 1 и пусть $\frac{\pi}{2} > x > 0$. Из рассмотрения площадей ΔOAB, кругового сектора OAB и ΔOAD (см. рис. 3.8) следует, что $\sin x < x < \mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Тогда имеют место соотношения

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}, \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

$$1 - \cos x > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0, \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2} \to 0 \quad (x \to 0).$$

Следовательно, по оценочному признаку $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x > 0$, $x \to 0$. Далее, так как $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$, то $\frac{\sin x}{x} \to 1$ и при $x < 0$,

$x \to 0$. Значит и $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ►

11.3. Предел монотонной функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве M . *Верхней гранью функции* f на множестве M называется верхняя грань значений этой функции $\sup\limits_{x\in M} f(x) = \sup\limits_{x\in M} \{f(x)\}$.

Таким образом, если $\sup\limits_{x\in M} f(x) = \gamma$, то $\forall\, x \in M \quad f(x) \le \gamma$ и $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_0 \in M \quad f(x_0) > \gamma - \varepsilon$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M . Она называется *возрастающей на множестве* M , $f(x) \uparrow$, если $\forall\, x, x' \in M \quad f(x) \le f(x')$ при $x \le x'$.

Аналогично, функция $f(x)$, определенная на множестве M , называется *убывающей на множестве* M , $f(x) \downarrow$, если $\forall\, x, x' \in M$ $f(x) \ge f(x')$ при $x \le x'$.

Теорема о пределе монотонной функции. *Монотонная функция имеет односторонние пределы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(x)$ определена и возрастает на множестве M , $a \in M'$, $\forall\, x \in M \quad x < a$. Рассмотрим два случая. 1). Пусть $f(x)$ ограничена сверху. Тогда $A = \sup\limits_{x\in M} f(x)$ существует. Докажем, что $A = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$. По определению верхней грани $\forall\, x \in M \quad f(x) \le A$ и $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_0 \in M \quad f(x_0) > A - \varepsilon$. Все точки множества M находятся левее точки a , значит, $x_0 < a$. Используя монотонность функции, получим $\forall\, x \in M$, $x_0 < x < a$, $A \ge f(x) > A - \varepsilon$. Отсюда следует, что $\forall x \in M$, $x_0 < x$, $|f(x) - A| < \varepsilon$, что и означает, что $f(x) \to A$ при $x \to a - 0$.

Лекция 9
(04.10.67)

2). Докажем, что если функция $f(x)$ не ограничена сверху на M , то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. В самом деле $\forall\, K \ \exists\, x_0 \in M \quad f(x_0) > K$. Тогда для точек $x \in M$ таких, что $x_0 \le x < a$, $K < f(x_0) \le f(x)$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$.

Для убывающей функции доказательство аналогично. ►

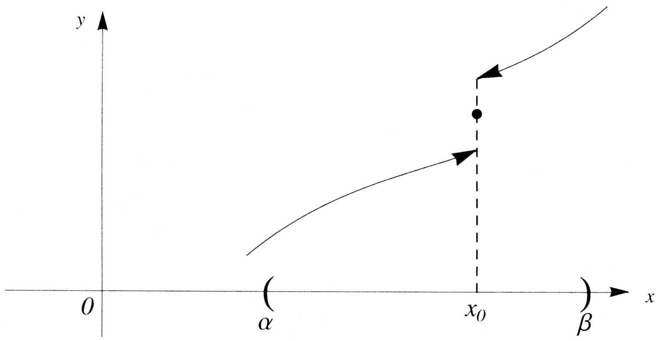

Рис. 3.9. Предел монотонной функции.

Замечание (точки разрыва монотонной функции). Пусть $f(x)$ возрастает на интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Если $x_0 \in (\alpha, \beta)$, то $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x < x_0$ и можно применить первый случай теоремы. Тогда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Таким образом, $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$ для каждой точки x_0 из интервала (рис. 3.9). Если x стремится к концу интервала, то функция имеет либо конечный предел, либо бесконечный. Значит точки разрыва монотонной функции могут быть точками разрыва только первого рода.

11.4. Число e

Теорема (число e). *Существует предел последовательности* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + \\ + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{n!}{n!}x^n$$

при $x = \frac{1}{n}$ получим

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \\ + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \\ + ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) ... \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) ... \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Отсюда следует, что $a_n < a_{n+1}$, и значит, последовательность $a_n \uparrow$ (возрастает).

Покажем, что a_n ограничена. В самом деле

$$a_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Следовательно, по теореме о пределе монотонной функции (см. п. 11.3) предел последовательности $\{a_n\}$ существует (мы можем рассматривать последовательность как функцию натурального аргумента). ▶

Предел, рассмотренный в теореме, обозначают e, приблизительно число e равно 2,718281828459045. . . .

§ 12. Пределы по Коши и по Гейне

12.1. Последовательность Гейне

Определение. Пусть функция определена на множестве M и $a \in M'$. *Последовательностью Гейне*, связанной с точкой a, называется такая последовательность $\{\xi_n\}$, что $\xi_n \in M$, $\xi_n \neq a$, $\xi_n \to a \ \ (n \to \infty)$.

Если a – предельная точка множества, то последовательность Гейне всегда существует. Действительно, пусть $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Возьмем окрестность $O(a, \delta_n)$. Пусть $\xi_n \in O(a, \delta_n)$, $\xi_n \in M$, $\xi_n \neq a$, $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $|\xi_n - a| < \delta_n$, и значит $\xi_n \to a$ при $n \to \infty$.

12.2. Предел функции по Гейне (секвенциальное определение)

Определение. Пусть имеем $f(x)$ $(x \in M)$ и $a \in M'$. Говорят, что $f(x) \xrightarrow{(\Gamma)} A$ (*по Гейне*) при $x \to a$, если для любой последовательности Гейне, связанной с точкой a, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)$ равный A.

Замечание. Если для любой последовательности Гейне $\{\xi_n\}$, связанной с точкой a, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)$, то существует предел функции по Гейне при $x \to a$.

Действительно, пусть нам даны две последовательности Гейне $\{\xi_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = A$, и $\{\xi'_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi'_n) = A'$. Смешаем их. Получим новую последовательность Гейне $\{\eta_n\}$, связанную с точкой a. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(\eta_n) = B$. Тогда $B = A$, $B = A'$. Значит все пределы значений функции по последовательностям Гейне равны между собой: $A = A'$, а функция имеет предел по Гейне при $x \to a$. ▶

Теорема об эквивалентности пределов по Гейне и по Коши. *Для того, чтобы функция имела предел по Коши необходимо и достаточно, чтобы она имела предел по Гейне.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функция имеет предел по Коши или по Гейне, то будем обозначать, соответственно,

$$f(x) \xrightarrow{(K)} A \text{ при } x \to a \quad (K),$$

$$f(x) \xrightarrow{(\Gamma)} A' \text{ при } x \to a \quad (\Gamma).$$

1) Докажем, что $(K) \Rightarrow (\Gamma)$, т.е. что если функция имеет предел по Коши, то она имеет предел по Гейне. Зададим последовательность Гейне $\{\xi_n\}$, связанную с точкой a. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = A$.

Надо доказать, что для всех $\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ $\forall n \geq N$ $|f(\xi_n) - A| < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению предела функции по Коши $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall x \in M$, $0 < |x - a| < \delta$, $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для этого δ $\exists N = N(\delta) = N(\varepsilon)$ $\forall n \geq N(\delta)$ $|\xi_n - a| < \delta$, так как $\xi_n \to a$ при $n \to \infty$, и по условию Коши получим $|f(\xi_n) - A| < \varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = A$.

2) $(\Gamma) \Rightarrow (K)$. Пусть функция имеет предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (Γ), но не имеет предел (K). Тогда число A, по предположению, не

есть предел функции по Коши. Следовательно, $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall O(a)$ $\exists \xi^0 \in M$, $\xi^0 \in O(a) \backslash a$, $\left|f(\xi^0) - A\right| \geq \varepsilon_0$. Зададим последовательность $\{\delta_n\}$, $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим окрестности $O_n(a) = \{0 < |x-a| < \delta_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Для любой такой окрестности $\exists \xi_n^0 \in M$, $\xi_n^0 \in O_n(a) \backslash a$, $\left|f(\xi_n^0) - A\right| \geq \varepsilon_0$. Так как $\delta_n \to 0$, то $\left\{\xi_n^0\right\}$ – последовательность Гейне. Значит, A не есть $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле Гейне. Но это противоречит условию. ►

12.3. Пример $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Если $x = \frac{1}{n}$, то мы уже рассматривали такой случай. Теперь надо доказать, что для любой последовательности Гейне $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, и $x_n \to 0$ при $n \to \infty$ $\lim\limits_{n \to \infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

1). Пусть $x_n > 0$, и $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для всех достаточно больших n $\exists m_n$ $m_n < \frac{1}{x_n} \leq m_n + 1$. Тогда $\frac{1}{m_n+1} \leq x_n < \frac{1}{m_n}$. Следовательно,

$$\left(1 + \frac{1}{m_n+1}\right) \leq (1+x_n) < \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) ,$$

откуда

$$\left(1 + \frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} \leq (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1} ,$$

значит

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m_n+1}} \left(1 + \frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} <$$

$$< \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) .$$

При $n \to \infty$ $x_n \to 0$, а $m_n \to \infty$. Перейдя к пределам (см. замечание в § 9), по оценочному признаку получим

$$\lim_{n \to \infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e .$$

2). Пусть теперь $x_n < 0$, $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = (1-y_n)^{-\frac{1}{y_n}} = \left(\frac{1}{1-y_n}\right)^{\frac{1}{y_n}} = \left(1 + \frac{y_n}{1-y_n}\right)^{\frac{1}{y_n}} ,$$

где $y_n = -x_n > 0$. Далее, пусть $z_n = \frac{y_n}{1-y_n}$. Тогда $z_n \to +0$ при $n \to \infty$ и

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1+\frac{y_n}{1-y_n}\right)^{\frac{1}{y_n}} =$$
$$= (1+z_n)^{\frac{1}{z_n}+1} = (1+z_n)^{\frac{1}{z_n}}(1+z_n) \to 1\cdot e = e$$

при $n \to \infty$. Значит $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. ▶

Лекция 10
(06.10.67)

12.4. Предел сложной функции

Пусть заданы функция $y = f(x)$ $(x \in M)$, $a \in M'$, $f(x) \to A$ при $x \to a$, и функция $\varphi(y)$ в окрестности $O(A)$. Рассмотрим сложную функцию $z = F(x) = \varphi(f(x))$. Мы хотели бы выяснить, при каких ограничениях эта функция имеет предел, т. е. $F(x) \to B$ при $x \to a$.

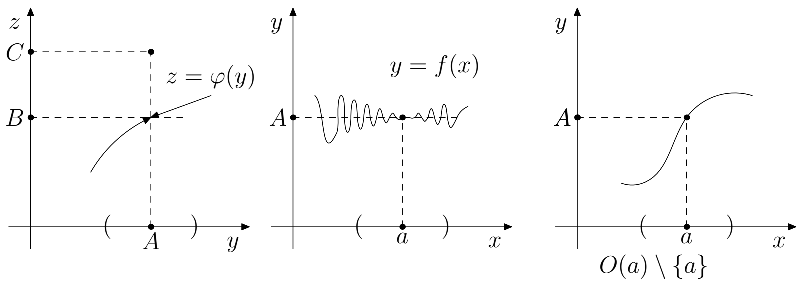

Рис. 3.10. Предел композиции функций.

Теорема (предел сложной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве M , для которого a – предельная точка, $f(x) \to A$ при $x \to a$ и существует такая окрестность $O(a)$, что $\forall\, x \in O(a)\backslash a$ $f(x) \neq A$. Пусть, далее, функция $\varphi(y)$ определена на некотором множестве N , содержащем некоторую проколотую окрестность $O(A)\backslash A$. Пусть $\varphi(y) \to B$ при $y \to A$. Тогда $z = \varphi(f(x)) \to B$ при $x \to a$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любой последовательности Гейне $\{\xi_n\}$, связанной с точкой a, $\varphi(f(\xi_n)) \to B$ при $n \to \infty$. Обозначим $y_n = f(\xi_n)$, $y_n \neq A$, $y_n \to A$ при $n \to \infty$. Значит последовательность Гейне, связанная с точкой a, переходит в последовательность Гейне, связанную с точкой A. Следовательно, для последовательности $\{y_n\}$ $\varphi(y_n) \to B$ при $n \to \infty$, т. е. $\varphi(f(\xi_n)) \to B$ при $n \to \infty$, а это эквивалентно тому, что $\lim\limits_{x \to a} \varphi(f(x)) = B$. ▶

§ 13. Критерии существования пределов

13.1. Дополнения к принципам непрерывности

Определение. Последовательность отрезков $\{\Delta_n\} = \{[a_n,\ b_n]\}$ называется *стягивающейся*, если 1) это есть система вложенных отрезков: $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и если 2) длины эти отрезков стремятся к нулю: $(b_n - a_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Теорема. *Существует единственная точка* $\alpha \in \mathbb{R}$ *, которая принадлежит всем отрезкам системы стягивающихся отрезков*: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{\alpha\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Кантора о вложенных отрезках по крайней мере одна точка всегда существует. Пусть $\alpha \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, $\beta \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ и $\alpha < \beta$. Тогда $a_n \leq \alpha < \beta \leq b_n$, т. е. для любого n $b_n - a_n \geq \beta - \alpha > 0$, а это противоречит условию 2), т. е. тому, что длины стягивающихся отрезков стремятся к нулю. ▶

Теорема (принцип непрерывности Вейерштрасса). *Пусть последовательность* $\{a_n\} \uparrow$ *и пусть* $a_n \leq K$ *для любого* n. *Тогда существует* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Действительно, множество значений ограниченной последовательности имеет (п. 6.2, с. 34) верхнюю грань, которая совпадает с пределом последовательности ввиду ее возрастания. ▶

Для числовой прямой все принципы непрерывности эквивалентны.

13.2. Компактность

Компактность – это свойство, отличающее отрезок от всей прямой. На прямой существует бесконечно много точек таких, что они все попарно сильно удалены. На отрезке таких точек ограниченное количество. Свойство компактности отрезка выражается леммой Больцано – Вейерштрасса.

Лемма Больцано – Вейерштрасса. *Пусть M – бесконечное ограниченное точечное множество на прямой* (*т. е. пусть M содержится в некотором отрезке* $[a,b]$). *Тогда у этого множества существует, по крайней мере одна, предельная точка* $\alpha \in [a,b]$.

Доказательство. Применим метод деления пополам [1)]. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам, получим два новых отрезка. Хотя бы на одном из этих отрезков находится бесконечная часть множества M . Обозначим этот отрезок Δ_1 , $\Delta_1 \bigcap M$ бесконечно и длина отрезка $|\Delta_1| = \frac{b-a}{2}$. Разделим отрезок Δ_1 пополам, снова выберем отрезок Δ_2 , содержащий бесконечное множество точек множества M ; длина отрезка Δ_2 равна $\frac{b-a}{2^2}$. И так далее.

Получим последовательность вложенных отрезков

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset ... \supset \ \Delta_n \supset ...,$$

причем длины этих отрезков $\frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

По теореме о стягивающихся отрезках существует единственная точка $\alpha \in \Delta_n$ для любого n, следовательно, $\alpha \in [a,b]$. Докажем, что α – предельная точка множества M. Рассмотрим произвольную окрестность $O(\alpha)$ этой точки. Если n достаточно велико, то отрезок $\Delta_n \subset O(\alpha)$. Значит $\exists\, x \in M$, $x \in \Delta_n$, $x \neq \alpha$, $x \in O(\alpha)$ (так как внутри Δ_n бесконечно много точек множества M).

Итак, в любой окрестности $O(\alpha)$ точки α найдется хотя бы одна точка множества M, отличная от α , значит α есть предельная точка множества M. ▶

Определение. Число a называется *предельным значением* (*предельной точкой*) *последовательности* $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_k \uparrow\uparrow$ $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Замечание. Понятие предельного значения последовательности отличается от понятия предельной точки множества значений по-

---

[1)] Этот метод С. Б. С. называл "ловить льва в пустыне". (Ред.)

следовательности. Например последовательность $a_n = 1$ имеет предельное значение, равное 1, но множество значений последовательности не имеет предельных точек.

Следствие (Лемма Больцано – Вейерштрасса для последовательностей). *Всякая ограниченная числовая последовательность имеет, по крайней мере одно, предельное значение.*

Упражнение. Доказать следствие методом деления отрезка на оси Oy пополам.

Лекция 11
(11.10.67)

Замечания к лемме Больцано – Вейерштрасса.

1). Лемма утверждает существование предельных точек, но не говорит об их числе. Предельных значений может быть много.

2). Если множество $M \subset [a,b]$, то все предельные точки принадлежат этому отрезку, вне этого отрезка предельных точек множества нет.

3). **Замечание к лемме Больцано – Вейерштрасса для множеств**. Если $M \subset [a,b]$, M – бесконечное множество, то найдется предельная точка этого множества $\alpha \in M'$, для которой найдется последовательность Гейне элементов этого множества, отличных от α и сходящаяся к α ($n \to \infty$): $\exists \xi_n \in M$, $\xi_n \neq \alpha$, $\xi_n \to \alpha$ ($n \to \infty$).

4). В лемме не утверждается, что предельная точка принадлежит самому множеству M. Лемма выражает свойство компактности множества на прямой, а не в себе.

13.3. Лемма Гейне – Бореля

Рассмотрим систему множеств $\{M_\alpha\}$ и некоторое множество A.

Определение. Система $\{M_\alpha\}$ называется *покрытием множества* A, если объединение всех множеств M_α покрывает A, т. е. $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha \supset A$.

Покрытия бывают конечные и бесконечные. Особенно важны покрытия посредством интервалов [2].

[2] "Одеяло будет всегда волочиться по полу" по образному выражению С. Б. С.

Лемма Гейне – Бореля. *Из всякого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие.*
Упражнение. Доказать лемму методом деления пополам.

13.4. Критерии существования пределов

1). Критерий существования предела последовательности в терминах предельных значений.

Пусть $|a_n| \le K$ для любых n. Обозначим A множество предельных значений последовательности $\{a_n\}$.

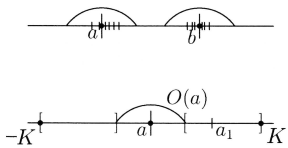

Рис. 3.11. К теореме о существовании предела последовательности в терминах предельных значений.

Теорема. *Для того, чтобы ограниченная последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы множество ее предельных значений состояло из единственной точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Н е о б х о д и м о с т ь. Если последовательность имеет более одного предельного значения, то она не может быть сходящейся. Действительно, пусть a – предел и пусть b – другая предельная точка (рис. 3.11). Возьмем $O(a)$ и $O(b)$ такие, что $O(a) \bigcap O(b) = \varnothing$. Тогда найдется бесконечно много точек a_n , не принадлежащих $O(a)$. Тогда a не предел, что противоречит предположению.

II. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть a – единственная предельная точка. Надо доказать, что последовательность сходится к этой точке. Пусть это не так, это значит, что существует окрестность $O(a)$, вне которой есть бесконечное число членов нашей ограниченной последовательности. Тогда вне окрестности $O(a)$ есть предельные значения: $a_1, \ldots$. Это противоречит предположению. ►

Определение. Если последовательность ограничена $|a_n| \le K$, то $\alpha = \inf\limits_{a \in A} a = \varliminf\limits_{n \to \infty} a_n$ – *нижний предел* последовательности,

$\beta = \sup\limits_{a \in A} a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ – *верхний предел* последовательности.

Таким образом, последовательность имеет одну предельную точку, т.е. последовательность имеет предел, тогда и только тогда, когда $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

2) Критерий Коши существования предела последовательности.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *последовательностью Коши*, если для $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \quad \forall\; n, m > N$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Таким образом, все члены последовательности Коши с большими номерами близки друг к другу. Последовательность Коши показывает, при каких дополнительных условиях предельная точка является пределом.

Критерий Коши для последовательности. *Для того, чтобы последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была последовательностью Коши.*

Доказательство. I. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, N \quad \forall\, n > N \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\forall\, m > N \quad |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Сложив эти неравенства, получим, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Лекция 12
(13.10.67)

II. Достаточность. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность Коши. Надо доказать, что она сходится. По определению последовательности Коши $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \quad \forall\, n, m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon_0 = 1$. Тогда $\exists\, N_1 \quad \forall\, n, m > N_1 \quad |a_n - a_m| < 1$. Выберем из всех номеров $n > N_1$ один номер n_0. Тогда $|a_{n_0} - a_m| < 1$ при любых $m > N_1$ и, значит, $a_{n_0} - 1 < a_m < a_{n_0} + 1$. Положим $K = \max\{|a_{n_0} - 1|, |a_{n_0} + 1|\}$. Тогда $\forall\, m > N_1 \quad |a_m| \le K$. Обозначим $\max\limits_{k \le N_1}\{|a_k|\} = K_1$. Тогда $|a_k| \le K_2 = \max\{K, K_1\} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Итак, последовательность $\{a_k\}$ ограничена. По лемме Больцано – Вейерштрасса у этой последовательности есть, по крайней мере одна, предельная точка. Пусть α – предельная точка последовательности. Покажем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и этот предел равен α.

Зададим $\varepsilon > 0$. Последовательность $\{a_k\}$ – последовательность Коши. Поэтому $\exists\, N \quad \forall\, n, m > N \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Точка α – предельная точка, следовательно, $\exists\, n_1 > N \quad |\alpha - a_{n_1}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall\, m > N \quad |a_{n_1} - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно,

$$|\alpha - a_m| \leq |\alpha - a_{n_1}| + |a_{n_1} - a_m| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall\, m > N\,.$$

А это и значит, что $a_m \to \alpha$ при $m \to \infty$. ►

13.5. Критерий Коши существования предела функции

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и a – предельная точка этого множества (т. е. $a \in M'$).

Теорема (критерий Коши существования предела функции). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и a – предельная точка этого множества. Для того, чтобы функция имела предел в точке a необходимо и достаточно выполнение следующего условия:* $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, x' \in M\,,\ 0 < |x - a| < \delta\,,$ $0 < |x' - a| < \delta\,,\quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon\,.$

Замечание. Критерий Коши и для функции и для последовательности утверждает, что имеется конечный классический предел. На случай бесконечного предела критерий не переносится.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. I. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (A конечно). Тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in M\,,$ $0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$. Значит $\forall\, x' \in M\,,\ 0 < |x' - a| < \delta\,,$ $|f(x') - A| < \varepsilon$. Тогда

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - A| + |A - f(x')| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

II. Д о с т а т о ч н о с т ь. Докажем, что существует A такое, что $\forall\, \{\xi_n\}\,,\ \ \xi_n \in M\,,\ \ \xi_n \neq a\,,\ \ \xi_n \to a$ при $n \to \infty\,,\ \ f(\xi_n) \to A$ при $n \to \infty$. Т. е. надо проверить, что для любой последовательности Гейне $\{\xi_n\}$ последовательность $a_n = f(\xi_n)$ есть последовательность Коши.

Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда для этого $\varepsilon \quad \exists\, \delta > 0 \quad \exists\, N = N(\delta) \quad \forall\, n > N$ $0 < |\xi_n - a| < \delta$. Значит, точки ξ_n для всех $n > N$ удовлетворяют условию $\forall\, m > N,\ 0 < |\xi_n - a| < \delta,\ |f(\xi_n) - f(\xi_m)| < \varepsilon$, т. е.

$|a_n - a_m| < \varepsilon$. Таким образом, $\{a_n\}$ есть последовательность Коши. Следовательно, она сходится, и функция имеет предел, что и требовалось доказать. ▶

Замечание. Если $a = \infty$, то критерий формулируется следующим образом.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$
$$\forall x \;\; \exists K \;\; \forall x, x' \in M, \;\; x > K, \; x' > K, \;\; |f(x) - f(x')| < \varepsilon\,.$$

§ 14. Порядки бесконечно малых

Определение. Говорят, что функция $\alpha(x)$ есть “*O большое*” от $\beta(x)$ ($x \in M$) и записывают $\alpha(x) = O(\beta(x))$ ($x \in M$), если $\exists C > 0 \;\; \forall x \in M \;\; |\alpha(x)| \le C\beta(x)$.

Например $\sin x = O(x)$. $f(x) = O(1)$ означает, что функция на рассматриваемом множестве ограничена.

Если $\alpha_1(x) = O(\beta(x))$, $\alpha_2(x) = O(\beta(x))$, то

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = O(\beta(x))\,, \quad \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) = O(\beta(x))\,.$$

В частности,

$$O(1) + O(1) = O(1), \quad O(1) - O(1) = O(1), \quad O(1) \cdot O(1) = O(1)\,.$$

$\asymp$ – *порядковое равенство.* $\alpha(x) \asymp \beta(x)$ означает, что найдутся такие $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что для всех $x \in M$

$$C_1\beta(x) \le \alpha(x) \le C_2\beta(x)$$

или, если $\beta(x) > 0$, $C_1 \le \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \le C_2$. Это свойство, которое показывает, что α и β ведут себя одинаково. Например, $x(2 + \sin x) \asymp x$ для $x \ge 0$.

Упражнение. Верно ли, что если даны две пары функций, связанных порядковым равенством, то их можно умножать, складывать и вычитать, и при этом порядковое равенство сохранится?

$\approx$ – *асимптотическое равенство.* $\alpha(x) \approx \beta(x)$ при $x \to 0$, если $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to 1$ ($x \to 0$).

$\alpha(x) = o(\beta(x))$ ($x \to 0$), если $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to 0$ ($x \to 0$). Говорят, что $\alpha(x)$ есть “*o малое*” от $\beta(x)$ при $x \to 0$.

Заметим, что если $\alpha(x) \approx \beta(x)$ при $x \to 0$, то

$$\frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} \to 0; \quad \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \quad (x \to 0).$$

Соотношения “O” и “$\asymp$” не связаны с понятием предела, а “o” и “$\approx$” связаны с понятием предельного перехода.

Пример. Пусть $y \approx \frac{x}{\ln x}$ $(x \to \infty)$ и $y(x) \uparrow\uparrow$. Рассмотрим $x = x(y)$ – обратную к $y(x)$ функцию. Тогда

$$y = \frac{x}{\ln x} \cdot (1 + o(1)), \quad y \ln x = x(1 + o(1)),$$

$$\ln y + \ln \ln x = \ln x + \ln(1 + o(1)), \quad \ln x = \ln y + \ln \ln x + o(1).$$

Так как $\ln x = o(x)$, то $\ln \ln x = o(\ln x)$. Следовательно,

$$\ln x = \ln y + o(\ln x), \quad \ln x \{1 + o(1)\} = \ln y,$$

$$\ln x = \ln y \cdot (1 + o(1)),$$

$$x = y \ln x \cdot (1 + o(1)), \quad x = y \ln y \cdot (1 + o(1))$$

и, наконец, $x \approx y \ln y$. ►

Глава 4

Непрерывные функции

Лекция 13
(18.10.67)

§ 15. Непрерывные функции в точке. Точки разрыва

15.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, $M \subset \mathbb{R}$. Понятие непрерывной функции в точке, в отличие от предела, определяется для точек из области определения функции.

Определение непрерывности по Коши. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \ \ \forall\, x \in M$ $|x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Непрерывность обычно обозначается буквой C; $f(x) \in C(x_0)$ значит, что $f(x)$ – непрерывная в точке x_0 функция, или $f(x)$ принадлежит к классу непрерывных в точке x_0 функций.

Если функция не является непрерывной в точке x_0, то она называется *разрывной* функцией в этой точке.

Если M – область определения функции, то $M = M_C \bigcup M_D$ – разбиение области определения функции на два множества, где M_C – множество таких точек из M, в которых функция непрерывна, а M_D – множество точек из M, в которых функция разрывна.

Заметим, что в определении предела функции рассматривается выколотая окрестность, а в определении непрерывности – полная окрестность. Тогда из условия $\forall\,\varepsilon > 0 \quad |f(x_0) - A| < \varepsilon$ следует $A = f(x_0)$.

Геометрическая интерпретация непрерывности функции: какова бы ни была окрестность $O(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ найдется окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in O(x_0)$ значения $f\,(x)$ попадают в $O(f(x_0))$.

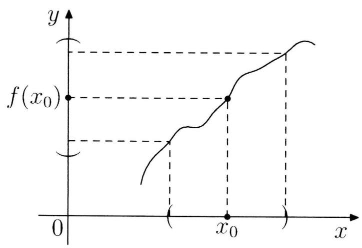

Рис. 4.1. Непрерывность функции.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть x_0 – изолированная точка в области определения функции. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ выбираем δ такое, что δ-окрестность не содержит других точек, кроме x_0, и определение непрерывности функции выполняется, следовательно, функция непрерывна в точке x_0.

2) Пусть $x_0 \in M$ и $x_0 \in M'$ (это означает, что x_0 – предельная точка множества M). Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Обратно, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ и $x_0 \in M$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Таким образом, для того, чтобы функция $y = f\,(x)$ была непрерывна в точке $x_0 \in M$, $x_0 \in M'$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

15.2. Точки разрыва функции

Пусть $x_0 \in M$ и $x_0 \in M'$ (только такие точки могут быть точками разрыва функции). Что значит, что функция разрывна? Это значит, что либо 1) предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ отличается от $f(x_0)$, либо 2) предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ нет.

1). Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 – точка устранимого разрыва. Изменив функцию в точке x_0, можно сделать ее непрерывной. Новая функция отличается от заданной только в одной точке и непрерывна в этой точке.
Остальные точки разрыва называются точками неустранимого разрыва.

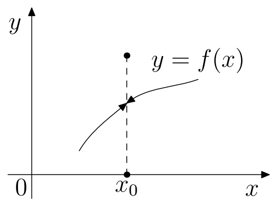

Рис. 4.2. Точка устранимого разрыва.

2). Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, то x_0 – точка неустранимого разрыва.
Может быть так, что в точке x_0 существует $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Тогда точка x_0 называется точкой разрыва первого рода.

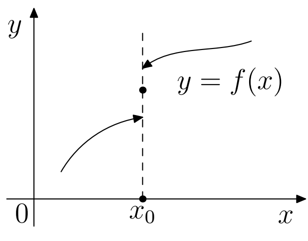

Рис. 4.3. Точка разрыва 1-го рода.

3). Точки, которые не являются точками устранимого разрыва и точками разрыва первого рода, называются точками разрыва второго рода.

Пример. 1) Для функции $y = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода.

2) Для функции $y = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ точка $x = 0$ точкой разрыва не является, так как не входит в область определения функции.

3) Аналогично, для функции $y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ точка $x = 0$ не является точкой разрыва.

15.3. Колебание функции в точке

Пусть $y = f(x)$ $(x \in M)$, $x_0 \in M$. Возьмем $\delta > 0$. Рассмотрим множество $\Delta_\delta(x_0)$ точек из M, для которых $|x - x_0| < \delta$. *Колебанием функции на этом множестве* называется величина

$$\omega(f, \Delta_\delta(x_0)) = \sup_{x \in \Delta_\delta(x_0)} f(x) - \inf_{x \in \Delta_\delta(x_0)} f(x) \geq 0.$$

$\omega(f, \Delta_\delta(x_0))$ есть монотонно убывающая функция от δ.
Колебанием функции в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(f, \Delta_\delta(x_0)) = \omega(f, x_0).$$

Утверждение. $\omega(f, x_0) = 0$ *тогда и только тогда, когда функция непрерывна в точке* x_0, *т.е.* когда $f \in C(x_0)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$\sup_{x \in \Delta(x_0)} f(x) \geq f(x) \geq \inf_{x \in \Delta(x_0)} f(x).$$

Теперь, если $\omega(f, x_0) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\omega(f, \Delta_\delta(x_0)) < \varepsilon$. Это значит, что

$$\left| \sup_{x \in \Delta_\delta(x_0)} f(x) - \inf_{x \in \Delta_\delta(x_0)} f(x) \right| < \varepsilon.$$

Тогда $\sup\limits_{x \in \Delta(x_0)} f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, $\inf\limits_{x \in \Delta(x_0)} f(x) > f(x_0) - \varepsilon$. Значит, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in M$, $|x - x_0| < \delta$, $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, что эквивалентно непрерывности функции в точке x_0.
Очевидно и обратное, если $f \in C(x_0)$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\omega(f, \Delta_\delta(x_0)) < \varepsilon$, откуда $\omega(f, \Delta_\delta(x_0)) \to 0$ $(\delta \to 0)$. ►

Замечание. $0 \le \omega(f, x_0) \le +\infty$. Колебание функции на интервале и в точке – неотрицательное число и может обращаться в $+\infty$. Если $\omega(f, x_0) > 0$, то x_0 – точка разрыва. При этом, если $\omega(f, x_0)$ конечно, то x_0 – точка конечного разрыва (первого или второго рода), если $\omega(f, x_0)$ бесконечно, то x_0 – точка бесконечного разрыва (второго рода).

15.4. Точки разрыва монотонной функции

Пусть $f(x) \uparrow$ на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. По теореме о пределе монотонной функции $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \le f(x_0) \le \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (см. п. 11.3). Монотонная функция непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда ее предел слева в точке x_0 равен пределу справа. Мы получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема (критерий непрерывности монотонной функции). *Монотонная функция непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда* $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Всякая точка разрыва монотонной функции есть точка разрыва первого рода, так как $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Колебание монотонной функции в точке x_0 есть $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$, т. е. значение $\omega(f, x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ есть величина скачка монотонной функции.

Теорема. *Монотонная функция, заданная на интервале, может иметь не более чем счетное множество точек разрыва.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале (a, b). Если x_0 – точка разрыва, то $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Если x_0 и x_1 – различные точки разрыва функции и $x_0 < x_1$, то

$$f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) \le f(x_1 - 0) < f(x_1 + 0).$$

Так как $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ – невырожденный интервал, то существует хотя бы одна рациональная точка $r = r(x_0)$, принадлежащая этому интервалу. Аналогично, существует рациональная точка $r(x_1)$, принадлежащая $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$, причем имеет место неравенство $r(x_0) < r(x_1)$, т. е. разным точкам разрыва соответствуют разные рациональные числа (интервалы не пересекаются) (рис. 4.4). Итак, множество точек разрыва можно поставить во взаимно однозначное соответствие с подмножеством множества рациональных чисел. А значит, их не более, чем счетное множество. ▶

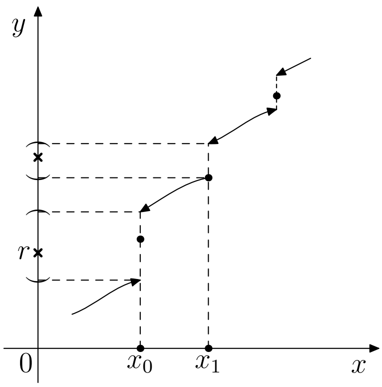

Рис. 4.4. Разрывы монотонной функции.

Лекция 14
(20.10.67)

15.5. Примеры разрывных функций

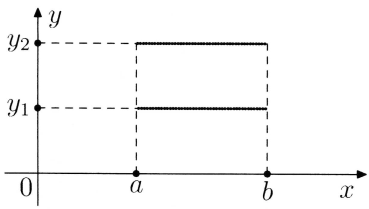

Рис. 4.5. К примеру функции, разрывной в каждой точке.

Пусть $E \subset (a, b)$ и $y_1 \neq y_2$. Определим функцию (рис. 4.5)

$$f(x) = \begin{cases} y_1 & (x \in E) \\ y_2 & (x \notin E) \end{cases} .$$

Если $E = \mathbb{Q} \bigcap (a, b)$, то получим функцию типа Дирихле, разрывную в каждой точке.

Если определим функцию (рис. 4.6)

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + (x - x_0) & (x \in E) \\ y_0 - (x - x_0) & (x \notin E) \end{cases},$$

то получим функцию, разрывную всюду, кроме точки x_0.

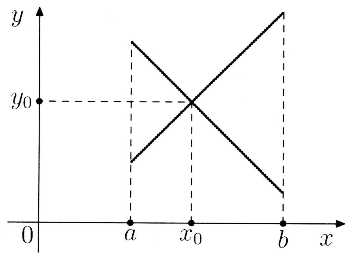

Рис. 4.6. К примеру функции, разрывной всюду, кроме точки x_0.

Замечание. Если функция задана на интервале, то не всякое его подмножество может служить множеством точек непрерывности функции [1].

15.6. Секвенциальное определение непрерывности функции

Пусть $y = f(x)$ $(x \in M)$, $x_0 \in M$.

Теорема. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{\xi_n\}$, состоящей из точек M и сходящейся к x_0 при $n \to \infty$ последовательность*

[1] Рассматривая колебание функции в точке, можно показать для функции, заданной на интервале, что множество ее точек разрыва есть множество типа F_σ (т. е. является объединением счетного множества замкнутых множеств), а множество точек непрерывности – типа G_δ (т. е. является пересечением счетного множества открытых множеств), соответственно. Поэтому существуют функции непрерывные во всех иррациональных точках (множество типа G_δ, но не F_σ), и разрывные во всех рациональных точках (множество типа F_σ), например, функция Римана, но не существует функции, непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных точках. (См. [3] гл. 8, с. 131, примеры 21, 22, и гл. 2 с.43, пример 23). (Ред.)

$\{f(\xi_n)\}$ *сходится к* $f(x_0)$ *при* $n \to \infty$, *т. е. существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для изолированных точек все ясно. Если $x_0 \in M'$, $x_0 \in M$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(\xi_n) = f(x_0)$ в силу эквивалентности определений предела. ▶

§ 16. Действия над функциями, непрерывными в точке

16.1. Простейшие свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (простейшие свойства функций, непрерывных в точке. *Если* $f(x) \in C(x_0)$ *и* $f(x_0) > 0$, *то найдется окрестность* $O(x_0)$ *такая, что* $\forall x \in M$, $x \in O(x_0)$, $f(x) > 0$. *Если функция* $f(x) \in C(x_0)$, *то она локально ограничена, т.е.* $\exists\, K > 0$ $\exists\, O(x_0)$ $\forall x \in M$, $x \in O(x_0)$, $|f(x)| \le K$.

16.2. Действия над функциями, непрерывными в точке

Теорема (действия над функциями, непрерывными в точке). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на множестве* M, $x_0 \in M$, $f, g \in C(x_0)$. *Тогда*

1) $f \pm g \in C(x_0)$,
2) $f \cdot g \in C(x_0)$,
3) $\frac{f}{g} \in C(x_0)$ *если* $g(x_0) \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1). Докажем, что $f \pm g \in C(x_0)$. Так как $f(x) \in C(x_0)$, $g(x) \in C(x_0)$ то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_1 > 0 \;\; \forall x \in M, \;\; |x - x_0| < \delta_1, \;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_2 > 0 \;\; \forall x \in M, \;\; |x - x_0| < \delta_2, \;\; |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Фиксируем ε и возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Тогда для любых x, таких, что $|x - x_0| < \delta$, верны оба неравенства. Сложив их, получим:

$$|f(x) \pm g(x) - (f(x_0) \pm g(x_0))| < 2\varepsilon.$$

2). Докажем, что $f \cdot g \in C(x_0)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_1 > 0 \ \ \forall x \in M, \ \ |x - x_0| < \delta_1, \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_2 > 0 \ \ \forall x \in M, \ \ |x - x_0| < \delta_2, \ \ |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Так как функция $f(x) \in C(x_0)$, то она локально ограничена, значит $\exists\, K > 0 \ \ \exists \delta_3 > 0 \ \ \forall x$, $|x - x_0| < \delta_3$, $|f\,(x)| \le K$. Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Тогда для любых $x \in M$, $|x - x_0| < \delta$, справедливы все эти неравенства. Имеем

$$\begin{aligned} &f(x) \cdot (g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0) = \\ &\quad = f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) = \\ &\qquad\qquad = f(x)\,\{g\,(x) - g(x_0)\} + g(x_0)\,\{f(x) - f(x_0)\}\,. \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall x \in M$,

$$|f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| < K \cdot \varepsilon + |g(x_0)| \cdot \varepsilon = (K + |g(x_0)|) \cdot \varepsilon.$$

3). Докажем, что $\frac{f}{g} \in C(x_0)$ если $g\,(x_0) \ne 0$. Пусть для определенности $g\,(x_0) > 0$. Тогда $\exists \delta_4 > 0 \ \ \forall x \in M$, $|x - x_0| < \delta_4$, $g\,(x) > a > 0$ (например $a = \frac{g(x_0)}{2}$). Значит, $\forall x \in M$, $|x - x_0| < \delta_4$, $\left(\frac{1}{g(x)}\right) \le \frac{1}{a} = K$, и так как

$$\begin{aligned} &\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)} = \\ &\qquad\qquad = \frac{g(x_0)\,\{f(x) - f(x_0)\} - f(x_0)\,\{g(x) - g(x_0)\}}{g(x)g(x_0)}\,, \end{aligned}$$

то

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right| \le K^2\,\{|g(x_0) + f(x_0)|\}\,\varepsilon\,. \quad \blacktriangleright$$

16.3. Теорема о непрерывности сложной функции

Теорема. *Пусть дана сложная функция* $F(x) = \varphi(f(x))$, *где* $f\,(x)$ *определена на множестве* M, $f(x) \in C(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$, $\varphi(y)$ *определена для* $y \in L$ $\ (L \supset f(M))$, $\varphi(y) \in C(y_0)$. *Тогда* $F(x) \in C(x_0)$.

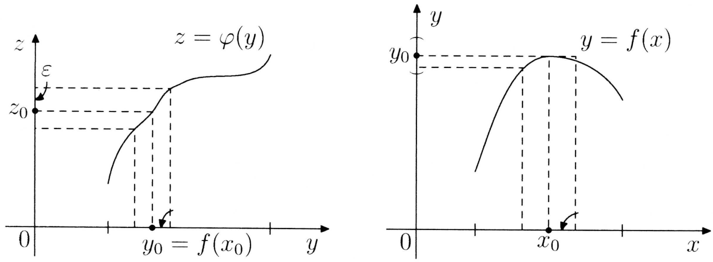

Рис. 4.7. Непрерывность сложной функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \, y \in L \, , \, y \in f(M) \, , \, |y - y_0| < \delta \, , \;\; |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon \, ,$$

$$\forall \delta > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in M \, , \, |x - x_0| < \eta \, , \;\; |f(x) - f(x_0)| < \delta \, .$$

Тогда для любого $x \in M$ такого, что $|x - x_0| < \eta$, для $y = f(x)$ и $y_0 = f(x_0)$ выполняется неравенство $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, и, следовательно, $|\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon$, или, что то же самое, $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. Значит $F(x) \in C(x_0)$. ▶

Следствие. *Пусть* $F(x) = \varphi(f(x))$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\varphi(y)$ *определена для* $y \in O(A)$, $\varphi(y) \in C(A)$. *Тогда*

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \varphi\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) ,$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq x_0) \\ A & (x = x_0) \end{cases}$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \bar{f}(x) = \bar{f}(x_0)$, т. е. $\bar{f}(x) \in C(x_0)$. Значит к этой функции применима теорема о непрерывности сложной функции. Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(\bar{f}(x)) = \varphi(A)$, откуда $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \varphi\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)$ что доказывает утверждение. ▶

Следствие. $\lim\limits_{x \to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$.

Лекция 15
(25.10.67)

§ 17. Функции, непрерывные на множестве

Пусть $M \subset X \subset \mathbb{R}$ и функция $f(x)$ определена для $\forall x \in X$. Говорят, что *функция* $f(x)$ *непрерывна на множестве* M и обозначают $f(x) \in C(M)$, если функция непрерывна в каждой точке этого множества. Таким образом, $f(x) \in C(M)$, если $\forall x_0 \in M$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, $\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Здесь $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ зависит и от x_0 и от ε.

Рассмотрим сужение $f_M(x)$ функции $f(x)$ на множество M : $f_M(x) = f(x) \quad (x \in M)$. Очевидно, что если $f(x) \in C(M)$, то и $f_M(x) \in C(M)$. При изучении функции на множестве будем считать, что $M = X$.

Пусть функция $f(x) \in C(M)$. Нас интересует, какие свойства M при переходе к образу при непрерывном отображении сохраняются, и какие не сохраняются.

При непрерывном отображении ограниченность не сохраняется.

Пример. $M = (0,1)$, $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in M)$, $f(M) = (1, +\infty)$.

При непрерывном отображении замкнутость не сохраняется.

Пример. $M = (-\infty, +\infty)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(M) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

При непрерывном отображении открытое множество не обязано переходить в открытое.

Пример. $M = (0, 2\pi)$, $f(x) = \sin x$, $f(M) = [-1, 1]$. Также для функции, график которой изображен на рис. 4.8.

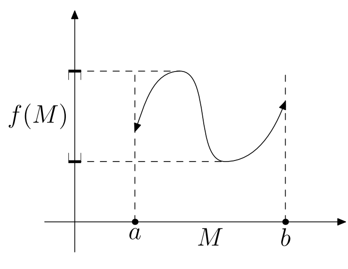

Рис. 4.8. Образ открытого множества не обязательно открытое множество.

§ 18. Свойства функций, непрерывных на множестве

18.1. Связность (линейная)

Определение. Множество M на числовой прямой *связно* (*линейно связно*), если оно обладает следующим свойством: если $x,\ x' \in M$, то и $[x,\ x'] \subset M$.

Замечание. Множество M на плоскости называется *связным* (*линейно связным*), если любые две точки $x,\ x' \in M$ могут быть соединены непрерывной линией, лежащей в этом множестве. Если M открыто, в этом определении можно заменить непрерывную линию конечно-звенной ломаной (рис. 4.9).

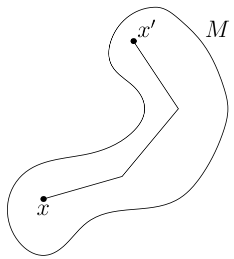

Рис. 4.9. Открытое связное множество на плоскости.

Теорема (структура связных множеств на числовой прямой). *Связные множества – это отрезки, интервалы и полуинтервалы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M – связное множество на числовой прямой. Пусть $\alpha = \inf\limits_{x \in M} x$, $\beta = \sup\limits_{x \in M} x$.

1). Пусть $\alpha > -\infty$, $\beta < +\infty$ (M ограничено). Тогда, если $\alpha \in M$, $\beta \in M$, то $M = [\alpha, \beta]$, так как M – связное множество.
Если $\alpha \in M$, $\beta \notin M$, то в этом случае $\forall \gamma$, $\alpha < \gamma < \beta$, $\exists x_0 \in M$ $\gamma < x_0 < \beta$. Тогда $[\alpha, x_0] \subset M$, $\gamma \in [\alpha, x_0] \subset M$, и, следовательно, M – полуинтервал $[\alpha, \beta)$.

2). $\alpha > -\infty$, $\beta = +\infty$. Тогда M есть $(\alpha, +\infty)$ или $[\alpha, +\infty)$.
Аналогично для случая $\alpha = -\infty$, $\beta < +\infty$.

3). $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$. Тогда $M = (-\infty, +\infty)$ – вся числовая прямая. ▶

Сохранение связности. Пусть функция $f(x) \in C(M)$, $M \subset \mathbb{R}$ и M – связно. Ниже мы докажем, что тогда $f(M)$ – связно.

Лемма об обращении непрерывной функции в нуль. *Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \in C\,[a, b]$. Пусть также $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда найдется такая точка c из интервала (a, b) , что $f(c) = 0$.*

Замечание. Для несвязного множества лемма неверна (рис. 4.10).

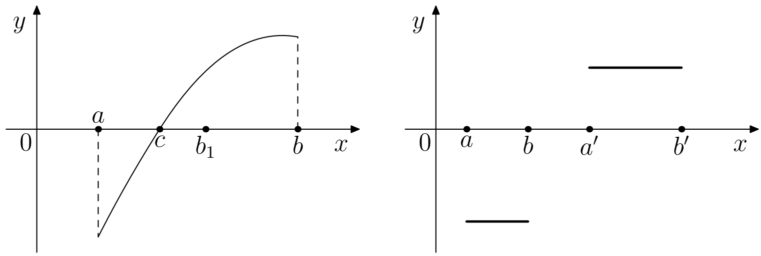

Рис. 4.10. Обращение непрерывной функции в нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма доказывается методом деления пополам. Обозначим $\Delta_0 = [a, b]$. Разделим Δ_0 пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Возможны два случая:

1). $f(\frac{a+b}{2}) = 0$. В этом случае лемма доказана.

2). $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$. Тогда $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ или $f(\frac{a+b}{2}) < 0$. Обозначим через $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ ту половину отрезка $[a, b]$, для которой выполняется неравенство $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. И так далее.

Тогда или процесс где-нибудь оборвется, и мы получим в одном из концов новых отрезков точку, где функция равна нулю; или мы получим систему вложенных отрезков $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$, для которых $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, причем длины отрезков $\frac{b-a}{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Допустим,

$$f(a) < 0\,, \quad f(b) > 0\,,$$

$$f(a_1) < 0\,, \quad f(b_1) > 0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(a_n) < 0\,, \quad f(b_n) > 0\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

По теореме о стягивающейся системе отрезков существует единственная точка $c \in [a_n, b_n] \quad \forall\, n$. Тогда $a_n \to c$, $b_n \to c \quad (n \to \infty)$, а так как функция непрерывна, то

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0\,, \quad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0\,.$$

Значит, $f(c) = 0$. ►

Теперь легко может быть доказана следующая теорема.

Теорема о промежуточном значении. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и на его концах принимает разные значения*: $f(a) = A$, $f(b) = B$, *пусть* $A < B$. *Тогда для любого* C *такого, что* $A < C < B$ *найдется точка* $\xi \in (a, b)$ *такая, что* $f(\xi) = C$.

Доказательство. Введем функцию $\varphi(x) = f(x) - C$, тогда $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков: $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$. По лемме об обращении непрерывной функции в нуль $\exists \xi \in (a, b)$ $\varphi(\xi) = 0$. Так как $\varphi(\xi) = f(\xi) - C$, то $f(\xi) - C = 0$ и $f(\xi) = C$.
►

Теорема. *Пусть* M *– связное множество*, $f(x) \in C(M)$. *Тогда и* $f(M)$ *связно.*

Доказательство. Обозначим $Y = f(M)$. Пусть точки A и B принадлежат Y и для определенности $A < B$. Покажем, что $[A, B] \subset Y$. Именно докажем, что если C – любая точка такая, что $A < C < B$, то $C \in Y$.

Так как значения $A, B \in Y$, то $\exists\ a, b \in M \quad f(a) = A$, $f(b) = B$. В силу связности множества M отрезок $[a, b] \subset M$. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, по теореме о промежуточном значении, $\exists \xi \in [a, b]$, $\xi \in M$, $f(\xi) = C$. Таким образом, любая промежуточная точка C между A и B имеет прообраз. Значит, весь отрезок $[A, B]$ лежит в Y и множество $f(M)$ связно.
►

Вопросы к коллоквиуму.

1. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных чисел.

2. Верхняя и нижняя грани числового множества.

3. Лемма о стягивающихся отрезках.

4. Лемма о выделении конечного покрытия.

5. Свойства функции (последовательности), имеющей предел (ограниченность, сохранение знака, единственность предела).

6. Свойства бесконечно малых. Предел суммы, произведения, частного.

7. Переход к пределу в неравенствах. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

8. Теорема о пределе монотонной функции. Число e.

9. Теорема об эквивалентности двух определений предела.

10. Теорема о существовании предельной точки. Критерий Коши для последовательности. Критерий Коши для функций.

11. Сравнение бесконечно малых.

Лекция 16
(27.10.67)

18.2. Непрерывный образ отрезка

Лемма Больцано – Вейерштрасса. *Пусть имеется последовательность* $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *и* $|x_n| \le K \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда существует последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}$, $n_k \uparrow\uparrow$, *такая, что подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$ *сходится.*

Таким образом, из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, следовательно, по лемме Больцано – Вейерштрасса для последовательностей (п. 13.2) для $\{x_n\}$ существует хотя бы одно предельное значение a . Построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к a. Выберем $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \downarrow 0 \quad (k \to \infty)$. Тогда

для $\varepsilon_1 \ \exists n_1 \quad |a - x_{n_1}| < \varepsilon_1$;

для $\varepsilon_2 \ \exists n_2$, $n_2 > n_1$, $|a - x_{n_2}| < \varepsilon_2$;

. . . .

для $\varepsilon_k \ \exists n_k$, $n_k > n_{k-1}$, $|a - x_{n_k}| < \varepsilon_k$;

. . . .

Теперь для подпоследовательности $\{x_{n_k}\} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_0 \quad \forall\, k \ge k_0$ $\varepsilon_k < \varepsilon$ и $|a - x_{n_k}| < \varepsilon_k < \varepsilon$. Значит $x_{n_k} \to a \quad (k \to \infty)$. ▶

Теорема об ограниченности непрерывной функции. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a, b]$. *То-*

гда функция $f(x)$ *ограничена на этом отрезке, т. е. найдется* K *такое, что* $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leq K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о от противного. Предположим, что утверждение леммы неверно. Пусть, для определенности, функция $f(x)$ не является ограниченной сверху. Тогда $\forall K > 0 \quad \exists x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) > K$.

Зададим последовательность $K_n > 0$, $K_n \uparrow \infty \quad (n \to \infty)$. Тогда $\exists\, x_n \in [a,b] \quad f(x_n) > K_n$. Так как $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, то по лемме Больцано – Вейерштрасса $\exists\, \{x_{n_k}\}$ $x_{n_k} \to c \in [a,b] \quad (k \to \infty)$. Так как $f(x_{n_k}) > K_{n_k}$, то $f(x_{n_k}) \to +\infty$ $(k \to \infty)$.

С другой стороны, $f(x) \in C\,[a,b]$, значит, $f(x) \in C(c)$. Следовательно, $f(x_{n_k}) \to f(c) \quad (k \to \infty)$, так как $x_{n_k} \to c \quad (k \to \infty)$. Мы пришли к противоречию. ►

Определение. Число M называется *наибольшим значением* или *глобальным* или *абсолютным максимумом функции* f на отрезке $[a,b]$, если для некоторого $x_0 \in [a,b]$ и для всех x из $[a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq M = f(x_0)$. Обозначается

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_0)\,.$$

Аналогично определяется *наименьшее значение функции* на отрезке.

Теорема о достижимости верхней и нижней граней. *Всякая непрерывная на отрезке функция имеет наибольшее и наименьшее значения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x) \in C\,[a,b]$. По теореме об ограниченности непрерывной на отрезке функции $f(x)$ на этом отрезке ограничена. Значит она имеет конечные верхнюю грань $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = M$ и нижнюю грань $\inf\limits_{x \in [a,b]} = m$, $m \leq M$. Докажем, что значения M и m и есть наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a,b]$.

Допустим противное. Пусть $\forall x \in [a,b] \quad f(x) < M$. Тогда функция $M - f(x) \in C\,[a,b]$ и $M - f(x) > 0 \quad (x \in [a,b])$. Значит, положительная функция $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ тоже есть функция, непрерывная на всем отрезке $[a,b]$. По теореме об ограниченности непрерывной на отрезке функции $\varphi(x)$ ограничена. Значит $\exists\, K > 0$, $\varphi(x) \leq K$

$\forall x \in [a,b]$. Тогда $\frac{1}{M-f(x)} \le K$, $\frac{1}{K} \le M - f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, т. е. $f(x) \le M - \frac{1}{K} < M$ $\forall x \in [a,b]$. Это противоречит тому, что M – верхняя грань функции. Значит, верхняя грань функции достигается и $\exists\, x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) = M$.

Аналогично, нижняя грань непрерывной на отрезке функции достигается, т. е. $\exists\, x_1 \in [a,b]$ $f(x_1) = m$. ►

Теорема (свойство Дарбу, Д-свойство). *Непрерывный образ отрезка есть отрезок.*

Д о к а з а т е л ь с в о. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, $f(x) \in C\,[a,b]$. Тогда $\exists\, x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) = M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, и $\exists\, x_1 \in [a,b]$ $f(x_1) = m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Значит, $M, m \in f\,([a,b])$. Так как $f\,([a,b])$ – связное множество (п. 18.1 с. 75), то $[m, M] \subset f\,([a,b])$. Следовательно, $f\,([a,b]) = [m, M]$. ►

Заметим, что свойство Дарбу переводить отрезок в отрезок есть необходимое, но не достаточное для непрерывности функции.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на полуинтервале $(0,\,1]$ и $f(0) = 0$ (рис. 4.11).

1) Если возьмем $[a,b]$, $a > 0$, $[a,b] \subset (0,1)$, то $f(x) \in C\,[a,b]$ и по теореме образ отрезка $[a,b]$ есть отрезок.

2) Если возьмем $[0,b]$, то $f\,([0,b]) = [-1,1]$, но функция не является непрерывной на $[0,b]$.

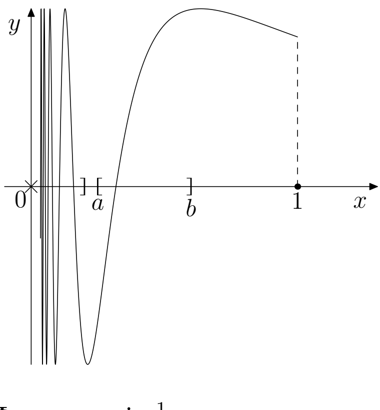

Рис. 4.11. Функция $\sin\frac{1}{x}$ на полуинтервале $(0,\,1]$.

18.3. Непрерывность обратной функции

Определение. Функция $f(x)$ на множестве M называется *строго монотонной*, если она строго возрастает ($f(x) \uparrow\uparrow$), или строго убывает ($f(x) \downarrow\downarrow$) на множестве M .
Функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на множестве M , если для любых $x, x' \in M$, $x < x'$, выполняется $f(x) < f(x')$ ($f(x) > f(x')$).
Пусть для функции $f(x)$ существует обратное отображение. Если обратное отображение однозначно, то назовем его *обратной функцией* (рис. 4.12).

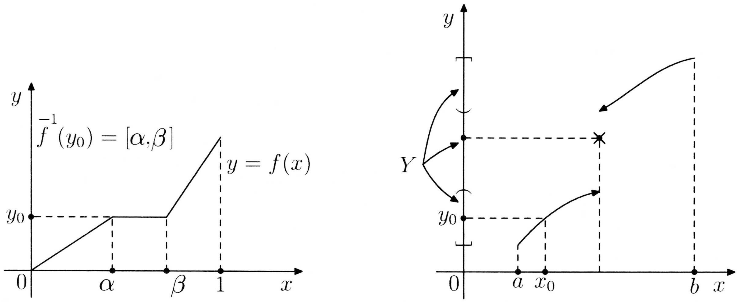

Рис. 4.12. Обратное отображение. Для строго монотонной функции обратное отображение однозначно.

Лемма о существовании обратной функции. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и* $f(x) \uparrow\uparrow$ *на множестве* $M \subset \mathbb{R}$. *Обозначим через* $Y = f(M)$ *образ множества* M . *Тогда на множестве* Y *существует обратная функция* $\overset{-1}{f}(y) = \varphi(y)$ $(y \in Y)$.

Таким образом, для строго монотонной функции обратное отображение однозначно (рис. 4.12).
Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $y_0 \in Y$, то $\exists\, x_0 \in M \quad f(x_0) = y_0$, $x_0 \in \overset{-1}{f}(y_0)$. Надо доказать, что $\overset{-1}{f}(y_0) = x_0$, т. е. других точек в $\overset{-1}{f}(y_0)$ нет. Если $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$, если $x > x_0$, то $f(x) > f(x_0)$. Следовательно, $x = x_0$ и $\overset{-1}{f}(y_0) = x_0$. ▶
Лемма о монотонности обратной функции. *Если функция* $f(x)$ *определена и* $f(x) \uparrow\uparrow$ *или* $f(x) \downarrow\downarrow$ на M, *то и обратная*

функция $\varphi(y)\uparrow\uparrow$ *или* $\varphi(y)\downarrow\downarrow$ *на* $Y=f(M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x)\uparrow\uparrow$, $y,y'\in Y$, $y<y'$. Докажем, что $\varphi(y)<\varphi(y')$. Пусть $x=\varphi(y)$, $x'=\varphi(y')$. Тогда $x<x'$, так как если бы было $x>x'$, то $f(x)>f(x')$, т. е. $y>y'$ и мы получили противоречие. Аналогично рассматривается случай $f(x)\downarrow\downarrow$. ►

Лекция 17
(01.11.67)

Лемма о непрерывности обратной функции. *Пусть функция* $y=f(x)\uparrow\uparrow$ *на* $[a,b]$. *Пусть* Y *– область значений этой функции и* $x=\varphi(y)$ $(y\in Y)$ *– обратная функция. Тогда* $\varphi(y)\in C(Y)$ [2] .

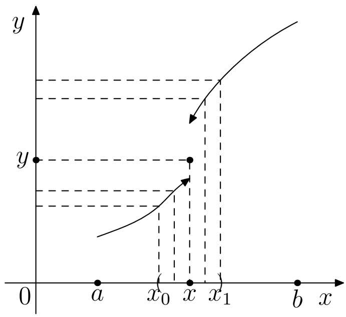

Рис. 4.13. Лемма о непрерывности обратной функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x – произвольная внутренняя точка из $[a,b]$. Зададим $\varepsilon>0$ такое, что окрестность $O(x)$ радиуса ε содержится в отрезке $[a,b]$. Обозначим $x_0=x-\varepsilon$, $x_1=x+\varepsilon$ (рис. 4.13). (Здесь используется, что M – отрезок!) Рассмотрим $y_0=f(x_0)<y=f(x)<y_1=f(x_1)$. Выберем $\delta>0$ $(\delta=\delta(\varepsilon))$ такое, что $O_\delta(y)\subset(y_0,y_1)$. По условию монотонности обратной функции для любого $y'\in O_\delta(y)$ выполняется неравенство $\varphi(y_0)<\varphi(y')<\varphi(y_1)$ и так как $x=\varphi(y)$, то выполняется неравенство $\varphi(y)-\varepsilon<\varphi(y')<\varphi(y)+\varepsilon$, т. е. выполняется неравенство $|\varphi(y')-\varphi(y)|<\varepsilon$. Значит, обратная функция непрерывна в точке y.

[2] "Суть вся в том, что M – отрезок, т. е. исключаются какие-то там "уроды"." (С. Б. С.)

Если $x = a$ или $x = b$, то достаточно рассмотреть односторонние интервалы. ►

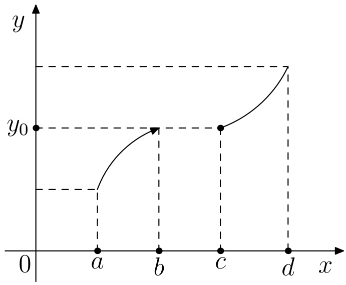

Рис. 4.14. Функция, непрерывная и монотонная на $[a, b) \bigcup [c, d]$, обратная функция разрывна.

Пример. На рис. 4.14 изображена функция, непрерывная и монотонная на $[a, b) \bigcup [c, d]$, для которой обратная функция разрывна.

Из доказанных лемм следует следующая теорема.

Теорема о существовании, монотонности и непрерывности обратной функции. *Пусть функция* $f(x) \uparrow\uparrow$ *и непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и* $Y = f([a, b]) = [A, B]$ *– область ее значений. Тогда на отрезке* $[A, B]$ *определена, строго монотонна и непрерывна обратная функция* $x = \varphi(y)$. [3)]

Замечание. *Свойством Дарбу* называется свойство функции отображать отрезок в отрезок. Для строго монотонной функции свойство Дарбу не только необходимое, но и достаточное для непрерывности.

[3)] В действительности доказано более общее утверждение, чем сформулировано в теореме. В формулировке теоремы можно требовать лишь строгой монотонности функции на отрезке и условие $f([a, b]) = [A, B]$, требование непрерывности лишнее. Вероятно, это отмечалось на лекции, и следует из замечания относительно свойства Дарбу. (Ред.)

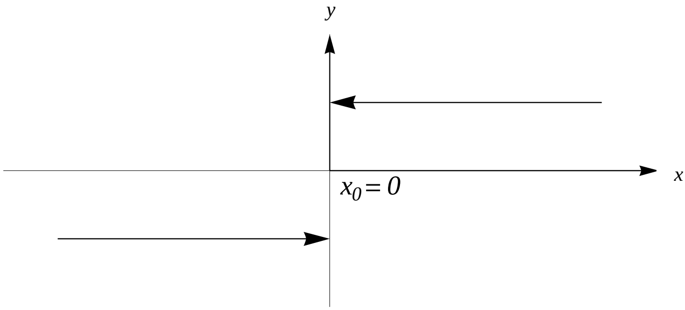

Рис. 4.15. Функция $\frac{x}{\sqrt{x^2}}$.

§ 19. Непрерывность элементарных функций

Пример. Функция $\frac{x}{\sqrt{x^2}}$ непрерывна в своей области определения (0 в область определения не входит) (рис. 4.15).

19.1. Показательная функция

Пусть a – действительное число, $a > 0$. Что такое a^r , где $r \in \mathbb{Q}$, нам известно. Наша задача определить показательную функцию для действительных $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим случай $a > 1$.[4)]

Определение. Пусть $a > 1$. *Показательной функцией* a^x с основанием a , где x – действительное число, называется верхняя грань значений a^r , где r – рациональные числа, по всем $r < x$, т. е. $a^x = \sup\limits_{r<x} a^r$.

Мы получим пополнение множества значений функции a^r по непрерывности (рис. 4.16).

а) Монотонность показательной функции. Докажем, что на множестве действительных чисел a^x $\uparrow\uparrow$. Пусть x и y – действительные числа, и пусть $x < y$. Выберем рациональные числа s и s' так, чтобы $x < s < s' < y$. Тогда для любого $r < x < s$, где r

4) " e – особенное основание, $y = e^x = \exp x$. Заслуга Эйлера." (С. Б. С.)

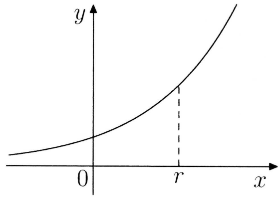

Рис. 4.16. Показательная функция.

рационально, $a^r < a^s$, значит $a^x = \sup\limits_{r<x} a^r \le a^s$. Тогда

$$a^x \le a^s < a^{s'} \le \sup_{r'<y} a^{r'} = a^y$$

и a^x есть строго возрастающая функция. ▶

б) Непрерывность показательной функции. Докажем, что $a^x \in C(-\infty,\infty)$. Рассмотрим для $\lambda > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ последовательность $(1+\lambda)^n$. Используя бином Ньютона, легко доказать, что

$$(1+\lambda)^n \ge 1 + n\lambda.$$

Пусть $(1+\lambda)^n = \mu$. Тогда $\mu^{\frac{1}{n}} = 1+\lambda$, $\lambda = \mu^{\frac{1}{n}} - 1$. Подставив в неравенство, получим

$$\mu \ge 1 + n\left(\mu^{\frac{1}{n}} - 1\right), \quad \frac{\mu - 1}{n} \ge \mu^{\frac{1}{n}} - 1,$$

откуда $a^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{a}{n}$.

Возьмем произвольную точку $x \in \mathbb{R}$. Пусть $h > 0$. Рассмотрим разность $a^{x+h} - a^x$. Выберем такие рациональные r и s, для которых $r < x < x+h < s$. Так как $a^x \uparrow$, то $a^{x+h} < a^s$, $a^x > a^r$, и

$$a^{x+h} - a^x < a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1) < a^x(a^{s-r} - 1).$$

Если $s-r < \frac{1}{n}$, то $a^{s-r} - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{a}{n}$. Значит, если $s-r < \frac{1}{n}$, то $a^{x+h} - a^x < \frac{a^x a}{n} < \varepsilon$, так как величину $\frac{a^x a}{n}$ можно сделать сколь угодно малой для любого $n \ge n(\varepsilon)$. Таким образом, если $h < \frac{1}{n}$, то можно найти s и r такие, что $s < r < \frac{1}{n}$ и $a^{x+h} - a^x < \varepsilon$. Значит функция a^x непрерывна справа. Аналогично при $h < 0$ получим непрерывность слева. Следовательно, $a^x \in C(-\infty,\infty)$. ▶

в) Свойство $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Пусть последовательности рациональных чисел $r_n \to x$ и $s_n \to y$ $(n \to \infty)$. Тогда $a^{r_n} \cdot a^{s_n} = a^{r_n+s_n}$.

Устремим n к ∞ . Тогда, в следствии непрерывности показательной функции, $a^{r_n} \to a^x$, $a^{s_n} \to a^y$, $a^{r_n+s_n} \to a^{x+y}$. Это и доказывает, что $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. ▶

Замечание. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ непрерывна по теореме об обратной функции.

Лекция 18
(03.11.67)

19.2. Непрерывность простейших элементарных функций

1). Многочлен $P(x)$. Функция $y = x$, очевидно, непрерывна. Многочлен $P(x)$ есть сумма непрерывных функций вида $a_i x^i$, т. е. тоже непрерывная функция.

2). Рациональная функция $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в точках x , для которых $Q(x) \neq 0$, т. е. область непрерывности рациональной функции совпадает с областью определения функции.

3). Степенная функция $y = x^\alpha$. Для $\alpha = n$ $(n \in \mathbb{N})$ $y = x^n$ – непрерывная функция. Тогда для $x \geq 0$ обратная функция $x = y^{\frac{1}{n}}$ существует и непрерывна. Значит для рациональных α функция $y = x^\alpha$ – непрерывная функция.

Пусть $\alpha > 0$ – иррациональное число. Тогда область определения $y = x^\alpha$ есть $[0, \infty)$. В нуле эта функция непрерывна, так как $0 \leq y = x^\alpha < x^r$ при $0 < r < \alpha$ для $0 < x < 1$.

Пусть теперь $x > 0$. Так как $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, то это есть сложная функция от непрерывных функций, и значит, тоже непрерывна.

4). Тригонометрические функции. Рассмотрим $y = \sin x$. Функция $\sin x$ непрерывна в нуле, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и значит, $\sin x = O(x)$. Так как

$$\sin(x + h) = \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h,$$

$$\sin(x + h) - \sin x = \sin x \cdot (\cos h - 1) + \cos x \cdot \sin h,$$

то отсюда следует, что $\sin(x + h) - \sin x \to 0$ при $h \to 0$.

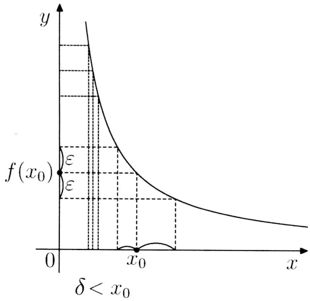

Рис. 4.17. Функция $\frac{1}{x}$ на множестве $x > 0$.

$\cos x$ получается из $\sin x$ сдвигом аргумента, а остальные тригонометрические функции получаются из $\sin x$ и $\cos x$ делением. Следовательно, все тригонометрические функции непрерывны в своей области определения.

5). Обратные тригонометрические функции непрерывны, как обратные к тригонометрическим функциям.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема о непрерывности элементарных функций. *Всякая элементарная функция непрерывна во всей области своего определения.*

Пример. По теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln{(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \ln(\lim_{x\to 0} {(1+x)^{\frac{1}{x}}}) = \ln e = 1.$$

§ 20. Равномерная непрерывность

Пусть функция $f(x)$ определена на X, $X \subset \mathbb{R}$ и $f \in C(X)$, т. е. для каждого $x_0 \in X$ выполняется условие $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Здесь δ зависит и от x_0 и от ε.

Определение. Функция $f(x)$, $x \in X$, $X \subset \mathbb{R}$, называется *равномерно непрерывной* на X, если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \delta \ > \ 0 \ \ \forall x, x_0 \in X$

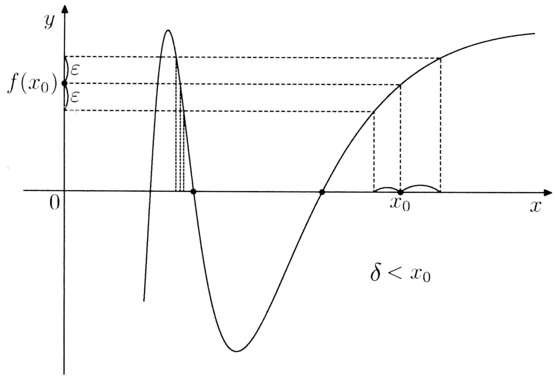

Рис. 4.18. Функция $\sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на множестве $x > 0$.

$|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Таким образом, при равномерной непрерывности функций значения функции близки, как только близки аргументы, где бы они ни находились.

Примеры. 1) Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ (рис. 4.17). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для любой точки $x_0 > 0$ выберем δ так, чтобы δ-окрестность точки x_0 содержалась в области определения функции. Тогда $\delta < x_0$ и зависит от x_0, а не только от ε. Функция хотя и непрерывна, но не является равномерно непрерывной. Отметим, что функция неограничена на любом интервале $(0, b)$, $b > 0$.

2) Функция $\sin\frac{1}{x} \in C\,(0, \infty)$ (рис. 4.18) ограничена, но, тем не менее, δ тоже зависит от ε и x_0.

3) Для функции $y = x^2$ (рис. 4.19) на всей числовой прямой $(x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0h + h^2 > 2x_0h$, значит δ тоже зависит от ε и x_0.

Теорема Кантора о равномерной непрерывности. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что предположив противное, мы найдем точку разрыва функции. Итак, пусть функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a, b]$. Значит $\exists\,\varepsilon_0 > 0$ $\forall\delta > 0$ $\exists\,x, x_0 \in X$, $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Пусть

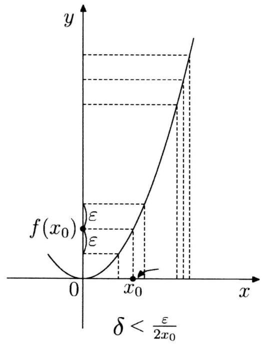

Рис. 4.19. Функция x^2 не является равномерно непрерывной на всей числовой прямой.

последовательность $\delta_n \downarrow\downarrow 0$ ($n \to \infty$). Зафиксируем ε_0 . Тогда $\forall n$ $\exists\, x_n, x'_n$, $|x_n - x'_n| < \delta_n$, $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$. Последовательность $\{x_n\}$ принадлежит $[a,b]$, т.е. ограничена. Выделим из нее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к α . Тогда $x'_{n_k} \to \alpha$, так как $\left|x_{n_k} - x'_{n_k}\right| < \delta_n$ и $f(x_{n_k}) \to f(\alpha)$, $f(x'_{n_k}) \to f(\alpha)$ $(k \to \infty)$, что следует из непрерывности, и значит $f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \to 0$ $(k \to \infty)$. А выше мы получили, что $\left|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| \geq \varepsilon_0$. Полученное противоречие и доказывает теорему. ▶

Следствие. *Если непрерывная функция* $f(x)$ *определена на* $[a,b]$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое число* δ , *что колебание функции на любом отрезке* Δ *длины* $|\Delta| < \delta$ *будет мало*: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, \Delta$, $|\Delta| < \delta$, $\omega\,(f, \Delta) < \varepsilon$.

Замечание. Непрерывность функции совпадает с равномерной непрерывностью в следующих случаях: 1) область определения функции конечна; 2) функция задана на компактном множестве. Компактность будет рассмотрена позже, отметим только, что отрезок есть компактное множество.

Часть II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 5

Дифференцирование функций

Лекция 19
(10.11.67)

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $M \subset \mathbb{R}$ и x_0 – внутренняя точка множества M ($x_0 \in M_i$). Будем изучать локальное поведение функции вблизи точки x_0 . Значит, можно считать, что функция задана на интервале (α, β) . Итак, пусть функция задана на множестве $M = \Delta = (\alpha, \beta)$.

§ 21. Понятие производной

Задача дифференциального исчисления – изучение поведения функции вблизи внутренних точек области определения (точка зрения Лейбница).

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена на интервале (α, β) , $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Обозначим $\Delta x_0 = x - x_0$ – приращение аргумента, тогда соответствующее приращение функции в точке x_0 будет

$$\Delta y_0 = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = \\ = \varphi = \varphi\,(f, x_0, \Delta x_0)\ .$$

Приращение функции зависит от функции $f(x)$, от точки x_0 и от Δx_0.

Определение. Если для функции $f(x)$ в точке x_0 справедливо равенство

$$\Delta y_0 = A(x_0)\Delta x_0 + o(\Delta x_0) \qquad (\Delta x_0 \to 0),$$

то функция называется *дифференцируемой в точке* x_0, а выражение $A(x_0)\Delta x_0$ называется *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $A(x_0)\Delta x_0 = df = dy$.

Таким образом, если функция дифференцируема в точке x_0, то

$$\Delta y = dy + o(\Delta x_0) \qquad (\Delta x_0 \to 0),$$

т. е. дифференциал $dy = A(x_0)\Delta x_0$ – *главная линейная часть приращения функции.* Величина $\Delta y - dy = o(\Delta x_0)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем приращение аргумента.

Определение. *Производной* $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента при стремлении этого приращения аргумента к 0: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$.

Из выражения для дифференциала следует $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = A(x_0) + o(1)$ $(\Delta x_0 \to 0)$, откуда получаем, что если у функции существует дифференциал, то $A(x_0) = f'(x_0)$ и $dy = f'(x_0)\,\Delta x_0$.

Таким образом, если у функции существует дифференциал в точке x_0, то функция имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0.

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ определена на некотором множестве $M \subset (\alpha, \beta)$. Функции $f(x)$ ставится в соответствие ее производная $f'(x)$ на множестве M, т. е. имеем оператор дифференцирования: $f \xrightarrow{D} f'$ или $Df = f'$.

Замечание. Из существования производной функции следует непрерывность функции и ее гладкость. С точки зрения Ньютона касательная к кривой принадлежит к секущим этой кривой. При стремлении точки $M\,(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$ на графике функции к точке $M_0\,(x_0, y_0)$ меняется угловой коэффициент k_M секущей: $\lim\limits_{M \to M_0} k_M = k_0 = f'(x_0)$. Секущая L графика функции, проходящая через точки M_0 и M, стремится к касательной к графику L_0: $y = y_0 + k_0(x - x_0)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \Delta = \Delta(\varepsilon) \;\; \forall \Delta x_0 \;\; (\,|\Delta x_0| < \Delta\,)$

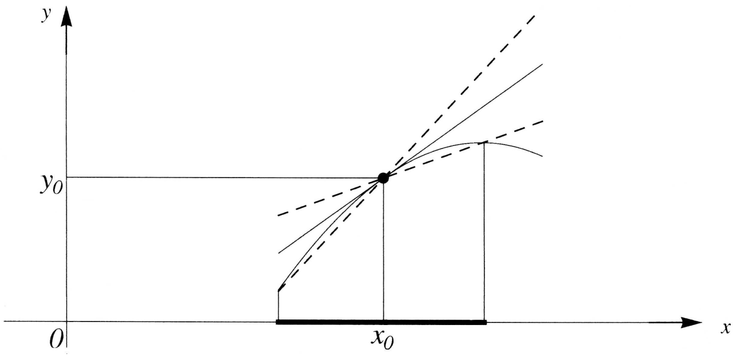

Рис. 5.1. Гладкость функции.

будет выполняться условие: $k_0 - \varepsilon < \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} < k_0 + \varepsilon$. Следовательно, график функции при $|x - x_0| < \Delta$ заключен между прямыми с тангенсами углов наклона $k_0 - \varepsilon$ и $k_0 + \varepsilon$, проходящими через точку (x_0, y_0) (рис. 5.1). В этом случае говорят, что функция является "гладкой" в точке M_0.

Определение. Пусть функция $\varphi(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и для всех точек x, $x' \in [a, b]$ удовлетворяет условию

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq K\,|x - x'|^{\alpha} \ ,$$

где $0 < \alpha \leq 1$. Тогда говорят, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ *условию Липшица* порядка α с константой *K*. Класс функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α с константой *K*, будем обозначать $\mathrm{Lip}_K\alpha$.

Заметим, что из условия Липшица любого порядка α следует непрерывность, но не наоборот.

Пример [1] **.** Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ является непрерывной на отрезке $[-1, 1]$, но не удовлетворяет условию Липшица порядка 1.

Теорема. *Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке и удовлетворяет условию Липшица порядка* 1.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ определена для $x \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и существует $f'(x_0)$. Тогда $\exists\, a > 0 \quad \exists\, K$

[1] Функция $\frac{1}{\ln x}$, доопределенная нулем в точке $x = 0$, дает пример непрерывной на $[0, 0.5]$ функции, не принадлежащей классу $\mathrm{Lip}_K\alpha$ ни при каком α. (Ред.)

$\forall\ |\Delta x_0| \le a \quad \left|\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right| \le K$, откуда $|\Delta y_0| \le K\,|\Delta x_0| \quad (|\Delta x_0| \le a)$, что и означает, что выполняется условие Липшица порядка 1. Из условия Липшица следует непрерывность функции в точке x_0. ▶

Заметим, что из непрерывности функции ее дифференцируемость не следует.

Пример. Функция $y = y_0 - |x - x_0|$ (рис. 5.2) непрерывна в точке x_0, но не является дифференцируемой в точке x_0 (не имеет производной в точке x_0).

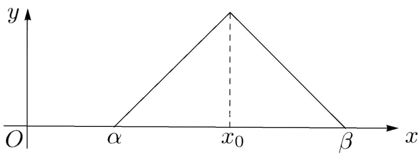

Рис. 5.2. Функция не имеет производной в точке x_0.

Теорема. *Пусть функция имеет производную в точке x_0. Тогда она дифференцируема в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$. Значит $f'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} + o(1) \quad (\Delta x_0 \to 0)$. Тогда

$$f'(x_0)\,\Delta x_0 = \Delta y_0 + o(\Delta x_0) \quad (\Delta x_0 \to 0)$$

и

$$\Delta y_0 = f'(x_0)\Delta x_0 + o(\Delta x_0) \quad (\Delta x_0 \to 0).$$

Таким образом, приращение функции имеет главную линейную часть, т.е. дифференциал в точке $dy = f'(x_0)\,\Delta x_0$, и функция дифференцируема в точке x_0. ▶

Рассмотрим функцию $y = x$. Приращение этой функции в точке x_0 равно Δx_0, т.е. $dx = \Delta x$. Будем обозначать приращение Δx независимой переменной dx. Тогда $dy = f'(x)\,dx$ и $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ – обозначение Лейбница для производной – отношение дифференциала зависимой переменной к дифференциалу независимой переменной.

§ 22. Правила дифференцирования

22.1. Дифференцирование – линейная операция

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x. Тогда для любой постоянной α $(\alpha f)' = \alpha f'$ и $(f+g)' = f' + g'$. Это следует из соответствующих свойств пределов.

Лекция 20
(15.11.67)

22.2. Геометрический смысл дифференцируемости

Определение. Наклонная прямая, проходящая через точку $M_0\,(x_0, y_0)$, называется *касательной* к графику функции в точке x_0, если разность ординат точек графика и прямой при $\Delta x \to 0$ есть $o(\Delta x)$.

Теорема (геометрический смысл дифференцируемости). *Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда у графика функции имеется касательная в этой точке. При этом уравнение касательной имеет вид*

$$Y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция дифференцируема в точке x_0. Тогда $y - y_0 = f'(x_0)\Delta x_0 + o(\Delta x_0)$ и, значит, прямая $Y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ – касательная, так как $y - Y = o(\Delta x)$. Обратно, если для какой-нибудь прямой $Y = y_0 + A(x - x_0)$ выполняется условие $y - Y = o(\Delta x)$, то

$$y - y_0 = A\Delta x_0 + o(\Delta x_0)\,,$$

следовательно, функция дифференцируема и $A = f'(x_0)$. ▶

Отметим, что $dy = Y - y_0$ – приращение касательной (рис. 5.3), а $f'(x_0)$ – тангенс угла наклона касательной.

Прямая, проходящая через точку $M_0\,(x_0, y_0)$ и ортогональная касательной называется *нормалью* функции в этой точке. Уравнение нормали функции

$$Y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

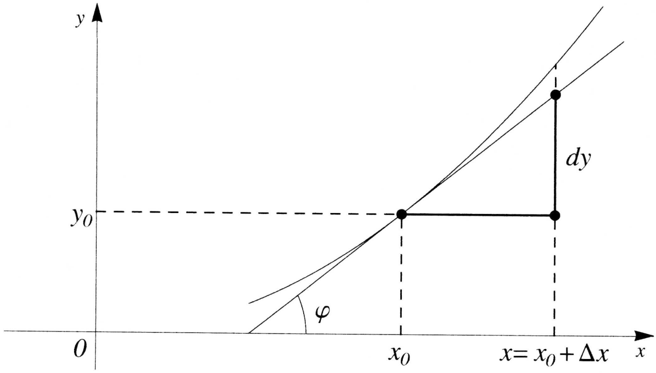

Рис. 5.3. Геометрический смысл дифференцируемости.

22.3. Механический смысл производной

Пусть точка движется по оси, $s(t)$ – перемещение точки от начала движения. Тогда $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ – средняя скорость за время Δt. Если устремим $\Delta t \to 0$, то получим $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t_0)$ – скорость движения в момент времени t_0. Тогда $ds = v(t_0)\Delta t$ – длина отрезка пути, который точка прошла бы за время Δt, если бы стала двигаться с постоянной скоростью $v(t_0)$.

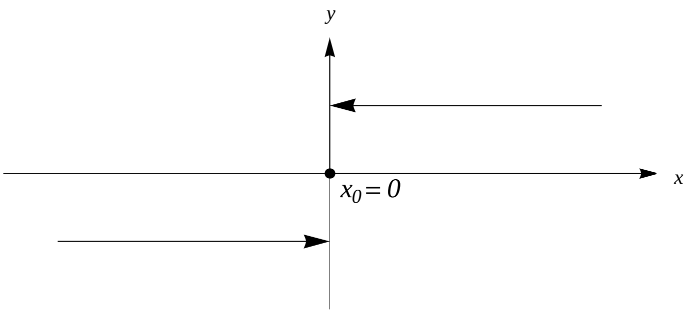

Рис. 5.4. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $f'(0) = +\infty$.

Замечание. Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$ (или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$), то говорят, что функция имеет бесконечную производную. В этом случае, если функция непрерывна в точке x_0 , то считают, что $x=x_0$ – касательная к графику функции в точке x_0 (см. примеры на рис. 5.4 и рис. 5.5).

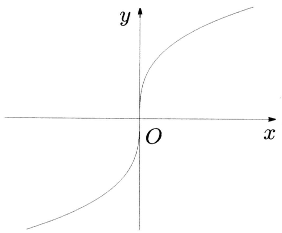

Рис. 5.5. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(0)=+\infty$; $x=0$ – вертикальная касательная.

22.4. Правила дифференцирования

Теорема. *Пусть функции* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *определены в окрестности точки* x *и дифференцируемы в этой точке. Тогда их сумма, разность, произведение, а если* $v(x)\neq 0$, *то и частное* $\frac{u(x)}{v(x)}$, *дифференцируемы в точке* x *и верны формулы*

$$1)\ (u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)\,;$$

$$2)\ (u(x)\cdot v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,;$$

$$3)\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\qquad (v(x_0)\neq 0)\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим приращение $\Delta x=h$ независимой переменной, при этом функции u и v получат приращения Δu и Δv .

1) Пусть $f(x)=u(x)+v(x)$. Тогда функция f получит приращение

$$\Delta f=f(x+h)-f(x)=u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))=$$
$$=u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)=\Delta u+\Delta v\,.$$

Следовательно
$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\Delta u}{h}+\frac{\Delta v}{h}\right)=u'(x)+v'(x)\,.$$
Аналогично для разности функций.

2) Пусть $g(x)=u(x)v(x)$. Тогда функция g получит приращение
$$\begin{aligned}\Delta g&=g(x+h)-g(x)=u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)v(x)=\\&=u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)=\\&\qquad\qquad=\Delta u\ \cdot v(x+h)-u(x)\cdot\Delta v\,.\end{aligned}$$
Отсюда, так как функция $v(x)$ дифференцируема в точке x , значит, непрерывна в этой точке и $\lim\limits_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$, следует
$$\begin{aligned}g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta g}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\lim_{h\to 0}v(x+h)+u(x)\lim_{h\to 0}\frac{\Delta v}{h}=\\=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,.\end{aligned}$$

3) Пусть $\varphi(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ и $v(x)\neq 0$. Тогда $\exists\, O(x)\quad\forall\ x+h\in O(x)$ $v(x+h)\neq 0$ и
$$\begin{aligned}\Delta\varphi&=\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\\&=\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x)}{v(x)v(x+h)}=\\&\qquad\qquad=\frac{\Delta u\cdot v(x)-u(x)\cdot\Delta v}{v(x)v(x+h)}\,.\end{aligned}$$
Так как $v(x)$ дифференцируема в точке x , то она непрерывна в этой точке, следовательно, $\lim\limits_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$, и
$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\varphi}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{h}v(x)-u(x)\frac{\Delta v}{h}}{v(x)\ v(x+h)}=$$
$$=\frac{\left(\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\right)v(x)-u(x)\left(\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta v}{h}\right)}{v(x)\ \lim\limits_{h\to 0}v(x+h)}=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\,.\qquad\blacktriangleright$$

Теорема о производной сложной функции. *Пусть* $u(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и* u_0 *– ее значение в точке* x_0. *Пусть* $y = f(u)$ *дифференцируема в точке* u_0. *Тогда сложная функция* $F(x) = f\left(u(x)\right)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и имеет место формула* $F'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция f дифференцируема в точке u_0. Следовательно приращение функции f в точке u_0 с шагом $\Delta u = k$ равно

$$\Delta_k f(u_0) = f'(u_0) \cdot k + \alpha(k) \cdot k\,,$$

где $\lim\limits_{k\to 0} \alpha(k) = 0$. Положим $\alpha(0) = 0$. Тогда $\alpha \in C(0)$ и формула $\Delta_k f(u_0) = f'(u_0) \cdot k + \alpha(k) \cdot k$ верна также и при $k = 0$. Пусть

$$\Delta_h u(x_0) = u(x_0 + h) - u(x_0)\,.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Delta F(x_0) &= f\left(u(x_0 + h)\right) - f\left(u(x_0)\right) = \\ &= f\left(u(x_0) + \Delta_h u(x_0)\right) - f\left(u(x_0)\right) = \Delta_{k=\Delta_h u(x_0)} F(x_0) = \\ &= f'(u_0)\Delta_h u(x_0) + \alpha\left(\Delta_h u(x_0)\right)\Delta_h u(x_0)\,. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h F(x_0)}{h} = \\ &= f'(u_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h u(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \alpha\left(\Delta_h u(x_0)\right) \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h u(x_0)}{h}\,. \end{aligned}$$

Здесь функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, значит, $u(x)$ непрерывна в точке x_0, и следовательно,

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h u(x_0) = \lim_{h\to 0} \left(u(x_0 + h) - u(x_0)\right) = 0\,,$$

но тогда и

$$\lim_{h\to 0} \alpha\left(\Delta_h u(x_0)\right) = \alpha(0) = 0\,,$$

так как $\alpha \in C(0)$. Поэтому

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0) + 0 \cdot u'(x_0) = f'(u_0)\, u'(x_0)\,.$$

Мы получили формулу

$$\left(f(u(x))\right)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)\,. \quad \blacktriangleright$$

22.5. Инвариантность формы дифференциала первого порядка

В предыдущей теореме мы получили формулу для производной сложной функции $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Тогда для дифференциала

$$df(x_0) = dy = y'_x\,dx = y'_u \cdot u'_x\,dx = y'_u \cdot du = F'(u_0)\,du\,,$$

и значит, $dy = y'_u\,du$. В других обозначениях, если $y = y(x)$, а $x = \varphi(t)$ получим $dy = y'_x\,dx$. Но эта же формула верна для дифференциала функции, когда x – независимая переменная. Это и значит, что имеет место свойство инвариантности формы первого дифференциала.

Заметим, что так как производная $y' = \frac{dy}{dx}$, то для производной сложной функции получается формула $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

22.6. Дифференцируемость обратной функции

Теорема (дифференцируемость обратной функции). *Пусть функция $y = y(x)$ определена, строго монотонно возрастает (убывает) и непрерывна в окрестности $O(x_0)$ точки x_0. Обозначим $y_0 = f(x_0)$. Тогда, если существует $f'(x_0) \neq 0$, то существует производная обратной функции $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, т.е. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дадим приращение Δy, тогда Δx – приращение обратной функции. Рассмотрим $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ (заметим, что $\Delta y \neq 0 \;\Rightarrow\; \Delta x \neq 0$ – следствие строгой монотонности, $\Delta y \to 0 \;\Rightarrow\; \Delta x \to 0$ – следствие непрерывности). Тогда по теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}\,.$$

Таким образом, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$. ▶

Лекция 21
(17.11.67)

§ 23. Производные элементарных функций

1) Если $f(x) \equiv c$, $c = \mathrm{const}$, то

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0\,.$$

2)

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} 2\cdot \frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x\,,$$

так как $\cos x$ – непрерывная функция.

3) $(\cos x)' = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = -\sin x$.

4)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \quad \cos x \neq 0\,.$$

5) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\quad \sin x \neq 0$.

6) Пусть $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Имеем

$$\Delta f = \log_a(x+h) - \log_a(x) = \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

Так как $u(h) = \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$ – непрерывная функция и $\lim\limits_{h\to 0} u(h) = e$, то

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a u(h) = \frac{1}{x\ln a}\,.$$

7)
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\,.$$

8) Пусть $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Имеем

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}\,.$$

Обозначим $u(h) = a^h - 1$. Тогда $a^h = 1 + u$, $h\ln a = \ln(1+h)$, $h = \frac{\ln(1+h)}{\ln a}$ и

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} \cdot \ln a = a^x \ln a\,.$$

9) Пусть $f(x) = x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Так как $f(x) = x^a = e^{a\ln x}$, то

$$f'(x) = e^{a\ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}\,.$$

При $a > 1$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^a - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^{a-1} = 0\,.$$

Если $f(x) = x$, то $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x-0}{x} = 1$.

10)
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Функция $y = \arcsin x$ – обратная к функции $x = \sin y$ при y из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. По теореме о производной обратной функции

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

11)
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Так как $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то

$$(\arccos x)' = -\,(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

12)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ – обратная к функции $x = \operatorname{tg} y$ при y из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. По теореме о производной обратной функции

$$y' = \frac{1}{x'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

13)

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

§ 24. Производная n-го порядка

24.1. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ определена для x из интервала U, имеет производную $y' = f'(x)$ при $x \in U$ и пусть точка $x_0 \in U$. Тогда производная $y' = f'(x)$ определена как функция в некоторой окрестности $O(x_0)$. Обозначим $\varphi(x) = f'(x)$ ($x \in O(x_0)$).

Определение. Если существует $\varphi'(x_0)$ – производная от первой производной функции f, то она называется *второй производной функции* f *в точке* x_0, т. е.

$$f''(x_0) = (f'(x))'_{x=x_0}\,.$$

Аналогично, *третьей производной функции* f *в точке* x_0 называется

$$f'''(x_0) = (f''(x))'_{x=x_0}$$

и так далее,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0}$$

– *n-ая производная, или производная n-го порядка, функции* f *в точке* x_0.

Примеры.

1) $f(x) = a^x$ ($a > 0$); $f'(x) = a^x \ln a$; $f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a$.

2) $f(x) = e^x$; $f^{(n)}(x) = e^x$.

3) $f(x)=\sin x$; $f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$; $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$. Формула доказывается методом математической индукции. Так как формула верна при $n=1$, то предположив, что формула верна для некоторого натурального n, покажем, что она верна для $n+1$:

$$f^{(n+1)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)= \\ =\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

4) Аналогично, для $f(x)=\cos x$ методом математической индукции доказывается формула $f^{(n)}(x)=\cos(x+n\frac{\pi}{2})$.

5) $f(x)=x^a$, $a\notin\mathbb{N}$; $f'(x)=ax^{a-1}$, $f''(x)=a(a-1)x^{a-2}$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)=a(a-1)...(a-n+1)x^{a-n}$.

6) $f(x)=\ln x$; $f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$,

$$f^{(n)}(x)=\left(x^{-1}\right)^{(n-1)}= \\ =(-1)(-2)...\left(-(n-1)\right)x^{-n}=(-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

Упражнение. Проверить методом математической индукции.

Пусть для функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ существуют производные любого порядка $k=1,2,...,n$. Отметим некоторые свойства оператора дифференцирования n-го порядка.

1). Оператор дифференцирования n-го порядка – линейная операция, т. е.

$$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)};\quad (\alpha u)^{(n)}=\alpha u^{(n)}\quad (\alpha=\mathrm{const}).$$

2). Будем считать, что $u^{(0)}\overset{\text{по опр.}}{=}u$. Тогда имеет место *формула Лейбница*:

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}\cdot v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}\cdot v^{(1)}+C_n^2u^{(n-2)}v^{(2)}+...+ \\ +C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+...+u^{(n)}v^{(0)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Обозначим $y=uv$. При $n=1$ имеем $y'=u'v+uv'$. Пусть формула верна для некоторого натурального n . Тогда

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)} \cdot v + \left(1 + C_n^1\right) u^{(n)} \cdot v^{(1)} + \\ + \left(C_n^1 + C_n^2\right) u^{(n-1)} v^{(2)} + ... + uv^{(n+1)} = \\ = u^{(n+1)} \cdot v + \left(C_{n+1}^1\right) u^{(n)} \cdot v^{(1)} + \\ + \left(C_{n+1}^2\right) u^{(n-1)} v^{(2)} + ... + uv^{(n+1)} .$$

Пример. Пусть $y = (\sin 2x)\, x^2$. Тогда по формуле Лейбница

$$y^{(n)} = \\ = (\sin 2x)^{(n)} \cdot x^2 + n\,(\sin 2x)^{(n-1)} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2}(\sin 2x)^{(n-2)} 2 + 0 = \\ = 2^n x^2 \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + n 2^n x \cdot \sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \\ + n(n-1) 2^{n-2} \sin\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) .$$

3). Используя формулу Лейбница, можно написать формулу для $\left(\frac{u}{v}\right)^{(n)} = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)^{(n)}$.

Упражнение. Написать формулу для $\left(\frac{u}{v}\right)^{(n)}$.

24.2. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ определена для x из интервала U , имеет производную $y' = f'(x)$ для $x \in U$, и пусть точка $x_0 \in U$. Тогда

$$dy = f'(x)\, dx = y' dx .$$

Пусть далее $\Delta x = dx$, и Δx будет постоянно при определении дифференциалов высших порядков. Тогда dy – функция от x в U . *Вторым дифференциалом функции в точке* x_0 называется дифференциал от dy в точке x_0 , т. е.

$$d^2 y = d\,(dy)\big|_{x=x_0} .$$

И так далее,

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right)\big|_{x=x_0}$$

– *дифференциал n-го порядка.*
Если x – независимая переменная, и $\Delta x = \text{const}$, то

$$\begin{aligned}
&dy = y'\,dx\,,\\
&d^2y = d\,(y'\,dx) = dx\,dy' = y''\,(dx)^2 = y''dx^2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&d^ny = y^{(n)}dx^n\,.
\end{aligned}$$

Из последней формулы следует что $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$.

Пусть теперь $y = F(x)$, $x = \varphi(t)$ – зависимая переменная, $y = F(\varphi(t))$ – сложная функция от независимой переменной t . Тогда (здесь все производные по x)

$$dy = y'dx\,,$$

$$d^2y = d\,(y'\cdot dx) = dy'dx + y'd\,(dx) = y''dx^2 + y'd^2x\,.$$

Мы видим, что формулы для вторых дифференциалов в случаях, когда x – независимая переменная, и когда $x = \varphi(t)$, различные, инвариантности формы второго дифференциала нет. Но если $\varphi(t)$ – линейная, то $d\,(dx) = 0$ и формула сохранится.

24.3. Механический смысл второй производной

Пусть материальная точка движется по прямой. Если $s = s(t)$ – расстояние от точки до начала отсчета, то $s'(t_0)$ – скорость, а $s''(t_0)$ – ускорение в момент времени t_0 .

§ 25. Теоремы о конечных приращениях

Теорема Ферма. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена в окрестности* $O = O(x_0)$ *и пусть*

а) $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in O$ (*или* $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in O$), *т.е. в точке* x_0 *экстремум*;

б) *существует* $f'(x_0)$.

Тогда $f'(x_0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем теорему для случая $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in O$. По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Для $x > x_0$

имеем $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$. Отсюда следует, что $f'(x_0) \le 0$. Для $x > x_0$ получим $\lim\limits_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$. Значит $f'(x_0) \ge 0$. Итак, $0 \le f'(x_0) \le 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$. ▶

Теорема Ролля. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на* $[a, b]$ *и*

а) f *непрерывна на* $[a, b]$;

б) f *дифференцируема на* (a, b);

в) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, *что* $f'(c) = 0$.

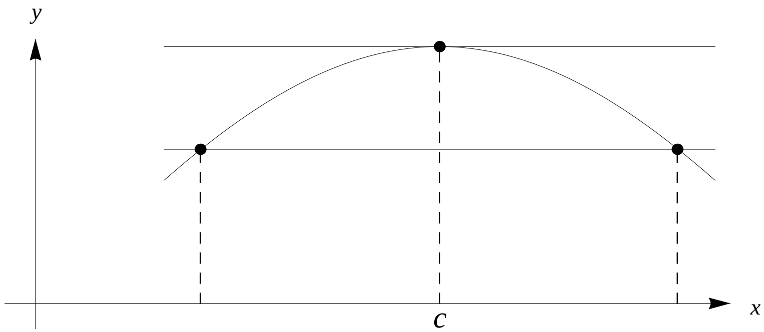

Рис. 5.6. Геометрический смысл теоремы Ролля.

Доказательство. Так как f непрерывна на $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих верхней и нижней граней: $\exists\, x_0, x_1 \in [a, b]$ $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_0)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x) = f(x_1)$. Рассмотрим два случая.

а) $M = m$. В этом случае на отрезке $[a, b]$ $f(x) = C = \text{const}$, и значит, $\forall c \in (a, b)$ $f'(c) = 0$.

б) M и m различны, и тогда $m < M$. В этом случае по крайней мере одна из точек x_0, x_1 принадлежит (a, b) (ввиду условия в) теоремы). Пусть $x_0 \in (a, b) = O$, тогда x_0 – точка максимума функции f, $f'(x_0) = 0$ по теореме Ферма, и $c = x_0$. ▶

Теорема Лагранжа. *Пусть* $y = f(x)$ *определена на* $[a, b]$ *и*

а) f *непрерывна на* $[a, b]$;

б) f *дифференцируема на* (a, b).

Тогда найдется точка $c \in (a,b)$ *такая, что*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

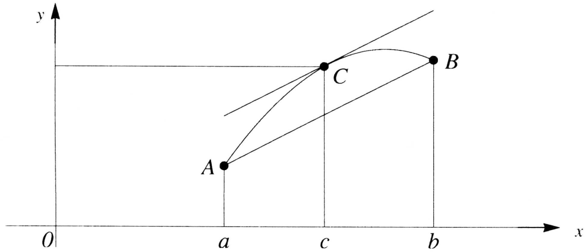

Рис. 5.7. Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - kx$. Подберем константу k так, чтобы $F(a) = F(b)$, т. е. $f(a) - ka = f(b) - kb$. Тогда $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и при этом значении k функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т. е $f'(c) - k = 0$. Откуда $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ▶

Следствие (формула Лагранжа – формула конечных приращений). *Пусть* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[x_1, x_2]$ *и дифференцируема на интервале* (x_1, x_2) . *Тогда найдется точка* ξ , $x_1 < \xi < x_2$, *такая, что приращение функции на отрезке равно* $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$.

Замечания. 1 (геометрическая интерпретация). Теорема Лагранжа утверждает, что найдется точка $c \in (a,b)$, в которой касательная к графику функции имеет угол наклона такой же, что и хорда, соединяющая точки графика с абсциссами a и b (рис. 5.7) (в теореме Ролля в точке c касательная горизонтальна (рис. 5.6)).

2. Теорему Лагранжа можно доказать применяя свойства аффинных преобразований.

3. Для отрезка $[x, x+\Delta x]$ теорема Лагранжа утверждает, что $\exists\, \xi$, $x < \xi < x + \Delta x$, $\Delta y = f'(\xi)\Delta x$. Так как $\xi = x + \theta\Delta x$, где $0 < \theta < 1$, то формулу можно переписать $\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$.

Итак, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x, то ее приращение $\Delta y = f'(x + \theta\,\Delta x)\Delta x$, где $0 < \theta < 1$.

Лекция 22
(22.11.67)

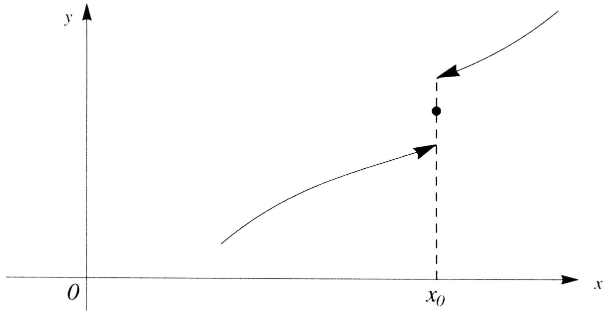

Рис. 5.8. Такой производной быть не может.

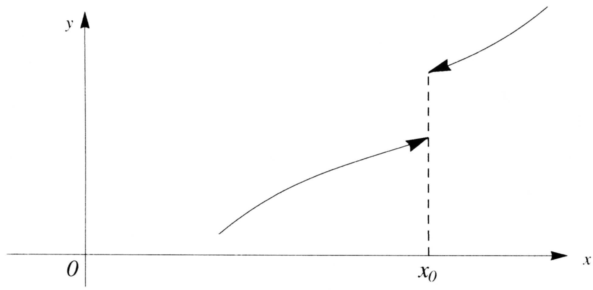

Рис. 5.9. Такая производная может быть.

4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, и дифференцируема на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, и пусть существует $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = A$. Тогда существует

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A\,.$$

Докажем это утверждение. Возьмем произвольную точку x из интервала $(x_0, x_0+\delta)$. По теореме Лагранжа найдется точка ξ из интервала (x_0, x) такая, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)\,.$$

Очевидно, что $\xi \to x_0$ при $x \to x_0$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists O(x_0) \;\; \forall x, \xi \in O(x_0) \;\; |f'(\xi) - A| < \varepsilon$. Но тогда и $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - A\right| < \varepsilon$, что и означает, что $f'_+(x) = A$. ►

Аналогичное утверждение верно и для случая $x \in [x_0-\delta, x_0]$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) = B$ и $f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Из этих утверждений следует, что производная некоторой непрерывной функции не может иметь точек разрыва первого рода. Иными словами, не может быть такого графика производной непрерывной функции, как на рис. 5.8. Производная как на следующем рис. 5.9 может быть.

Определение. $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ называются, соответственно, *правой* и *левой производными функции* $f(x)$ *в точке* x.

Теорема Коши. *Пусть две функции f и g определены на* $[a,b]$ *и*

а) *функции* f, g *непрерывны на* $[a,b]$;

б) f, g *дифференцируемы на* (a,b);

в) $g'(x) \neq 0$ *на* (a,b).

Тогда существует точка $c \in (a,b)$ *такая, что*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе по теореме Ролля в некоторой точке $x \in (a,b)$ $g'(x)$ обращалась бы в 0. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - kg(x)$. Подберем константу k так, чтобы $F(a) = F(b)$, т.е. $f(a) - k\cdot g(a) = f(b) - k\cdot g(b)$. Тогда $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ и при этом k функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т.е. $f'(c) - k\cdot g'(c) = 0$, откуда $\frac{f'(c)}{g'(c)} = k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. ►

§ 26. Правила Лопиталя

Теорема (неопределенность типа $\frac{0}{0}$). *Пусть функции f и g определены в некоторой правой окрестности (a,b) точки a, $b>a$. Пусть*

1) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$;

2) *существуют $f'(x)$ и $g'(x)$ в интервале (a,b), и $g'(x)\neq 0$ в этом интервале*;

3) $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *существует и равен $A\in\mathbb{R}$.*

Тогда $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *также существует и равен A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай, когда A и a – числа из $\mathbb{R}$. Из условия 3) следует, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall x$, $a<x<a+\delta$, $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon$. Доопределим функции в точке a: $f(a)=0$, $g(a)=0$. Возьмем любое $x\in(a,a+\delta)$. Функции f и g на отрезке $[a,x]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши: они непрерывны на отрезке $[a,x]$, дифференцируемы на интервале (a,x) и $g'(x)\neq 0$ на интервале (a,x). По теореме Коши найдется точка $c\in(a,x)\subset(a,a+\delta)$ такая, что $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, откуда получаем $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. Но тогда $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$, что означает, что $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$. ▶

Теорема (неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть функции f и g определены в некоторой правой окрестности (a,b), $b>a$, точки a. Пусть*

1) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$;

2) *существуют $f'(x)$ и $g'(x)$ в интервале (a,b), и $g'(x)\neq 0$ в этом интервале*;

3) $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *существует и равен A.*

Тогда $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *также существует и равен A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению предела из условия 3) следует, что $\forall\varepsilon>0$, $\varepsilon<1$, $\exists\delta_0>0$ $\forall t$, $a<t<a+\delta_0$, $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)}-A\right|<\varepsilon$. Зафиксируем точку $x_0\in(a,a+\delta_0)$. Тогда для любого $x<x_0$ к функциям f и g на отрезке $[x,x_0]$ можно применить теорему Коши: найдется точка $c\in(x,x_0)\subset(a,a+\delta_0)$

такая, что $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$. Тогда $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - A\right| < \varepsilon$.
Далее, имеем тождество:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - A = \frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A\right).$$

Так как $g(x) \to \infty \quad (x \to a)$, то $\exists\,\delta > 0 \ \ \forall x\,,\ a < x < a + \delta_0$, $g(x) > g(x_0)$ и $\left|\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}\right| < \varepsilon$. Тогда $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < 2\varepsilon$. ▶

Случаи, когда a и A бесконечные.

1) $a = +\infty$. Положим $t = \frac{1}{x}$. Тогда при $x \to +\infty \quad t \to +0$, и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A\,.$$

2) $A = +\infty$. Из условия $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ следует, что предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, значит существует $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. ▶

Лекция 23
(24.11.67)

§ 27. Формула Тейлора

27.1. Формула Тейлора для многочлена

Пусть дан многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Так как $x = x_0 + (x - x_0)$, то многочлен можно переписать в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + ... + A_n(x - x_0)^n\,.$$

Положим $x = x_0$. Сразу получаем, что

$$P_n(x_0) = A_0\,.$$

Продифференцируем многочлен:

$$P_n'(x) = A_1 + A_2\cdot 2\cdot(x - x_0) + A_3\cdot 3\cdot(x - x_0)^2 + ... + A_n\cdot n\cdot(x - x_0)^{n-1}\,,$$

и положим $x = x_0$. Получим

$$P'(x_0) = A_1 .$$

Снова продифференцируем, получим

$$P_n''(x) = 2A_2 + 6A_3(x - x_0) + ... + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2} ,$$

$$P_n''(x_0) = 2!\,A_2 ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_n'''\,(x_0) = 3!\,A_3 ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_n^{(k)}(x_0) = k!\,A_k ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = n!\,A_n .$$

Следовательно,

$$A_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, ..., n .$$

Мы пришли к тождеству

$$P_n(x) \equiv P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}\,(x - x_0) + ... + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k .$$

Замечание. Рассмотрим *интерполяционную задачу.* Пусть задана точка x_0 . Надо построить многочлен, который сам и его производные в заданной точке x_0 принимали бы заданные значения $c_k = P_n^{(k)}(x_0)$, $k = 0,\ 1,\ 2, ..., n$. Этим многочленом будет

$$P_n(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}\,(x - x_0) + ... + \frac{c_n}{n!}\,(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k!}\,(x - x_0)^k .$$

Чтобы определить многочлен n-го порядка надо задать $(n+1)$ условие. Самая простая *интерполяционная задача Лагранжа* формулируется так:

найти многочлен, для которого $P_n(x_k) = y_k$, $k = 0,\ 1,\ 2, ..., n$, $x_k \neq x_l$ **при** $k \neq l$.

27.2. Локальная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть функция $f(x)$ определена для $x \in (a,b)$ и $x_0 \in (a,b)$. Рассмотрим несколько случаев.

1) Мы знаем, что если $f(x) \in C(x_0)$, то $f(x) = f(x_0) + o(1)$ при $x \to x_0$.

2) Мы знаем, что если существует $f'(x_0)$, то

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\left(|x - x_0|\right) \quad (x \to x_0).$$

3) Из теоремы Лагранжа следует, что если существует $f'(x)$ для $x \in (a,b)$, то $\exists\, c \in (x_0, x) \quad f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$.

Все это простейшие случаи формулы Тейлора. Все они решают одну и ту же задачу: заменить функцию простейшей функцией с некоторой точностью или получить значения функции вблизи точки x_0 через значения функции и ее производных в точке x_0. Например, в случае 2) функция заменяется на линейную функцию с точностью $o\left(|x - x_0|\right)$. Если нужна более высокая точность, формула уже не годится, нужно требовать от функции большую гладкость.
Рекомендованная литература: [12].

Пусть функция $f(x)$ определена для $x \in (a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ и существует $f^{(n)}(x_0)$.

Определение. *Многочленом Тейлора* степени n для функции f в точке x_0 называется такой многочлен

$$P_n(x) = P_n(x, x_0) = P_n(x, f, x_0)$$

степени n, зависящий от x_0 и f, что $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, где $k = 0,\, 1,\, 2, ..., n$, т.е. это многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Теорема (локальная формула Тейлора). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция $f(x)$ определена для $x \in (a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ и существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула*

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o\left((x - x_0)^n\right) \quad (x \to x_0),$$

где $P_n(x, x_0)$ – многочлен Тейлора для функции $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разность

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

которая называется *остаточным членом формулы Тейлора*. Покажем, что $r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad (x \to x_0)$, что является эквивалентным тому, что $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0 \quad (x \to x_0)$, т.е. надо доказать, что существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$ и он равен 0. Имеем

$$r_n(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) = 0\,,$$
$$r_n'(x) = f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\,,$$
$$r_n'(x_0) = 0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_n^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 0,\, 1,\, 2, \ldots, n-1)\,,$$
$$r_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)\,,$$

откуда по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} =$$
$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0\,,$$

так как

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} \to f^{(n)}(x_0) \quad (x \to x_0)\,. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. При $n = 0$ имеем случай вырождения. Для верности теоремы необходимо дополнительное условие $f \in C(x_0)$.
Следствия. 1. *При* $n = 1$ *получаем*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o\left((x-x_0)\right) \quad (x \to x_0) \quad (x \to x_0)\,.$$

2. *При* $n = 2$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$$
$$(x \to x_0)\,.$$

3. *В общем случае*

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \quad (x \to x_0)\,.$$

27.3. Замечание о единственности многочлена Тейлора

Пусть выполняются все условия локальной формулы Тейлора и

$$f(x) = Q_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \quad \textit{при} \quad x \to x_0 \,.$$

Тогда

$$Q_n(x) = P_n(x, f, x_0) = P_n(x) \,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Тейлора

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \quad (x \to x_0) \,.$$

Рассмотрим разность $P_n(x) - Q_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \ (x \to x_0)$. Запишем $Q_n(x)$ в виде

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k!}(x - x_0)^k \,.$$

Докажем, что $c_k = f^{(k)}(x_0)$. Допустим, что это неверно. Пусть c_{k_0} – младший коэффициент, для которого $c_k \neq f^{(k)}(x_0)$. Тогда получим, что $f^{(k_0)}(x_0) - c_{k_0} = o(1)$ при $x \to x_0$. Отсюда получим $c_{k_0} = f^{(k_0)}(x_0)$, вопреки предположению. Значит $Q_n(x) = P_n(x)$. ►

Лекция 24
(29.11.67)

27.4. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Пусть функция $f(x)$ определена для $x \in (a, b)$, $x_0 \in (a, b)$ и существует $f^{(n)}(x_0)$. Мы уже знаем, что тогда справедлива формула

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \quad (x \to x_0) \,,$$

или $f(x) = P_n(x) + r_n(x, x_0)$, где $r_n(x, x_0) = o\left((x - x_0)^n\right) \ (x \to x_0)$ – остаточный член формулы Тейлора. Но такая формула не позволяет нам численно оценить величину $r_n(x, x_0)$. В простейшем случае при $n = 0$ из теоремы Лагранжа $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$

получаем $r_0(x,x_0) = f'(c)(x-x_0)$. Тогда, например, если имеет место оценка $|f'(x)| \leq M_1$ для $x \in (a,b)$, то можно оценить и остаток формулы Тейлора:

$$|r_0(x,x_0)| \leq M_1 \, |x-x_0| \ .$$

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция* $f(x)$ *определена для всех* $x \in (a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, n *– целое неотрицательное число,* $f^{(k)}(x)$ *существует на интервале* (a,b) *при всех* $k = 0,1,2,...,n$, $f^{(n+1)}(x)$ *существует для всех* $x \in (a,b)$ *за исключением, быть может, самой точки* x_0 , *т.е.* $x \in (a,b) \backslash x_0$. *Пусть также* $f^{(n)}(x) \in C\,(a,b)$. *Тогда* $\forall x \in (a,b)$ *справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x,x_0)\,,$$

где $r_n(x,x_0)$ *– остаточный член в форме Лагранжа – имеет вид*

$$r_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,,$$

где $x_0 < c < x$ *для случая* $x_0 < x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$r_n(x,x_0) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) - ... - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \ .$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(z)$ для фиксированного x , где $x_0 < z < x$:

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}\,(x-z) - ... - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\,(x-z)^n\,, \quad z \in [x_0,x] \ .$$

Функция $\varphi(z) \in C\,[x_0,x]$, если $x \in (a,b)$. В концах отрезка $[x_0,x]$ $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(x_0) = r_n\,(x,x_0)$. Кроме того, на (x_0,x) функция $\varphi(z)$ дифференцируема и

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \frac{f''(z)}{1!}(x-z) + f'(z) - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 + \frac{f''(z)}{1!}(x-z) +$$
$$+ ... - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n\,.$$

Рассмотрим еще одну функцию $\psi(z) \in C\,[x_0, x]$, $\psi'(z) \neq 0$ на (x_0, x). Применим к функциям φ, ψ на отрезке $[x_0, x]$ теорему Коши. Получим равенство $\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$ для некоторой точки $x_0 < c < x$. Подставим сюда значения функции φ и получим

$$\frac{r_n\,(x, x_0)}{\psi\,(x_0) - \psi\,(x)} = -\frac{1}{\psi'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Отсюда

$$r_n\,(x, x_0) = -\frac{\psi(x_0) - \psi(x)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\,, \qquad (*)$$

где $x_0 < c < x$. Выберем $\psi(z) = (x-z)^{n+1}$. Тогда $\psi(x) = 0$, $\psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$, $\psi'(z) = -(n+1)(x-z)^n$, и значит

$$r_n\,(x, x_0) = \frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c)\,(x-x_0)^{n+1}\,, \quad \text{где} \quad x_0 < c < x\,.$$

Это и есть остаточный член в форме Лагранжа. ►

27.5. Сравнение формул Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа

Предположим, что функция $f(x)$ определена для $x \in (a, b)$, точка $x_0 \in (a, b)$ и существует $f^{(n+1)}(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда по формуле с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = P_n(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,, \quad x_0 < c < x\,.$$

Следствие. *Обозначим* $M_{n+1} = \sup\limits_{(a,b)} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$. *Тогда для любого* $x \in (a, b)$

$$|r_n\,(x, x_0)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|(x-x_0)|^{n+1}\,,$$

или

$$|f(x) - P_n(x, x_0)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|(x-x_0)|^{n+1}\,.$$

По формуле с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = P_{n+1}(x, x_0) + o\left((x - x_0)^{n+1}\right) =$$
$$= f(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right) \quad (x \to x_0).$$

Отметим, что без предположения непрерывности $f^{(n)}(x_0)$ из формулы с остаточным членом в форме Лагранжа не следует формула с остаточным членом в форме Пеано.

27.6. Запись формулы Тейлора через дифференциалы

В формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)\Delta x_0 + \frac{1}{2!}f''(x_0)\left(\Delta x_0\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\left(\Delta x_0\right)^n + r_n(x, x_0)$$

положим $dx = \Delta x_0 = x - x_0$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + r_n(x, x_0),$$

т. е.

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(x_0) + r_n(x, x_0),$$

или

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(x_0) + o\left((dx)^n\right) \quad (x \to x_0)$$

– формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, и

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c), \quad x_0 < c < x,$$

– формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

27.7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши). *Пусть функция* $f(x)$ *определена для всех* $x \in (a,b)$, n *– целое неотрицательное число,* $x_0 \in (a,b)$, $f^{(n)}(x) \in C(a,b)$, $f^{(n+1)}(x)$ *существует для* $x \in (a,b) \backslash x_0$. *Тогда*

$$r_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$.

Доказательство. Положим в формуле $(*)$ $\psi(z) = x - z$. Тогда $\psi(x_0) = x - x_0$, $\psi(x) = 0$, $\psi'(z) = -1$, и мы получаем остаточный член формулы Тейлора в форме Коши

$$r_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)(x-c)^n, \quad \text{где} \quad x_0 < c < x.$$

Можно записать $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$. Тогда $x - c = (1-\theta)(x-x_0)$ и остаточный член в форме Коши можно переписать в виде

$$r_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}. \quad \blacktriangleright$$

27.8. Частные случаи формулы Тейлора

Пусть $x_0 = 0$.

1. Пусть $f(x) = e^x$. Тогда $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$, и для любого неотрицательного целого n

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x),$$

где $r_n(x) = o\left(x^n\right) \ (x \to 0)$.

2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$. Тогда

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

и для любого неотрицательного целого n

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \\
+ \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x) = \\
= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + r_n(x)\,,
\end{aligned}
$$

где $r_n(x) = o\,(x^n) \quad (x \to 0)$. Для натурального $\alpha = m$ получим формулу Бинома Ньютона.

Глава 6

Исследование функций при помощи производных

Лекция 25
(01.12.67)

Предполагается, что известны некоторые свойства функции: гладкость и дифференцируемость. Нас будут интересовать следующие вопросы.

1. Исследование функции в окрестности точки x_0 относительно горизонтальной прямой $y = f(x_0)$ (постоянство, монотонность, экстремумы).

2. Исследование функции относительно ее касательной (выпуклость, вогнутость, точки перегиба).

Все исследования будем проводить локальные.

§ 28. Условие постоянства функции

Теорема (условие постоянства функции). *Пусть функция* $f(x)$ *определена и дифференцируема на* (a, b). *Для того, чтобы* $f(x)$ *была постоянной на* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь очевидна: если $f(x) = c$, то $f'(x) = 0$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$. Докажем, что $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ выполняется $f(x_1) = f(x_2)$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. Применим к функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ формулу Лагранжа, получим

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi) = 0\,, \quad \text{где} \quad x_1 < \xi < x_2\,,$$

откуда $f(x_1) = f(x_2)$. ►
Следствие. *Определенные и дифференцируемые на интервале функции отличаются на константу тогда и только тогда, когда их производные равны.*
Д о к а з а т е л ь с т в о. К разности функций применим предыдущую теорему. ►
Теорема (о стирании особенностей). *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a, b]$. *Пусть имеется конечное множество E точек* $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, ..., n$, *таких, что* $f'(x) = 0 \ \ (x \neq x_i)$. *Тогда* $f(x) = c \ \ \forall x \in [a, b]$.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что концы отрезка $[a, b]$ включаются в множество E, причем $x_1 = a$, $x_n = b$. Отрезок $[a, b]$ разбивается на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., n - 1$. На каждом из этих отрезков функция непрерывна и дифференцируема внутри этих отрезков. По формуле Лагранжа (см. следствие из теоремы Лагранжа п. 25 с. 106) если $x, x' \in [x_i, x_{i+1}]$, то $f(x) = f(x')$. Значит, на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ получим равенство $f(x) = f(x_i) = f(x_{i+1})$. Так как на концах этих отрезков точки принадлежат соседним отрезкам, то $f(x) = \mathrm{const}$ на всем отрезке $[a, b]$. ►
Следствие. *Пусть функции* $f_1(x)$, $f_2(x) \in C\,[a, b]$ *и имеют производные во всех точках отрезка, за исключением, быть может, точек* $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, ..., n$, *причем* $f_1'(x) = f_2'(x)$, $x \neq x_i$. *Тогда* $f_1(x) = f_2(x) + c \ \ \forall x \in [a, b]$.

§ 29. Условие монотонности функции

Теорема (необходимое и достаточное условие монотонности функции). *Пусть функция* $f(x)$ *определена и дифференцируема на* (a, b). *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *была возрастаю-*

щей (убывающей) на (a,b), *необходимо и достаточно, чтобы ее производная была неотрицательной (неположительной) для всех* $x\in[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть функция возрастает на интервале (a,b), $x_0\in(a,b)$. Возьмем $x>x_0$. Тогда $f(x)-f(x_0)\ge 0$ и $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$. Перейдем к пределу при $x\to x_0+0$ и получим $f'(x_0)\ge 0$. Аналогично для $x<x_0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\forall x\in(a,b)\quad f'(x)\ge 0$. Возьмем $x>x_0$. Тогда по формуле Лагранжа для некоторого ξ, $x_0<\xi<x$, $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(\xi)\ge 0$. Значит, функция возрастает. Аналогично рассматривается случай $f'(x)\le 0$ и убывающей функции. ▶

Теорема (достаточное условие монотонности). *Пусть* $f(x)$ непрерывна на (a,b), $x_0\in(a,b)$ *и* $\forall x\in(a,b)\backslash x_0\quad f'(x)\ge 0$. *Тогда* $f(x)$ *возрастает на всем* (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предыдущей теоремы и непрерывности функции на интервале (a,b) функция возрастает на полуинтервалах $(a,x_0]$ и $[x_0,b)$. Следовательно, для любых точек x,x' из (a,b) таких, что $x\le x_0\le x'$ имеем $f(x)\le f(x_0)\le f(x')$ для точек x,x' из (a,b) таких, что $x\le x_0\le x'$. Таким образом, f возрастает на (a,b). (Заметим, что в точке x_0 производная может и не существовать.) ▶

Теорема (достаточное условие строгой монотонности функции). *Пусть* $f(x)$ *определена на* (a,b) *и* $f'(x)>0\quad\forall x\in(a,b)$. *Тогда* $f(x)$ *строго возрастает на* (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x<x'$. По формуле Лагранжа $f(x')-f(x)=(x'-x)f'(\xi)>0$, $x<\xi<x'$. Значит $f(x')>f(x)$. ▶

Теорема (необходимое и достаточное условие строгой монотонности). *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *строго возрастала на* (a,b) *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $f'(x)\ge 0\quad\forall x\in(a,b)$;

2) $\forall\ (\alpha,\beta)\subset(a,b)\quad\exists\, x\in(\alpha,\beta)\quad f'(x)>0$.

Замечание. Условие 2) означает, что множество

$$\{x\in(a,b):\quad f'(x)>0\}$$

плотно в (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Н е о б х о д и м о с т ь условия 1) ясна. Если существует (α_0,β_0) и $f'(x)=0\quad\forall\, x\in(\alpha_0,\beta_0)$, то на всем этом интервале функция постоянна. Следовательно условие 2) тоже необходимо для строгого возрастания функции.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняются условия 1) и 2). Тогда по теореме о необходимом и достаточном условии монотонности функция возрастает. Надо доказать, что она строго возрастает. Предположим противное. Пусть существуют точки α, β такие, что $\alpha < \beta$ и $f(\alpha) = f(\beta)$. Тогда $f(x) = c \ \ \forall x \in (\alpha, \beta)$ и $f'(x) = 0$ на (α, β), что противоречит условию 2). ►

Теорема (достаточное условие строгой монотонности с исключительной точкой). *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на интервале* (a, b), $x_0 \in (a, b)$, *и пусть производная* $f'(x) > 0$ *для всех* $x \in (a, b) \backslash x_0$. *Тогда* $f(x)$ *строго возрастает на* (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично случаю нестрогой монотонности.

§ 30. Экстремумы и строгие экстремумы функции

Определение. Функция $f(x)$, определенная в интервале (a, b), имеет *максимум* в точке $x_0 \in (a, b)$, если существует окрестность $O(x_0)$ такая, что $\forall x \in O(x_0) \ \ f(x) \leq f(x_0)$; *строгий максимум*, если существует окрестность $O(x_0)$ такая, что $\forall x \in O(x_0) \backslash x_0$ $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично определяется *минимум и строгий минимум.*

Пример. Функция $y = 0$ при $x = 0$, $y = x^2 \sin \frac{1}{x} + 2x^2$ при $x \neq 0$ (рис. 6.1) в точке $x = 0$ имеет строгий минимум.

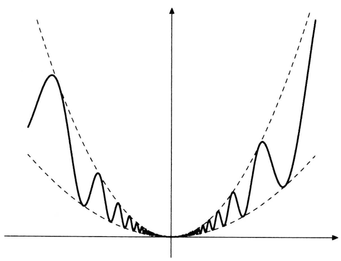

Рис. 6.1. В точке $x = 0$ функция имеет строгий минимум.

Необходимое условие экстремума дает теорема Ферма (п. 25 с. 104).

Теорема (достаточное условие экстремума). *Пусть*

1) *точка* $x_0 \in (a,b)$;

2) *функция* $f(x)$ *определена на интервале* (a,b);

3) *функция* $f(x)$ *возрастает на* $(a,x_0]$ *и убывает на* $[x_0,b)$.

Тогда в точке x_0 *функция* $f(x)$ *имеет максимум.*

Доказательство. Если $x < x_0 < x'$, то $f(x) \le f(x_0)$ и $f(x_0) \ge f(x')$. Значит $\max\limits_{x\in(a,b)} f(x) = f(x_0)$. ▶

Следствие. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на* (a,b) *и имеет* $f'(x)$ $\forall x \in O(x_0)\backslash x_0$. *Тогда, если* $f'(x) \ge 0$ *на* (a,x_0) *и* $f'(x) \le 0$ *на* (x_0,b), *то в точке* x_0 *функция имеет максимум.*

Аналогичную теорему и следствие можно доказать для минимума.

Замечание. Таким образом, перемена знака производной – достаточное условие точки экстремума непрерывной функции.

Определение. Пусть функция $\varphi(x)$ определена на (a,b) и точка $x_0 \in (a,b)$. Если $\exists\, O(x_0)$ $\forall x \in O(x_0)$, $x > x_0$, $\varphi(x) \ge \varphi(x_0)$ и $\forall x \in O(x_0)$, $x < x_0$, $\varphi(x) \le \varphi(x_0)$, то функция называется *возрастающей в точке* x_0.

Аналогичные определения даются для *убывающей, строго возрастающей и строго убывающей в точке* функции.

Замечание. Понятие возрастания функции в точке более широкое, чем возрастание в интервале, содержащем эту точку.

Примеры. В качестве примера нестрого возрастающей в точке $x = 0$ функции, которая не является возрастающей ни в каком интервале, содержащем эту точку, можно рассмотреть функцию $y = |x|\, x\left(\sin\frac{1}{x} + 1\right)$ при $x \ne 0$ и $y = 0$ при $x = 0$.

Функции $y = x^2\left(\sin\frac{1}{x} + 2\right) + \frac{x}{4}$, или $y = |x|\, x\left(\sin\frac{1}{x} + 2\right)$ или $y = |x|\, x\left(\sin\frac{1}{x} + 2\right) + \frac{x}{4}$ при $x \ne 0$, $y = 0$ при $x = 0$, дают примеры строго возрастающих в точке $x = 0$, не являющихся возрастающими в любом интервале, содержащем эту точку (рис. 6.2).

Лемма. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на интервале* (a,b) *и* $f'(x) > 0$ *в точке* x_0. *Тогда функция* $f(x)$ *строго возрастает в точке* x_0.

Доказательство. Существует окрестность $O(x_0)$ такая, что $\forall x \in O(x_0)$, $x \ne x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Отсюда следует, что

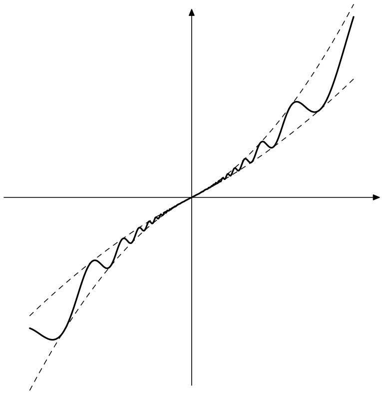

Рис. 6.2. Строго возрастающая в точке $x = 0$ функция, не являющаяся возрастающей в любом интервале, содержащем эту точку.

$f(x) > f(x_0)$, если $x > x_0$, и $f(x) < f(x_0)$, если $x < x_0$. Т. е. функция строго возрастает в точке. ►

Лекция 26
(06.12.67)

Теорема (I достаточный признак экстремума функции). *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$, $f^{(k)}(x_0)$ существует ($k = 1, 2, ..., n$), $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если n – четное, то $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий экстремум, причем, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x)$ имеет минимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x)$ имеет максимум. Если n – нечетное , то функция не имеет экстремума в точке x_0.*
Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n, \quad \text{где} \quad \alpha(x) \to 0 \qquad (x \to x_0).$$

Тогда при наших условиях

$$f(x) - f(x_0) = \left\{ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right\} \cdot (x - x_0)^n .$$

Так как $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то можно выяснить знак этой разности при x достаточно близких к x_0. Функция $\alpha(x) \to 0 \quad (x \to x_0)$, поэтому $\exists \delta \ \ \forall x$, $|x-x_0| < \delta$, $|\alpha(x)| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|$. Тогда, при $\forall x$, $|x-x_0| < \delta$,

$$\operatorname{sign}\left\{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right\} = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0) \quad \text{при} \quad |x-x_0| < \delta\,.$$

Если n – четное, то для $x \neq x_0$ имеем $(x-x_0)^n > 0$, и из условия $f^{(n)}(x_0) > 0$ следует, что $f(x) - f(x_0) > 0$ и x_0 – точка строгого минимума. Аналогично, из условия $f^{(n)}(x_0) < 0$ следует, что x_0 – точка строгого максимума.

Если n – нечетное, то $\operatorname{sign}(x-x_0)^n = \operatorname{sign}(x-x_0)$. Значит,

$$\operatorname{sign}\left(f(x) - f(x_0)\right) = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0) \cdot \operatorname{sign}(x-x_0)\,,$$

разность $f(x) - f(x_0)$ меняет знак при переходе через точку x_0 и функция в точке x_0 не имеет экстремума. ►

Следствие. *Если* $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a,b)$ *и*

1) *если* $f''(x_0) > 0$, *то в точке* x_0 *функция имеет минимум*;

2) *если* $f''(x_0) < 0$, *то функция в точке* x_0 *имеет максимум.*

Замечание. При $f''(x_0) = 0$ имеем случай неопределенности.

Пример. Рассмотрим функцию $y = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$, $y = 0$ при $x = 0$. В точке $x_0 = 0$ функция имеет строгий минимум, но $y^{(n)}(0) = 0$ для любого натурального n.

Теорема (II достаточный признак экстремума функции). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на интервале* (a,b), $x_0 \in (a,b)$, $f^{(n)}(x) \in C\,(a,b)$, $f^{(n+1)}(x)$ *существует для всех* $x \neq x_0$ *и* $f^{(k)}(x_0) = 0$ *при* $k = 1, ..., n$.

Пусть n *– нечетное. Если* $f^{(n+1)}(x) > 0$ *при* $x \neq x_0$, *то функция имеет в точке* x_0 *строгий минимум. Если* $f^{(n+1)}(x) < 0$ *при* $x \neq x_0$, *то функция имеет в точке* x_0 *строгий максимум.*

Пусть n *– четное. Если при* $x > x_0 \quad f^{(n+1)}(x) > 0$ *и при* $x < x_0$ $f^{(n+1)}(x) < 0$, *то функция имеет в точке* x_0 *строгий максимум. Если при* $x > x_0 \quad f^{(n+1)}(x) < 0$ *и при* $x < x_0 \quad f^{(n+1)}(x) > 0$, *то функция имеет в точке* x_0 *строгий минимум.*

При нестрогих неравенствах получим достаточный признак нестрогого экстремума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получим

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где либо $x_0 < \xi < x$, либо $x < \xi < x_0$. Тогда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Изучим знак правой части. Для экстремума эта разность должна сохранять знак при переходе через точку x_0.

Пусть n – нечетное, тогда $(n+1)$ – четное. Если $f^{(n+1)}(x) > 0$ при $x \neq x_0$, то функция имеет строгий минимум в точке x_0. Если при $x \neq x_0$ $f^{(n+1)}(x) < 0$, то функция имеет строгий максимум в точке x_0.

Пусть n – четное, тогда $(n+1)$ – нечетное. Если $f^{(n+1)}(x) > 0$ при $x > x_0$ и $f^{(n+1)}(x) < 0$ при $x < x_0$, то функция имеет строгий максимум. При противоположных неравенствах для производных функция имеет строгий минимум. ►

Замечание. В точке x_0 нет экстремума, если разность $f(x) - f(x_0)$ меняет знак при переходе через точку x_0. Например, пусть n – нечетное число, тогда $(n+1)$ – четное. Если $f^{(n+1)}(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f^{(n+1)}(x) < 0$ при $x > x_0$, то

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}(x - x_0);$$

или если $f^{(n+1)}(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f^{(n+1)}(x) > 0$ при $x > x_0$, то

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = -\operatorname{sign}(x - x_0)$$

и, значит, функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке x_0.

§ 31. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Выпуклая фигура на плоскости характеризуется тем свойством, что для любых двух ее точек соединяющий их отрезок содержится в этой фигуре (рис. 6.3).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a, b). Рассмотрим множество

$$M = \{(x, y) : \quad a < x < b, \, y \geq f(x)\} \, .$$

Будем считать функцию выпуклой на интервале (a, b), если множество M есть выпуклое множество. Таким образом, всякая хорда, стягивающая две точки графика выпуклой функции, лежит не ниже стягиваемой ею дуги. Если в точке x_0 есть касательная к графику выпуклой функции, то график лежит не ниже этой касательной (рис. 6.3). Будем считать функцию вогнутой на интервале (a, b), если функция $-f(x)$ выпукла на этом интервале [1].

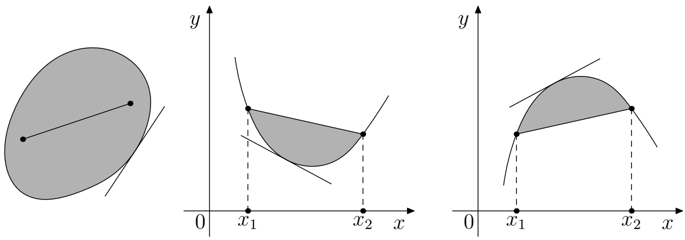

Рис. 6.3. Выпуклое множество. Выпуклая (график над касательной) и вогнутая (график под касательной) функции.

Сначала рассмотрим понятие выпуклости и вогнутости функции в точке.

31.1. Выпуклость и вогнутость в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b), точка $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0)$ существует. Обозначим

$$Y = L(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$. Тогда

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \, ,$$

[1] Для выпуклой и вогнутой функции используют и другие названия. Например, *выпуклая вниз* для выпуклой функции и *выпуклая вверх* для вогнутой. (Ред.)

и $y - Y|_{x=x_0} = 0$.
Определение выпуклости функции в точке. Если $\exists\, O(x_0)$ $\forall x \in O(x_0)$ $f(x) \geq L(x, x_0)$, то функция $f(x)$ называется *выпуклой в точке* x_0. Если $\exists\, O(x_0)$ $\forall x \in O(x_0) \backslash x_0$ $f(x) > L(x, x_0)$, то функция называется *строго выпуклой в точке* x_0.
Аналогично, функция $f(x)$ называется *вогнутой в точке* x_0, если $\exists\, O(x_0)$ $\forall x \in O(x_0)$ $f(x) \leq L(x, x_0)$. Если $\exists\, O(x_0)$ $\forall x \in O(x_0) \backslash x_0$ $f(x) < L(x, x_0)$, то функция называется *строго вогнутой в точке* x_0.
Замечание. Дифференцируемость в точке x_0 влечет непрерывность в точке x_0, но не влечет непрерывности ни на каком интервале, содержащем x_0.[2)]
Определение. Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции $f(x)$, если $\exists\, O(x_0)$ $\forall x \in O(x_0)$, $x < x_0$, $f(x) \leq L(x, x_0)$ (или $f(x) \geq L(x, x_0)$) и $\forall x \in O(x_0)$, $x > x_0$, $f(x) \geq L(x, x_0)$ (или $f(x) \leq L(x, x_0)$). Если соответствующие неравенства между значениями $f(x)$ и $L(x, x_0)$ строгие, то x_0 называется *точкой строгого перегиба* функции.

Таким образом, x_0 – точка перегиба, если для точек, лежащих по разные стороны от x_0 график функции находится по разные стороны от касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$.

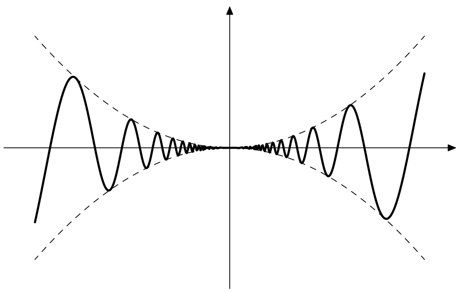

Рис. 6.4. В точке $x = 0$ функция не является ни выпуклой, ни вогнутой, и не имеет перегиб.

Пример. Функция $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ дифференцируема в

2) Смотри пример 3.3 в [13]: $y = x^2 \left(D(x) - \frac{1}{2}\right)$, где $D(x)$ – функция Дирихле. (Ред.)

точке $x = 0$, но не является в этой точке ни выпуклой, ни вогнутой, и не имеет в ней точки перегиба (рис. 6.4). Для этой функции $f'(0) = 0$, $L(x, 0) = 0$.

Лекция 27
(08.12.67)

Введем следующее обозначение:

$$\Delta(x) = f(x) - L(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Отметим, что

$\Delta(x_0) = 0$;

если $\Delta(x) \geq 0$ в $O(x_0)$, то функция $f(x)$ выпукла в точке x_0, а $\Delta(x)$ имеет в точке x_0 минимум;

если $\Delta(x) \leq 0$ в $O(x_0)$, то функция $f(x)$ вогнута в точке x_0, а $\Delta(x)$ имеет в точке x_0 максимум;

если $\Delta(x) > 0$ в $O(x_0)\backslash x_0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 строго выпукла, а $\Delta(x)$ имеет в точке x_0 строгий минимум;

если $\Delta(x) < 0$ в $O(x_0)\backslash x_0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 строго вогнута, а $\Delta(x)$ имеет в точке x_0 строгий максимум;

если $\Delta(x)$ возрастает или убывает в некоторой окрестности $O(x_0)$, то x_0 есть точка перегиба для функции $f(x)$.

Отметим также, что

$\Delta'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ и

$\Delta'(x_0) = 0.$

Теорема (I достаточный признак выпуклости, вогнутости и точек перегиба). *Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$.*

1. *Пусть $f'(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0. Тогда $f(x)$ выпукла (вогнута) в точке x_0.*

2. *Если $f'(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то $f(x)$ имеет в точке x_0 перегиб.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Лагранжа

$$\Delta x = \{f'(\xi) - f'(x_0)\}(x - x_0) \geq 0,$$

где либо $x_0 < \xi < x$, либо $x < \xi < x_0$.

Пусть $f'(x)$ возрастает в точке x_0, тогда $f'(\xi) \geq f'(x_0)$ при $x > x_0$, и $f'(\xi) \leq f'(x_0)$ при $x < x_0$. Значит $\Delta x \geq 0$ и в точке x_0 функция будет выпуклой. Точка экстремума производной будет точкой перегиба функции. Аналогично доказываются остальные утверждения теоремы. ►

Отметим, что

$\Delta'(x) = f'(x) - f'(x_0)$,

$\Delta''(x) = f''(x)$,

....

$\Delta^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ ($k \geq 2$),

....

$\Delta^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.

Применив условия экстремума и монотонности к Δx , получим, следующую теорему.

Теорема (II достаточный признак выпуклости, вогнутости и точек перегиба). *Пусть функция $f(x)$ определена на (a,b) и имеет в точке $x_0 \in (a,b)$ производные $f^{(k)}(x_0)$ ($k = 1, 2, ..., n$). Допустим, что $f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Пусть n – четное. Тогда, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ строго выпукла в точке x_0 ; если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x)$ в точке x_0 строго вогнута. Если n – нечетное , то точка x_0 – точка строгого перегиба для $f(x)$.*

Рассмотрим, например, простейший случай точки перегиба при $n = 3$. Тогда по условиям теоремы $\begin{cases} f''(x_0) = 0, \\ f'''(x_0) \neq 0, \end{cases}$ и $\Delta(x)$, в зависимости от знака $f'''(x_0)$, возрастает или убывает в точке x_0 , и значит, для функции $f(x)$ точка x_0 – точка перегиба.

31.2. Выпуклость и вогнутость на интервале

Пусть $y = f(x)$ определена и непрерывна на (a,b) .

Определение. Функцию $f(x)$ будем называть *выпуклой на* (a,b) , если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ соответствующая им хорда лежит не ниже графика функции на отрезке $[x_1, x_2]$.

Функцию $f(x)$ будем называть *вогнутой на* (a,b) , если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ соответствующая им хорда лежит не выше графика функции на отрезке $[x_1, x_2]$.

Пусть $y = f(x)$ определена и непрерывна на (a,b) . Имеет место

Теорема(критерий выпуклости дифференцируемых функций). *Для того, чтобы функция, дифференцируемая на интервале, была выпукла на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была возрастающей функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_1, x_2 – произвольные точки интервала (a, b), $x_1 < x_2$, и M_1M_2 – соответствующая им хорда. Пусть M_0 – произвольная точка на стягиваемой хордой M_1M_2 дуге кривой с абсциссой x_0, $x_1 < x_0 < x_2$. Заметим, что функция выпукла на (a, b) тогда и только тогда, когда угловой коэффициент хорды M_1M_0 не больше углового коэффициента хорды M_0M_2, т. е. $\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \le \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$.

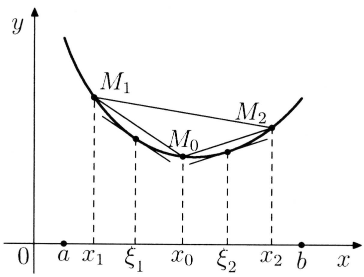

Рис. 6.5. Критерий выпуклости дифференцируемых функций: достаточность.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f'(x)$ возрастает на интервале (a, b) (рис. 6.5) x_1, x_2 – произвольные точки интервала (a, b), $x_1 < x_2$, и M_1M_2 – соответствующая им хорда. Пусть M_0 – произвольная точка на стягиваемой хордой M_1M_2 дуге кривой, соответствующая точке x_0, $x_1 < x_0 < x_2$. Покажем, что M_0 лежит не выше хорды. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_0]$. По теореме Лагранжа существует точка $\xi_1 \in (x_1, x_0)$ такая, что $f'(\xi_1) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$. Отметим, что $f'(\xi_1)$ равна угловому коэффициенту хорды M_1M_0. Теперь применим теорему Лагранжа к отрезку $[x_0, x_2]$. Тогда найдется такая точка $\xi_2 \in (x_0, x_2)$, что $f'(\xi_2) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$, т. е. $f'(\xi_2)$ – угловой коэффициент хорды M_0M_2. Так как $f'(x)$ возрастает, то $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$. Значит, точка M_2 лежит не ниже прямой, проходящей через точки M_1 и M_0, а точка M_0 – не выше хорды M_1M_2, и из замечаний в начале доказательства следует, что функция выпукла.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и выпукла на (a, b) (рис. 6.6). Докажем, что $f'(x)$ возрастает. Возь-

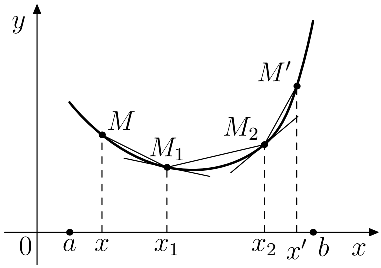

Рис. 6.6. Критерий выпуклости дифференцируемых функций: необходимость.

мем произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Надо показать, что $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Так как функция выпукла, то для произвольной точки $x \in (a, b)$, $x < x_1$, имеем $\frac{y-y_1}{x-x_1} \leq \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. При $x \to x_1$ отсюда получим, что $f'(x_1) \leq \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Аналогично для произвольной точки $x' \in (a, b)$, $x_2 < x'$, имеем $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \leq \frac{y'-y_2}{x'-x_2}$ и при $x' \to x_2$ получим $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$. Значит, $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. ►

Соответствующая теорема для вогнутой функции доказывается аналогично.

Замечание. Для выпуклой функции $f(x)$ точек, где $f'(x)$ не существует, конечное или счетное множество.

§ 32. Абсолютный экстремум

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Рассмотрим задачу о нахождении абсолютного экстремума, т. е. задачу о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. На отрезке методы дифференциального исчисления не применимы к граничным точкам. Поэтому сначала на интервале проводится исследование функции на локальный экстремум с помощью производной. Затем экстремальные значения функции внутри интервала просто сравниваются со значениями функции в концах отрезка (т. е. со значениями функции на границе области определения), и находятся наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Глава 7

Дифференциальная геометрия

§ 33. Вектор-функции

Рекомендованная литература: [8].

33.1. Предел и непрерывность

Пусть дана функция $y = f(x)$, где x – точка в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Будем рассматривать $n = 2$ и $n = 3$. Пусть $a(x_1, x_2, x_3)$ и $a_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ – точки из $\mathbb{R}^3$.

Определения. *Окрестностью* $O(a_0)$ точки a_0 называется множество точек $a(x_1, x_2, x_3)$, для которых

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \left(x_3 - x_3^0\right)^2 < \varepsilon^2.$$

Понятия *граничной*, *внутренней* и *предельной* точек множества, *открытого* и *замкнутого* множеств, а также понятия *предела* и *непрерывности* функций, остаются справедливыми в любом пространстве, где введено понятие окрестности.

Пусть имеются две точки $a_0(x_1^0, x_2^0)$ и $a_1(x_1^1, x_2^1)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Отрезком $[a_0, a_1]$ называется совокупность точек $a(x_1, x_2)$, для которых

$$x_1 = (1-t)x_1^0 + tx_1^1$$
$$x_2 = (1-t)x_2^0 + tx_2^1$$

при $0 \le t \le 1$.

Аналогично, пусть $a_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ и $a_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ – точки в $\mathbb{R}^3$. *Отрезком* $[a_0, a_1]$ называется совокупность точек $a(x_1, x_2, x_3)$, для которых

$$x_1 = (1-t)x_1^0 + tx_1^1$$
$$x_2 = (1-t)x_2^0 + tx_2^1$$
$$x_3 = (1-t)x_3^0 + tx_3^1$$

при $0 \le t \le 1$.
Если $0 < t < 1$, то получаем *интервал*.
Множество *выпукло*, если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит и соединяющий их отрезок.

Теперь мы рассмотрим более общее понятие функции, когда обобщается область значений, а область определения остается та же – множество из $\mathbb{R}$.

Определение. Говорят, что на множестве $X \subset \mathbb{R}$ определена *вектор-функция* $r = r(t)$, если любому $t \in X$ ставится в соответствие вектор $r \in \mathbb{R}^n$.

Лекция 28 (13.12.67)

Пусть вектор-функция $r = r(t)$ определена для $t \in X \subset \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^3$ (или $r \in \mathbb{R}^2$). Сведем изучение вектор-функций к изучению функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Пусть $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и e_1, e_2, e_3 – базис в $\mathbb{R}^3$. Тогда $a = xe_1 + ye_2 + ze_3$, где $x, y, z \in \mathbb{R}$. Значит

$$r = r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3,$$

или $r = r(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$. Таким образом, задать вектор-функцию – значит задать три действительные функции действительного переменного

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\}.$$

Пусть $a = xe_1 + ye_2 + ze_3$ и $b = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ – две точки из $\mathbb{R}^3$. Тогда расстояние между этими точками

$$|a - b| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\,.$$

Рассмотрим величину $\max\{|x - x'|\,, |y - y'|\,, |z - z'|\} = d$. Между величинами $|a - b|$ и d имеются соотношения $d \le |a - b| \le \sqrt{3}d$. Значит, последовательность $\{a_n\}$, $a_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$ сходится к b при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $d_n = |a_n - b| \to 0$ ($n \to \infty$), т.е. когда

$$x_n \to x', \quad y_n \to y', \quad z_n \to z' \qquad (n \to \infty)\,.$$

Таким образом, сходимость последовательности $\{a_n\}$ к вектору b эквивалентна покоординатной сходимости. Аналогично, непрерывность вектор функции в точке эквивалентна непрерывности в этой точке всех ее координат.

33.2. Дифференцирование вектор-функций

Пусть $r = r(t)$ – вектор-функция, определеная для $t \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.
Определение. Предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$ называется *производной* $r'(t)$ вектор-функции $r(t)$.

Правила дифференцирования для вектор-функции такие же, как и для скалярной функции.

Пусть a и b – два вектора. Рассмотрим новые операции: λa ($\lambda \in \mathbb{R}$), $(a, b) = ab$ – скалярное произведение, и $[a, b] = a \times b$ – векторное произведение векторов a и b. Скалярное произведение определено в пространстве, а векторное произведение – в ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3_+$.
Определение. Функция $\{a, b\}$ двух переменных, линейная по отношению к своим аргументам, называется *билинейной функцией.*

Функции λa, ab, $a \times b$ являются билинейными. Например, ab – одна из простейших билинейных функций. Из линейности по первому аргументу следует $(\alpha a_1 + \beta a_2)\, b = \alpha a_1 b + \beta a_2 b$. Аналогично по второму аргументу. Используя свойство билинейности, можно вывести правило дифференцирования любой билинейной функции.
Упражнение. Вывести правило дифференцируемости для билинейной функции. Проверить, что при выводе формулы для производной использовалась билинейность.

В частности получим

$$\{a \times b\}' = a' \times b + a \times b',$$

$$\{ab\}' = a'b + ab'.$$

Пусть $r = r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$ – вектор-функция.
Теорема (критерий дифференцируемости). *Для того, чтобы вектор-функция* $r = r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$ *была дифференцируема необходимо и достаточно, чтобы были дифференцируемы функции* x, y *и* z.
Доказательство. Достаточность очевидна. Если x, y и z дифференцируемые функции, то и $r = r(t)$ дифференцируема:

$$r'(t) = x'(t)e_1 + y'(t)e_2 + z'(t)e_3 .$$

Необходимость. Если вектор-функция дифференцируема, то дифференцируема $\{r(t)\, e_1\}' = x'(t)$, т. е. дифференцируема и функция $x(t)$. Аналогично для функций $y(t)$ и $z(t)$. ▶

33.3. Формула Тейлора для вектор-функции

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для вектор-функции неверна. [1)]

Для вектор-функции справедлив аналог локальной формулы Тейлора.
Теорема (локальная формула Тейлора для вектор-функций). *Пусть вектор-функция* $r = r(t)$ *определена для* $t \in (\alpha, \beta)$, точка $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *и* $r^{(n)}(t_0)$ *существует. Тогда справедлива формула Тейлора*:

$$r(t_0 + \Delta t) = r(t_0) + \frac{r'(t_0)}{1!}\Delta t + ... + \frac{r^{(n)}(t_0)}{n!}(\Delta t)^n + a_n(t)(\Delta t)^n ,$$

где $a_n(t) \to 0 \ \ (\Delta t \to 0)$.

1) Если аналог формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для вектор-функции был бы верен, то, например, для вектор-функции $r = r(t) = t^2 e_1 + t^3 e_2$ при $n = 0$ и $t_0 = 0$ в точке $t = 1$ мы имели бы $(x(1), y(1)) = (x'(c), y'(c))$, где $0 < c < 1$, но $(1,1) = (x'(\frac{1}{2}), y'(\frac{1}{\sqrt{3}}))$, т. е. мы не можем указать один и тот же аргумент в производных, как требует аналог формулы. (Ред.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как вектор-функция

$$r = r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$$

имеет $r^{(n)}(t_0)$, то существуют $x^{(n)}(t_0)$, $y^{(n)}(t_0)$, $z^{(n)}(t_0)$. Значит, по формуле Тейлора для скалярной функции

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}\Delta t + ... + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(\Delta t)^n + \alpha_n(t)(\Delta t)^n\,,$$
$$\text{где} \quad \alpha_n(t) \to 0 \quad (t \to t_0),$$

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{1!}\Delta t + ... + \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}(\Delta t)^n + \beta_n(t)(\Delta t)^n\,,$$
$$\text{где} \quad \beta_n(t) \to 0 \quad (t \to t_0)\,,$$

$$z(t_0 + \Delta t) = z(t_0) + \frac{z'(t_0)}{1!}\Delta t + ... + \frac{z^{(n)}(t_0)}{n!}(\Delta t)^n + \gamma_n(t)(\Delta t)^n\,,$$
$$\text{где} \quad \gamma_n(t) \to 0 \quad (t \to t_0)\,.$$

Сложив эти равенства, получим формулу

$$r(t_0 + \Delta t) = r(t_0) + \frac{r'(t_0)}{1!}\Delta t + ... + \frac{r^{(n)}(t_0)}{n!}(\Delta t)^n +$$
$$+ (\alpha_n(t)e_1 + \beta_n e_2 + \gamma_n e_3)(\Delta t)^n\,.$$

Обозначим $a_n(t) = \alpha_n(t)e_1 + \beta_n e_2 + \gamma_n e_3$. Тогда $a_n(t) \to 0 \;\; (t \to t_0)$.
▶

Замечание. Билинейные функции λa, ab, $a \times b$ непрерывны по каждому из своих аргументов. Это следует из неравенств

$$|\lambda a| \le |\lambda|\,|a|\,, \quad |ab| \le |a|\,|b|\,, \quad |a \times b| \le |a|\,|b|\,.$$

§ 34. Понятие кривой

В математическом анализе рассматриваются функции, отображающие

1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

2) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,
3) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
4) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – основная задача анализа.

В дифференциальной геометрии кривых рассматриваются функции, отображающие из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$.

34.1. Элементарная кривая

В частном случае $n = 1$, когда вектор-функция $r = r(t)$ есть скалярная функция $y = f(x)$, график функции есть кривая на плоскости. В случае $n = 2$ вектор-функция $r = r(t)$ определяет параметризованную кривую $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, при этом t – параметр, $t \in X \subset \mathbb{R}$. Одну и ту же кривую можно по-разному параметризовать: если $t = \varphi(\tau)$, то получим сложную вектор функцию

$$\tilde{r} = r(\varphi(\tau)) = \tilde{r}(\tau)\,.$$

В дифференциальной геометрии кривая определяется параметрически:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} \quad (\Gamma)\,,$$

$t \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $x(t), y(t), z(t) \in C\,(\alpha, \beta)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Определение. *Элементарной кривой*, заданной на интервале (α, β) , называется образ интервала (α, β) при взаимно однозначном и в обе стороны непрерывном отображении в пространство (будем называть такое отображение *топологическим*) [2] .

Отображение называется *локально топологическим*, если для всякой точки существует окрестность, в которой отображение топологическое.

Кривой будем называть образ интервала при локально топологическом его отображении в пространство.

[2] У С. Б. С. в более поздних лекциях кривая – класс эквивалентных отображений (в некоторых книгах их называют путями или параметризациями этой кривой). (Ред.)

Теорема. *Пусть* $x'(t), y'(t), z'(t) \in C\,[\alpha, \beta]$ *и все производные не обращаются в нуль одновременно, т.е.* $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$. *Тогда отображение* (Γ) *будет локально топологическим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Докажем, что отображение (Γ) : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ будет локально взаимно однозначным. Нам надо доказать, что для любого $t_0 \in (\alpha, \beta)$ найдется окрестность $O(t_0)$ такая, в которой отображение (Γ) является взаимно однозначным. Допустим противное, т. е. $\exists\, t_0 \quad \forall\, O(t_0)$ $\exists\, t_1, t_2 \in O(t_0)$ такие, что $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$, $z(t_1) = z(t_2)$. По теореме Ролля найдутся t', t'', t''' , $t_1 < t' < t_2$, $t_1 < t'' < t_2$, $t_1 < t''' < t_2$, такие, что $x'(t') = 0$, $y'(t'') = 0$, $z'(t''') = 0$. Устремив $t_1, t_2 \to t_0$ получим, что $t' \to t_0$, $t'' \to t_0$, $t''' \to t_0$. Так как производные непрерывны, то отсюда получим, что $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 0$, $z'(t_0) = 0$. Значит, $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0) = 0$, что противоречит условию.

2. В силу доказанного, для любого $t_0 \in (\alpha, \beta)$ существует $O(t_0)$ такая, в которой отображение взаимно однозначно и, следовательно, имеет обратное. Для доказательства теоремы остается показать, что для любого $t_0 \in (\alpha, \beta)$ найдется $O_1(t_0) \subset O(t_0)$, в которой обратное отображение непрерывно. Пусть для определенности $x'(t_0) \neq 0$. Тогда $\exists\, O_1(t_0) \subset O(t_0) \quad \forall\, t \in O_1(t_0) \quad x'(t)$ сохраняет знак $x'(t_0)$. Следовательно, $x(t)$ является строго монотонной функцией, для которой существует непрерывная обратная функция $t = t(x)$. Тогда отображение $(x(t), y(t), z(t)) \to t$ (оно может быть записано как $(x, y(t(x)), z(t(x))) \to t$ тоже является непрерывным в $O_1(t_0)$, а отображение (Γ) является локально топологическим и задает кривую. ►

Лекция 29
(15.12.67)

34.2. Касательная к кривой

Пусть дана кривая (Γ) , $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и соответствующая точка $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит кривой. Рассмотрим прямые L , проходящие через эту точку. Обозначим $d = |M - M_0|$ – расстояние от произвольной точки M на кривой (Γ) до заданной точки M_0 и обозначим h расстояние от точки M до прямой L (рис. 7.1).

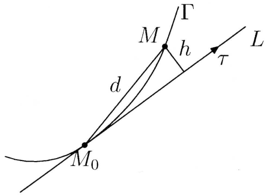

Рис. 7.1. Касательная к кривой.

Определение. Прямая L называется *касательной* к кривой (Γ) в точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, если $\frac{h}{d} \to 0$ $(\,t \to t_0\,)$.

Если $r = r(t)$ – векторное уравнение параметризованной кривой, то величина $|r'(t)|$ не является геометрической характеристикой кривой, а является свойством задания кривой, зависящим от параметризации. Геометрический смысл имеет направление вектора производной.

Будем обозначать τ единичный вектор касательной.

Теорема. *Пусть дана кривая* $(\Gamma):$ $r = r(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, *такая, что* $x', y', z' \in C\,(\alpha, \beta)$, $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$. *Тогда* (Γ) *имеет единственную касательную в каждой своей точке* $t_0 \in (\alpha, \beta)$, *причем* $\tau \,\|\, r'(t_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t = t_0 + \Delta t$. Тогда

$$d = |r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)| \;.$$

Предположим, что в точке M_0, соответствующей параметру t_0, есть касательная. Тогда

$$h = |\{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)\} \times \tau| \;.$$

По формуле Тейлора

$$d = |r'(t_0)\Delta t + \alpha(t)\Delta t| \;, \quad h = |r'(t_0) \times \tau \cdot \Delta t + \alpha(t) \times \tau \cdot \Delta t| \;,$$

где $\alpha(t) \to 0$ $(\,t \to t_0\,)$. Отсюда следует, что

$$\frac{h}{d} = \frac{|r'(t_0) \times \tau + \alpha(t) \times \tau|}{|r'(t_0) + \alpha(t)|} \to \frac{|r' \times \tau|}{|r'|} = 0 \Leftrightarrow r' \times \tau = 0\,,$$

т. е. $\tau \,\|\, r'(t_0)$, так как $|r'| \neq 0$ по условию. Мы доказали, что если касательная существует, то она имеет направление вектора r' и, следовательно, единственна. Взяв теперь прямую, проходящую через точку M_0 в направлении вектора $r'(t_0)$, учитывая предыдущие выкладки, получим, что для этой прямой $\frac{h}{d} \to 0$. Следовательно, эта прямая – касательная. ▶

Напишем уравнение касательной. Обозначим $\rho\,(\xi, \eta, \zeta)$ радиус-вектор точки на касательной $\rho = r + \alpha r'$, где α – параметр. Тогда параметрические уравнения касательной

$$\begin{aligned} \xi &= x(t_0) + \alpha x'(t_0)\,, \\ \eta &= y(t_0) + \alpha y'(t_0)\,, \\ \zeta &= z(t_0) + \alpha z'(t_0)\,, \end{aligned}$$

и канонические уравнения касательной в точке t_0 можно записать как

$$\frac{\xi - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{\eta - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{\zeta - z(t_0)}{z'(t_0)}\,,$$

где $\rho\,(\xi, \eta, \zeta)$ – точка на касательной.

34.3. Соприкасающаяся плоскость

Пусть $M_0\,(x_0, y_0, z_0) \in (\Gamma)$ и $M\,(x, y, z) \in (\Gamma)$ – произвольная точка кривой. Рассмотрим плоскость P, проходящую через касательную L к кривой в точке M_0. Обозначим $d = |M - M_0|$ – расстояние от произвольной точки M на кривой (Γ) до заданной точки M_0, обозначим h расстояние от точки M до плоскости P.

Определение. Плоскость P называется *соприкасающейся* к кривой (Γ) в точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, если $h/d^2 \to 0$ ($M \to M_0$).

Пример. Для кривой $y = x^3$, $z = 0$ любая плоскость, проходящая через точку $(0, 0, 0)$, является соприкасающейся.

Теорема. *Пусть дана кривая* $(\Gamma):\ r = r(t)$, $x'', y'', z'' \in C\,(\alpha, \beta)$, $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$ (*т.е.* $r'(t) \neq 0$), $t_0 \in (\alpha, \beta)$. *Тогда в точке* $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ *существует соприкасающаяся плоскость. Если* r' *и* r'' *неколлинеарны, т.е.* $r' \nparallel r''$, *то соприкасающаяся плоскость единственна; если* $r' \| r''$, *то соприкасающаяся плоскость – любая плоскость, проходящая через точку* $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ *и содержащая вектор* r'.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Пусть $t = t_0 + \Delta t$. Тогда $d = |r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)|$. Предположим, что соприкасающаяся плос-

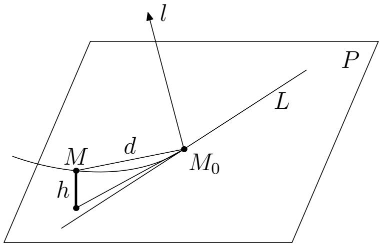

Рис. 7.2. Соприкасающаяся плоскость.

кость P в точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ существует. Тогда, применяя формулу Тейлора, получим, что

$$h = |l(r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)| = \left| l\left(r'\Delta t + \tfrac{1}{2} r''\,(\Delta t)^2 + \alpha(t)\,(\Delta t)^2 \right) \right| ,$$

где $\alpha(t) \to 0$ ($t \to t_0$). Здесь l – нормальный единичный вектор к соприкасающейся плоскости P. Тогда для соприкасающейся плоскости

$$\frac{h}{d^2} = \frac{\left|(lr'/\Delta t) + \frac{1}{2} lr'' + \alpha(t)\right|}{\left|r' + \beta(t)\right|^2} \to 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} lr' = 0 \\ lr'' = 0 \end{array} \right. .$$

Так как $|r'| \neq 0$, то это равносильно тому, что $r' \perp l$, $r'' \perp l$, что означает, что $r', r'' \in P$. Если r' и r'' неколлинеарны, то соприкасающаяся плоскость единственна. Теперь, если P – плоскость, проходящая через точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ с нормальным единичным вектором l таким, что $r' \perp l$, $r'' \perp l$, то учитывая предыдущие выкладки, получим, что P – соприкасающаяся плоскость. ▶

Замечание. Вектор r'' лежит в соприкасающейся плоскости, и это можно считать его геометрическим свойством. Действительно, если на кривой $r = r(t)$ выбрана другая параметризация $t = \varphi(u)$, то

$$\begin{aligned} r &= r(\varphi(u))\,, \\ r'_u &= r'(t)\,\varphi'(u)\,, \\ r''_{uu} &= r''(t)\,\left(\varphi'(u)\right)^2 + r'(t)\,\varphi''(u)\,. \end{aligned}$$

Направление вектора r''_{uu} другое, но соприкасающаяся плоскость, в которой лежит вектор, инвариантна.

Напишем уравнение соприкасающейся плоскости. Пусть $r' \nparallel r''$, $\rho(\xi, \eta, \zeta) \in P$. Тогда векторы $\rho - r, r', r''$ будут компланарными, и $(\rho - r, r', r'') = 0$ (условие компланарности трех векторов: смешанное произведение этих векторов равно нулю). Значит, уравнение соприкасающейся плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ может быть записано как

$$\begin{vmatrix} \xi - x(t_0) & \eta - y(t_0) & \zeta - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0 .$$

34.4. Нормальная параметризация

Можно рассматривать параметр t как время, а вектор-функцию $r = r(t)$ – как уравнение движения. Тогда $r'(t)$ – скорость движения точки по кривой. Самое простое движение – такое, что $|r'(t)| = 1$. Параметризация кривой $t = t(s)$, когда $|r'(s)| = 1$, называется *нормальной параметризацией* кривой. Параметр s зависит от выбора начальной точки. Геометрически s – длина дуги кривой.

Пусть кривая $r = r(s)$ с нормальной параметризацией. Обозначим $r'(s) = \tau$. Так как $(r', r') = 1$, то $(r', r'') = 0$. Значит, $r''(s) \perp \tau$.

Лекция 30
(20.12.67)

34.5. Кривизна

Пусть дана кривая $(\Gamma): r = r(s)$ с нормальной параметризацией, x'', y'', $z'' \in C(\alpha, \beta)$, $|r'(s)| = 1$. Рассмотрим точки на кривой, соответствующие параметрам s_0 и s, и касательные L_0 и L к кривой в этих точках (рис. 7.3). Обозначим ϑ угол между этими касательными.

Определение. *Кривизной* k_1 кривой (Γ) в точке s_0 называется $k_1 = \lim\limits_{s \to s_0} \left| \frac{\vartheta(s)}{\Delta s} \right|$ – скорость вращения касательной при нормальной параметризации.

Отметим, что кривизна $k_1 \geq 0$ по определению.

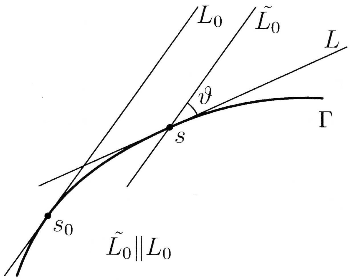

Рис. 7.3. Кривизна кривой.

Теорема. *Пусть дана кривая* $(\Gamma): \ r = r(s)$, $x'', y'', z'' \in C(\alpha, \beta)$. *Тогда кривизна* $k_1 = |r''(s)|$.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\tau = r'$. Тогда (рис. 7.4)

$$|\tau(s + \Delta s) - \tau(s)| = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} .$$

Значит,

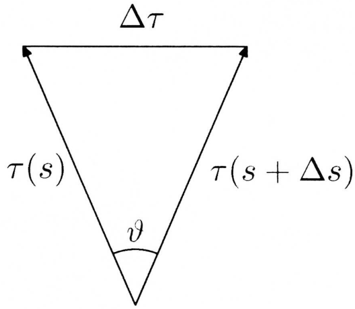

Рис. 7.4. Угол между касательными.

$$\frac{|\tau(s + \Delta s) - \tau(s)|}{|\Delta s|} = \frac{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}{\vartheta} \cdot \frac{\vartheta}{|\Delta s|},$$

откуда при $\Delta s \to 0$ получаем $k_1 = |r''(s)|$. ►

Кривизна $k_1 \geq 0$ является неотрицательной характеристикой кривой. Так как $r'' = \tau'$ и $(\tau, \tau') = 0$, то $\tau' \perp \tau$. Векторы r', r'' определяют соприкасающуюся плоскость, значит, вектор τ' лежит в соприкасающейся плоскости и перпендикулярен к касательной.

Определение. Нормаль к кривой, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью кривой.*

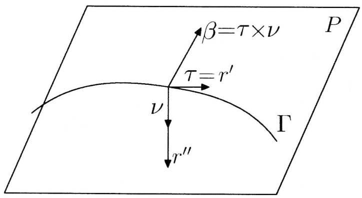

Рис. 7.5. Главная нормаль к кривой.

Выберем направление вектора ν главной нормали (рис. 7.5) так, чтобы

$$\tau' = r'' = k_1 \nu$$

– *первая формула Френе.*

Вектор $\beta = \tau \times \nu$ *называется вектором бинормали.* Вектор бинормали имеет простой кинематический смысл: единичный вектор касательной вращается вокруг бинормали и скорость его вращения есть величина кривизны кривой.

34.6. Круг кривизны

Определение. *Кругом кривизны* кривой (Γ) в точке M называется такой круг (рис. 7.6), который имеет с кривой соприкосновение порядка выше второго.

Для соприкосновения второго порядка кривой с окружностью необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) $(r(s) - a)^2 = R^2$, означает, что точка лежит на окружности;

2) $2\,(r(s) - a)\,r'(s) = 0$, означает, что $(r - a)\,\tau = 0$, т.е. центр окружности лежит на нормали к кривой;

3) $2r'^2(s) + 2\,(r(s) - a)\,r''(s) = 0$, т.е. $(r(s) - a)\,r''(s) + 1 = 0$ или $(r - a)\,r'' + 1 = 0$.

Пусть (Γ) плоская кривая. Тогда последнее условие позволяет определить радиус круга кривизны: так как $(r-a) \parallel r''$, то радиус $R = |r-a| = \frac{1}{k_1}$. Таким образом существует и только один центр кривизны для кривой в данной точке.

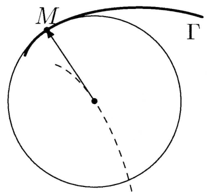

Рис. 7.6. Круг кривизны.

Определение. *Эволютой* кривой называется геометрическое место центров кривизны кривой.
Определение. *Эвольвента* кривой γ – это та кривая, по отношению к которой кривая γ является эволютой.

34.7. Кручение кривой

Определение. *Абсолютным кручением* $|k_2|$ кривой называется скорость вращения ее соприкасающейся плоскости при нормальной параметризации.

Абсолютное кручение есть скорость вращения бинормали.
Теорема. *Пусть дана кривая*

$$(\Gamma): \quad r = r(t), \quad x''', y''', z''' \in C(\alpha, \beta)\ .$$

Тогда абсолютное кручение

$$|k_2| = \frac{|(r', r'', r''')|}{k_1^2}\ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta(s)$ и $\beta(s+\Delta s)$ – единичные векторы бинормали в соответствующих точках кривой. Обозначим $\Delta\vartheta$ угол между этими векторами. Следовательно

$$\frac{|\beta(s+\Delta s)-\beta(s)|}{|\Delta s|} = \frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

Отсюда следует, что $|k_2| = |\beta'|$. Отметим, что $\beta' \perp \beta$, $\beta = \tau \times \nu$, $\tau' = k_1 \nu$, тогда $\beta' = \tau' \times \nu + \tau \times \nu' = \tau \times \nu'$. Итак, $\beta' \perp \tau$, $\beta' \perp \beta$, значит $\beta' \parallel \nu$ и следовательно $|k_2| = |\beta' \nu|$. Заметим, что ось вращения β – вектор, перпендикулярный и β и ν, т. е. параллельный τ и, следовательно, соприкасающаяся плоскость кривой вращается вокруг касательной.
Подставляя в равенство $|k_2| = |\beta' \nu|$ $\nu = \frac{r''}{k_1}$ и $\beta' = \frac{r' \times r''}{k_1}$, получим $|k_2| = |\beta' \nu| = \frac{\left|\left(r', r'', r'''\right)\right|}{k_1^2}$. ▶

Итак, $\beta' \parallel \nu$.

Определим *кручение кривой* равенством $k_2 = \pm |k_2|$. Знак k_2 выбирается так, чтобы равенство $\beta' = k_2 \nu$ выполнялось. Тогда $k_2 = -\frac{\left(r', r'', r'''\right)}{k_1^2}$.

$$\beta' = k_2 \nu$$

– это *вторая формула Френе.*
Кручение определено там, где кривизна отлична от нуля (где соприкасающаяся плоскость определена однозначно).

$$\nu' = -k_1 \tau - k_2 \beta.$$

Это *третья формула Френе.* Докажем ее.

$$\nu' = \beta \times \tau + \beta \times \tau' = k_2 \nu \times \tau + \beta \times \nu = -k_2 \beta - k_1 \tau . \quad ▶$$

Три прямые, исходящие из точки кривой и имеющие направление векторов τ, ν, β являются ребрами трехгранного угла, который называется *естественным трехгранником* – *основным триэдром.* Можем так представить уравнения кривой, чтобы были видны компоненты по осям основного триэдра τ, ν, β. [3)]

[3)] "Понимать, формулировать, доказывать."(С. Б. С., напутствие к экзамену.)

Часть III

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 8

Неопределенный интеграл

2 семестр
Лекция 1
(07.02.68)

Рекомендованная литература: [10], [11], [9].

§ 35. Первообразная

35.1. Задача нахождения функции по ее производной

В дифференциальном исчислении мы занимались тем, что по функции $f(x)$ находили или ее производную, или ее дифференциал. В интегральном исчислении рассматривается обратная задача: по производной функции или ее дифференциалу надо найти саму функцию:

$$f'(x) \to f(x)\,,$$

$$df \to f\,.$$

Задача естествознания – открывать законы природы, выразить количественные соотношения между дифференциалами различных функций. Задача интегрального исчисления – зная соотношения между дифференциалами, найти соответствие между самими функциями.

Пример. Пусть материальная точка M движется по прямой. Введем на прямой систему координат с началом в точке O. Пусть на материальную точку M, находящуюся в момент времени t на оси в точке с координатой $x(t)$, действует сила $f(t)$. Найти закон движения точки. Это задача интегрального исчисления. Она приводит к решению дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = kf(t)\,,$$

где k – некоторая константа.

Пример. Геометрическая задача о квадратурах. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Надо найти площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 8.1).

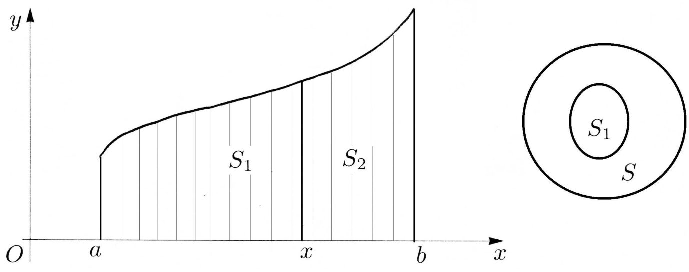

Рис. 8.1. Геометрическая задача о квадратурах. Свойства площади.

Здесь мы встречаемся с понятием "площадь которое нами еще не определено. Дадим конструктивное дескриптивное (описательное) определение площади: *площадью* пл.S плоской фигуры S называется величина, обладающая следующими свойствами:

1. *нормированность*: квадрат со стороной 1 имеет площадь, равную 1;

2. *аддитивность*: если $S = S_1 \cup S_2$ и фигуры S_1 и S_2 не пересекаются, то пл.$S =$ пл.$S_1 +$ пл.S_2;

3. *монотонность*: если $S \supset S_1$, то пл.$S \geq$ пл.S_1 (рис. 8.1).

Такое определение не дает ответа на вопрос, какая фигура имеет площадь, но если площадь фигуры существует, то площадь фигуры обладает этими свойствами.

Теперь мы рассмотрим, как понятие площади связано с задачей интегрального исчисления.

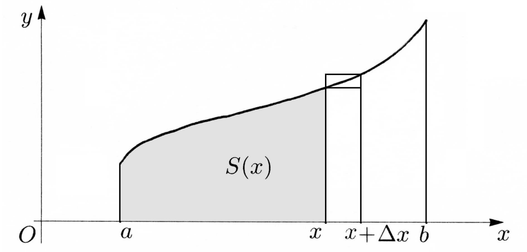

Рис. 8.2. Задача нахождения функции по ее производной.

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная неотрицательная функция. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, осью Ox, и прямыми $x = a$ и $x = b$. Пусть $x \in [a, b]$. Площадь криволинейной трапеции, которая задается графиком функции на отрезке $[a, x]$, обозначим $S(x)$ (рис. 8.2). Придадим переменной x приращение Δx. Тогда по свойству аддитивности $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$. Обозначим

$$M = \max_{[x,\, x+\Delta\, x]} f(x), \quad m = \min_{[x,\, x+\Delta\, x]} f(x)\,.$$

Из монотонности площади следует, что

$$\Delta x \cdot m \leq \Delta S(x) \leq \Delta x \cdot M\,,$$

откуда

$$m \leq \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \leq M\,.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $M \to f(x)$ и $m \to f(x)$ в силу непрерывности функции $f(x)$. Отсюда, производная площади $S(x)$ по x равна $f(x)$:

$$\frac{dS(x)}{dx} = f(x)\,.$$

Таким образом, мы пришли к задаче о нахождении функции по ее производной.

35.2. Понятие первообразной

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы функция $f(x)$ и непрерывная функция $F(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* (*примитивной*) *функцией* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для всех x из этого отрезка, за исключением, быть может, конечного множества точек K_n, выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)\,.$$

Таким образом, функция $F(x)$, не являющаяся непрерывной на отрезке $[a, b]$, не может быть первообразной ни для какой функции $f(x)$ (пример на рис. 8.3).

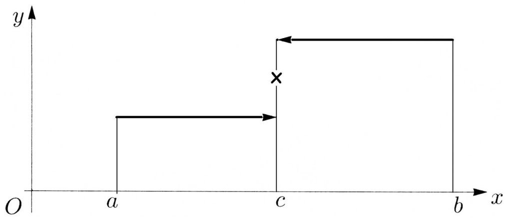

Рис. 8.3. Разрывная функция не может быть первообразной ни для какой функции.

Пример. Функция $F(x) = |x|$ является первообразной функцией для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$. Здесь $K_1 = \{0\}$.

Теперь встает естественный вопрос о существовании и единственности первообразной функции. Полный ответ на вопрос о существовании первообразной выходит за рамки этого курса и впоследствии будут даны лишь некоторые достаточные условия существования первообразной. Сейчас же займемся вопросом единственности.

Легко видеть, что если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, имеет первообразную, то она имеет их бесконечно много. В самом деле, если $F_0(x)$ – первообразная функция для функции

$f(x)$, то и $F(x) = F_0(x) + C$, где C – произвольная константа, также является первообразной, так как $F(x)$ непрерывна и

$$F'(x) = F_0'(x) + C' = F_0'(x) = f(x)\,.$$

Теперь мы видим, что площадь неоднозначно определяется условием $\frac{dS(x)}{dx} = f(x)$, так как если $S_0(x)$ удовлетворяет этому условию, то ему удовлетворяет и $S(x) = S_0(x) + C$. Требуются некоторые дополнительные условия, для того чтобы однозначным образом выбрать среди всех первообразных одну. Такие условия называются *начальными условиями.* В данном случае начальным условием будет $S(a) = 0$. Теперь, если мы имеем какую-то первообразную $S_0(x)$, то $S(x) = S_0(x) + C$ также удовлетворяет условию $\frac{dS(x)}{dx} = f(x)$, но из начального условия $S(a) = S_0(a) + C = 0$ следует $C = -S_0(a)$, а значит, функция $S(x) = S_0(x) - S_0(a)$ является первообразной и удовлетворяет начальному условию.

Теорема об общем виде первообразной. *Пусть* $F_0(x)$ *есть первообразная функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$. *Тогда всякая первообразная функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ *имеет вид*

$$F(x) = F_0(x) + C\,.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = F(x) - F_0(x)$. Эта функция непрерывна на $[a, b]$, как разность двух непрерывных функций, и дифференцируема всюду, где дифференцируемы одновременно $F(x)$ и $F_0(x)$, т.е. $\varphi(x)$ дифференцируема всюду на $[a, b]$ за исключением, быть может, конечного множества *K*. Таким образом, $\varphi'(x) = f(x) - f(x) = 0$ для $\forall x \in [a, b] \setminus K$. По формуле Лагранжа (смотри следствие из теоремы Лагранжа, п. 5.7) получаем $\varphi(x) = C$ для всех $x \in [a, b]$, т.е. $F(x) = F_0(x) + C$. ▶

Мы видим, что для $f(x)$ существует целое множество первообразных. Геометрически это можно показать следующей иллюстрацией (см. рис. 8.4). Кривые, изображающие первообразные, заполняют всю полосу между прямыми $x = a$ и $x = b$.

Задача отыскания всех первообразных для заданной функции называется задачей *неопределенного интегрирования.*

Определение. Совокупность всех первообразных $\{F(x)\}$ для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, называется *неопределен-*

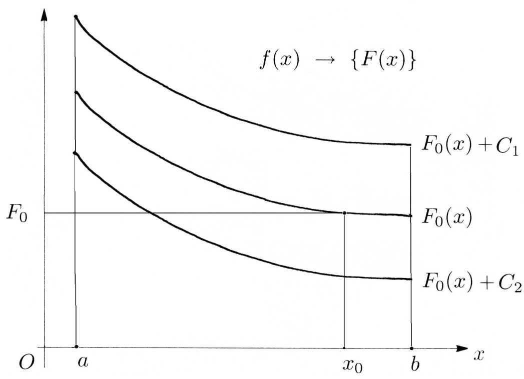

Рис. 8.4. Семейство первообразных.

ным интегралом функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = \{F(x)\} \ ;$$

$f(x)$ называют *подынтегральной функцией*; $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением.*

2 семестр
Лекция 2
(09.02.68)

Замечания. 1. Следует помнить, что каждый интеграл – это не функция, а множество всех первообразных. Поэтому такое, например, равенство

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int h(x)dx = H(x) + C$$

нельзя рассматривать в смысле равенства функций. Такое равенство означает, что

$$\{F_f(x)\} + \{F_g(x)\} = \{F_h(x)\} \,,$$

т. е. множество всех первообразных, получающихся в левой части равенства, совпадает с множеством первообразных, получающихся в правой части равенства. Это равенство можно было бы записать и так:

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int h(x)dx + C\,.$$

Другими словами, в равенствах, где в обеих частях содержится знак интеграла, можно опускать константы. При переходе от таких равенств к равенствам, не содержащим знака интеграла, обязательно следует писать константы.

2. Надо проверять, на каких отрезках $F(x)$ будет первообразной; первообразная должна быть непрерывной.

Пример. Рассмотрим равенство

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\,.$$

Оно означает, что $\ln|x|$ – одна из первообразных для функции $\frac{1}{x}$. Но первообразная непрерывна на том отрезке, на котором она задана. Функция $\ln|x|$ определена для всех $x \neq 0$. Как бы мы в нуле эту функцию ни доопределили, она все равно будет разрывной в нуле. Значит, если отрезок $[a, b]$, на котором определена функция, содержит точку 0, то на этом отрезке эта функция не является первообразной. Таким образом, формула $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ определяет первообразную функции $\frac{1}{x}$ на любом отрезке, не содержащем точку 0, и ее надо понимать, как условную запись таких двух формул:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C\,, \quad \text{если} \quad x > 0\,,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C\,, \quad \text{если} \quad x < 0\,.$$

3. Ответ на вопрос, чему равен тот или иной интеграл, может иметь разные формы. Ответы

$$\int f(x)dx = F_1(x) + C_1 \quad \text{и} \quad \int f(x)dx = F_2(x) + C_2$$

эквивалентны, если $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Пример. Ответы $\int \frac{-dx}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + C$ и $\int \frac{-dx}{(x-1)^2} = \frac{x}{x-1} + C$ эквивалентны, так как $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 1$.

§ 36. Основные свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. Связь интегрирования и дифференцирования. Пусть $\int f(x)dx$ существует. Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекает, что

$$d\int f(x)dx = f(x)dx\,.$$

Так как $f(x)$ есть первообразная функция для $f'(x)$, то

$$\int f'(x)dx = f(x) + C\,,$$

что можно переписать как

$$\int df(x) = f(x) + C\,.$$

Свойство 2. Простейшие правила интегрирования. *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *для функций* f *и* g *существуют первообразные* $\int f(x)dx$ *и* $\int g(x)dx$. *Тогда для функций* $a\,f(x)$ *и* $f(x)+g(x)$ *также существуют первообразные на отрезке* $[a,b]$ *и имеют место равенства*

1) $\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx$ ($a \neq 0$),

2) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, продифференцировав правую часть равенства 1), получим

$$d\left[a\int f(x)dx\right] = a\left[d\int f(x)dx\right] = a\,f(x)dx\,,$$

значит формула 1) верна.

Аналогично, продифференцировав правую часть равенства 2), получим

$$d\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right] = d\int f(x)dx + d\int g(x)dx = \\ = f(x)dx + g(x)dx = [f(x)+g(x)]\,dx\,.$$

Из 1) и 2) следует, что при α и β, не равных нулю одновременно, имеет место равенство

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\,.$$

Это равенство следует читать справа налево, а пользуются им обычно слева направо. При этом надо проверять, что для $f(x)$ и $g(x)$ существуют первообразные.

Свойство 3. Замена переменной (интегрирование путем подстановки). *Пусть имеем функцию* $F(t)$, *определенную на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и имеющую производную* $F'(t) = f(t)$, *непрерывную на этом отрезке, т.е. пусть* $\int f(t)dt = F(t) + C$. *Пусть имеется функция* $t = \omega(x)$, *определенная на отрезке* $[a, b]$, *имеющая на этом отрезке непрерывную производную* $\omega'(x)$ *и такая, что* t *принадлежит отрезку* $[\alpha, \beta]$ *для всех* x *из отрезка* $[a, b]$. *Тогда*

$$\int f(\omega(x))\omega'(x)dx = F(\omega(x)) + C\,.$$

В самом деле, функция $F(\omega(x))$ определена на всем отрезке $[a, b]$, по теореме о непрерывности сложной функции она непрерывна на этом отрезке; $F(\omega(x))$ дифференцируема на $[a, b]$ по теореме о дифференцируемости сложной функции. Продифференцировав правую часть равенства, получим

$$\left(F(\omega(x))\right)' = F'(\omega(x)) \cdot \omega'(x) = f(\omega(x)) \cdot \omega'(x)\,.$$

Замечание. Здесь $F(t)$ – точная первообразная, $F'(t) = f(t)$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$ без исключительного множества. Свойство основано на инвариантности дифференциала первого порядка.

Свойство 4. Интегрирование по частям. *Пусть даны функции* $u(x)$ *и* $v(x)$, *определенные на отрезке* $[a, b]$ *и имеющие на нем непрерывные производные* $u'(x)$ *и* $v'(x)$. *Тогда*

$$\int udv = uv - \int vdu\,.$$

Действительно, из соотношения $d(uv) = du \cdot v - u \cdot dv$ следует

$$u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du\,.$$

Проинтегрировав это равенство, получим требуемую формулу. Эту формулу можно переписать в виде

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx\,.$$

Замечание. Интегрирование выводит из класса элементарных функций. Неопределенный интеграл – аппарат для изучения нового класса функций, уже неэлементарных. Например, эллиптический интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}}\,,$$

где $P_4(x)$ – многочлен четвертой степени, в общем случае не выражается через элементарные функции [1].

Теорема. *Если* $R(x)$ *– рациональная функция, то* $\int R(x)dx$ *есть элементарная функция.*

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Пусть $R = \frac{P}{Q}$ – рациональная дробь, где P и Q – многочлены. Тогда R представима суммой $R = S + \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} + \ldots + \frac{P_k}{Q_k}$ многочлена S и простейших рациональных дробей (обычно для этого надо знать корни знаменателя). Таким образом, интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию четырех типов простейших рациональных дробей вида [2]

$$\frac{A}{x-a}\,;\quad \frac{D}{(x-a)^k}\,,\quad k \geq 2\,;\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,;\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},\quad m \geq 2\,,$$

что приводит к выражению интеграла через элементарные функции.

Согласно определению элементарной функции (см. п. 3.9, с. 28) получаем

Следствие. $\int f(x)dx$ *– множество элементарных функций, если путем замены переменных* $x = \omega\,(u)$ *, где* $x = \omega\,(u)$ *– простейшая элементарная функция, его можно свести к интегралу от рациональной функции.*

---

[1] Об интегралах, не выражающихся через элементарные функции, смотри, например, [5] т.1 раздел 36.6. (Ред.)

[2] См., например, [2]. (Ред.)

Глава 9

Определенный интеграл

§ 37. Определенный интеграл Римана

В предыдущей главе вопрос о существовании первообразной остался открытым. Определенный интеграл позволит ответить на этот вопрос.

Вспомним определение предела многозначной функции (см. § 9, с. 42).

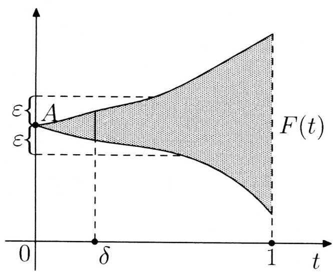

Рис. 9.1. Предел многозначной функции.

Определение. Пусть имеется многозначная функция $F(t)$, заданная на полуинтервале $(0,1]$: каждому числу t из этого полуинтервала ставится в соответствие непустое множество значений $\{y\} = F(t)$. Говорят, что число A – *предел многозначной функции*

$F(t)$ *при* $t \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall t\,,\; 0 < t < \delta\,,\; \forall y \in F(t)$ $|A - y| < \varepsilon$.

Геометрическую интерпретацию, поясняющую определение, смотри на рис. 9.1.

Определение интеграла Римана. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Рассмотрим систему точек (рис. 9.2)

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_n = b\,.$$

Будем говорить, что такая система определяет разбиение T отрезка $[a, b]$. Определим диаметр разбиения – это число

$$t = d(T) = \max_{k=1,\dots,n} \Delta x_k > 0\,,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. В каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, где k принимает значения $1, 2, ..., n$, зафиксируем точку ξ_k. Мы получим n точек $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Вектор $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ обозначим через ξ. При заданном T и векторе ξ строим *интегральную сумму* Римана

$$S(T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\,.$$

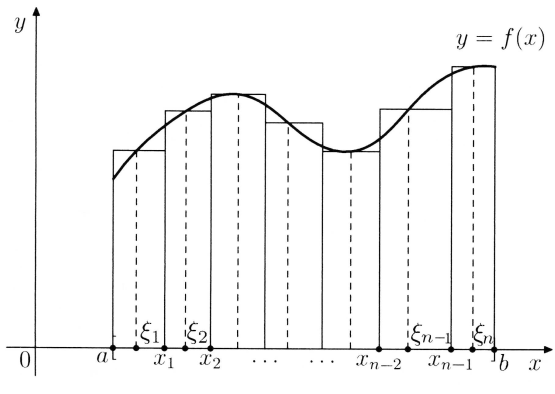

Рис. 9.2. Интегральная сумма Римана.

Каждое разбиение T имеет свой диаметр $d(T) = t > 0$. Поставим каждому t в соответствие множество всех таких интегральных сумм $S(t) = S(T, \xi)$ при различных разбиениях T, что $d(T) = t$, при различных векторах ξ. *Интегралом Римана* называется число I, являющееся пределом интегральных сумм

$$I = \lim_{t \to 0} S(t),$$

если этот предел существует. Обозначается интеграл Римана

$$I = \int_a^b f(x)dx = (R) \int_a^b f(x)dx.$$

2 семестр
Лекция 3
(21.02.68)

Если для функции $f(x)$ существует интеграл Римана на отрезке $[a, b]$, то говорят, что $f(x)$ *интегрируема* по Риману на отрезке $[a, b]$. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то мы будем говорить, что $f \in R\,[a, b]$, где $R\,[a, b]$ – множество функций, интегрируемых по Риману.

Интеграл – один из простейших функционалов, определенных на классе $R\,[a, b]$.

Рассмотрим, как понятие интеграла связано с характеристикой точечного множества на отрезке.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано точечное множество $E \subset \mathbb{R}$ и χ – характеристическая функция множества E, т.е. функция

$$\chi(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in E, \\ 0, & \text{если} \quad x \in [a, b] \setminus E. \end{cases}$$

Если $\chi(x) \in R\,[a, b]$, то будем говорить, что множество E *имеет длину*, равную $\int_a^b \chi(x)dx = I(\chi) = F(E)$. Если $\chi(x) \notin R\,[a, b]$, то будем говорить, что E не имеет длины.

Замечание. Геометрически интеграл Римана от неотрицательной функции на отрезке $[a, b]$ – это площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции, отрезком $[a, b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Определение интеграла можно дать и на "языке $\varepsilon - \delta$".

Определение. Число I называется интегралом $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений T отрезка $[a,b]$ с диаметром $d(T)$, меньшим, чем δ, и для всех промежуточных точек ξ выполняется неравенство $|S(T,\xi) - I| < \varepsilon$.
Числа a и b называются *нижним и верхним пределами* интегрирования соответственно.

Отметим, что $I = \int\limits_a^b f(x)dx = F(f,a,b)$ не зависит от x, x – связанная переменная, в отличие от неопределенного интеграла $\int f(x)dx = F(x) + C$, зависящего от x.

Выясним, какие функции интегрируемы по Риману, т. е. из каких функций состоит класс $R\,[a,b]$.

§ 38. Функции, интегрируемые по Риману

Теорема (необходимое условие интегрируемости функции). *Для того, чтобы функция была интегрируема по Риману на отрезке* $[a,b]$ *необходимо, чтобы она была ограничена на этом отрезке.*
Доказательство от противного. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и не является на нем ограниченной. Это значит, что для любого разбиения T найдется такой частичный отрезок разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, что функция останется неограниченной на этом отрезке, т. е. $\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} |f(x)| = \infty$.
Возьмем произвольное разбиение T отрезка $[a,b]$. Найдем такой отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ этого разбиения, на котором функция неограничена. Построим вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Точки

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, ..., \xi_n$$

зададим произвольно ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$). Тогда, если зафиксировать T и точки ξ_i ($i \neq k$), интегральная сумма $S(T,\xi)$ для функции $f(x)$ останется зависимой только от ξ_k. Запишем интегральную сумму в виде

$$S(\xi_k) = \sum_{i=1,\ i\neq k,}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_k)\Delta x_k \, .$$

Первое слагаемое правой части зафиксировано; Δx_k также зафиксировано вместе с разбиением T. Точка ξ_k принадлежит отрезку $[x_{k-1}, x_k]$, на котором функция неограничена, значит, $f(\xi_k)$ тоже неограниченная функция. Тогда и $S(\xi_k)$ есть неограниченная функция, т. е.

$$\sup_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]} |S(\xi_k)| = \infty \, .$$

Но тогда и $\sup\limits_{\xi} |S(T,\xi)| = \infty$ для любого разбиения T. Отсюда следует, что не существует предела интегральных сумм $S(T,\xi)$, что противоречит тому, что функция интегрируема по условию теоремы. ▶

Рассмотрим критерии и достаточные условия интегрируемости функции, т. е. существования предела $I = \lim\limits_{t\to 0} S(T,\xi)$. Согласно критерию Коши существование этого предела означает, что интегральные суммы $S(T,\xi)$ и $S(T',\xi')$ должны быть близки друг другу, если диаметры разбиений $d(T)$ и $d(T')$ достаточно малы.

Для дальнейшего нам понадобится исследовать при фиксированном разбиении T величину

$$\sup_{\xi,\xi'} |S(T,\xi) - S(T,\xi')| = \sup_{\xi} S(T,\xi) - \inf_{\xi'} S(T,\xi') \, .$$

Величина $\sup\limits_{\xi} S(T,\xi)$ называется *верхней суммой Дарбу* и обозначается $\overline{S}(T)$. Величина $\inf\limits_{\xi} S(T,\xi)$ называется *нижней суммой Дарбу* и обозначается $\underline{S}(T)$.

Найдем более простые выражения для верхней и нижней сумм Дарбу. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда найдется M такое, что для всех $x \in [a,b]$ справедливо $|f(x)| \leq M$. Зафиксируем разбиение T и отрезок $[x_{k-1}, x_k]$. Пусть

$$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \, , \quad m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \, .$$

Теорема (формулы Дарбу). *Пусть функция* $f(x)$ *ограничена на отрезке* $[a,b]$, T *– разбиение отрезка* $[a,b]$,

$$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x); \quad m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Тогда

$$\overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \quad \underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$S(T,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k .$$

Эта оценка верна для любого выбора точек ξ_k. Значит

$$\sup_{\xi} S(T,\xi) \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k ,$$

откуда

$$\overline{S}(T) \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k .$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Подберем точки $\overline{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1,2,...,n$) так, что $f(\overline{\xi}_k) > M_k - \varepsilon$. Тогда для этого набора $\overline{\xi}$

$$S(T,\overline{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{\xi}_k)\Delta x_k > \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \varepsilon(b-a),$$

так как сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a$ равна длине отрезка $[a,b]$. Следовательно,

$$\overline{S}(T) = \sup_{\xi} S(T,\xi) \ge \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

и значит, $\overline{S}(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$.

Аналогично доказывается формула $\underline{S}(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$. ►

Замечание. Обозначим $M_k - m_k = \omega_k = \omega_k(f, x_{k-1}, x_k)$ – колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Тогда

$$\sup_{\xi,\xi'} |S(T,\xi) - S(T,\xi')| = \sup_{\xi} S(T,\xi) - \inf_{\xi'} S(T,\xi') =$$
$$= \overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \,.$$

Определение. Пусть есть два разбиения T и T_1 отрезка $[a,b]$. Говорят, что T_1 – *продолжение разбиения* T (будем записывать $T_1 \prec T$), если всякая точка деления, входящая в T, входит и в T_1.

Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим простейшие свойства сумм Дарбу.

Свойство 1. *Если* $T_1 \prec T$, *то* $\overline{S}(T_1) \le \overline{S}(T)$ *и* $\underline{S}(T_1) \ge \underline{S}(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно ограничиться присоединением к уже имеющимся точкам разбиения еще одной точки x' . Пусть эта точка попадет между точками x_{k-1} и x_k , так что $x_{k-1} < x' < x_k$. В сумме $\overline{S}(T)$ этому отрезку отвечало слагаемое $M_k \Delta x_k$, а в сумме $\overline{S}(T_1)$ – сумма двух слагаемых $M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k - x')$, где M_k' и M_k'' – верхние грани функции $f(x)$ на отрезках $[x_{k-1}, x']$ и $[x', x_k]$ соответственно. Так как эти отрезки являются частями отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, то $M_k' \le M_k$, $M_k'' \le M_k$ и значит, имеют место $M_k'(x' - x_{k-1}) \le M_k(x' - x_{k-1})$ и $M_k''(x_k - x') \le M_k(x_k - x')$. Складывая эти неравенства почленно, получим

$$M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k - x') \le M_k \Delta x_k \,.$$

Отсюда и следует, что $\overline{S}(T_1) \le \overline{S}(T)$.
Аналогично для нижней суммы $\underline{S}(T_1) \ge \underline{S}(T)$. ►

Свойство 2. *Для любых двух разбиений* T *и* T' *нижняя интегральная сумма не превосходит верхней интегральной суммы*: $\underline{S}(T) \le \overline{S}(T')$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства построим разбиение $T_1 = \{T, T'\}$, которое содержит все точки разбиений T и T' . Тогда $T_1 \prec T$, $T_1 \prec T'$, откуда $\overline{S}(T_1) \le \overline{S}(T')$ и $\underline{S}(T) \le \underline{S}(T_1)$. Но по определению $\underline{S}(T_1) \le \overline{S}(T_1)$, а отсюда $\underline{S}(T) \le \overline{S}(T')$. ►

Из этого свойства вытекает, что по всем разбиениям T

$$\sup_T \underline{S}(T) \le \inf_T \overline{S}(T) \,.$$

Обозначим $\Omega(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$.

Теорема (предельный критерий интегрируемости функций). *Для того, чтобы на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\lim\limits_{d(T)\to 0} \Omega(T) = 0$.

2 семестр
Лекция 4
(23.02.68)

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть функция $f \in R[a,b]$, т. е. существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{t\to 0} S(T,\xi) = I$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу того, что $\lim\limits_{t\to 0} S(T,\xi) = I$, $\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, T$, $d(T) < \delta$, $\forall\, \xi \quad |S(T,\xi) - I| < \varepsilon$. Отсюда, при тех же условиях, $S(T,\xi) < I + \varepsilon$. Значит, $\forall\, T$, $d(T) < \delta$, $\overline{S}(T) \le I + \varepsilon$.
Аналогично доказывается, что $\underline{S}(T) \ge I - \varepsilon$.

Таким образом, $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, T$, $d(T) < \delta$, $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \le 2\varepsilon$ и $0 \le \Omega(t) \le 2\varepsilon$. Это значит, что $\lim\limits_{t\to 0} \Omega(T) = 0$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть

$$\lim_{t\to 0} \Omega(T) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{t\to 0} \left\{ \overline{S}(T) - \underline{S}(T) \right\} = 0 .$$

Надо доказать, что существует предел интегральных сумм Римана. По свойствам сумм Дарбу $\underline{S}(T) \le \overline{S}(T')$ для любых разбиений T и T' . По теореме отделимости $\exists\, I \;\; \forall\, T$ и $\forall\, T' \;\; \underline{S}(T) \le I \le \overline{S}(T')$. Докажем, что $I = \lim\limits_{t\to 0} S(T,\xi)$. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу того, что $\lim\limits_{t\to 0} \Omega(T) = 0$ для этого $\varepsilon \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, T$, $d(T) < \delta$, $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$. Имеем $\underline{S}(T) \le I \le \overline{S}(T)$ и по определению интегральной суммы

$$\underline{S}(T) \le S(T,\xi) \le \overline{S}(T) .$$

Отсюда получаем, что $S(T,\xi) \le \overline{S}(T) \le \underline{S}(T) + \varepsilon \le I + \varepsilon$.
Аналогично $S(T,\xi) \ge I - \varepsilon$.
Это значит, что $|S(T,\xi) - I| \le \varepsilon$ для любого выбора ξ , если только $d(T) < \delta$. Следовательно, существует $\lim\limits_{t\to 0} S(T,\xi) = I$. ►

Теорема (критерий Дарбу). *Для того, чтобы функция была интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\inf\limits_{T}\Omega\,(T)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь очевидна, так как данный критерий содержит более слабое требование, чем предельный критерий интегрируемости.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть дано, что $\inf\limits_{T}\Omega\,(T)=0$, тогда $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,T\quad \Omega\,(T)<\varepsilon$. Докажем, что $\lim\limits_{t\to 0}\Omega\,(T)=0$.

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Пусть T_0 – такое фиксированное разбиение отрезка $[a,b]$, что $\Omega\,(T_0)<\varepsilon$. Докажем, что $\exists\,\delta>0$ $\forall\,T$, $d(T)<\delta$, $\Omega\,(T)<2\varepsilon$.

По определению $\Omega\,(T_0)=\sum\limits_{k=1}^{n_0}\omega_k^0\Delta x_k^0$. Таким образом, у нас зафиксированы число ε и разбиение T_0, а вместе с T_0 число n_0 и точки x_k^0. Отметим, что если $T'\prec T$, то $\Omega\,(T')\le\Omega\,(T)$. Пусть $\delta_0=\min\limits_{k}\Delta x_k^0>0$ – длина наименьшего из отрезков разбиения T_0. Пусть далее $\delta<\delta_0$. Рассмотрим произвольное разбиение T, для которого $d(T)<\delta$. В каждом отрезке этого разбиения T окажется не более одной точки разбиения T_0.

Построим разбиение T', состоящее из всех точек разбиений T_0 и T. Тогда $T'\prec T_0$, $T'\prec T$ и $\Omega\,(T')\le\Omega\,(T_0)<\varepsilon$.

Рассмотрим те отрезки разбиения T, которые содержат точки T_0. Их всего n_0+1. Длина каждого такого отрезка не более $d(T)=t$. Значит, сумма длин всех этих отрезков $\sigma\le t(n_0+1)$.

Разобьем $\Omega(T)$ на два слагаемых:

$$\Omega\,(T)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=\Sigma_1+\Sigma_2,$$

где сумма Σ_2 распространена на выделенные отрезки, а сумма Σ_1 – на оставшиеся отрезки.

Σ_1 – часть суммы $\Omega(T')$, т.е. все члены суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$, входящие в Σ_1, входят и в $\Omega(T')$, откуда $\Sigma_1\le\Omega(T')<\varepsilon$.

Σ_2 содержит отрезки общей длины σ.

Если ω_k – верхняя грань колебания функции на маленьком отрезке длины Δx_k, то $\omega_k\le\omega_f$, где ω_f – верхняя грань колебания функции на всем отрезке $[a,b]$. Значит,

$$\sum\nolimits_2 \omega_k \Delta x_k \le \omega_f \sum\nolimits_2 \Delta x_k \le t\omega_f\,(n_0+1)\,.$$

Таким образом, $\Omega\,(T) \le \varepsilon + t\omega_f\,(n_0+1)$. Здесь ε , ω_f , n_0+1 – константы для функции $f(x)$. Значит, если $\delta_1 = \min\left\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{\omega_f\,(n_0+1)}\right\}$, то $\Omega\,(T) < 2\varepsilon$ для всех $t < \delta_1$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to 0} \Omega\,(T) = 0$. ►

Теорема (критерий Римана). *Для того, чтобы ограниченная функция* $f(x)$ *была интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *и для любого* $\eta > 0$ *существовало такое разбиение* T *отрезка* $[a,b]$, *что*

$$\sum_{k,\omega_k \ge \varepsilon} \Delta x_k < \eta\,,$$

где $\sum\limits_{k,\omega_k \ge \varepsilon} \Delta x_k$ *– сумма* Δx_k *по всем таким* k , *для которых* $\omega_k \ge \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим противное, т.е. пусть $\exists \varepsilon_0 > 0\ \ \exists \eta_0 > 0\ \ \forall T\ \ \sum\limits_{k,\omega_k \ge \varepsilon} \Delta x_k \ge \eta_0$. Тогда для любого разбиения T

$$\Omega\,(T) = \sum_{k,\omega_k < \varepsilon_0} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k,\ \omega_k \ge \varepsilon_0} \omega_k \Delta x_k \ge$$
$$\ge \sum_{k,\ \omega_k \ge \varepsilon_0} \omega_k \Delta x_k \ge \varepsilon_0 \sum_{k,\ \omega_k \ge \varepsilon_0} \Delta x_k \ge \varepsilon_0 \eta_0 > 0\,.$$

Отсюда следует, что $\inf\limits_T \Omega\,(T) > 0$, и по критерию Дарбу функция $f(x)$ не является интегрируемой, что противоречит условию. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для функции $\omega = \omega\,[a,b] \ne 0$ (иначе функция постоянная и значит, интегрируемая). Зададим произвольно $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$. Тогда для $\eta = \frac{\varepsilon}{\omega}$ по условию теоремы найдется такое разбиение T, что $\sum\limits_{k,\,\omega_k \geq \frac{\varepsilon}{b-a}} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{\omega}$ и значит,

$$\Omega(T) = \sum_{k,\,\omega_k < \frac{\varepsilon}{b-a}} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k,\,\omega_k \geq \frac{\varepsilon}{b-a}} \omega_k \Delta x_k \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k,\,\omega_k < \frac{\varepsilon}{b-a}} \Delta x_k + \omega \sum_{k,\,\omega_k \geq \frac{\varepsilon}{b-a}} \Delta x_k \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) + \omega \frac{\varepsilon}{\omega} = 2\varepsilon\,.$$

Итак, $\Omega\,(T) \leq 2\varepsilon$, т. е. неотрицательную величину $\Omega\,(T)$ можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа 2ε. Тогда $\inf\limits_{T} \Omega\,(T) = 0$ и по критерию Дарбу функция интегрируема на отрезке $[a, b]$. ►

Определение. Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и пусть $x_0 \in (a, b)$. Рассмотрим отрезок $[\alpha, \beta]$, содержащий точку x_0 строго внутри себя. Пусть $\omega\,[\alpha, \beta]$ – колебание функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$

$$\omega\,[\alpha, \beta] = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) - \inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) \geq 0\,.$$

Очевидно, что если $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$, то $\omega\,[\alpha', \beta'] \leq \omega\,[\alpha, \beta]$. При стягивании точек α_n и β_n к точке x_0 получим монотонно убывающую последовательность колебаний $\{\omega\,[\alpha_n, \beta_n]\}$, которая имеет предел при $\alpha_n \to x_0$, $\beta_n \to x_0$ ($n \to \infty$). Этот предел называется ***колебанием функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0 и обозначается $\omega_f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \omega\,[\alpha_n, \beta_n]$. Колебания функции в точках a и b определяются как $\omega_f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \omega\,[a, \beta_n]$, где $\beta_n \to x_0$ ($n \to \infty$), и $\omega_f(b) = \lim\limits_{n\to\infty} \omega\,[\alpha_n, b]$, где $\alpha_n \to x_0$ ($n \to \infty$).

Заметим, что

1) $\omega_f(x_0)$ не зависит от выбора последовательности $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$;
2) $\omega_f(x_0) = 0 \;\Leftrightarrow$ функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0;
3) $\omega_f(x_0) > 0$ в точке разрыва.

2 семестр
Лекция 5
(28.02.68)

Теорема Кантора (обобщенный вариант). *Пусть функция* $f(x)$ *определена и ограничена на отрезке* $[a,b]$ *и пусть существует число* $\omega \geq 0$ *такое, что* $\omega_f(x) \leq \omega$ *для всех* $x \in [a,b]$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое разбиение* T отрезка $[a,b]$ *на частичные отрезки* $\sigma_k = [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1,2,...n$), *что* $\omega[\sigma_k] < \omega+\varepsilon$ *для любого* k.

Замечание. Для непрерывной функции $\omega_f(x) = 0$ *для всех* $x \in [a,b]$, и из этой теоремы следует теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Обозначим $\omega_k = \omega[x_{k-1}, x_k]$. Пусть заключение теоремы не выполняется, т. е. пусть $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall T$ $\exists\, k_0 \;\; \omega_{k_0} \geq \omega + \varepsilon_0$. Зафиксируем это ε_0.

Зададим стремящуюся к нулю произвольную последовательность положительных чисел $\{\delta_m\}$. Тогда для T_m, $d(T_m) < \delta_m$, $\exists\, k_m \;\; \omega_{k_m} \geq \omega + \varepsilon_0$, т. е. колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k_m-1}, x_{k_m}]$ не меньше $\omega+\varepsilon_0$. Значит, существуют две такие точки a_m и b_m из этого отрезка, что $|f(a_m) - f(b_m)| \geq \omega + \frac{\varepsilon_0}{2}$. Расстояние между точками a_m и b_m

$$|a_m - b_m| \leq |x_{k_m} - x_{k_m-1}| \leq d(T_m) < \delta_m\,.$$

Выберем из $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ подпоследовательности $\{a'_m\}$ и $\{b'_m\}$, сходящиеся к числу $c \in [a,b]$: $a'_m \to c$, $b'_m \to c$ при $m \to \infty$. Если c – внутренняя точка отрезка $[a,b]$, то для любого отрезка $[\alpha,\beta]$, содержащего точку c строго внутри себя, мы получим, что $a'_m,\ b'_m \in [\alpha,\beta]$ для всех достаточно больших m. Значит,

$$\omega[\alpha,\beta] \geq |f(a'_m) - f(b'_m)| \geq \omega + \frac{\varepsilon_0}{2}\,.$$

Отсюда следует, что $\omega(c) \geq \omega + \frac{\varepsilon_0}{2}$, т. е. мы нашли такую точку c, что $\omega(c) > \omega$, что противоречит условию теоремы. Аналогично рассматривается случай концевых точек отрезка $[a,b]$. ►

Определение. Говорят, что *точечное множество* $E \subset [a,b]$ *имеет длину* 0 ($l(E) = 0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие множества E отрезками $\{\sigma_k\}$ ($k = 1,2,...n$), что сумма длин всех этих отрезков $\sum\limits_{k=1}^{n} l(\sigma_k) < \varepsilon$.

Заметим, что конечное множество имеет длину 0, счетное множество может иметь длину $l \neq 0$ и множество мощности континуум может иметь длину $l = 0$.

Пример. Канторово множество. Возьмем отрезок $[0,1]$, разделим его на три равные части и выбросим среднюю треть – интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ длины $\frac{1}{3}$. Останется множество A_1 длины $\frac{2}{3}$, состоящее из двух отрезков. На следующем шаге каждый из этих двух отрезков разделим на три равные части и выбросим центральные интервалы длины $\frac{1}{9}$ каждый. В результате мы выбросим множество суммарной длины $\frac{2}{9}$ и получим множество A_2 длины $\frac{4}{9}$, состоящее из четырех отрезков длины $\frac{1}{9}$, и так далее. На n-ом шаге получим множество A_n, состоящее из 2^n отрезков длины $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Множество $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ имеет мощность континуума и длину нуль, так как для всякого n содержится во множестве A_n длины $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. ►

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $E(\varepsilon)$ множество тех точек x из отрезка $[a,b]$, для которых $\omega(x) \geq \varepsilon$.

Теорема (критерий Дюбуа – Реймона) [1]**.** *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *была интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия*:

1) *функция* $f(x)$ *ограничена на отрезке* $[a,b]$;

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *длина* $l(E(\varepsilon)) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Воспользуемся критерием интегрируемости Римана. Если функция интегрируема на $[a,b]$, то она ограничена на $[a,b]$ и $\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall \eta > 0 \ \ \exists T$ – разбиение отрезка $[a,b]$ такое, что $\sum\limits_{k,\,\omega_k \geq \varepsilon} \Delta x_k < \eta$. Заметим, что если отрезок $[x_{k-1}, x_k] = \sigma_k$ из разбиения T содержит внутри себя точку x, для которой $\omega(x) \geq \varepsilon$, то и $\omega_k \geq \omega(x) \geq \varepsilon$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно критерию Римана, выполняется условие $\sum\limits_{k,\,\omega_k \geq \varepsilon} \Delta x_k < \eta$. Все точки x, в которых колебание не меньше ε, за исключением, быть может конечного числа точек, принадлежат тем отрезкам, на которых колебание не

[1] Известен критерий Лебега (см. [9]) интегрируемости по Риману: *для того, чтобы функция была интегрируема по Риману необходимо и достаточно, чтобы функция была ограничена и множество ее точек разрыва имело меру Лебега нуль.* (Ред.)

меньше ε. Значит $E(\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{k, \omega_k \geq \varepsilon} [x_{k-1}, x_k]$. Отрезки $[x_{k-1}, x_k] = \sigma_k$ мы можем принять за отрезки покрытия, а $\sum\limits_{k, \omega_k \geq \varepsilon} \Delta x_k < \eta$. Значит $l(E(\varepsilon)) < \eta$ для любого η и $l(E(\varepsilon)) = 0$.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и $l(E(\frac{\varepsilon}{2})) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Это означает, что для любого $\eta > 0$ существует такое покрытие множества E интервалами $\{\sigma_m\}$, что $E(\frac{\varepsilon}{2}) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \sigma_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} l(\sigma_k) < \eta$.

Рассмотрим оставшиеся непокрытыми отрезки. Во всех точках этих отрезков колебание $\omega(x) < \frac{\varepsilon}{2}$, и значит, к каждому из них применима теорема Кантора. Применим ее и получим, что каждый из этих отрезков можно разделить на такие отрезки, что колебание в каждом из них меньше $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Все отрезки дают некоторое разбиение T, для которого отрезки, на которых $\omega_k \geq \varepsilon$, принадлежат покрытию $\{\sigma_m\}$. Но $\sum\limits_{k=1}^{n} l(\sigma_k) < \eta$. Значит и $\sum\limits_{k,\, \omega_k \geq \varepsilon} \Delta x_k < \eta$. Таким образом, выполняется критерий интегрируемости Римана и, следовательно, функция интегрируема. ▶

Замечание о вычислении определенного интеграла. Если известно, что $f(x) \in R\,[a, b]$, то для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно искать $\lim\limits_{d(T)\to 0} S(T, \xi)$ по какой-нибудь подпоследовательности разбиений отрезка. Например, можно взять равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ на отрезки длины $h = \frac{b-a}{n}$ и в качестве ξ_k взять середины этих отрезков $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, где $x_k = a + kh$ ($k = 0, 1, 2, ..., n$). Тогда

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

§ 39. Классы интегрируемых функций

Следствие из критерия Дюбуа – Реймона. *Всякая ограниченная на отрезке функция, имеющая конечное число точек разрыва, интегрируема на этом отрезке.*

В самом деле, для такой функции $E(\varepsilon)$ конечно и, значит $l(E(\varepsilon)) = 0$. Тогда по критерию Дюбуа – Реймона функция интегрируема.

2 семестр
Лекция 6
(01.03.68)

В частности, мы получаем из этого следствия, что непрерывные на отрезке функции интегрируемы на нем. Таким образом, если $B\,[a,b]$ – множество функций, ограниченных на отрезке $[a,b]$, то имеют место включения

$$C\,[a,b] \subset R\,[a,b] \subset B\,[a,b]\ .$$

Замечание. Существуют ограниченные функции, не интегрируемые по Риману.
Пример. На отрезке $[0,1]$ функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке отрезка, $l(E(\varepsilon)) = 1 > 0$ для всех $0 < \varepsilon \leq 1$. Следовательно, функция Дирихле не интегрируема по Риману.

Дадим другое доказательство того, что всякая непрерывная функция интегрируема, не опираясь на критерий Дюбуа – Реймона.
Теорема об интегрируемости непрерывной функции. *Всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.*
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом отрезке и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T отрезка $[a,b]$, что $\omega_k < \varepsilon$ для всех $k = 1, 2, ...n$. Для этого разбиения

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b-a)\,.$$

Значит, $\inf\limits_{T} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0$ и функция интегрируема в силу критерия Дарбу. ►

Теорема об интегрируемости монотонной функции. *Всякая ограниченная монотонная на отрезке* $[a, b]$ *функция интегрируема на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$. Так как функция ограничена, то существует M такое, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in [a, b]$. Заметим, что в силу возрастания функции частичному отрезку $[x_{k-1}, x_k]$ произвольного разбиения T соответствует колебание ω_k, равное $f(x_k) - f(x_{k-1})$.

Зададим $\varepsilon > 0$. Построим произвольное разбиение T отрезка $[a, b]$ диаметра $d(T) < \varepsilon$, т. е. такое, что $\Delta x_k < \varepsilon$ ($k = 1, 2, ...n$). Тогда

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \omega_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k) - f(x_{k-1})\} = \\ = \varepsilon \{f(b) - f(a)\} \leq 2\varepsilon M\,.\end{aligned}$$

Отсюда $\inf\limits_{T} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0$ и по критерию Дарбу функция интегрируема. ►

Теорема об интегрируемости характеристической функции. *Для того, чтобы характеристическая функция* $\chi_E(x)$ *множества* E *была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы граница* ∂E *множества* E *имела длину* $l(\partial E)$, *равную нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все точки отрезка $[a, b]$ делятся на внутренние, граничные и внешние для множества E.

Если $x_0 \in E_i$ – внутренняя точка множества E, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0, принадлежащая E, и тогда для всех точек этой окрестности $\chi_E(x) = 1$. Значит, $\chi_E(x)$ непрерывна в точке x_0, и колебание в этой точке равно нулю.

Если x_0 – внешняя точка множества E и не является концом отрезка $[a, b]$, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0, не принадлежащая E, и тогда $\chi_E(x) = 0$ для всех точек $x \in O(x_0)$. Значит, $\chi_E(x)$ непрерывна в точке x_0, и колебание в этой точке равно нулю.

Если x_0 – граничная точка, т. е. $x_0 \in \partial E$, то в любой ее окрестности существуют как точки, в которых функция принимает значение 0, так и точки, где функция принимает значение 1. Значит, множество всех таких точек x_0 совпадает с границей множества E, причем $\omega_\chi(x_0) = 1$. Тогда $E(\varepsilon)$ отличается от ∂E не более, чем двумя точками (концами отрезка $[a,b]$) для любого ε такого, что $0<\varepsilon\leq 1$. Если же $\varepsilon>1$, то множество $E(\varepsilon)$ пусто.

Согласно критерию Дюбуа – Реймона для интегрируемости функции $\chi_E(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $l(E(\varepsilon))=0$, а это будет тогда и только тогда, когда $l(\partial E)=0$. ►

Замечание. $\int\limits_a^b \chi_E(x)dx=l(E)\geq 0$ – длина множества E . В случае $l(E)=0$ это эквивалентно определению длины 0 .

Теорема. *Множество* $R[a,b]$ *есть кольцо функций (с обычным сложением и умножением функций).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства мы должны лишь проверить, что сумма двух интегрируемых функций f и g и произведение их – снова интегрируемые функции, так как все аксиомы кольца для интегрируемых функций выполняются, потому что они выполняются для функций вообще.

1) Пусть $h=f+g$. Так как f и g – интегрируемые функции, то для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение T_1 , для которого имеет место неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n_1}\omega_k(f)\Delta x_k<\varepsilon$ и существует разбиение T_2 , для которого $\sum\limits_{k=1}^{n_2}\omega_k(g)\Delta x_k<\varepsilon$. Рассмотрим разбиение T , состоящее из всех точек разбиений T_1 и T_2 . Тогда имеем $T\prec T_1$, $T\prec T_2$ и

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n_1}\omega_k(f)\Delta x_k<\varepsilon\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n_2}\omega_k(g)\Delta x_k<\varepsilon\,.$$

Заметим, что $\omega_k(h)\leq\omega_k(f)+\omega_k(g)$. Сложив почленно написанные выше неравенства, получим $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(h)\Delta x_k\leq 2\varepsilon$, значит, функция h интегрируема по критерию Дарбу.

Попутно, переходя к пределу в соответствующем равенстве для интегральных сумм, получаем равенство

$$\int\limits_a^b\{f+g\}\,dx=\int\limits_a^b f dx+\int\limits_a^b g dx\,.$$

2) Пусть $h = fg$. Так как f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то они ограничены на этом отрезке, т. е. существует M такое, что $|f(x)| \leq M$ и $|g(x)| \leq M$ для всех $x \in [a, b]$. Рассмотрим разность

$$h(x) - h(x') = f(x)g(x) - f(x')g(x') - f(x)g(x') + f(x)g'(x) = \\ = f(x)\{g(x) - g(x')\} + g(x')\{f(x) - f(x')\}\ .$$

Значит

$$|h(x) - h(x')| \leq M\,|g(x) - g(x')| + M\,|f(x) - f(x')|\,,$$

откуда

$$\omega_k(h) \leq M\,\{\omega_k(f) + \omega_k(g)\}\ .$$

Далее, аналогично доказательству в пункте 1) получим, что функция h интегрируема. ▶

Определение. Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой*, если $|f(x)|$ интегрируема.

Теорема об абсолютной интегрируемости. *Всякая интегрируемая функция абсолютно интегрируема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Надо доказать, что если $f \in R\,[a, b]$, то $|f| \in R\,[a, b]$. Из очевидного неравенства

$$||f(x)| - |f(x')|| \leq |f(x) - f(x')|$$

следует, что $\omega_k\,(|f|) \leq \omega_k\,(f)$. Рассуждая аналогично пункту 1) предыдущей теоремы, получим, что функция $|f|$ интегрируема. ▶

Отметим, что обратная теорема не верна.

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

Функция $|f(x)|$ тождественно равна единице и, значит, интегрируема. Однако функция $f(x)$ не интегрируема хотя бы в силу критерия Дюбуа – Реймона, так как для $f(x)$ $E(2) = [a, b]$, а $l\,([a, b]) = b - a \neq 0$.

§ 40. Свойства интеграла Римана

40.1. Интеграл как функция отрезка интегрирования

1). Если $b < a$, то определим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx\,.$$

2). Если $a = b$, то определим $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3). *Если f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема на отрезке $[a,b]$, причем*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx\,.$$

Таким образом, интеграл есть *аддитивная функция* от отрезков, по которым он берется.
В самом деле, из интегрируемости функции на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ получим

$$\sum_{[a,c]} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon, \quad \sum_{[c,b]} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon\,.$$

Отсюда $\sum\limits_{[a,b]} \omega_k \Delta x_k < 2\varepsilon$, где разбиение $T_{[a,b]}$ есть сумма разбиений $T_{[a,]}$ и $T_{[,b]}$. Значит, по критерию Дарбу функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Для интегральных сумм, соответствующих разбиениям $T_{[a,b]}$, $T_{[a,c]}$ и $T_{[c,b]}$ получим равенство

$$S(T_{[a,b]}) = S(T_{[a,c]}) + S(T_{[c,b]})\,.$$

Переходя к пределу при $d(T_{[a,b]}) \to 0$ (при этом $d(T_{[a,c]}) \to 0$ и $d(T_{[c,b]}) \to 0$), получим формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx\,.$$

40.2. Интеграл как функционал

Определение. Отображение, для которого область значений составляют числа, называется *функционалом.*

Зафиксируем отрезок $[a, b]$. Тогда $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ – функционал, отображающий функции в числа.

1). *Интеграл есть линейный функционал: для любых чисел* α β

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)\,.$$

Действительно, так как $R\,[a, b]$ – кольцо, то $I(f+g) = I(f)+I(g)$. Остается доказать, что

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx\,.$$

Это равенство вытекает из соответствующего равенства для интегральных сумм.

2). *Функционал* $I(f)$ *ограничен: существует такое* K, *что для всех функций* f *имеет место неравенство*

$$|I(f)| \le K \cdot \|f\|\ , \quad \textit{где} \quad \|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\ .$$

В самом деле,

$$I(f) = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\,.$$

Но

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \|f\| \cdot |b-a|\ ,$$

откуда $|I(f)| \le \|f\|\cdot|b-a|$. Следовательно, функционал $I(f)$ ограничен с константой $K = b-a$. При $f(x) \equiv 1$ последнее неравенство обращается в равенство.

Пример неограниченного функционала. $f \to f'(x_0) = F(f)$ – неограниченный функционал.

3). *Интеграл – положительный функционал: если функция* f *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *и* $f(x) \ge 0$ *для всех* $x \in [a, b]$, *то* $I(f) \ge 0$.

В самом деле, в этом случае все интегральные суммы неотрицательны, следовательно $I(f) \geq 0$.

Следствие (монотонность интеграла). *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$ *и* $f(x) \leq g(x)$ *для всех* $x \in [a,b]$, *то* $I(f) \leq I(g)$.

В самом деле $I(g) - I(f) = I(g-f) \geq 0$, так как $g(x) - f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ и интеграл – положительный функционал. Отсюда получаем, что $I(g) \geq I(f)$. ▶

Теорема о среднем. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ ($b > a$). *Тогда существует точка* $c \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает на нем минимальное значение m и максимальное значение M. Если через S обозначим интегральную сумму, то $m(b-a) \leq S \leq M(b-a)$, откуда

$$m(b-a) \leq I(f) \leq M(b-a).$$

Из этого неравенства получим

$$m \leq \frac{I(f)}{b-a} \leq M.$$

По теореме о промежуточном значении непрерывной функции существует такое $c \in [a,b]$, что $f(c) = \frac{I(f)}{b-a}$, а это и значит, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c). \quad ▶$$

2 семестр
Лекция 7
(06.03.68)

Пример. *Функция Римана* (рис. 9.3)

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \text{ рациональное число } \frac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число,} \end{cases}$$

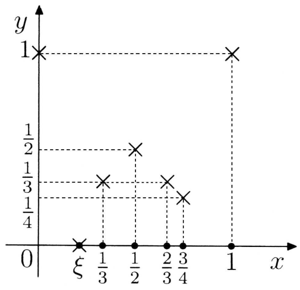

Рис. 9.3. Функция Римана.

где $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь , m – целое число, n – натуральное число, непрерывна в иррациональных и разрывна в рациональных точках отрезка $[0,1]$. Действительно, если точка r_0 рациональная, то $R(r_0) \neq 0$. В любой окрестности точки r_0 найдутся иррациональные точки x , в которых $R(x) = 0$, следовательно, в точке r_0 функция Римана разрывна. Пусть теперь x_0 – иррациональная точка. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ возьмем натуральное число $N > \frac{1}{\varepsilon}$. В любой окрестности точки x_0 находится лишь конечное или пустое множество рациональных точек вида $\frac{m}{n}$, где $n \leq N$, поэтому существует такое $\delta > 0$, что $0 \leq R(x) < \frac{1}{N} < \varepsilon$ для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$. Следовательно, $R(x)$ непрерывна в точке x_0 . Далее, множество $E(\varepsilon)$ конечно для любого $\varepsilon > 0$, следовательно, $l(E(\varepsilon)) = 0$ и функция Римана интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$.

Замечание. Интегрируемость сложной функции. Пусть функция $f(x) \in R\,[a,b]$, $\varphi(x) \in R\,[\alpha,\beta]$, $\varphi\,([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. Будет ли интегрируема сложная функция $f(\varphi(t))$? Нет, не обязательно.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$ имеет одну точку разрыва на отрезке $[0,1]$. Пусть $\varphi(t) = R(t)$ – функция Римана на отрезке $[0,1]$. Тогда сложная функция $f(\varphi(t))$ будет совпадать с функцией Дирихле и будет неинтегрируемой на отрезке $[0,1]$.

Имеет место

Теорема об интегрируемости сложной функции. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[\alpha,\beta]$, $\varphi(t) \in [\alpha,\beta]$ *для всех* $t \in [a,b]$ *и интегрируема на* $[a,b]$, *то* $f(\varphi(t))$ *интегрируема по Риману на* $[a,b]$.

Действительно, применяя теорему о непрерывности сложной функции получим, что множество точек разрыва функции $f(\varphi(t))$ содержится во множестве точек разрыва функции $\varphi(t)$. Следовательно, $f(\varphi(t))$ тоже будет интегрируема на $[a,b]$. ▶

Замечание. Если $f(x) \in R\,[c,d]$, $\varphi(t) \in C\,[a,b]$, то сложная функция может не быть интегрируемой [2]. Интегрируемость сложной функции нарушается.

Теорема о среднем (обобщенный вариант). *Пусть функция* $\varphi(x)$ *определена на отрезке* $[a,b]$, *неотрицательна на нем и интегрируема; функция* $f(x)$ *определена и ограничена на отрезке* $[a,b]$ ($m \le f(x) \le M$) *и произведение* $f(x)\cdot\varphi(x)$ *интегрируемо на* $[a,b]$. *Тогда* (*при* $a<b$)

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx \le M\int\limits_a^b \varphi(x)dx\,.$$

Если, кроме того, функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то существует точка* $c\in[a,b]$ *такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int\limits_a^b \varphi(x)dx\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\varphi(x)\ge 0\ \ \forall\, x\in[a,b]$ и интеграл – монотонный функционал (см. п. 40.2, с. 180), то

$$m\,\varphi(x) \le f(x)\varphi(x) \le M\varphi(x),$$

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx \le M\int\limits_a^b \varphi(x)dx\,.$$

Первая формула доказана. Из неотрицательности функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$ следует, что $\int\limits_a^b\varphi(x)dx \ge 0$. Если $\int\limits_a^b\varphi(x)dx = 0$, то

[2] Смотри [3] гл. 8, пример 34. Книга была рекомендована С. Б. С. (Ред.)

$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$ и формула

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

верна для любого $c \in [a,b]$. Если интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx > 0$, то на него можно разделить. Получим

$$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)dx} \le M\,,$$

где можно взять $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ в случае непрерывной функции $f(x)$. Далее, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по теореме о промежуточном значении существует такая точка $c \in [a,b]$, что

$$f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)\ \varphi(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)dx}\,,$$

откуда

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int\limits_a^b \varphi(x)dx\,. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Последняя формула дает метод оценки интеграла.

40.3. Интеграл, как функция верхнего предела интегрирования

Пусть функция $f(t) \in R\,[a,b]$. Тогда для любого $x \in [a,b]$ функция $f(t) \in R\,[a,x]$. Обозначим

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

для любого $x \in [a,b]$. Получили функцию от верхнего предела интегрирования. Отметим, что $\Phi(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0$.

Теорема (непрерывность интеграла, как функции верхнего предела). *Интеграл есть непрерывная функция от верхнего предела.*

Доказательство. Из свойства аддитивности и ограниченности интеграла

$$\int\limits_a^{x+h} f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+h} f(t)dt\,,$$

откуда

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt\,.$$

Применяя теорему о среднем и свойство ограниченности интеграла, как функционала (см. п. 40.2, с. 179) получим

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \le |h|\, M\,, \qquad (*)$$

откуда и следует непрерывность функции $\Phi(x)$, так как левая часть неравенства стремится к нулю при $h \to 0$.

Таким образом, из полученного при доказательстве теоремы о непрерывности интеграла, как функции верхнего предела неравенства $(*)$ получаем

Следствие. *Интеграл, как функция верхнего предела удовлетворяет условию Липшица порядка* 1.

Теорема (дифференцирование интеграла по верхнему пределу). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для любой точки $x_0 \in [a,b]$, в которой функция $f(x)$ непрерывна, определенный интеграл $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, как функция верхнего предела, имеет производную $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.*

Доказательство. Если x_0 – внутренняя точка или левый конец отрезка $[a,b]$, то из равенства

$$\frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$

следует, что

$$h \cdot \inf_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x) \le \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \le h \cdot \sup_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x) .$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ $\forall h$, $0 < h < \delta$,

$$\sup_{[x_0, x_0+h]} f(x) \le f(x_0) + \varepsilon , \qquad \inf_{[x_0, x_0+h]} f(x) \ge f(x_0) - \varepsilon .$$

Значит для h, $0 < h < \delta$,

$$\left| \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \le \varepsilon .$$

Проведя аналогичные рассуждения для $h < 0$ в случае, когда x_0 – внутренняя точка или правый конец отрезка $[a, b]$, получим

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0) ,$$

т. е. имеет место равенство $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ (в частности для соответствующих односторонних производных в концах отрезка (см. § 25, с. 108)). ►

Следствие. *Всякая ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$, имеющая не более чем конечное число точек разрыва, имеет первообразную.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0, x_1, ..., x_k \in [a, b]$ и $f(x)$ непрерывна для всех $x \ne x_i$ ($i = 0, 1, ..., k$). Тогда функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$ для всех $x \ne x_i$ ($i = 0, 1, ..., k$). Отсюда следует, что функция $\Phi(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$. ►

В частности получаем, что всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Упражнение. Привести пример интегрируемой функции $f(x)$, для которой $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ не является дифференцируемой в некоторых точках.

Интеграл Римана – аппарат, при помощи которого можно строить первообразные функции.

2 семестр
Лекция 8
(13.03.68)

§ 41. Вычисление определенных интегралов

41.1. Добавление к теории неопределенных интегралов

Рассмотрим способ, с помощью которого иногда можно разложить рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби, не используя при этом метод неопределенных коэффициентов.

Пусть дана $n+1$ точка $x_0, x_1, ..., x_n$ ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) и надо построить такой многочлен $P(x)$, что $P(x_k) = y_k$ ($k = 0, 1, ..., n$). Мы знаем, что ответ на этот вопрос дает интерполяционная формула Лагранжа

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)\, l_k(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} P(x_k) \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}\,.$$

Рассмотрим многочлен степени $n+1$

$$Q(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) = \prod_{m=0}^{n} (x-x_m)\,.$$

Заметим, что в числителе k-го члена формулы Лагранжа стоит выражение $\frac{Q(x)}{x-x_k}$. Продифференцируем многочлен $Q(x)$:

$$Q'(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} (x-x_m)\,.$$

Подставив в это равенство $x = x_k$, получим

$$Q'(x_k) = \prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} (x_k-x_m)$$

– выражение, которое стоит в знаменателе k-го члена формулы Лагранжа. Следовательно,

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)\,\frac{Q(x)}{(x-x_k)Q'(x_k)}\,.$$

Разделив обе части этого равенства на $Q(x)$, получим, что если $Q(x)$ имеет $n+1$ различных корней, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{P(x_k)}{Q'(x_k)}}{x-x_k}\,.$$

Корни x_k многочлена $Q(x)$ могут быть комплексными числами. В этом случае, если $Q(x)$ – многочлен с действительными коэффициентами, комплексно сопряженное число $\bar{x}_k$ тоже будет корнем многочлена $Q(x)$. Пусть, например, $x_k = a$ и $x_l = \bar{a}$ – корни многочлена $Q(x)$. Тогда

$$\frac{\frac{P(a)}{Q'(a)}}{x-a}+\frac{\frac{P(\bar{a})}{Q'(\bar{a})}}{x-\bar{a}}=\frac{Mx+N}{x^2-x(a+\bar{a})+a^2}\,,$$

где M и N – действительные числа.

41.2. Основная формула интегрального исчисления

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, ограничена и имеет на нем не более, чем конечное число точек разрыва. Тогда функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ есть одна из первообразных для функции $f(x)$ (см. п. 40.3, с. 185, следствие из теоремы о дифференцировании интеграла по верхнему пределу). Если $F(x)$ – еще одна первообразная, то

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)+C\,.$$

Положив $x=a$, получим $0=F(a)+C$, откуда

$$\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)\,.$$

В частности,
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)\,.$$
Эта формула называется *основной формулой интегрального исчисления*. Обозначают $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$. Таким образом,
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b\ .$$

Замечания. 1. Функция $f(x)$, имеющая первообразную, может быть неинтегрируемой по Риману. Например, $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$, $F(0) = 0$, является первообразной для своей производной, которая неограничена в любой окрестности нуля, и значит, неинтегрируема по Риману на $[-1,1]$.

2. Для $f(x)$, интегрируемой по Риману, $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ может не быть первообразной. Например, для функции Римана $R(x)$ (п. 40.2, с. 180) имеем $\Phi(x) = \int\limits_a^x R(t)dt = 0$, следовательно, $\Phi'(x)$ отличается от функции Римана в счетном множестве точек.

Для того, чтобы функция $f(x)$ имела первообразную и была интегрируема по Риману, надо наложить на функцию дополнительные условия, например, предположить, что $f(x)$ непрерывна или имеет лишь конечное число точек разрыва.
Кроме основной формулы интегрального исчисления, когда известна какая-нибудь первообразная, существуют и другие приемы вычисления определенного интеграла:

1) вычисление предела интегральных сумм;
2) метод подстановки;
3) интегрирование по частям.

41.3. Основные методы интегрирования

Теорема (метод подстановки). *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *а функция* $x = \varphi(t)$ *определена на отрезке* $[\alpha,\beta]$ *и удовлетворяет следующим условиям*:

1). $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

2). *$\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$;*

3). *$\varphi(t)\in[a,b]$ для любого $t\in[\alpha,\beta]$.*

Тогда для сложной функции $f(\varphi(t))$, определенной на отрезке $[\alpha,\beta]$, справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то по основной формуле интегрального исчисления

$$\int\limits_a^b f(x)dx= F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)\,.$$

Первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ является функция $F(\varphi(t))$. Значит

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)\,.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.\qquad\blacktriangleright$$

Замечание. Теорема справедлива без условия 3), если функция f непрерывна на отрезке $[A,B]\supset[a,b]$ таком, что $\varphi([a,b])\subset[A,B]$. Так как всякую непрерывную функцию можно непрерывным образом продолжить на больший отрезок, то формула верна, если в интеграле справа рассматривать соответствующим образом продолженную функцию.

Теорема (интегрирование по частям). *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены на $[a,b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы знаем, что для неопределенного интеграла $\int udv = uv - \int vdu$. Обозначив $\varphi(x)$ какую-нибудь первообразную для последнего интеграла в этой формуле, получим по основной формуле интегрального исчисления

$$\int_a^b udv = [uv - \varphi(x)]|_a^b = uv|_a^b - \varphi(x)|_a^b .$$

Но так как в то же время $\int_a^b vdu = \varphi(x)|_a^b$, то

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu . \quad \blacktriangleright$$

Глава 10

Приложения интегрального исчисления

§ 42. Вычисление площади

Пусть $f(x)$ – непрерывная неотрицательная функция на отрезке $[a,b]$. Тогда площадь $S(x)$ криволинейной трапеции на отрезке $[a,x]$, $x \in [a,b]$, будет первообразная для $f(x)$ (см. п. 35.1, с. 152): $S'(x) = f(x)$. Значит, в качестве определения площади криволинейной трапеции можно взять интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$ со знаком "$+$"для $f(x) \geq 0$ и со знаком "$-$"для $f(x) \leq 0$. Тогда площадь фигуры

$$D = \{(x,y): \ \ f_2(x) \leq y \leq f_1(x), \ \ a \leq x \leq b\},$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывные на отрезке функции, можно определить по формуле $S(D) = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$. Таким образом, с помощью определенного интеграла можно вычислять площади таких фигур, которые разбиваются на конечное число криволинейных трапеций.

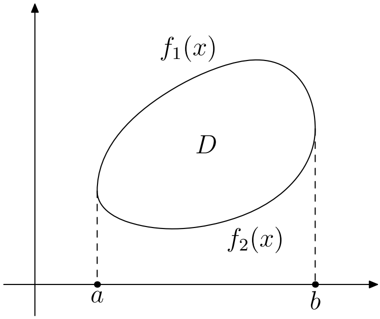

Рис. 10.1. Площадь фигуры.

§ 43. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на* (a,b), $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \in C(a,b)$ *и* $x_0 \in (a,b)$. *Тогда для* $x \in (a,b)$ *справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + r_n(x),$$

где

$$r_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^{x-x_0}(x-x_0-t)^{n-1}f^{(n)}(x_0+t)dt\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся случаем $x_0 = 0$. Тогда формула выглядит так:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ...+$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt\,.$$

Остаточный член этой формулы можно переписать в виде

$$r_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x t^{n-1}f^{(n)}(x-t)dt\,.$$

Докажем эту формулу индукцией по n. Интегрируя по частям (положим $u = f'(x-t)$, $dv = dt$ и т.д.), получим

$$f(x) - f(0) = \int\limits_0^x f'(x-t)dt = xf'(0) + \int\limits_0^x tf''(x-t)dt =$$
$$= xf'(0) + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2!}\int\limits_0^x t^2 f'''(x-t)dt = ... =$$
$$= xf'(0) + f''(0)\frac{x^2}{2!} + ...+$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x t^{n-1}f^{(n)}(x-t)dt\,. \qquad \blacktriangleright$$

Применив обобщенную теорему о среднем (п. 40.2, с. 182), получим остаточный член в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}dt = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n\,.$$

§ 44. Квадратурные формулы (формулы для вычисления определенных интегралов)

Пусть $f(x) \in C\,[a, b]$. Тогда квадратурная формула имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \cong \int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

Числа x_k называются *узлами*, а A_k – *коэффициентами* квадратурной формулы. Квадратурная формула – не обязательно интегральная сумма.

Квадратурные формулы с равными коэффициентами $A_k = A$ называются *формулами Чебышёва.*

Будем требовать, чтобы квадратурная формула была точна для некоторых простых функций, например, на многочленах степени не выше $2n+1$, т. е. $\deg P \leq 2n+1$ (так как в квадратурной формуле $2n+2$ параметра: $n+1$ узлов и $n+1$ коэффициентов).

Если узлы известны, например, имеется равномерное распределение узлов, т. е. все соседние узлы квадратурной формулы находятся на равном расстоянии друг от друга ($x_k = x_0 + \frac{b-a}{n}k$), то в этом случае будем требовать, чтобы квадратурная формула была точна на многочленах степени $\deg P \leq n$.

Рассмотрим остаток квадратурной формулы

$$R_n(f) = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\,.$$

Задача состоит в том, что для тех функций, для которых мы будем применять квадратурную формулу, мы хотим сделать остаток достаточно малым. Например, мы можем рассмотреть квадратурные формулы на классе функций, для которых $\left\| f^{(k)} \right\| \leq M$.

44.1. Формула прямоугольников

Обозначим $h = b - a$, $a = x_0$, $b = x_1$. Формула

$$\int_a^b f(x)dx \cong hf(a)$$

будет точна на многочленах нулевой степени. По этой формуле интеграл для $f(x) \geq 0$ заменяется площадью прямоугольника с высотой $f(a)$, поэтому формула называется *формулой прямоугольников.*

44.2. Формула трапеций

Квадратурная формула (см. рис. 10.2)

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

называется *формулой трапеций.* Она будет точна для многочленов первой степени. Остаток формулы трапеций

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

равен нулю, если $f(x)$ есть многочлен $P_1(x)$, $\deg P_1 \leq 1$.

Предположим, что $f''(x) \in C\,[a, b]$. Можем положить $a = 0$. Тогда

$$R\,(f) = \int_0^b f(x)dx - \frac{b}{2}\left(f(b) + f(0)\right) .$$

Докажем, что

$$R\,(f) = -\frac{1}{2}\int_0^b x(b - x)f''(x)dx\,.$$

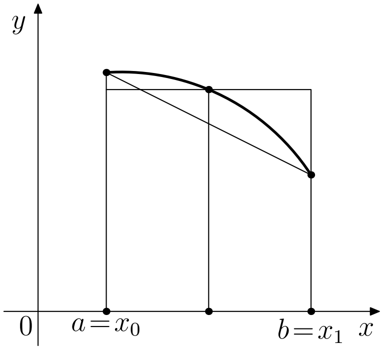

Рис. 10.2. Квадратурная формула трапеций.

Введем в рассмотрении интеграл $\int\limits_0^x f(u)du = F(x)$. Тогда имеют место соотношения $\int\limits_0^b f(x)dx = F(b) - F(0)$ и

$$F(b) = F(0) + bF'(0) + \frac{b^2}{2}F''(0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^b (b-x)^2 F'''(x)dx\,,$$

откуда

$$\int\limits_0^b f(x)dx = bF'(0) + \frac{b^2}{2}F''(0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^b (b-x)^2 F'''(x)dx\,.$$

По формуле Тейлора

$$F'(b) = F'(0) + bF''(0) + \int\limits_0^b (b-x)F'''(x)dx\,.$$

Умножим последнее равенство на $\frac{b}{2}$ и вычтем из предыдущего.

Получим

$$\int\limits_0^b f(x)dx =$$

$$= \frac{b}{2}\left\{F'(0)+F'(b)\right\} + \frac{1}{2}\int\limits_0^b (b-x)^2F'''(x)dx - \frac{b}{2}\int\limits_0^b (b-x)F'''(x)dx =$$

$$= \frac{b}{2}\left\{f(b)+f(0)\right\} - \frac{1}{2}\int\limits_0^b x(b-x)F'''(x)dx\,.$$

Так как $b - bx - b^2 + 2bx - x^2 = bx - x^2$, то

$$R(f) = \frac{1}{2}\int\limits_0^b (b-x)^2F'''(x)dx - \frac{b}{2}\int\limits_0^b (b-x)F'''(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^b x(b-x)F'''(x)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^b x(b-x)f''(x)dx\,.$$

Это и есть остаточный член формулы трапеций.

По теореме о среднем получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left\{f(a)+f(b)\right\} - \frac{h^3}{12}f''(\xi)\,.$$

Теперь, если узлы распределены равномерно на отрезке, т. е. $x_k = x_0 + hk$ при $k = 0, 1, ..., n$ и $h = \frac{(b-a)}{n}$, то

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{h}{2}\left\{f(x_k)+f(x_{k+1})\right\} - \frac{h^3}{12n^3}f''(\xi_k)\,,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + 2\left(f(x_1) + ... + f(x_{n-1})\right) + f(x_n)\right\} -$$

$$- \frac{h^3}{12n^2} \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)\,,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = h\left\{\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right\} - \frac{h^3}{12n^2} f''(\xi)\,,$$

где $f''(\xi)$ – среднее значение второй производной.

44.3. Формула парабол (формула Симпсона)

Введем обозначение $x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2}$ – середина отрезка $[x_0, x_1]$. Тогда $x_1 = x_{\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}$. На отрезке $[x_0, x_1]$ заменим функцию интерполяционным многочленом Лагранжа с узлами в точках x_0, $x_{\frac{1}{2}}$, x_1:

$$P(x) = y_0 l_0 + y_{\frac{1}{2}} l_{\frac{1}{2}} + y_1 l_1\,,$$

где

$$l_0 = \frac{(x - x_{\frac{1}{2}})(x - x_1)}{(x_0 - x_{\frac{1}{2}})(x_0 - x_1)}\,,$$

$$l_{\frac{1}{2}} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_{\frac{1}{2}} - x_0)(x_{\frac{1}{2}} - x_1)}\,,$$

$$l_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_{\frac{1}{2}})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{\frac{1}{2}})}\,.$$

Проинтегрировав интерполяционный многочлен Лагранжа, получим формулу

$$\int_{x_0}^{x_1} P(x)dx = \frac{h}{6}\left\{y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1\right\}\,.$$

Теперь, применив эту формулу для равномерного разбиения отрезка, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{6}\left\{y_0 + y_n + 4\left(y_{\frac{1}{2}} + ... + y_{n-\frac{1}{2}}\right) + 2\left(y_1 + ... + y_{n-1}\right)\right\}.$$

Это *квадратурная формула парабол (формула Симпсона).*

§ 45. Длина кривой

45.1. Функции ограниченной вариации (функции с ограниченным изменением)

Пусть $f(x) \in C\,[a,b]$ и T – какое-нибудь разбиение отрезка. Величина $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ характеризует величину колебания функции по данному разбиению.

Определение. Если величина

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{T} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M,$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ *ограниченную вариацию.*

Пример. Функция $x \sin \frac{1}{x}$ (рис. 10.3) на отрезке $[0,1]$ имеет неограниченную вариацию.

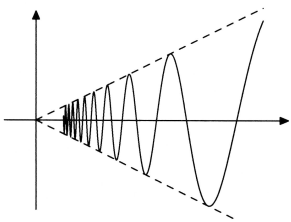

Рис. 10.3. Функция $x \sin \frac{1}{x}$ на отрезке $[0,1]$ имеет неограниченную вариацию.

Замечание. Функция $f(x)$, имеющая ограниченную производную или удовлетворяющая на отрезке $[a,b]$ условию Липшица с константой K , имеет ограниченную вариацию.

Действительно, по условию Липшица

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})| \le K\,|x_k-x_{k-1}|\,,$$

следовательно

$$\mathop{V}_a^b f \le K\,|b-a|\ .$$

Будем обозначать $V\,[a,b]$ класс функций с ограниченной вариацией. Таким образом, функции ограниченной вариации – класс функций между непрерывными функциями и функциями, удовлетворяющими условию Липшица: $\mathrm{Lip1}\,[a,b]\subset V\,[a,b]\subset C\,[a,b]$.

2 семестр
Лекция 10
(20.03.68)

Пример. Пусть функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$. Тогда $f(x)\in V\,[a,b]$. Действительно, для любого разбиения T

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)-f(x_{k-1})\} = f(b)-f(a) = \mathop{V}_a^b f\,.$$

Замечание. Всякая функция с ограниченной вариацией $f\in V$ представима в виде разности двух возрастающих функций f_1 и f_2 : $f\in V \Leftrightarrow f=f_1-f_2$. Функции с ограниченной вариацией образуют линейное пространство.

Замечание. Пусть функция имеет непрерывную производную $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда по теореме Лагранжа

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right|\Delta x_k = \\ = \sum_{k=1}^{n}|f'(\xi_k)|\,\Delta x_k\ .$$

Мы видим, что вариационная сумма стала интегральной суммой для интеграла $\int\limits_a^b|f'(x)|\,dx$ и очевидно, что $\sup\limits_T\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

есть предел интегральных сумм по некоторой подпоследовательности разбиений при $d(T) \to 0$. Значит

$$\mathop{V}_a^b f = \sup_T \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \int_a^b |f'(x)|\, dx\,.$$

Замечание. Пусть $f(x) \in C\,[a,b]$, $\varphi \in V\,[a,b]$. Можно обобщить понятие интегральной суммы, заменив приращение аргумента приращением функции φ. Получим суммы Римана – Стильтьеса

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\}\,.$$

Определение.

$$\lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\} = \int_a^b f(x)d\varphi(x)$$

называется *интегралом Римана – Стильтьеса.*

Замечание. Интеграл Римана – Стильтьеса обладает следующими свойствами.

1. Интеграл Римана – Стильтьеса есть линейный функционал.

2. В пространстве непрерывных функций, заданных на отрезке, всякий линейный непрерывный функционал (или, что то же самое, всякий ограниченный линейный функционал) есть интеграл Римана – Стильтьеса.

45.2. Спрямляемые кривые

Ради простоты будем рассматривать плоские кривые. Аналогично можно рассмотреть пространственные кривые.

Пусть в плоскости параметрически задана кривая Γ:

$$\begin{matrix} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{matrix} \qquad \alpha \le t \le \beta\,,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ $\in C\,[\alpha, \beta]$. Будем предполагать, что Γ – простая кривая без кратных точек (без самопересечений). Таким образом, если $M = \{\varphi(t), \psi(t)\}$ и $M' = \{\varphi(t'), \psi(t')\}$ – точки на кривой, и $t \neq t'$, то $M \neq M'$. Разделим кривую точками M_k ($k = 0, 1, ..., n$) на конечное число частей. Получим разбиение

$$T: \quad \{M_0 = M(\alpha),\ ...,\ M_k = M(t_k),\ ...,\ M_n = M(\beta)\}.$$

Обозначим $|M_k M_{k-1}|$ длину хорды, стягивающей точки M_{k-1} и M_k. Возьмем верхнюю грань длин ломаных с узлами в точках M_k по всем разбиениям кривой Γ.

Определение. Если $\sup\limits_{T} \sum\limits_{k=1}^{n} |M_k M_{k-1}| = l(\Gamma) < \infty$, то кривая Γ называется *спрямляемой*, а $l(\Gamma)$ называется *длиной кривой* Γ (рис. 10.4).

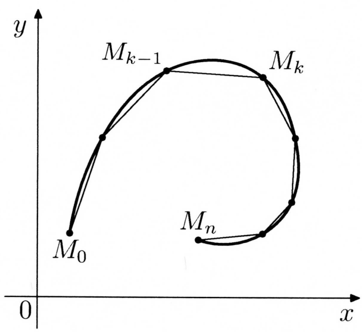

Рис. 10.4. Длина кривой.

Заметим, что разбиение

$$T_\Gamma: \quad \{M_0 = M(\alpha),\ ...,\ M_k = M(t_k),\ ...,\ M_n = M(\beta)\}$$

кривой Γ точками M_k, ($k = 0, 1, ..., n$) порождается разбиением отрезка $[\alpha, \beta]$

$$T_{[\alpha,\beta]}: \quad \alpha = t_0 < t_1 < ... < t_k < ... < t_n = \beta.$$

Так как длина хорды

$$|M_k M_{k-1}| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} =$$
$$= \sqrt{\{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\}^2 + \{\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\}^2},$$

где x_k, y_k – координаты соответствующих точек M_k , то

$$|M_k M_{k-1}| \geq |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \;,$$

$$|M_k M_{k-1}| \geq |\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})| \,,$$

а с другой стороны

$$|M_k M_{k-1}| \leq |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| + |\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})| \;.$$

Теорема (критерий спрямляемости кривой). *Для того, чтобы плоская непрерывная кривая*

$$\Gamma: \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \,,$$

без кратных точек была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы функции φ *и* ψ *были функциями с ограниченным изменением.*

Доказательство. Необходимость. Пусть Γ – спрямляемая кривая, т. е. $\sup\limits_{T} \sum\limits_{k=1}^{n} |M_k M_{k-1}| < \infty$. Докажем, что $\varphi \in V\,[\alpha, \beta]$. Любому разбиению T отрезка $[\alpha, \beta]$ соответствует некоторое разбиение кривой Γ : $T_{[\alpha,\beta]} \to T_\Gamma$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} |M_k M_{k-1}| \leq \sup_{T_\Gamma} \sum_{k=1}^{n} |M_k M_{k-1}| < \infty \,.$$

Значит, $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \varphi \leq l(\Gamma)$. Аналогично $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \psi \leq l(\Gamma)$.

Достаточность. Пусть $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \varphi < \infty$, $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \psi < \infty$. Тогда для любого разбиения T_Γ

$$\sum_{k=1}^{n} |M_k M_{k-1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})| \leq$$

$$\leq \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \varphi + \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \psi \,.$$

Значит, $l(\Gamma) \leq \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \varphi + \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} \psi$. ►

45.3. Задача о выражении длины кривой интегралом

Необходимо указать дополнительные условия на регулярность функций φ и ψ.

Теорема (выражение длины кривой интегралом). *Пусть*

$$\Gamma: \quad x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta\,,$$

– плоская простая и непрерывная кривая и $\varphi'(t),\ \psi'(t)\ \in C\,[\alpha,\beta]$. *Тогда* Γ *спрямляемая и*

$$l(\Gamma)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\{\varphi'(t)\}^2+\{\psi'(t)\}^2}dt\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\varphi'(t),\ \psi'(t)\ \in C\,[\alpha,\beta]$, то функции φ и ψ являются функциями ограниченной вариации. Тогда по критерию спрямляемости кривой кривая Γ спрямляемая. Пусть T – разбиение кривой. Рассмотрим длину вписанной ломаной. Так как $\Delta t_k > 0$, то применяя формулу Лагранжа, получим

$$\sum_{k=1}^{n}|M_kM_{k-1}|=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\{\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\}^2+\{\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})\}^2}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\{\varphi'(\xi_k)\}^2+\{\psi'(\eta_k)\}^2}\,\Delta t_k\,.$$

Так как $\psi'\in C\,[\alpha,\beta]$ и значит, равномерно непрерывна на $[\alpha,\beta]$, т.е. $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall\,T\ \ d(T)<\delta \quad |\psi'(\eta_k)-\psi'(\xi_k)|<\varepsilon$. Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\eta_k)}\ -\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\right\}\Delta t_k\right|\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}|\psi'(\eta_k)-\psi'(\xi_k)|\,\Delta t_k<\varepsilon\quad(\beta-\alpha)\to 0$$

при $d(T)\to 0$. Мы воспользовались также неравенством

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}\right|\le|b-b_1|$$

для произвольных a, b и b_1. При $b - b_1 = 0$ неравенство очевидно. При $b - b_1 \neq 0$ для доказательства избавляемся от иррациональности в числителе:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+b_1^2}\right| \leq \frac{\left|b^2 - b_1^2\right|}{|b+b_1|} \leq |b - b_1| \,.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\sum_{k=1}^{n} |M_k M_{k-1}| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\{\varphi'(\xi_k)\}^2 + \{\psi'(\xi_k)\}^2}\, \Delta t_k + \alpha \,,$$

где $\alpha \to 0$ при $d(T) \to 0$. Теперь докажем, что

$$l(\Gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{\varphi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2} dt \,.$$

Последний интеграл существует при сделанных предположениях, и значит, существует предел интегральных сумм. Так как при добавлении новых точек длина может только возрастать, то

$$\sup_{T_\Gamma} \sum_{k=1}^{n} |M_k M_{k-1}| =$$

$$= \lim_{\substack{m\to\infty \\ T_{m,[\alpha,\beta]} \\ (d(T_m)\to 0\ (m\to\infty))}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}\Delta t_k + \alpha \right\} =$$

$$= \lim_{d(T_{[\alpha,\beta]})\to 0} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}\Delta t_k \right\} =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt \,.$$

Здесь последний предел существует в силу существования интеграла $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{\phi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2} dt$, значит, существует равный предел и по подпоследовательности разбиений $\{T_m\}$. ►

Следствие. *Пусть кривая выражается уравнением* $y = f(x)$, *причем* $f' \in C[a,b]$. *Тогда*

$$l(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx\,.$$

Действительно, положим $t = x$, $a \le x \le b$, и применим теорему о выражении длины кривой интегралом.

45.4. Дифференциал дуги

Рассмотрим дугу кривой Γ от точки M_0 до текущей точки $M(t)$. Пусть $\varphi'(t),\ \psi'(t) \in C[\alpha,\beta]$ и

$$s(t) = \int\limits_\alpha^t \sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}\, du$$

– длина дуги кривой от точки M_0 до текущей точки $M(t)$. Функция $s = s(t)$ строго монотонна и может быть принята в качестве параметра на кривой. Тогда дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \sqrt{(d\varphi)^2 + (d\psi)^2}\,,$$

$$(ds)^2 = (d\varphi)^2 + (d\psi)^2\,,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = 1\,.$$

Мы получили

Следствие (существование нормальной параметризации). *Для любой простой непрерывной кривой*

$$\Gamma: \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta\,,$$

такой, что $\varphi'(t),\ \psi'(t) \in C[\alpha,\beta]$, *существует нормальная параметризация.*

Вопросы к коллоквиуму.

1. Общий вид первообразной.
2. Свойства неопределенного интеграла.

3. Интегрирование и дифференцирование. Замена переменной, интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

4. Необходимое условие интегрируемости (ограниченность функции).

5. Суммы Дарбу и их свойства.

6. Предельный критерий интегрируемости.

7. Критерий интегрируемости Дарбу.

8. Критерий интегрируемости Римана.

9. Обобщенная теорема Кантора.

10. Критерий интегрируемости Дюбуа – Реймона.

11. Классы интегрируемых функций (сумма, произведение, абсолютная интегрируемость).

12. Свойства определенного интеграла как функционала.

13. Теоремы о среднем.

14. Интеграл как функция верхнего предела.

15. Вычисление определенных интегралов (3 теоремы).

16. Площадь плоской области (если разбивается на конечное число криволинейных трапеций).

17. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

18. Формула трапеций. Формула Симпсона.

19. Длина кривой, дифференциал дуги.

20. Площадь поверхности вращения.

21. Объем тела вращения.

22. Механические приложения определенного интеграла.

2 семестр
Лекция 11
(22.03.68)

§ 46. Различные приложения интегрального исчисления

46.1. Объем тела вращения

Пусть $f(x) \in C\,[a,b]$ и $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$. Рассмотрим тело вращения, получающееся при вращении криволинейной трапеции на отрезке $[a,b]$ вокруг оси Ox (рис. 10.5). Мы хотим узнать объем

V получившейся при вращении фигуры. Пусть $x \in [a, b]$. Объем фигуры, получающейся от вращения части криволинейной трапеции, взятой на отрезке $[a, x]$, обозначим $V(x)$. Тогда $V(0) = 0$, а объем всего тела вращения $V = V(b)$.

Зафиксируем точку x и дадим приращение dx. Так как объем обладает свойством аддитивности и монотонности, то приращение функции $V(x)$ будет равно $\Delta V = dx\pi f^2(\xi)$, где $\xi \in [x, x+dx]$. Отметим, что $f(\xi) = f(x) + o(1)$ при $dx \to 0$ в силу непрерывности функции $f(x)$. Тогда $\Delta V = dx \cdot \pi \cdot \left\{ f^2(x) + o(1) \right\}$ при $dx \to 0$. Это значит, что функция $V(x)$ дифференцируема,

$$dV = \pi f^2(x) dx \quad \text{и} \quad V = \pi \int\limits_a^b f^2(x) dx \,.$$

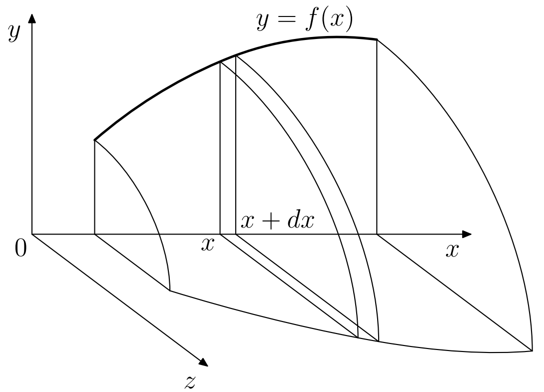

Рис. 10.5. Объем тела вращения.

46.2. Поверхность тела вращения

Пусть $f(x) \in C[a, b]$ и $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a, b]$. Зафиксируем точку x и дадим приращение dx. Приращение площади поверхности можно представить как площадь поверхности усеченного конуса $dS = 2\pi \frac{y_1 + y_2}{2} ds$, или $dS = 2\pi y ds$, где ds – дифференциал дуги.

Тогда

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx\,.$$

46.3. Работа силы

Пусть материальная точка M движется по прямой под действием силы F. Элементарная работа силы F на отрезке пути dx будет $dW = F(x)dx$, а вся работа на отрезке $[a,b]$ выразится интегралом

$$W = \int_a^b F(x)\cdot dx\,.$$

46.4. Статический момент кривой

Пусть кривая $\Gamma = r(s)$, $a \le s \le b$, имеет массу, пропорциональную длине дуги. Будем считать, что Γ – *однородная* кривая, т. е. что *линейная*, или *погонная*, *плотность* ρ кривой постоянна; пусть $\rho = 1$. Возьмем какое-нибудь разбиение кривой Γ на части Γ_k, $s_{k-1} \le s \le s_k$. Выберем по точке $\xi_k \in [s_{k-1}, s_k]$ и положим $x_k = x(\xi_k)$, $y_k = y(\xi_k)$. Величина $y_k \Delta s_k$ называется элементарным статическим моментом части Γ_k кривой Γ относительно оси Ox. Элементарный статический момент равен моменту материальной точки массы Δs_k с ординатой y_k. Сумма всех элементарных моментов $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k \Delta s_k$ имеет предел $M_x(\Gamma)$, который называется *статическим моментом кривой* Γ *относительно оси* Ox,

$$M_x(\Gamma) = \int_a^b y ds\,.$$

Аналогично

$$M_y(\Gamma) = \int_a^b x ds$$

называется *статическим моментом кривой* Γ *относительно оси* Oy.

Для кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, получим

$$M_x(\Gamma) = \int_a^b y ds = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx\,,$$

$$M_y(\Gamma) = \int_a^b x ds = \int_a^b x\sqrt{1 + y'^2} dx\,.$$

46.5. Центр тяжести материальной кривой

Определение. *Центр тяжести* материальной кривой – такая точка $P(\xi, \eta)$, что если в ней сосредоточить всю массу кривой, то статические моменты этой точки относительно каждой оси будут такими же, как у кривой.

Таким образом, $M_x = m\eta = \int\limits_a^b y ds$, $M_y = m\xi = \int\limits_a^b x ds$, откуда находим координаты центра тяжести

$$\eta = \frac{\int\limits_a^b y ds}{m}\,, \quad \xi = \frac{\int\limits_a^b x ds}{m}\,.$$

В случае однородной кривой с плотностью $\rho = 1$ масса кривой вычисляется по формуле $m = \int\limits_a^b ds$.

Часть IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 11

Функции многих переменных

§ 47. Метрическое пространство

Основным понятием метрического пространства является понятие расстояния.

Определение. *Метрическим пространством* называется произвольное множество, в котором определено расстояние.

Будем обозначать метрическое пространство $R = \{M, \rho\}$, где M – множество элементов, или точек, метрического пространства; $\rho = \rho(x, y)$ – расстояние между точками x и y.

Пусть (x, y) – упорядоченные пары точек множества M. Поставим в соответствие парам (x, y) расстояние между точками x и y:

$$(x, y) \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}_+ .$$

Расстояние – функционал, или числовая функция, определенная для всевозможных пар точек из M, которая обладает следующими свойствами: для любых элементов $x, y, z \in M$

1) $\rho(x, y) \geq 0$;
2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*симметричность*);
4) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (*неравенство треугольника*).

Примеры. 1) Очевидно, числовая прямая $E^1 = \mathbb{R}$, на которой введено расстояние $\rho(x,y) = |x-y|$, является метрическим пространством.

2) *Евклидово пространство* E – линейное пространство, в котором задано скалярное произведение (x,y), причем соответствующая квадратичная форма (x,x) положительна. В евклидовом пространстве есть *нейтральный элемент* θ. Это такой элемент, что $x+\theta = x$ для любого элемента $x \in E$.

Пусть $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$ – норма элемента в евклидовом пространстве. Введем

$$\rho(x,y) = \|x-y\|$$

– евклидово расстояние между точками x и y. Тогда евклидово пространство превращается в метрическое. Аксиомы 1), 2), 3), очевидно, выполняются.

Неравенство Коши – Буняковского. *Для любых элементов x и y евклидова пространства E имеет место неравенство Коши – Буняковского*

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \ ,$$

или

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)\,(y,y)}\,,$$

или

$$(x,y)^2 \leq (x,x)\,(y,y) \ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого элемента z из евклидова пространства $(z,z) \geq 0$. Следовательно, для произвольных чисел α, β

$$(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) \geq 0,$$

откуда

$$\alpha^2\,(x,x) + 2\alpha\beta\,(x,y) + \beta^2\,(y,y) \geq 0\,.$$

Последнее неравенство выполняется для произвольных чисел α, β, если дискриминант $(x,y)^2 - (x,x)\,(y,y) \leq 0$, откуда $(x,y)^2 \leq (x,x)\,(y,y)$. ►

2 семестр
Лекция 12
(27.03.68)

3) Если $x = (a_1, ..., a_n)$, $y = (b_1, ..., b_n)$ – векторы из E^n, то скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) = a_1 b_1 + ... + a_n b_n\,.$$

Тогда $\|x\| = \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ и

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

– *неравенство Коши.*

4) В пространстве функций $x = x(t) \in C\,[0, 1]$ скалярное произведение зададим формулой

$$(x, y) = \int\limits_0^1 x(t) y(t) dt\,.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_0^1 x(t) y(t) dt\right| \le \sqrt{\int\limits_0^1 x^2(t) dt \cdot \int\limits_0^1 y^2(t) dt}$$

– *неравенство Буняковского.*

Возьмем n линейно независимых непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$. Натянутое на них линейное пространство будет n-мерным евклидовым пространством.

Замечание. Введение скалярного произведения в вещественном линейном (векторном) пространстве позволяет ввести много геометрических понятий. Например, если $(x, y) = 0$, то элементы x и y называются *ортогональными*: $x \perp y$.

Из неравенства Коши – Буняковского

$$-1 \le \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1\,.$$

Определим
$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\,.$$
Тогда *угол* φ $(\,0 \le \varphi \le \pi\,)$ между двумя векторами x и y определяется однозначно.
Таким образом, евклидово пространство – это такое линейное пространство, в котором может быть введено понятие угла между векторами.

Неравенство Минковского. *Для любых векторов x и y евклидова пространства E верно неравенство Минковского*
$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|\ .$$
Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу билинейности скалярного произведения и неравенства Коши – Буняковского
$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2\,(x,y) + (y,y) =$$
$$= \|x\|^2 + 2\,(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\| + 2\,\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\ .$$
Отсюда получаем $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. ▶
Примеры. Для векторов $x = (a_1, ..., a_n)$, $y = (b_1, ..., b_n)$ из E^n неравенство Минковского имеет вид
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\,.$$
Для интегралов
$$\sqrt{\int_0^1 \{x(t)+y(t)\}^2\,dt} \le \sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt} + \sqrt{\int_0^1 y^2(t)dt}\,.$$
Докажем, что расстояние в евклидовом пространстве удовлетворяет неравенству треугольника (4-ое свойство). $\forall\, x, y, z \in E$ положим $x - y = a$, $y - z = b$. Тогда $x - z = a + b$ и по неравенству Минковского
$$\|a+b\| \le \|a\| + \|b\|$$
и свойство 4) метрических пространств доказано.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Евклидово пространство, в котором введено расстояние* $\rho(x,y)=\|x-y\|$ *, является метрическим пространством.*

Замечание. В одном и том же векторном пространстве можно ввести разные расстояния. Так, для элементов $x=(a_1,...,a_n)$, $y=(b_1,...,b_n)$ из множества

$$X=\{x:(a_1,a_2,...,a_n)\}$$

расстояние

$$\rho\,(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2}\,,$$

удовлетворяет всем аксиомам расстояния в метрическом пространстве. Так мы получим метрическое пространство $R=\{X,\rho\}$. Но если введем расстояние по формуле

$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|\ ,$$

то это расстояние тоже удовлетворяет всем аксиомам, и мы получим другое метрическое пространство $R_1=\{X,\rho_1\}$.

Замечание. Если $\{X,\rho\}$ – метрическое пространство и $Y\subset X$, то $\{Y,\rho\}$ автоматически является метрическим пространством. Например, если положим для элементов из $X=\{x:(a_1,a_2,...,a_n)\}$ $a_n=0$, то получим подпространство Y пространства X . При этом расстояние между элементами из подпространства Y индуцируется расстоянием в пространстве $\{X,\rho\}$. Получим сужение метрического пространства $\{X,\rho\}$ на подпространство $\{Y,\rho\}$.

§ 48. Множества в метрических пространствах

Рекомендованная литература [9].

48.1. Окрестность точки в метрическом пространстве

Пусть $R=\{X,\rho\}$ – метрическое пространство с определенным на множестве X расстоянием ρ . Пусть $a\in X$. Зададим $\varepsilon>0$.

Определение. ε-*окрестностью* $O_\varepsilon(a)$ точки a называется множество всех точек x таких, что $\rho(x,a) < \varepsilon$.

Таким образом, $O_\varepsilon(a) = \{x \in X : \ \rho(x,a) < \varepsilon\}$. Если $O(a)$ – окрестность точки a, то $\exists \varepsilon > 0 \quad O(a) = O_\varepsilon(a)$.
Множество точек, составляющих ε-окрестность точки a называется *шаром* радиуса ε с центром в точке a.
Пример. В пространстве E^2 рассмотрим расстояние (рис. 11.1)

$$\rho(a,b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Если введем расстояние $\rho_1(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$, то окрестность изменится (рис. 11.2). Таким образом, если меняется пространство, то меняется и окрестность.

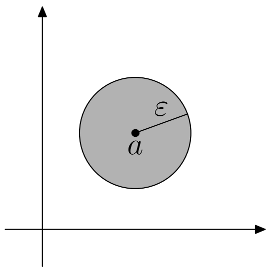

Рис. 11.1. Окрестность в пространстве E^2 с расстоянием $\rho(a,b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$.

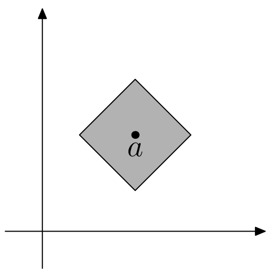

Рис. 11.2. Окрестность в пространстве E^2 с расстоянием $\rho(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$.

Пример. На множестве $X = \mathbb{N}$ рассмотрим метрическое пространство с обычным расстоянием $\rho(x,y) = |x-y|$. Здесь множество $\{2,3\}$ не будет окрестностью, так как нет точки из X, являющейся центром окрестности. Всегда центр окрестности должен принадлежать множеству X элементов пространства. В этом метрическом пространстве при $\varepsilon \le 1$ окрестностью точки является сама точка; если $1 < \varepsilon \le 2$, то окрестность точки состоит из самой точки и двух соседних точек.

Замечание. Метрическое пространство не обязательно линейное. Это множество элементов с введенным на нем расстоянием. В метрическом пространстве складывать элементы и умножать на числа, вообще говоря, нельзя.

В любом непустом множестве можно так ввести расстояние, что множество будет метрическим пространством.

Пример. Пусть $X \ne \varnothing$. Для любых элементов $x, y \in X$ определим расстояние $\rho_0(x,y) = \begin{cases} 1, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$.

Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство и $M \subset X$. Следующие понятия, которые ранее определялись посредством окрестностей, переносятся на метрические пространства автоматически.

1. Точка a– *внутренняя точка* множества M, если $\exists O(a)$ $O(a) \subset M$;

Пример. Пусть $M = X = \mathbb{N}$ и $\rho(x,y) = |x-y|$. Всякая точка множества M является его внутренней точкой. Действительно, $O_{\frac{1}{2}}(a) = a \in \mathbb{N}$.

2. Точка a, $a \in X$, – *внешняя точка* множества M, если $\exists\, O(a) \quad O(a) \bigcap M = \varnothing$;

3. Точка a, $a \in X$, – *граничная точка* множества M, если $\forall\, O(a) \;\; \exists\, x \in M \bigcap O(a) \;\; \exists\, \bar{x} \in (\complement M) \bigcap O(a)$;

4. Точка a, $a \in X$, – *предельная точка* множества M, если $\forall\, O(a) \;\; \exists\, b \in M$, $b \ne a$, $b \in O(a)$; т.е. a – предельная точка множества M, если $\forall\, O(a) \;\; O(a) \bigcap (M \backslash a) \ne \varnothing$.

5. Точка a, $a \in M$, – *изолированная точка* множества M, если $\exists\, O(a) \;\; O(a) \bigcap M = \{a\}$.

Соответственно определяются

$\overset{\circ}{M}$ – *внутренность множества* M – множество внутренних точек множества M;

M_e – *внешность множества* M – множество внешних точек множества M;

∂M – *граница множества* M – множество граничных точек множества M ; $\partial M = \partial\,(\complement M)$.

Определение. Множество называется *открытым*, если всякая его точка является внутренней точкой множества. Множество M открыто, если $M = \overset{\circ}{M}$.

Определение. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

2 семестр
Лекция 13
(29.03.68)

Пусть дано метрическое пространство $R = \{X, \rho\}$ и множество $M \subset X$.

Определение. *Производное множество* M' – множество всех предельных точек множества M .

Определение. Множество M , $M \subset X$, называется *всюду плотным* в X , если всякая точка $x \in X$ или принадлежит M или является для M предельной, т. е. $X = M \bigcup M'$.

Мощность всюду плотных множеств является характеристикой массивности метрического пространства.

Определение. Если для X существует всюду плотное в X счетное множество M , то метрическое пространство R называется *сепарабельным.*

Пример. Числовая прямая – сепарабельное пространство. Множество рациональных точек есть всюду плотное счетное множество на числовой прямой.

48.2. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве

Теорема. *Всякая окрестность есть открытое множество.*

Доказательство. Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство, $a \in X$ и $M = O(a)$ – некоторая окрестность точки a . Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что M состоит из тех и только тех точек x , для которых $\rho\,(x, a) < \varepsilon$. Пусть $b \in M$ (рис. 11.3), тогда $\rho\,(a, b) = \varepsilon_1 < \varepsilon$. Зададим $\eta > 0$ такое, что $0 < \eta < \varepsilon - \varepsilon_1$, и рассмотрим окрестность $O_\eta(b)$. Этой окрестности принадлежат все точки y такие, что $\rho(y,b) < \eta$. Покажем, что $O_\eta(b) \subset O(a)$. Зафиксируем точку $y \in O_\eta(b)$. Тогда по неравенству треугольника

$$\rho(a,y) \le \rho(a,b) + \rho(b,y) < \varepsilon_1 + \eta < \varepsilon\,.$$

Значит $y \in O(a)$ для любой точки $y \in O_\eta(b)$ и, следовательно, $O_\eta(b) \subset O(a)$. ▶

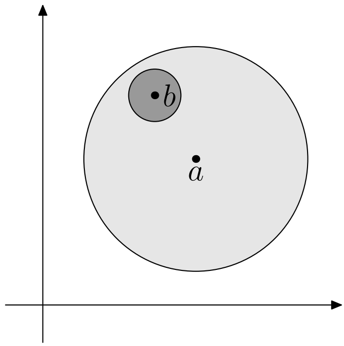

Рис. 11.3. Окрестность – открытое множество.

Упражнение. Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство и множество $M \subset X$. Доказать, что граница ∂M – замкнутое множество.

Теорема (о дополнении к замкнутому множеству). *Для того, чтобы множество M было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $\complement M = X \backslash M$ было открытым.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M замкнуто. Докажем, что $\complement M$ открыто. Пусть $y \in \complement M$. Надо показать, что существует окрестность $O(y)$ такая, что $O(y) \subset \complement M$. Допустим противное. Тогда $\forall\, O(y) \;\; \exists x \in O(y) \;\; x \in M\,, \;\; x \ne y$. Значит y – предельная точка множества M, она принадлежит M в силу замкнутости. Противоречие.

Достаточность. Докажем, что если $\complement M$ открыто, то M замкнуто. Надо показать, что если $y \in M'$ (т.е. если $\forall O(y)$ $\exists x \in M \bigcap O(y)\,,\; x \ne y$), то $y \in M$.

Допустим, что это неверно, т.е. $\exists\, O(y) \subset \complement M$. Но тогда y не является предельной точкой для M. Противоречие. ▶

48.3. Объединение и пересечение открытых и замкнутых множеств

Пусть $\{F_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ – система замкнутых (или открытых) множеств. Объединение замкнутых множеств может быть незамкнуто. Пересечение открытых множеств может не быть открыто.

Теорема. *Пересечение любого числа замкнутых множеств – замкнутое множество. Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана система открытых множеств $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ и $x \in G = \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$. Тогда существует α такое, что $x \in G_\alpha$. По условию G_α – открытое множество, значит $\exists\, O(x)$ $O(x) \subset G_\alpha$, но тогда и $O(x) \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha = G$.

Если F_α – замкнутое множество, то $\complement F_\alpha$ – открытое. Для доказательства утверждения для пересечения замкнутых множеств достаточно рассмотреть множества $\complement F_\alpha$ и применить доказанное утверждение для открытых множеств. ►

Имеет место

Теорема. *Объединение F двух замкнутых множеств F_1 и F_2 – замкнутое множество. Пересечение G двух открытых множеств G_1 и G_2 – открытое множество.*

Упражнение. Доказать эту теорему (рис. 11.4).

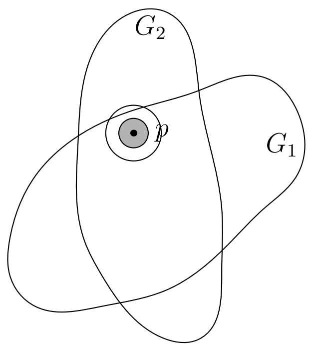

Рис. 11.4. Пересечение двух открытых множеств открыто.

§ 49. Отображение метрических пространств

Пусть $R = \{X, \rho\}$ и $R_1 = \{X_1, \rho_1\}$ – метрические пространства. Пусть на множестве $M \subset X$ задано отображение в X_1 , т. е. любому $x \in M$ поставлен в соответствие элемент $y \in X_1$:

$$x \in M, \quad x \xrightarrow{f} y \in X_1 .$$

Тогда говорят, что задано отображение метрических пространств. На эти отображения можно перенести понятие предела.

49.1. Предел последовательности

Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство и задана последовательность $p_n \in X \quad (n = 1, 2, \dots)$ точек из этого пространства.

Определение. Говорят, что последовательность точек $\{p_n\}$ метрического пространства *сходится* к точке $p \in X$: $p_n \to p$ при $n \to \infty$, если $\rho(p_n, p) \to 0$ ($n \to \infty$).

Таким образом, $p_n \to p$ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \rho(p_n, p) < \varepsilon$.

Определение. Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если существуют такое число $K > 0$ и такой элемент $a \in X$, что $\forall x \in M \quad \rho(x, a) \leq K$. Или $\forall a \in X \quad \exists K = K(a) \quad \forall x \in M \quad \rho(x, a) \leq K$.

Как и для одномерного случая доказываются следующие утверждения.

1. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

2. *Если предел последовательности существует, то он единственен.*

3. *Если последовательность сходится к точке, то и любая ее подпоследовательность сходится к этой точке.*

Определение. Последовательность $p_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) называется *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для любых номеров $n, m \geq N$ $\rho(p_n, p_m) < \varepsilon$.

Пример. Пусть $X = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$); $p_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) – последовательность Коши. Эта последовательность не сходится ни к какой точке пространства (сходится к точке 0, но 0 в пространство X не входит). В пополненном пространстве $X_1 = \left\{ \frac{1}{n}, 0 \right\}$ эта последовательность сходится.

Определение. Если в пространстве всякая последовательность Коши сходится, то пространство называется *полным*, в противном случае оно называется *неполным*.

Всякое неполное пространство можно пополнить.

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство E^n. Выясним, когда последовательность $p_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, ..., a_n^{(k)})$ элементов из E^n ($k = 1, 2, ...$) сходится.

Теорема. *Последовательность* $p_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, ..., a_n^{(k)}) \in E^n$ *сходится к точке* $p = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *при* $k \to \infty$ *тогда и только тогда, когда имеет место покоординатная сходимость, т.е. когда* $\lim\limits_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $p_k \to p$ при $k \to \infty$. Тогда для любого $i = 1, 2, ..., n$

$$\left| a_i^{(k)} - a_i \right| \le \rho(p_k, p) = \sqrt{\left(a_1^{(k)} - a_1\right)^2 + ... + \left(a_n^{(k)} - a_n\right)^2}\,.$$

Значит, $a_i^{(k)} \to a_i$ ($k \to \infty$) для любого $i = 1, 2, ..., n$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i$ ($i = 1, 2, ..., n$). Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер K, что $\forall k \ge K$ $\left| a_i^{(k)} - a_i \right| < \varepsilon/\sqrt{n}$ для $\forall\, i = 1, 2, ..., n$ (ищем K_i для каждого i, а затем выбираем $K = \max\limits_{i=1,\ldots,n} K_i$). Тогда $\forall k \ge K$

$$\rho(p_k, p) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(a_i^{(k)} - a_i\right)^2} \le \max_{i=1,\ldots,n} \left| a_i^{(k)} - a_i \right| \cdot \sqrt{n} < \varepsilon\,.$$

Значит, $p_k \to p$ при $k \to \infty$. ▶

Теорема. *Пространство* E^n *полно. Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была последовательностью Коши.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $p_k \to p$ при $k \to \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \quad \forall\, k, l \ge K \;\; \rho(p_k, p) < \varepsilon$ и $\rho(p_l, p) < \varepsilon$. Отсюда

$$\rho(p_k, p_l) \le \rho\,(p_k, p) + \rho\,(p_l, p) < 2\varepsilon\,,$$

т. е. последовательность $\{p_k\}$ является последовательностью Коши.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $p_k \in E^n$ ($k = 1, 2, \ldots$) есть последовательность Коши. Тогда, так как

$$\left| a_i^{(k)} - a_i^{(l)} \right| \leq \rho(p_k, p_l) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

то числовая последовательность $\left\{ a_i^{(k)} \right\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) есть последовательность Коши. Но тогда она сходится $\left\{ a_i^{(k)} \right\} \to a_i$ ($k \to \infty$). Рассмотрим точку $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E^n$. В силу предыдущей теоремы $p_k \to p$ при $k \to \infty$. ▶

49.2. Предел отображения

Пусть $R = \{X, \rho\}$ и $R_1 = \{X_1, \rho_1\}$ – метрические пространства и $M \subset X$. Пусть на множестве M задано отображение $f: \;\; M \to X_1$.

Справедливо следующее

Утверждение. *Пусть $a \in M'$. Тогда в каждой окрестности точки a содержится бесконечное множество точек из M .*

Действительно, если некоторая окрестность $O(a)$ содержит только конечное число точек из M : $\quad x_1, \ldots, x_m$, то для

$$\varepsilon = \min\left\{\rho(a, x_1), \ldots, \rho(a, x_m)\right\} > 0$$

окрестность $O_\varepsilon(a)$ не будет содержать точек из M , отличных от a . Противоречие. ▶

Пусть $a \in M'$, $a_1 \in X_1$.

Определение. Говорят, что элемент $a_1 \in X_1$ есть *предел отображения* f , $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a_1$, если $\forall\, O(a_1) \;\; \exists\, O(a) \;\; \forall\, x \in M$, $x \in O(a) \backslash a$, $f(x) \in O(a_1)$.

Точно так же, как и для одномерного случая, доказывается теорема об эквивалентности пределов по Коши и по Гейне.

Упражнение. Доказать теорему об эквивалентности пределов по Коши и по Гейне в метрическом пространстве (см. [9] с. 94).

Замечание. Предел вектор-функции. Если $R_1 = E^n$, то отображение f – вектор-функция $f(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$, где компоненты $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ – действительные функции, определенные в

X . Следовательно, для того, чтобы существовал предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x \to a} f_k(x) \quad (k = 1, 2, ..., n) .$$

Таким образом, изучение свойств вектор-функции сводится к изучению свойств скалярных функций.

2 семестр
Лекция 14
(02.04.68)

Пусть $R = \{X, \rho\}$, непустое подмножество $Y \subset X$, $R_1 = \{Y, \rho\}$. Пусть $M \subset Y \subset X$. Если на M задана функция $f(x)$, то можно говорить о пределе $f(x)$ при $x \to a$. Здесь точка $a \in M'(R_1)$ и $a \in M'(R)$ (a – предельная точка в пространстве R_1 и предельная точка в объемлющем пространстве R).
Пример. Рассмотрим множества $X = \left\{\frac{1}{n}, 0\right\}$ и $Y = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Пусть $M = Y$. Если функция $f(x)$ определена на M , то при $x \to 0$ в $R_1 = \{Y, \rho\}$ нельзя говорить о пределе функции, так как $\{0\} \notin M$. Так как $\{0\} \in X$, то в $R = \{X, \rho\}$ можно говорить о пределе функции. M замкнуто в R_1 , а множество предельных точек M'_Y пусто. Так как $M'_X = \{0\}$, а $\{0\} \notin M$, то M незамкнуто в $R = \{X, \rho\}$.
Пример. Рассмотрим одномерное пространство $E^1 = \{\mathbb{R}, \rho\}$ и двумерное пространство $E^2 = \left\{\mathbb{R}^2, \rho\right\}$, $E^1 \subset E^2$. Пусть $M = \mathbb{R}$. Тогда множество M открыто в E^1 и не является открытым в E^2 (рис. 11.5).

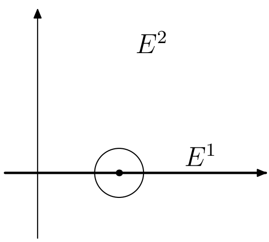

Рис. 11.5. Множество $M = \mathbb{R}$ открыто в E^1 , но не открыто в E^2 .

Таким образом, понятия предела, открытого и замкнутого множеств относительны. Они зависят от того, в каком пространстве множество рассматривается.

Пример. Есть пространства, где нет ни открытых, ни замкнутых нетривиальных множеств, или все множества и открыты и замкнуты. Множество из двух точек на расстоянии $\rho = 1$ – пример пространства, в котором всякая точка является и внутренней и изолированной и все множества которого и открыты и замкнуты [1)] .

Замечание. В общем случае, когда S – метрическое пространство, в нем нет алгебраической структуры. Будем "спасать алгебру в образах" (С. Б. С), именно, будем рассматривать $S = E^n$ – метрическое пространство, в котором есть алгебраическая структура и будем рассматривать функции $R \xrightarrow{f} E^n$. В этом случае можем говорить о пределе суммы, разности и произведения. Доказательство соответствующих теорем может быть проведено как и в действительном одномерном случае.

Если для функций f и g определено скалярное произведение (f, g) , то имеет место

Теорема. *Если функции со значениями в евклидовом пространстве имеют пределы в точке* a , *то и их скалярное произведение*

[1)] В первой части примера лектор подразумевает, видимо, топологическое пространство "слипшихся точек". В данном курсе лектором топологические пространства (см., например, [4]) не рассматривались, но в ряде последующих курсов по математическому анализу, читались. Топологические пространства являются значительно более общими, чем метрические. Открытые множества в топологических пространствах не определяются с помощью метрики, как в метрических пространствах, а вводятся с помощью аксиом.

Пусть X – множество. Топологией τ в X называется такая система его подмножеств, для которой выполняются свойства

1) само X и пустое множество принадлежат τ ;

2) объединение любого множества подмножеств этой системы принадлежит τ ;

3) пересечение любого конечного числа множеств этой системы принадлежит τ .

Множества, принадлежащие системе τ называются открытыми. Если мы возьмем множество X , то наименьшей в нем (говорят, "самой слабой") будет топология, состоящая из X и пустого множества. Других открытых множеств в этом пространстве нет. Пространство с такой топологией называют пространством "слипшихся точек". В этом пространстве нельзя ввести метрику (с сохранением топологии). Всякая другая топология в X содержит самую слабую топологию в качестве подсистемы. В этом же множестве X можно ввести "наибольшую" топологию ("самую сильную"), состоящую из всех подмножеств множества X , это дискретная топология. Пространство с такой топологией является пространством изолированных точек. Именно эту топологию порождает приведенная во второй части примера метрика (в частном случае двухточечного множества). (Ред.)

имеет предел в этой точке.
Доказательство теоремы следует из ограниченности функций в окрестности точки a и из неравенства Коши – Буняковского

$$|(f,g)| \le \|f\| \cdot \|g\| \ .$$

Далее будем рассматривать частный случай $R = E^n$ при $n = 2$. Итак, пусть $R = E^2$, $M \subset E^2$, $z = f(x,y)$, $z \in S$, $O(x_0,y_0) \subset E^2$. Тогда можно рассматривать функцию $z = f(x,y)$ как функцию двух переменных; при фиксированном y можно рассматривать функцию, как функцию от x; а при фиксированном x – как функцию от y. Таким образом, наряду с пределом функции от двух переменных мы можем рассматривать пределы функции от одной переменной при фиксированной второй переменной.

Итак, рассмотрим общий (*двойной*) предел функции в метрическом пространстве

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\,.$$

При фиксированном y получим функцию $x \xrightarrow{f} z \in S$ и можно говорить о пределе в соответствующем одномерном случае:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)\,.$$

Аналогично, при фиксированном x получим

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \psi(x)\,.$$

Если теперь существуют пределы

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = a \in S, \lim_{x\to x_0} \psi(x) = b \in S\,,$$

то получим

$$\lim_{y\to y_0}\left\{\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right\} = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right\} = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\,.$$

Это *повторные* пределы. Заметим, что из существования двойного предела существование повторных пределов не вытекает и наоборот. Заметим также, что повторный предел зависит от того, в каком порядке совершается предельный переход.

2 семестр
Лекция 15
(05.04.68)

Пример ("шапка") (рис. 11.6). а) Пусть $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, если x и y – рациональные; $z = 0$, если хотя бы одна из координат – иррациональное число. Тогда в точке $(0,0)$ двойной предел существует, для рациональных y функция $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \varphi(y)$ не существует, следовательно, не существует и второй повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$. Аналогично, повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не существует.

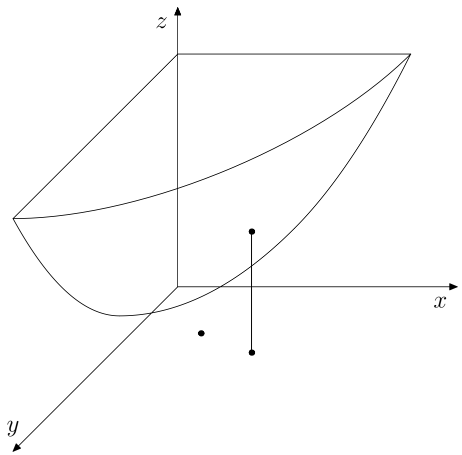

Рис. 11.6. Пример "Шапка".

б) Пусть $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, если x и y – рациональные или только одна координата иррациональна; $z = 0$, если обе координаты – иррациональные числа. Тогда в точке $(0,0)$ двойной предел существует. Но внутренний предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \varphi(y)$ ни для какого $y \neq 0$ не существует. Аналогично, не существует внутренний предел $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \psi(x)$ для $x \neq 0$. Следовательно, и оба повторных предела не существуют.

Пример ("откос") (рис. 11.7). Функция $z = f(x,y)$ определена на множестве $\{(x,y):\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1\}$; при каждом фиксированном x, $0 < x \leq 1$, определим функцию (как функцию только от y, так как x фиксировано)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\,, \\ 1, & x \leq y \leq 1\,, \\ \text{линейна}, & \frac{x}{2} \leq y \leq x\,, \end{cases}$$

$f(0,0) = 0$. Тогда имеем $\psi(x) = \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$ для всех $x \neq 0$, $\varphi(y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = 1$ для всех $y \neq 0$. Соответственно, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$. Так как в любой выколотой окрестности точки $(0,0)$ существуют точки, в которых значения функции равны 1, и существуют точки, в которых значения функции равны 0, то двойного предела функции в точке $(0,0)$ не существует.

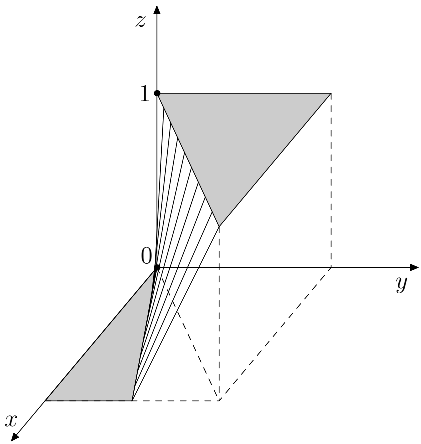

Рис. 11.7. Пример "Откос".

Пример ("палатка") (рис. 11.8). Функция $z = f(x,y)$ определена на множестве $\{(x,y): \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$; при каждом фиксированном x, $0 < x \leq 1$, определим функцию (как функцию только от y, так как x фиксировано)

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & 0\le y\le \frac{x}{4} \quad \text{или} \quad x\le y\le 1\,,\\ 1, & y=\frac{x}{2}\,,\\ \text{линейна}, & \frac{x}{4}\le y\le\frac{x}{2} \quad \text{или} \quad \frac{x}{2}\le y\le x\,,\end{cases}$$

$f(0,0)=0$. Тогда оба повторных предела существуют и обращаются в нуль, а двойного предела нет.

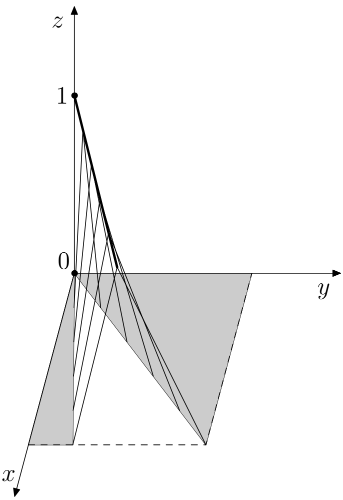

Рис. 11.8. Пример "Палатка".

Теорема о повторном пределе. *Пусть для* $(x,y)\in O\,(x_0,y_0)$ *задана функция* $z=f(x,y)$, $z\in\mathbb{R}$. *Пусть существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0 y\to y_0} f(x,y)=A$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$ ($y\ne y_0$). *Тогда существует* $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ *и он равен* A.

Другими словами, если существует двойной предел и один из внутренних пределов, то существует повторный предел, равный двойному пределу.

Доказательство. Так как существует двойной предел, то это значит, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall p=(x,y)\ne(x_0,y_0)=p_0$, $\rho(p,p_0)<\delta$, $|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. В этом неравенстве перейдем к пределу при $x\to x_0$. Возьмем y такой, что $|y-y_0|<\delta$. По условию

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$ существует. Поэтому можем написать

$$\left| \lim_{x \to x_0} f(x,y) - A \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{при} \quad |y - y_0| < \delta\,.$$

Это значит, что $|\varphi(y) - A| < \varepsilon$ при $0 < |y - y_0| < \delta$, откуда получаем, что существует $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = A$. ▶

Следствие. *Пусть у функции $z = f(x,y)$ существует двойной предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$ и оба повторных предела. Тогда повторные пределы равны:*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = A\,.$$

§ 50. Непрерывность

50.1. Непрерывность функции в точке

Пусть $R = \{X, \rho_X\}$, $S = \{Y, \rho_Y\}$, $M \subset X$ и для любого $x \in M$ определено отображение $f(x) = y \in Y$.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in M$ (т.е. $f \in C(x_0)$), если $\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta > 0 \;\; \forall\,x \in M$, $\rho_X(x, x_0) < \delta$, $\quad \rho_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

Понятие непрерывности не зависит от того, рассматриваем ли мы его в пространствах R и S, или в более обширных метрических пространствах $R_1 \supset R$ и $S_1 \supset S$. Поэтому при доказательстве теоремы о непрерывности функции в точке достаточно рассмотреть случай, когда отображение f определено на всем X.

Следующие теоремы переносятся на метрические пространства.

Теорема (предельное условие непрерывности функции в точке). *Для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) x_0 – *изолированная точка множества* M;
2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема о непрерывности сложной функции в точке. *Пусть имеются метрические пространства $R = \{X, \rho_X\}$, $S = \{Y, \rho_Y\}$, $T = \{Z, \rho_Z\}$ и на множестве $M \subset X$ задано отображение*

$f(x) = y \in Y$. Пусть образ этого отображения $f(M) \subset N$, $\varphi(y) = z \in Z$ (при $y \in M$), $f \in C(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$, $\varphi \in C(y_0)$. Тогда сложная функция $z = \varphi(f(x)) = F(x)$ будет непрерывной в точке x_0.

50.2. Непрерывность функции на множестве

Определение. Функция называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пусть $R = \{X, \rho_X\}$ и $S = \{Y, \rho_Y\}$ – два метрических пространства, $y = f(x)$ ($x \in X$) и $f \in C(X)$.

Определение. Пусть $V \subset Y$. *Полным прообразом* $f^{-1}(V)$ множества V при отображении f называется множество точек $x \in X$ таких, что $f(x) \in V$, т.е. $f^{-1}(V) = \{x \in X : \ f(x) \in V\}$.

Теорема (критерий непрерывности функции на всем пространстве). *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в пространстве X необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого множества $V \subset Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V)$ был открытым в X.*

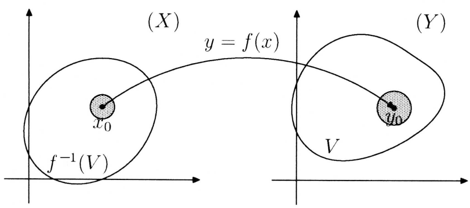

Рис. 11.9. Критерий непрерывности функции: необходимость.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь (рис. 11.9). Пусть функция $f(x) \in C(X)$, V – открытое множество в Y, а $f^{-1}(V)$ – его полный прообраз; пусть $x_0 \in f^{-1}(V)$, $y_0 = f(x_0) \in V$. Так как V– открытое множество, то y_0 – внутренняя точка множества V. Значит, $\exists\, \delta > 0 \ \ \forall y \in Y$, $\rho_Y(y, y_0) < \delta$, $y \in V$. В силу непрерывности f для этого δ $\exists\, \eta > 0 \ \ \forall x \in X$, $\rho_X(x, x_0) < \eta$, $\rho_Y(y, y_0) < \delta$ ($y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$). Значит образ всей η-окрестности точки x_0 входит в V, т.е. $O_\eta(x_0) \subset f^{-1}(V)$, и множество $f^{-1}(V)$ открыто.

2 семестр
Лекция 16
(10.04.68)

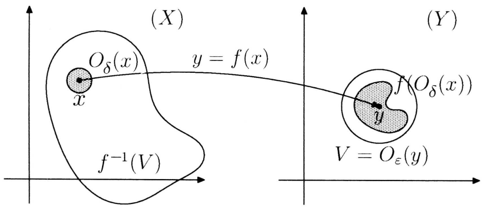

Рис. 11.10. Критерий непрерывности функции: достаточность.

Д о с т а т о ч н о с т ь (рис. 11.10). Пусть дано, что для любого открытого множества $V \subset Y$ множество $f^{-1}(V)$ открыто. Возьмем произвольную точку x из X и пусть $y = f(x)$. Возьмем $V = O_\varepsilon(y)$. Тогда $f^{-1}(V)$ открыто и существует окрестность $O_\delta(x)$ такая, что $O_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$. Следовательно, $f(O_\delta(x)) \subset V$ (т. е. $\forall x'$, $\rho(x, x') < \delta$, $\rho(y, y') < \varepsilon$). Значит отображение непрерывно в точке x и $f \in C(X)$. ▶

Замечание. Образ открытого множества при непрерывном отображении не обязательно открытое множество. Например, для непрерывной функции $y = \sin x$ образом интервала $(0, 2\pi)$ является отрезок $[-1, 1]$ – замкнутое множество.

50.3. Непрерывные отображения метрического пространства в евклидово

Пусть $y = f(x)\colon\ X \xrightarrow{f} E^n = Y$, т. е. f отображает метрическое пространство в евклидово. Так как $y = \{y_1, ..., y_n\}$, то значения функции могут быть заданы посредством чисел $y_k = f_k(x) \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, ..., n$). Таким образом, свойства функции можно изучать по свойствам ее компонент f_k.

Теорема. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы компоненты $f_k(x)$ функции f были непрерывны на X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка x_0 – изолированная, то доказывать нечего, так как в изолированной точке всякая функция непрерывна. Если $x_0 \in X'$, то по теореме о предельном условии функции в точке (с. 231) для непрерывности необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда по теореме о пределе отображения метрического пространства в евклидово, отображение будет непрерывным, если все его компоненты $f_k(x)$ будут непрерывны. ►

Замечание. Если f, g – непрерывные отображения, то по соответствующим теоремам о пределах для действительных функций $f + g$, fg и (f, g) – тоже непрерывные отображения.

§ 51. Компактность

51.1. Относительная компактность

Пусть X – метрическое пространство и $K \subset X$. Будем рассматривать открытые покрытия $\{V_\alpha\}$ множества K: $K \subset \bigcup\limits_{k=1} \{V_\alpha\}$.

Определение. Множество K в метрическом пространстве X называется *компактным*, если для любого его открытого покрытия $\{V_\alpha\}$ найдется конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_k}\}$ ($k = 1, ..., n$), т. е. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{V_{\alpha_k}\}$.

Лемма об открытых множествах. *Пусть $M \subset Y \subset X$. Для того, чтобы M было открыто относительно Y, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое множество G, открытое в X, что $M = G \bigcap Y$.*

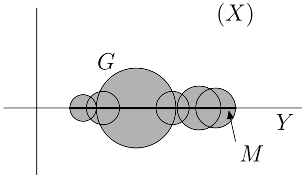

Рис. 11.11. Лемма об открытых множествах.

Д о к а з а т е л ь с т в о (рис. 11.11). Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть M открыто относительно Y. Это значит, что $\forall x \in M \;\; \exists \delta_x > 0$ $O^Y_{\delta_x}(x) \subset M$. Рассмотрим $O^X_{\delta_x}(x)$ ($O^Y_{\delta_x}(x) \subset O^X_{\delta_x}(x)$). Это есть открытое множество в X. Положим $G = \bigcup\limits_{x \in M} O^X_{\delta_x}(x)$. Это объединение открытых относительно X множеств, значит оно открыто в X. Докажем, что $M = G \bigcap Y$. Для этого надо доказать, что $M \subset G \bigcap Y$ и $M \supset G \bigcap Y$.

Пусть $x \in M$, тогда $x \in Y$, но $x \in O^Y_{\delta_x}(x) \subset O^X_{\delta_x}(x) \subset G$. Следовательно, $x \in G \bigcap Y$ и $M \subset G \bigcap Y$.
Докажем, что $M \supset G \bigcap Y$. Пусть $x \in G \bigcap Y$. Так как

$$G \bigcap Y = \bigcup_{x \in M} O^X_{\delta_x}(x) \bigcap Y = \bigcup_{x \in M} O^Y_{\delta_x}(x) \subset M,$$

то $M \supset G \bigcap Y$. Таким образом, $M = G \bigcap Y$.
Достаточность. Пусть $M = G \bigcap Y$, где G открыто в X. Докажем, что M открыто относительно Y. Пусть $x \in M$, тогда $x \in G$. Так как G открыто относительно X, то $\exists\, O_\delta(x)$ $O_\delta(x) \subset G$. Рассмотрим $O_\delta(x) \bigcap Y$. Это пересечение есть $O^Y_\delta(x)$. Но $O^Y_\delta(x) \subset G$ и $O^Y_\delta(x) \subset Y$, значит $O^Y_\delta(x) \subset M$. ▶
Теорема об относительной компактности. *Если $K \subset Y \subset X$ и K компактно относительно Y, то K компактно относительно X, и наоборот.*
Доказательство. Пусть K компактно относительно Y. Это значит, что из открытого относительно Y покрытия $\{V_\alpha\}$ пространства K можно выделить конечное подпокрытие.

1. Пусть $\{G_\alpha\}$ – произвольное открытое покрытие K в X и рассмотрим множества $V_\alpha = G_\alpha \bigcap Y$. По лемме об открытых множествах V_α открыты в Y. Кроме того, эти множества образуют открытое покрытие множества K в Y. В силу компактности K относительно Y из $\{V_\alpha\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_k}\}$ множества K в Y. Рассмотрим соответствующие открытые множества $\{G_{\alpha_k}\}$. Это есть конечное покрытие множества K в X (очевидно $V_\alpha \subset G_\alpha$). Значит, из любого покрытия $\{G_\alpha\}$ в X можно выделить конечное подпокрытие, и, следовательно, K компактно относительно X.

2. Пусть K компактно относительно X. Пусть $\{V_\alpha\}$ – открытое покрытие множества K в Y. По лемме в X найдутся открытые множества $\{G_\alpha\}$ такие, что $V_\alpha = G_\alpha \bigcap Y$. В силу компактности K относительно X можно выделить конечное подпокрытие $\{G_{\alpha_k}\}$, тогда $\{V_{\alpha_k}\}$ – конечное покрытие множества K в Y. ▶

2 семестр
Лекция 17
(12.04.68)

Далее будем обозначать $R\{X,\rho\}$ через X. Пусть Y – компакт $K \subset X$, тогда получим компактное пространство.

51.2. Компактность и замкнутость

Существуют замкнутые пространства, не являющиеся компактными, например, числовая прямая.

Теорема о замкнутости компактного множества. *Всякое компактное множество замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K \subset X$ компактно. Чтобы воспользоваться теоремой о дополнении к замкнутому множеству, надо доказать, что $\complement K = G$ открыто. Таким образом, $\forall y \in G$ надо показать, что $\exists\, O(y) \subset G$.

Зафиксируем $y \in G$. Рассмотрим произвольную точку $x \in K$. Пусть $\delta = \delta_x = \rho(x,y)$, $\rho(x,y) > 0$. Рассмотрим окрестность $O_{\frac{\delta}{2}}(x)$ точки x и окрестность $O_{\frac{\delta}{2}}(y)$ точки y . Рассмотрим совокупность $\left\{O_{\frac{\delta}{2}}(x)\right\}$ всех таких окрестностей $\forall\, x \in K$. Каждая такая окрестность – открытое множество. Значит $\left\{O_{\frac{\delta}{2}}(x)\right\}$ – открытое покрытие множества K . Так как K – компактное множество, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\left\{O_{\frac{\delta_k}{2}}(x_k)\right\}$, где $\delta_k = \delta_{x_k}$ при $k = 1,2,...,n$. Обозначим $\delta_0 = \min\limits_{k=1,\ldots n} \delta_k > 0$. Тогда $O_{\frac{\delta_0}{2}}(y)$ не пересекается ни с одной из построенных нами окрестностей $O_{\frac{\delta_k}{2}}(x_k)$, т. е. $O_{\frac{\delta_k}{2}}(x_k) \bigcap O_{\frac{\delta_0}{2}}(y) = \varnothing \quad \forall\, k = 1,2,...,n$, значит, $O_{\frac{\delta_0}{2}}(y) \bigcap K = \varnothing$, т. е. $O_{\frac{\delta_0}{2}}(y) \subset G$. ►

Теорема о компактности замкнутого подмножества компактного множества. *Пусть $K \subset X$, K компактно* в X *и F – замкнутое подмножество множества K . Тогда F компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{V_\alpha\}$ – произвольное открытое покрытие множества F . Так как F – замкнутое, то $V_0 = \complement_X F$ – открытое множество и $\{V_0, V_\alpha\}$ – открытое покрытие множества K . Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{V_0, V_{\alpha_k}\}$ ($k = 1,2,...,n$). Тогда система $\{V_{\alpha_k}\}$ ($k = 1,2,...,n$) – конечное подпокрытие F , так как $V_0 \bigcap F = \varnothing$. ►

Следствие. *Пусть F – замкнутое множество пространства X, и пусть K – компактное множество пространства X. Тогда $M = F \bigcap K$ компактно.*
Действительно, M – замкнутое подмножество компактного множества.

51.3. Пересечение компактных множеств

Определение. Система множеств $\{M_\alpha\}$ называется *центрированной*, если любая конечная подсистема этой системы имеет непустое пересечение, т. е. если для любого набора индексов $\alpha_1, ..., \alpha_n$ множество $\bigcap\limits_{k=1}^{n} M_{\alpha_k} \neq \varnothing$.
Пример. Система интервалов $\{(-\infty, -n)\}_{n=1}^{\infty}$ – центрированная. Пересечение любого конечного числа этих интервалов не пусто, а пересечение всех интервалов пусто.
Теорема. *Всякая центрированная система компактных множеств имеет непустое пересечение.*
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{K_\alpha\}$ – центрированная система компактных множеств и K – множество из системы $\{K_\alpha\}$. Допустим, что $\bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha = \varnothing$. Пусть $x \in K$. Тогда $x \notin \bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha$, значит x не входит хотя бы в одно K_α. Отсюда следует, что существует такой номер α, что $x \in V_\alpha = \complement K_\alpha$. Таким образом, открытые множества $V_\alpha = \complement K_\alpha$ образуют открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ множества K. Из $\{V_\alpha\}$ выделим конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_k}\}$ ($k = 1, 2, ..., n$) множества K. Каждая точка $x \in K$ входит в некоторое множество V_{α_k}. Значит, точка x не входит в соответствующее K_{α_k}. Следовательно, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} K_{\alpha_k} \bigcap K = \varnothing$, что противоречит центрированности системы $\{K_\alpha\}$ (мы нашли набор из $n{+}1$ элемента центрированной системы $\{K_\alpha\}$: K_{α_k} при $k = 1, 2, ..., n$ и множества K из этой же системы). Таким образом, $\bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha \neq \varnothing$. ►

В качестве следствия мы получим обобщение теоремы о вложенных отрезках.
Следствие. *Пусть* $X \supset K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_n \supset ...$, *где* K_i ($i = 1, 2, ...$) – *непустые компактные множества. Тогда* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$.

Теорема о существовании предельной точки. *Пусть* $K \subset X$, K *компактно и пусть* M *– его бесконечное подмножество,* $M \subset K$. *Тогда в* K *найдется предельная точка множества* M .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заключение теоремы неверно, т.е. никакая точка множества K не является предельной точкой для M . Значит, любая точка $y \in K$ или не входит в M (тогда y – внешняя точка для M , и значит, найдется окрестность $O(y)$ такая, что $O(y) \bigcap M = \varnothing$) или y входит в M , но не является предельной точкой (тогда y – изолированная точка M , и значит, найдется окрестность $O(y)$ такая, что $O(y) \bigcap M = y$).

Таким образом, каждая точка $y \in K$ имеет такую окрестность, которая содержит не более одной точки множества M . Совокупность всех таких окрестностей $\{O(y)\}$ является открытым покрытием множества K . Так как K компактно, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{O_k(y)\}$ ($k = 1, ..., n$), причем в $\{O_k(y)\}$ будет содержаться не более n точек множества M . Но по условию множество M бесконечно и $M \subset K$. Полученное противоречие доказывает теорему. ▶

51.4. Компактные множества в евклидовых пространствах

Пусть E^N – N-мерное евклидово пространство.

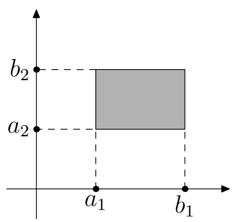

Рис. 11.12. 2-мерная клетка.

Определение. N*-мерной клеткой* I называется совокупность таких точек $(x_1, x_2, ..., x_N) \in E^N$, что $a_k \le x_k \le b_k$ ($k = 1, ..., N$), где $a_k < b_k$ (рис. 11.12).

N-мерная клетка I – простейшее ограниченное замкнутое множество в пространстве E^N .

Рассмотрим вложенную систему клеток $I_n \supset I_{n+1}$ ($n = 1, 2, ...$).

Теорема о вложенной системе *N*-мерных клеток. *Всякая вложенная система N-мерных клеток имеет непустое пересечение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $N = 1$ теорема уже доказана (смотри теорему Кантора о вложенных отрезках п. 6.3, с. 35). Пусть $N > 1$ и $\{I_n\}$ – вложенная система N-мерных клеток. Зафиксируем число k ($1 \le k \le N$) и рассмотрим k-ые координаты элементов клеток. По определению N-мерной клетки $\forall n = 1, 2, ...$ $a_k^{(n)} \le x_k^{(n)} \le b_k^{(n)}$. В силу вложенности клеток ($I_n \supset I_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$) следует, что отрезки $\left[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}\right]$ ($n = 1, 2, ...$) образуют вложенную систему отрезков. Значит по теореме Кантора существует такая точка $c_k \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}\right]$, что $a_k^{(n)} \le c_k \le b_k^{(n)}$. Тогда точка $c = (c_1, ..., c_N) \in I_n$ ($\forall n = 1, 2, ...$). ►

Теорема о компактности *N*-мерной клетки. *Всякая N-мерная клетка компактна.*

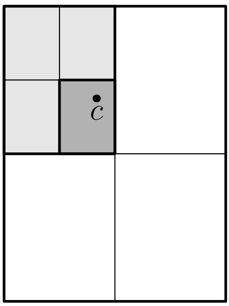

Рис. 11.13. Компактность клетки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть I – N-мерная клетка, $I \subset E^N$. Предположим, что существует открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ клетки I, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Разделим клетку I на 2^N равных частей – меньших клеток (рис. 11.13). Тогда среди этих меньших клеток найдется такая, что из ее бесконечного открытого покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие. Продолжая далее этот процесс, получим стягивающуюся систему N-мерных клеток таких, что из их открытого покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие. По предыдущей теореме о вложенной системе N-мерных клеток найдется $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Но $c \in V_\alpha$ из покрытия, а так как V_α открыто, то существует окрестность $O(c)$ такая, что $O(c) \subset V_\alpha$. С другой стороны, существует номер n такой, что $I_n \subset O(c) \subset V_\alpha$. Противоречие. ▶

Отметим, что множество $M \subset X$ является ограниченным (см. определение в п. 49.1 на с. 222) , если найдется такой шар S пространства X, что $M \subset S$.

Следствие. *Всякое ограниченное замкнутое множество в пространстве E^N компактно.*

Доказательство. Пусть F – ограниченное замкнутое множество в N-мерном пространстве E^N. Так как оно ограничено, то оно может быть погружено в N-мерную клетку I. Но I компактна. По теореме о компактности замкнутого подмножества компактного множества F тоже компактно. ▶

Теорема (критерий компактности в N-мерном евклидовом пространстве). *Для того, чтобы множество в E^N было компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Достаточность уже доказана (смотри следствие из предыдущей теоремы).

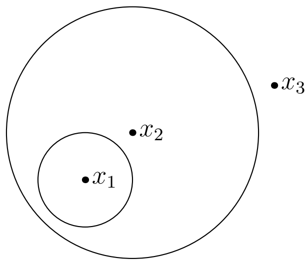

Рис. 11.14. Критерий компактности: необходимость.

Необходимость замкнутости доказана в теореме о замкнутости компактного множества. Докажем теперь необходимость ограниченности. Пусть $M \subset E^N$ и множество M компактно. Допустим, что это множество неограничено. Тогда для любого шара S найдется точка $x \in M$ такая, что $x \notin S$. Возьмем точку $x_1 \in M$

и рассмотрим окрестность $O_1(x_1)$. Тогда найдется точка $x_2 \in M$ такая, что $x_2 \notin O_1(x_1)$ (рис. 11.14). Значит, $\rho(x_1, x_2) \geq 1$. Возьмем окрестность $O(x_2)$ точки x_2 такую, что $O(x_2) \supset O_1(x_1)$. Тогда найдется точка $x_3 \notin O(x_2)$, и следовательно, $\rho(x_3, x_1) \geq 1$ и $\rho(x_3, x_2) \geq 1$. Продолжая далее этот процесс, получим бесконечное подмножество множества M, состоящее из точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Это подмножество, очевидно, не имеет предельных точек в E^N, и тем более, в M, что противоречит компактности M в силу теоремы о существовании предельной точки в бесконечном подмножестве компактного множества. Значит, множество M ограничено. ►

Замечание. Так же, как в этой теореме, доказывается необходимость ограниченности компактного множества в произвольном метрическом пространстве. Таким образом, всякое компактное множество ограничено и замкнуто, а в евклидовом пространстве верно и обратное. [2)]

2 семестр
Лекция 18
(17.04.68)

Пусть X – компактное метрическое пространство и $M = \{x_n\} \subset X$. M – счетное множество. Если $\{x_n\}$ – последовательность Коши, то существует предельная точка $a \in X$ для этой последовательности. По аналогии с одномерным случаем доказывается, что последовательность Коши сходится. Таким образом, получаем

Следствие. *Всякое компактное метрическое пространство полно.*

[2)] Ограниченное замкнутое множество в метрическом пространстве не обязательно компактно. Например, метрическое пространство, состоящее из счетного множества точек с попарными расстояниями, равными 1 (пространство изолированных точек), является ограниченным замкнутым множеством, но не компактным, так как в нем нет предельных точек (см. теорему о существовании предельной точки на с. 238). (Ред.)

§ 52. Непрерывность и компактность

52.1. Сохранение компактности при непрерывном отображении

Пусть X – компактное метрическое пространство, Y – произвольное метрическое пространство. Рассмотрим функцию

$$y = f(x): \quad X \to Y\,,$$

непрерывную на X .

Критерий непрерывности в метрических пространствах говорит о сохранении свойств при переходе к прообразам (прообраз открытого множества открыт, см. п. 50.2 с. 232). Из следующей теоремы следует, что при непрерывном отображении сохраняются и некоторые свойства прообразов, именно, при непрерывном отображении при переходе от прообразов к образам сохраняется компактность.

Теорема о сохранении компактности при непрерывном отображении. *Пусть X – компактное метрическое пространство, Y – произвольное метрическое пространство, на X определена функция $y = f(x)$, $f \in C(X)$, $f(X) \subset Y$. Тогда $f(X)$ – компактное множество в Y.*

Таким образом, непрерывный образ компактного множества есть компактное множество.

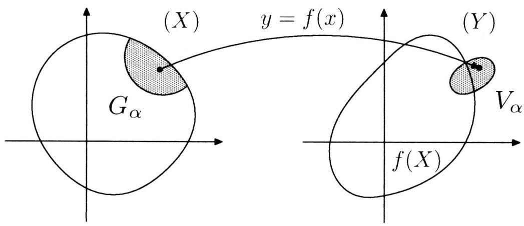

Рис. 11.15. Образ компакта при непрерывном отображении – компакт.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть $\{V_\alpha\}$ – открытое покрытие множества $f(X)$: $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha \supset f(X)$, $V_\alpha \subset Y$. Обозначим $f^{-1}(V_\alpha) = G_\alpha$ (рис. 11.15). По критерию непрерывности

функции в метрическом пространстве G_α – открытое множество в пространстве X. Каждая точка $x \in X$ принадлежит некоторому G_α, поэтому $\{G_\alpha\}$ – открытое покрытие пространства X. следовательно $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha = X$. В силу компактности пространства X из покрытия $\{G_\alpha\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{G_{\alpha_k}\}$ ($k = 1, 2, ..., n$) множества X, следовательно $\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{\alpha_k} = X$.
Рассмотрим соответствующую систему множеств $\{V_{\alpha_k}\}$. Так как $f(G_\alpha) \subset V_\alpha$, а $f\left(f^{-1}(Y)\right) = f(X)$, то

$$f(X) \subset \bigcup_{k=1}^{n} f(G_{\alpha_k}) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{\alpha_k}.$$

Значит $\{V_{\alpha_k}\}$ – конечное подпокрытие множества $f(X)$, т. е. $f(X)$ компактно. ►

Следствие (обобщение теоремы Вейерштрасса для непрерывных функций). *Если непрерывная функция $y = f(x)$ задана на компактном множестве K в пространстве X, то $f(K)$ – ограниченное замкнутое множество в пространстве Y.*

52.2. Равномерная непрерывность

Пусть X, Y – метрические пространства и $M \subset X$. Рассмотрим функцию $y = f(x)$ ($x \in M$, $y \in Y$).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве M, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, x' \in M$, $\rho_X(x, x') < \delta$, $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Теорема о равномерной непрерывности. *Пусть X – компактное метрическое пространство, Y – метрическое пространство, и пусть $y = f(x)$ ($x \in X$, $y \in Y$) – функция, непрерывная на пространстве X. Тогда функция $f(x)$ равномерно непрерывна на X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f(x)$ непрерывна на X, то $\forall x \in X \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \eta(\varepsilon, x) > 0 \;\; \forall \xi \in X$, $\rho_X(x, \xi) < \eta(\varepsilon, x) = \eta(x)$, $\rho_Y(f(x), f(\xi)) < \varepsilon$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие окрестность этой точки $O_{\frac{\eta(x)}{2}}(x) = G_x$. Таким образом, мы построили открытое покрытие $\{G_x\}$ пространства X: $\bigcup\limits_x G_x = X$.

По условию, X – компактное метрическое пространство, следовательно, из $\{G_x\}$ можно выделить конечное подпокрытие, т. е. в X найдутся точки $x_1, x_2, ..., x_n$ такие, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{x_k} = X$. В силу выбора окрестностей для любых $k = 1, 2, ..., n$ и для любых $\xi \in X$ таких, что $\rho_X(x_k, \xi) < \frac{\eta(x_k,)}{2} = \frac{\eta_k}{2}$, будет $\rho_Y\left(f(x_k), f(\xi)\right) < \varepsilon$.
Так как $\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{x_k} = X$, то $\forall \xi \in X \;\; \exists k \;\; \rho_X(x_k, \xi) < \frac{\eta_k}{2}$. Возьмем $\delta = \min\limits_{k=1,\ldots,n} \frac{\eta_k}{2} > 0$ и рассмотрим точки x такие, что $\rho_X(x, \xi) < \delta$. Так как $\rho_X(x_k, \xi) < \frac{\eta_k}{2} < \eta_k$ для некоторого k, то

$$\rho_X(x, x_k) \leq \rho_X(x, \xi) + \rho_X(\xi, x_k) < \delta + \frac{\eta_k}{2} < \eta_k\,.$$

Отсюда следует, что

$$\rho_Y\left(f(x), f(\xi)\right) < \rho_Y\left(f(x), f(x_k)\right) + \rho_Y\left(f(\xi), f(x_k)\right) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,.$$

►

52.3. Непрерывность обратного отображения

Теорема о непрерывности обратного отображения. *Пусть X – компактное метрическое пространство и $y = f(x)$ – непрерывное взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y. Тогда функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна на множестве Y.*
Доказательство. Воспользуемся критерием непрерывности. Докажем, что для любого открытого множества $G \subset X$ его прообраз $V = f(G)$ при отображении $f^{-1}(y)$ есть множество, открытое в Y. Таким образом, надо доказать, что образ всякого открытого множества при отображении f есть открытое множество.

Рассмотрим дополнение $\complement G = F$ множества G. Это – замкнутое множество в X. Тогда F компактно. По теореме о сохранении компактности при непрерывном отображении $f(F)$ – компактное множество в пространстве Y. Но так как всякое компактное множество замкнуто, то $f(F)$ – замкнутое множество в пространстве Y. В силу взаимной однозначности $f(G) = \complement f(F)$. Значит множество $V = f(G)$ открыто. ►

§ 53. Связность

Теорема о промежуточном значении еще не доказана. Она имеет смысл, когда пространство образов есть числовая прямая, а функция определена на связном пространстве. "Теорема о промежуточном значении породила связность." (С. Б. С.)

53.1. Определения

Определения. Пусть A и B – множества такие, что $A\bigcap B=\varnothing$. Говорят, что они *отделимы множествами типа* $\mathcal{G}$ (класс открытых или замкнутых множеств), если существуют непересекающиеся множества $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, $G_1\bigcap G_2 = \varnothing$, такие, что $G_1 \supset A$, $G_2 \supset B$.

Например, два непересекающихся отрезка могут быть отделены друг от друга открытыми множествами (интервалами); два непересекающихся интервала с общей граничной точкой отделить замкнутыми множествами нельзя.

От природы тех множеств, которыми мы покрываем множества, зависит отделимость.

2 семестр
Лекция 19
(18.04.68)

Метрическое пространство X называется *несвязным*, если оно разбивается на два непустых открытых множества: $X = A\bigcup B$, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $A\bigcap B=\varnothing$, множества A и B открыты (а значит, и замкнуты: $B = \complement A$, $A=\complement B$).

Во всяком пространстве существуют два тривиальных множества, являющихся одновременно и открытыми и замкнутыми, это само пространство X и пустое множество. Таким образом, пространство несвязно, если в нем существуют нетривиальные множества, одновременно и открытые и замкнутые. Можно также сказать, что пространство несвязно, если оно разбивается на два непустых множества, которые отделяются открытыми множествами.

Пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых множества, которые отделяются открытыми множествами.

Таким образом, пространство связно, если в нем существует только два открыто-замкнутых тривиальных множества, а именно, само пространство и его пустое подмножество.
Пусть $M \subset X$. Множество M *связно*, если оно является связным, когда оно рассмотривается как метрическое пространство.
Связность множества не зависит от погружения в пространство.
Определение связности по Хаусдорфу. Множество $M \subset X$ называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых множеств, отделимых открытыми в X множествами.

53.2. Связные множества на числовой прямой

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}$ *связно*, если

$$\forall\, x, y \in M \Rightarrow [x, y] \subset M\,.$$

Покажем эквивалентность этих двух определений связности множества на прямой.
Теорема (структура связных множеств на числовой прямой). *Для того, чтобы множество на числовой прямой было связно по Хаусдорфу, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все промежуточные точки, т.е. если* $x, y \in M$, *то для* $\forall\, z$, $x < z < y$, $\Rightarrow$ $z \in M$.
Следствие. *Существуют следующие связные множества на числовой прямой* $\mathbb{R}$:

$$\textit{точка}\ x_0\,, \quad (-\infty, b)\,, \quad (-\infty, b]\,, \quad (a, +\infty)\,,$$

$$[a, +\infty)\,, \quad (-\infty, +\infty)\,, \quad (a, b)\,, \quad [a, b)\,, \quad (a, b]\,, \quad [a, b]\,,$$

где a *и* b *– действительные числа,* $a \leq b$.
Доказательство теоремы. Докажем, что $M \subset \mathbb{R}$ несвязно тогда и только тогда, когда $\exists\, x, y \in M$, $x < y$, $\exists\, z \notin M$, $x < z < y$.
Если это условие выполняется, то множество M можно разбить на две непересекающиеся части, отделимые открытыми множествами.
Действительно, положим

$$M_1 = M \bigcap (-\infty, z)\,, \quad M_2 = M \bigcap (z, +\infty)\,.$$

Для этих множеств имеем $M_1 \bigcup M_2 = M$, а для открытых множеств $G_1 = (-\infty, z) \supset M_1$ и $G_2 = (z, +\infty) \supset M_2$ $\quad G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$. Значит множество M несвязно.

Допустим теперь, что множество M несвязно, т. е. его можно разбить на два таких непустых множества M_1 и M_2, что выполняется $M_1 \bigcup M_2 = M$ и что $M_1 \subset G_1$, $M_2 \subset G_2$, где $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$ и G_1, G_2 – открытые множества. Тогда существуют $x \in M_1$, $y \in M_2$, и пусть $x < y$. Положим

$$G_0 = G_1 \bigcap (-\infty, y) = G_1 \bigcap (-\infty, y]$$

(так как $y \in M_2 \;\Rightarrow\; y \in G_2 \;\Rightarrow\; y \notin G_1$). Пусть $z = \sup\limits_{\xi \in G_0} \xi$.

Докажем, что $z < y$. В самом деле, $y \in G_2$, но G_2 открыто. Поэтому y входит в G_2 вместе с некоторой своей окрестностью $O(y)$. Поэтому множество G_0 имеет верхнюю грань, меньшую, чем y (иначе в любой окрестности точки y находились бы точки из G_0).

Аналогично показывается, что $z > x$.

Очевидно, что точка $z \notin G_1$ (иначе она входила бы в G_1 с целой окрестностью и не была бы верхней гранью множества G_0). Так же $z \notin G_2$ (иначе она входила бы в G_2 с целой окрестностью и снова не была бы верхней гранью точек из G_0). Значит z не входит ни в M_1 ни в M_2, откуда следует $z \notin M$. Таким образом, мы доказали, что если множество M несвязно, то оно не обладает свойством содержать промежуточные точки. ►

53.3. Связность и непрерывность

Как показывает следующая теорема, непрерывный образ связного множества есть связное множество.

Теорема о сохранении связности при непрерывном отображении. *Пусть X, Y – метрические пространства и $y = f(x)$ – функция, непрерывная на пространстве X. Тогда, если X – связно, то $f(X)$ связно в Y.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $f(X)$ несвязно, т. е. существуют множества $M_1, M_2 \in Y$ такие, что $f(X) = M_1 \bigcup M_2$, где $M_1 \bigcap M_2 = \varnothing$, $M_1 \neq \varnothing$, $M_2 \neq \varnothing$, $M_1 \subset G_1$ $\;M_2 \subset G_2$, где $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$ и G_1, G_2 – открытые в Y множества. Рассмотрим множества $f^{-1}(G_1) = V_1$ и $f^{-1}(G_2) = V_2$. По критерию непрерывности множества V_1 и V_2 открыты в пространстве X и не пересекаются, как прообразы непересекающихся множеств. Так как $X = V_1 \bigcup V_2$, то X несвязно. Мы получили противоречие. ►

Как следствия получаем следующие теоремы.

Теорема о промежуточном значении. *Пусть $f(x)$ – непрерывное отображение связного метрического пространства X в числовую прямую $\mathbb{R}$. Тогда $f(X)$ связно в $\mathbb{R}$, т.е. функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения.*

Таким образом, если $y_1 \in f(X)$, $y_2 \in f(X)$, $y_1 \leq y_2$, то $\forall y$, $y_1 \leq y \leq y_2$, $\exists x \in X \quad f(x) = y$.

Теорема о максимальном и минимальном значениях. *Если X – компакт, а $Y = \mathbb{R}$, то действительная непрерывная функция $f(x)$ принимает на X свои максимальное и минимальное значения.*

Действительно, $F = f(X)$ – компактное множество в $\mathbb{R}$. Значит F – ограниченное замкнутое множество на числовой прямой. Следовательно $\sup\limits_{y \in F} y \in F$, $\inf\limits_{y \in F} y \in F$. ►

Отметим, что связные компактные множества на числовой прямой – отрезки. Следовательно, если X – связный компакт, $f(x)$ – действительная непрерывная функция на X, то $f(X) = [m, M]$, где $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Глава 12

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

2 семестр
Лекция 20
(20.04.68)

Далее предполагается линейная структура пространства прообразов и пространства образов. Линейной структурой обладают евклидовы пространства.

Будем рассматривать $X = E^n$, $Y = E^m$ и отображения $y = f(x)$, $x \in M \subset E^n$, $y \in E^m$. Простейший случай отображений – линейные отображения A пространства E^n в E^m: $y = Ax$. Пусть $\mathcal{L}(E^n, E^m)$ – пространство линейных отображений E^n в E^m.

Будем обозначать через $\|x\|_{E^n} = \|x\|_n$ норму элемента $x \in E^n$, соответственно $\|y\|_{E^m} = \|y\|_m$ – норма элемента $y \in E^m$. Для линейного отображения $y = Ax$: $E^n \xrightarrow{A} E^m$ $\forall\, x \in E^n$

$$\|y\|_m = \|Ax\|_m \le K\,\|x\|_n\ .$$

Наименьшее число K, для которого это неравенство выполняется для любого $x \in E^n$, называется *нормой* $\|A\|$ *отображения* A:

$$K_{\min} = \|A\| = \sup_{\|x\|_n=1} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n} = \sup_{\|x\|_n=1} \|Ax\|_m \geq 0\,.$$

Таким образом, $\|A\| \in \mathbb{R}_+$.

Можно определить умножение линейных преобразований. Пусть заданы евклидовы пространства E^n , E^m , E^l . Если рассмотрим отображения $A\colon\ E^n \to E^m$ и $B\colon\ E^m \to E^l$, то получим отображение $BA = C\colon\ E^n \to E^l$.

§ 54. Производные и дифференциалы первого порядка

Пусть дано отображение $E^n \xrightarrow{f} E^m$ и множество $M \subset E^n$. Будем изучать случай $n > 1$, $m = 1$ и будем считать, что функция f задана на открытом множестве $M \subset E^n$, т. е. $M = M_i$.

54.1. Частные производные

Для простоты будем записывать функцию в форме функции от двух переменных $z = f(x,y)$, $(x,y) \in M \subset E^2$.

Пусть $p_0 = (x_0, y_0) \in M$. Тогда $p = (x, y_0) \in M$ и для x из некоторой окрестности $O(x_0)$ можно рассмотреть функцию $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Если существует предел

$$\varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y_0) - f(x, y_0)}{h}\,,$$

то этот предел называется *частной производной* $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y_0)$ функции f по x в точке $p = (x, y_0)$. Аналогично определяется $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x_0, y)$ – частная производная функции f по y в точке $p = (x_0, y)$.

Если функция f – функция от n переменных, то получим n частных производных: по каждой переменной своя производная. При вычислении частных производных фиксируются все переменные, кроме той, по которой берется производная.

Не все свойства функций одной переменной переносятся на функции n переменных. Например, из существования частных производных функции $z = f(x,y)$ в окрестности точки $p_0 = (x_0, y_0)$ не следует непрерывность функции в точке p_0 .

Пример. Для функции

$$z = f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0,\ \ y \neq 0\,, \\ 0, & x = 0,\ \ \text{или}\ \ y = 0\,, \end{cases}$$

существуют $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$, но функция разрывна в точке (0,0) [1].

При вычислении частных производных функции двух переменных поведение функции рассматривается не в окрестности точки, а только на горизонтальной и вертикальной прямых, проходящих через заданную точку p_0.

54.2. Дифференциал первого порядка функции многих переменных

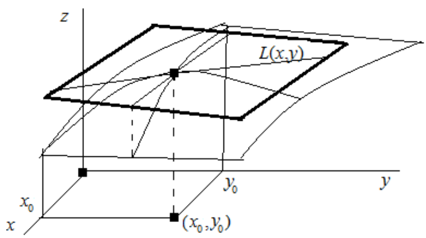

Рис. 12.1. Касательная плоскость.

Касательная плоскость (рис. 12.1) – аналог касательной к графику функции одной переменной. Рассмотрим точку (x_0, y_0, z_0). Уравнение наклонной плоскости, проходящей через эту точку, может быть записано в следующем виде:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

или $z = L(x,y)$, где $L(x,y) = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ – линейная неоднородная функция.

[1] Пример функции, разрывной в точке (0,0) и имеющей частные производные всюду в окрестности точки (0,0), смотри в книге [3] на с. 148. (Ред.)

Определение. Плоскость $z = L(x,y)$ называется *касательной плоскостью* к поверхности $\zeta = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$, если

$$f(x,y) - L(x,y) = o\left(\rho(p,p_0)\right), \quad \rho(p,p_0) \to 0,$$

где $p = (x,y)$, $p_0 = (x_0, y_0)$.

Таким образом, касательная плоскость к поверхности в точке – это такая плоскость, которая имеет в окрестности точки соприкосновение с поверхностью порядка выше первого.

Определение. Функция $z = f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке $p_0 = (x_0, y_0)$, если ее приращение имеет главную линейную часть относительно приращения аргументов, т. е. если

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) = a(x-x_0) + b(y-y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0,$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Другими словами, если

$$\Delta f(x_0,y_0) = a\Delta x_0 + b\Delta y_0 + o(\rho), \quad \rho \to 0.$$

Упражнение. Доказать, что поверхность $\zeta = f(x,y)$ имеет касательную плоскость в точке $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ тогда и только тогда, когда функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $p_0 = (x_0, y_0)$.

Определение. Главная линейная часть приращения функции

$$a\Delta x_0 + b\Delta y_0,$$

если она существует, называется *дифференциалом* функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0).

Обозначим $\Delta x_0 = dx_0$, $\Delta y_0 = dy_0$. Если дифференциал функции обозначить через $df(x,y)$, то

$$df(x,y) = adx + bdy,$$

$$\Delta f(x,y) = a\,dx + b\,dy + o(\rho) \quad (\rho \to 0).$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_x f(x_0,y_0) = f(x,y_0) - f(x_0,y_0);$$

$$\Delta_y f(x_0,y_0) = f(x_0,y) - f(x_0,y_0);$$

$$\Delta_x \Delta_y f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0.$$

Замечание 1 (непрерывность дифференцируемой функции). *Если функция дифференцируема в точке* (x_0,y_0), *то она непрерывна в этой точке.*

Замечание 2 (необходимое условие дифференцируемости). *Если функция* $f(x,y)$ *дифференцируема в точке* (x_0,y_0), *то она в этой точке имеет частные производные первого порядка.*

Действительно, если $\Delta y_0=0$, то

$$f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=a\Delta x_0+o(\rho) \quad (\rho\to 0),$$

откуда

$$\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x_0}=a+o\left(\frac{\rho}{\Delta x_0}\right)=a+o(1) \quad (\rho\to 0).$$

Значит, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ существует и равна a. Аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ существует и равна b. ▶

Таким образом, получаем *основную формулу для дифференциала функции*:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Отсюда, в частности, следует единственность дифференциала.

Геометрический смысл дифференциала функции многих переменных – приращение аппликаты касательной плоскости (рис. 12.2).

Замечание 3 (достаточное условие дифференцируемости функции в точке). *Пусть* $f(x,y)$ *имеет частные производные* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *в некоторой окрестности* $O(x_0,y_0)$ *точки* (x_0,y_0), *и* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в самой точке* (x_0,y_0). *Тогда функция* $f(x,y)$ *дифференцируема в точке* (x_0,y_0).

В самом деле, применяя формулу Лагранжа, получим

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0)&=f(x,y)-f(x_0,y_0)=\\&=f(x,y)-f(x,y_0)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=\\&=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\vartheta_1\Delta y_0)\Delta y_0+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\vartheta_2\Delta x_0,y_0)\Delta x_0.\end{aligned}$$

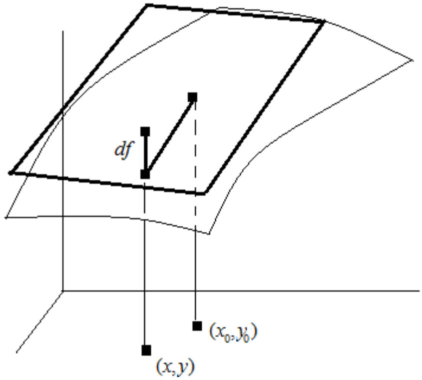

Рис. 12.2. Геометрический смысл дифференциала – приращение аппликаты касательной плоскости.

По непрерывности частных производных в точке (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta_2 \Delta x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \alpha(x, y),$$
$$\text{где} \quad \alpha \to 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \to (x_0, y_0)\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \vartheta_2 \Delta y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(x, y),$$
$$\text{где} \quad \beta \to 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \to (x_0, y_0)\ .$$

Значит,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_0 + \alpha \Delta x_0 + \beta \Delta y_0 =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y_0 + o(\rho) \quad (\rho \to 0)\,,$$

откуда и следует дифференцируемость. ►

2 семестр
Лекция 21
(24.04.68)

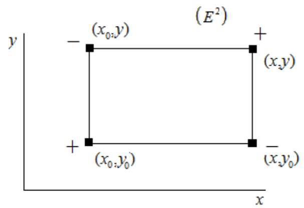

Рис. 12.3. Схема знаков для составления второй смешанной разности.

Теорема (критерий дифференцируемости функции двух переменных). *Для того, чтобы функция $z = f(x, y)$ была дифференцируема в точке (x_0, y_0) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *частные производные* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ *и* $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ *существуют;*

2) $\Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) = o(\rho) \quad (\rho \to 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (по Валле-Пуссену [1] с. 149). Необходимость условия 1) очевидна. Рассмотрим тождество

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f(x, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) + \Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0)$$

(см. на рис. 12.3 схему знаков для составления второй смешанной разности). В силу условия 1) при $\rho \to 0$

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x_0 + o(\Delta x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x_0 + o(\rho)\,,$$

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y_0 + o(\rho)\,.$$

Тогда получим

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y_0 + \Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) + o(\rho) \quad (\rho \to 0)\,,$$

и для того, чтобы $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y_0 = df(x_0, y_0)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) + o(\rho) = o(\rho) \quad (\rho \to 0),$$

откуда следует условие $\Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) = o(\rho) \quad (\rho \to 0)$. ►

54.3. Частные производные сложной функции

Пусть отображение $\Phi: \begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$ определено в окрестности $O(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), $\Phi(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$ и функция $z = f(u, v)$ определена в окрестности $O(u_0, v_0)$. Рассмотрим сложную функцию $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = F(x, y)$.

Теорема (производная сложной функции). *Пусть функция $f(u, v)$ дифференцируема в точке (u_0, v_0). Если функции φ, ψ имеют частные производные $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0$ в точке (x_0, y_0), то сложная функция $F(x, y)$ имеет частную производную $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$ в точке (x_0, y_0). Если функции φ, ψ имеют частные производные $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0$ в точке (x_0, y_0), то сложная функция $F(x, y)$ имеет частную производную $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$ в точке (x_0, y_0).*

Доказательство. Так как функция $f(u, v)$ дифференцируема в точке (u_0, v_0), то

$$f(u, v) - f(u_0, v_0) = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 \Delta u_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 \Delta v_0 + o\left(\sqrt{(\Delta u_0)^2 + (\Delta v_0)^2}\right)$$

при $\Delta u_0 \to 0$, $\Delta v_0 \to 0$. Эта формула справедлива при любых приращениях Δu_0 и Δv_0. Возьмем приращения специального вида. Рассмотрим функции $u = \varphi(x, y_0)$, $v = \psi(x, y_0)$. Тогда приращения $\Delta u_0 = \varphi(x, y_0) - \varphi(x_0, y_0)$ и $\Delta v_0 = \psi(x, y_0) - \psi(x_0, y_0)$. Заметим, что так как функции φ и ψ в точке (x_0, y_0) имеют частные производные, то $\Delta u_0 \to 0$ и $\Delta v_0 \to 0$ когда $\Delta x_0 \to 0$, и более того, $\frac{\Delta u_0}{\Delta x_0}$ и $\frac{\Delta v_0}{\Delta x_0}$ ограничены. Теперь

$$\frac{F(x_0+\Delta x_0, y)-F(x_0,y_0)}{\Delta x_0} =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 \frac{\varphi(x_0+\Delta x_0, y_0)-\varphi(x_0,y_0)}{\Delta x_0} +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 \frac{\psi(x_0+\Delta x_0, y)-\psi(x_0,y_0)}{\Delta x_0} + o(1)$$

при $\Delta x_0 \to 0$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x_0 \to 0$. Получим, что функция $F(x,y)$ имеет частную производную по x и эта производная выражается следующей формулой

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Аналогично получим, что

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y}. \qquad \blacktriangleright$$

В частности, если $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, $F(x)=f(\varphi(x),\psi(x))$, то получим формулу:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{d\psi}{dx}.$$

54.4. Дифференциал вектор-функции

Мы рассматриваем отображение $f: \ E^n \to E^m$, где $n>1$, $m>1$. В частности при $n=2$, $m=2$ $(x,y)\to f(x,y)=(u,v)$. Пусть отображение f определено в окрестности $O(x_0,y_0)$ точки $p_0=(x_0,y_0)$.

Определение. Линейное отображение $A\in\mathcal{L}(E^n,E^m)$ пространства E^n в E^m называется *дифференциалом* [2)] функции f в точке p_0, если

$$\frac{\|f(p)-f(p_0)-A(p-p_0)\|_m}{\|p-p_0\|_n} \to 0$$

[2)] Смотри, например, [5], т.2, § 41. (Ред.)

при $p \to p_0$, или

$$f(p) - f(p_0) = A(p - p_0) + r(p - p_0),$$

где $\|r(p - p_0)\|_m = o\left(\|p - p_0\|_n\right)$ при $p \to p_0$; будем говорить, что функция f *дифференцируема в точке* p_0, ее дифференциал в этой точке равен $df = A(p - p_0)$ и $f' = A$.

Геометрическая интерпретация дифференциала вектор-функции – это отображение, касательное к данному (рис. 12.4).

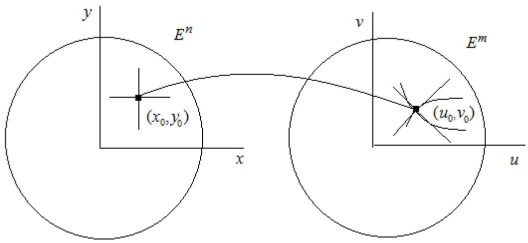

Рис. 12.4. Отображение, касательное к данному.

Теорема (критерий дифференцируемости вектор-функции). *Пусть вектор-функция* $f(x, y) = \{\varphi(x, y), \psi(x, y)\}$, *определенна в некоторой окрестности* $O(x_0, y_0)$ *точки* $p_0 = (x_0, y_0)$. *Для того, чтобы эта вектор-функция имела в точке* p_0 *дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы существовали дифференциалы* $d\varphi$ *и* $d\psi$ *функций* φ *и* ψ *в точке* $p_0 = (x_0, y_0)$.

Доказательство. Необходимость. Из векторного равенства

$$f(p) - f(p_0) = A(p - p_0) + r(p - p_0),$$

где $\|r(p - p_0)\|_m = o\left(\|p - p_0\|_n\right)$ при $p \to p_0$, следует, что

$$\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) = a\Delta x_0 + b\Delta y_0 + o(\rho) \quad (\rho \to 0),$$

и аналогичное равенство имеет место для функции ψ. Значит, все компоненты функции f дифференцируемы.

Достаточность. Пусть существуют $d\varphi(x_0, y_0)$ и $d\psi(x_0, y_0)$. Докажем, что

$$f(p) - f(p_0) - A(p - p_0) = o(p - p_0) \quad (p \to p).$$

В силу критерия существования предела вектор-функции, предел существует, если он существует для компонент вектор-функции. Но он и существует для компонент, что следует из покомпонентной дифференцируемости функций φ и ψ. ▶

2 семестр
Лекция 22
(26.04.68)

Пусть E^n – евклидово пространство и точка $p_0 \in E^n$. Пусть в окрестности $O(p_0)$ задано отображение $y = f(x)$ ($x \in O(p_0)$, $y \in E^m$):

$$\begin{array}{c} y_1 = \varphi_1(x_1, ..., x_n) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = \varphi_m(x_1, ..., x_n) \end{array} .$$

Следствие. *Если все частные производные*

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, ..., m\ ; j = 1, ..., n)$$

существуют в некоторой окрестности точки p_0 *и в самой точке* p_0 *непрерывны, то отображение* $y = f(x)$ *дифференцируемо в точке* p_0.

Введем обозначение: $f \in D(y_0)$ означает, что функция f дифференцируема в точке y_0. Матрица $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)$ из частных производных называется *матрицей Якоби.*

Геометрический смысл дифференциала – это главная линейная часть приращения функции (рис. 12.5).

54.5. Дифференцирование сложной функции

Пусть заданы отображения $z = f(y) \in E^1$, $y = \varphi(x) \in E^m$ ($x \in O(x_0) \subset E^n$, $y_0 = \varphi(x_0)$), f определена в $O(y_0) \subset E^m$. Тогда

$$z = F(x) = f(\varphi(x)) : \quad E^n \xrightarrow{\varphi} E^m \xrightarrow{f} E^1$$

– сложная функция, определенная для $x \in O(x_0) \subset E^n$.

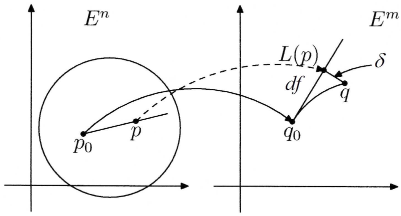

Рис. 12.5. Геометрический смысл дифференциала.

Теорема о дифференцировании сложной функции. *Пусть дана сложная функция* $z = F(x) = f(\varphi(x))$. *Пусть* $f \in D(y_0)$, $\varphi \in D(x_0)$ ($y_0 = \varphi(x_0)$). *Тогда сложная функция* $F(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем писать $x_0 = x$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Докажем, что

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = A\Delta x_1 + B\Delta x_2 + o(\rho) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\Delta x_2 + o(\rho) \quad (\rho \to 0)\,,$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$. По условию функция $f \in D(y_0)$. Это значит, что

$$\Delta f(y) = f(y + \Delta y) - f(y) = = \frac{\partial f}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}\Delta y_2 + o\left(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2}\right) .$$

Так как функция $\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) \end{array}\right\} = \varphi$ дифференцируема в точке (x_1, x_2) , то

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + o\,(\rho)\ ,$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + o\,(\rho)\ ,$$

при $\rho \to 0$. Отсюда следует, что $\Delta\varphi_1 = O(\rho)$, $\Delta\varphi_2 = O(\rho)$

$(\rho \to 0)$. Значит $\sqrt{(\Delta\varphi_1)^2 + (\Delta\varphi_2)^2} = O(\rho)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\Delta F(x) &= F(x+\Delta x) - F(x) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\Delta x_2\right) + \frac{\partial f}{\partial y_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\Delta x_2\right) + \\
&\qquad + o(\rho) = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)\Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)\Delta x_2 + \\
&\qquad + o(\rho) \quad (\rho \to 0).
\end{aligned}$$

Значит, сложная функция дифференцируема и

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}. \quad \blacktriangleright$$

В частности мы вновь получили формулу для частной производной сложной функции.

54.6. Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Пусть $z = F(x) = f(\varphi(x))$. По определению дифференциала

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2.$$

Это выражение, пользуясь полученными выше результатами, мы можем переписать как

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 = \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}dy_2.$$

Таким образом, форма для дифференциала первого порядка инвариантна.

54.7. Дифференциал сложного отображения

Пусть заданы отображения $z = f(y) \in E^l$, $y = \varphi(x) \in E^m$ ($x \in O(x_0) \subset E^n$, $y_0 = \varphi(x_0)$), f определено в $O(y_0) \subset E^m$. Тогда

$$z = F(x) = f(\varphi(x)) : \quad E^n \xrightarrow{\varphi} E^m \xrightarrow{f} E^l$$

– сложное отображение, определенное для $x \in O(x_0) \subset E^n$.

Теорема. *Если отображение f дифференцируемо в точке y_0, и отображение φ дифференцируемо в точке x_0, то сложное отображение F дифференцируемо в точке x_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По критерию дифференцируемости вектор-функции, $F \in D(x_0)$ тогда и только тогда, когда все функции $F_i(x) = f_i(\varphi(x))$ ($i = 1, ..., l$) дифференцируемы в точке x_0. Но так как $f \in D(y_0)$, то $f_i \in D(y_0)$. Тогда, так как $\varphi \in D(x_0)$, то и

$$F_i(x) = f_i(\varphi(x)) \in D(x_0)$$

по теореме о дифференцировании сложной функции. Следовательно, отображение $F \in D(x_0)$. ►

Замечание. Пусть

$$\Delta y = \Delta\varphi = A\Delta x + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \quad \Delta f = B\Delta y + o(r) \quad (r \to 0).$$

Тогда $\Delta F = BA\Delta x + o(\rho) \quad (\rho \to 0)$.

Действительно, $A = \varphi'(x_0)$, $B = f'(y_0)$. Если $y_0 = \varphi(x_0)$, то

$$C = F'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = BA.$$

54.8. Непрерывная дифференцируемость

Пусть дано отображение $y = f(x) : E^n \xrightarrow{f} E^m$ и $G \subset E^n$ – открытое множество из E^n. Если $x_0 \in G$ и $f \in D(x_0)$, то дифференциал $df(x_0)$ функции $f(x)$ (п. 54.4 с. 257) определяется матрицей $A(x_0) \in \mathcal{L}(E^n, E^m)$ размера $n \times m$ из значений частных производных, а именно, $df = A(x_0)\,dx$.

Определение. Если для любой точки $x \in G$ $f \in D(x)$, то говорят, что отображение f *дифференцируемо в области* G ($f \in D(G)$).

Если $f \in D(G)$, то дифференцирование функции f порождает отображение области G в E^n, которое каждой точке $x \in G$ ставит в соответствие дифференциал $A(x) \in \mathcal{L}(E^n, E^m)$.

Определение. Будем говорить, что отображение $f: E^n \xrightarrow{f} E^m$ *непрерывно дифференцируемо в области* G, если $df(x)$ является непрерывным отображением из G в $\mathcal{L}(E^n, E^m)$.

Теперь мы можем сформулировать условия, при которых дифференциал является непрерывным отображение в области.

Теорема о непрерывном дифференцировании. *Отображение* $f: E^n \to E^m$ *непрерывно дифференцируемо в области* G *тогда и только тогда, когда частные производные* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *– непрерывные функции в области* G.

Доказательство. В силу критериев дифференцируемости и непрерывности вектор-функции следует необходимость.

Достаточность. Отображение f непрерывно дифференцируемо в каждой точке области G, так как все его компоненты непрерывно зависят от точки в силу критерия непрерывности отображения. ▶

§ 55. Производные и дифференциалы высших порядков

55.1. Теоремы о смешанных производных

Пусть задана функция $y = f(x): E^n \xrightarrow{f} E^1$. Пусть для простоты записи $n = 2$, т.е. задана функция $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$, и существуют частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y)$. Если эти функции – дифференцируемые функции, то получаем частные производные второго порядка

$$f''_{xx}(x, y), \quad f''_{xy}(x, y), \quad f''_{yx}(x, y), \quad f''_{yy}(x, y).$$

Вообще говоря, $f''_{xy} \neq f''_{yx}$.

Теорема Юнга о равенстве смешанных производных. *Пусть частные производные первого порядка* f'_x *и* f'_y *существуют в некоторой окрестности* $O(x, y)$ *точки* (x, y) *и эти функции* f'_x *и* f'_y *дифференцируемы в самой точке* (x, y). *Тогда в этой точке* $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Доказательство. Рассмотрим вторую смешанную разность (см. схему знаков на рис. 12.6)

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = f(x+h, y+h) - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y).$$

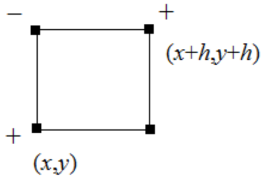

Рис. 12.6. К теореме Юнга.

Пусть $\varphi(x) = f(x, y + h) - f(x, y)$. Тогда

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = \varphi(x + h) - \varphi(x)\,.$$

Применяя формулу Лагранжа, получим $\Delta_x \Delta_y f(x, y) = \varphi'(x+\theta h)h$. Но $\varphi'(x) = f'_x(x, y + h) - f'_x(x, y)$. Значит

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = h\left\{f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x + \theta h, y)\right\}\,.$$

Воспользуемся тем, что функция f'_x дифференцируема в точке (x, y). Тогда при $h \to 0$

$$f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x, y) = f''_{xx}(x, y)\theta h + f''_{xy}(x, y)h + o(h),$$

$$f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y) = f''_{xx}(x, y)\theta h + o(h)\,.$$

Отсюда

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = h^2 f''_{xy}(x, y) + o(h^2) \quad (h \to 0)\,.$$

Аналогично, полагая $\psi(y) = f(x + h, y) - f(x, y)$, получим

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = h^2 f''_{yx}(x, y) + o(h^2) \quad (h \to 0)\,.$$

Приравняв полученные выражения, разделив на h^2 и устремив h к нулю, получим что $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$. ►

2 семестр
Лекция 23
(27.04.68)

В теореме Юнга для равенства смешанных производных предполагается существование всех четырех частных производных второго порядка в точке (x, y). В следующей теореме предполагается существование одной смешанной производной в некоторой окрестности точки (x, y) и ее непрерывность в точке (x, y).

Теорема Шварца (о существовании второй смешанной производной и их совпадении). *Пусть функция $f(x, y)$ определена в окрестности $O(x, y)$ точки (x, y) и в этой окрестности существуют частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}. Пусть смешанная производная $f''_{xy} \in C(x, y)$. Тогда в точке (x, y) существует вторая смешанная производная f''_{yx}, причем $f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим выражение

$$\delta = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y).$$

Положим

$$\varphi(x) = f(x, y + k) - f(x, y) = \varphi(x, k).$$

Тогда $\delta = \varphi(x+h) - \varphi(x)$. Применив формулу Лагранжа, получим, что

$$\delta = h\varphi'(x + \theta h) = h \left\{ f'_x(x + \theta h, y + k) - f'_x(x + \theta h, y) \right\}.$$

По условию f''_{xy} существует. Значит, по формуле Лагранжа

$$\delta = hk f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta_1 k).$$

Воспользуемся тем, что $f''_{xy} \in C(x, y)$. Тогда

$$f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta_1 k) = f''_{xy}(x, y) + o(1)$$

при $\rho = \sqrt{k^2 + h^2} \to 0$. Отсюда получаем, что

$$\delta = hk \left\{ f''_{xy}(x, y) + o(1) \right\} \quad (\rho \to 0)$$

и следовательно,

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{hk} - f''_{xy}(x, y) = o(1) \quad (\rho \to 0).$$

Значит $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_0 > 0, k_0 > 0 \quad \forall h, k\,,\ 0 < |h| < h_0\,,\ 0 < |k| < k_0\,,$

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{hk} - f''_{xy}(x,y) \right| < \varepsilon\,,$$

или, что есть то же самое, при каждом фиксированном h

$$\left| \frac{1}{h} \left\{ \frac{\varphi(x+h,k)}{k} - \frac{\varphi(x,k)}{k} \right\} - f''_{xy}(x,y) \right| < \varepsilon\,.$$

Так как $\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x,y)$ и

$$\lim_{k\to 0} \frac{\varphi(x,k)}{k} = f'_y(x,y)\,, \quad \lim_{k\to 0} \frac{\varphi(x+h,k)}{k} = f'_y(x+h,y)\,,$$

то отсюда получим

$$\left| \frac{f'_y(x+h,y) - f'_y(x,y)}{h} - f''_{xy}(x,y) \right| \le \varepsilon$$

для любых h таких, что $0 < |h| < h_0$. Это значит, что предел

$$f''_{yx}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(x+h,y) - f'_y(x,y)}{h}$$

существует и равен $f''_{xy}(x,y)$. Значит, вторая смешанная производная f''_{yx} существует и справедливо $f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$. ▶

Обычно теорема применяется в ослабленной форме: если смешанные производные непрерывны, то они равны (см. [10], [11]). Как следствие получаем, что, если смешанные производные непрерывны, то они равны, если они отличаются только порядком дифференцирования. Например, $f'''_{xyx} = f'''_{xxy}$, если эти производные непрерывны, так как можно применить теорему к двум последним дифференцированиям.

55.2. Дифференциалы высших порядков (для скалярных функций)

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности $O(x,y)$ точки $(x,y) = p$. Линейное отображение L, связанное с точкой (x, y) и определяемое вектором $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$, и вектор приращений $(dx,\ dy)$ определяют дифференциал функции $f(x, y)$ по формуле

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(dx,\ dy)\ .$$

Таким образом, с функцией можно связать линейную форму

$$\text{Л} = \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\,,$$

которую мы будем обозначать через $\text{Л}((x, y), (\xi, \eta))$. Тогда дифференциал первого порядка функции $f(x, y)$ есть

$$df = \text{Л}((x, y), (dx, dy))\ .$$

Определение. Функцию $f(x, y)$ будем называть *дифференцируемой* в точке (x, y), если соответствующая ей линейная форма Л определена в некоторой окрестности точки (x, y), а в самой точке (x, y) при любых фиксированных ξ, η будет иметь дифференциал.

Пусть частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ определены в окрестности точки (x, y) и дифференцируемы в точке (x, y). Придадим x и y новые приращения δx и δy. Рассмотрим дифференциал выражения $df = \text{Л}((x, y), (dx, dy))$, воспользуемся при этом тем, что по теореме Юнга $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в точке (x, y):

$$\begin{aligned}\delta\, d\, f(x, y) = \delta\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right\} = \delta\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \delta\frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \\ = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,\delta y\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\delta y\right)dy = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx\,\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(\delta\, x\, dy + \delta\, y\, dx) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\,\delta\, y\,.\end{aligned}$$

Полученная билинейная форма называется повторным дифференциалом функции $f(x, y)$ в точке (x, y). Если положим $\delta = d$, то получим *дифференциал второго порядка*

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 .$$

§ 56. Формула Тейлора для функции многих переменных

Мы рассмотрим отображение $E^n \to E^1$ для случая $n = 2$, определенное в некоторой окрестности $O(x,y)$. Положим $h = dx$, $k = dy$. Пусть $f \in D(x,y)$. Тогда

$$\Delta f = f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$.

56.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Пусть функция $f(x,y)$ определенна в некоторой окрестности $O(x,y)$ точки (x,y) и во всей этой окрестности имеет дифференциалы $df, d^2 f, ..., d^n f$ порядка 1, 2, ..., n соответственно. Мы будем символически записывать

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f ; \\ d^2 f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f ; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d^n f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f . \end{aligned}$$

Замечание. Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, то $dx = \frac{dx}{dt} dt = \varphi(t) dt$, значит, дифференциалы зависимых переменных мы не можем считать постоянными. Но если $x = a + ct$, $y = b + et$, то $dx = cdt$, $dy = edt$, и формулы для дифференциалов высших порядков остаются такими же, как если бы x и y были независимыми переменными а dx, dy – постоянные приращения.

2 семестр
Лекция 24
(04.05.68)

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в открытом множестве G и точка $(x_0, y_0) \in G$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(x_0, y_0) \subset G$. Возьмем ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, и рассмотрим множество

$$F_0 = \{(x, y) \in G : \rho((x, y), (x_0, y_0)) \le \varepsilon_1\} \subset G.$$

Это множество является частным случаем подмножеств множества G, обладающих следующим свойством: если $(x, y) \in F_0$, то и отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x, y), целиком содержится в F_0. Множества, обладающие таким свойством, называются *звездными множествами относительно точки* (x_0, y_0). Из определения не следует, что множество F_0 выпукло, так как точка (x_0, y_0) фиксирована. Множество

$$F_0 = \{(x, y) \in G : \rho((x, y), (x_0, y_0)) \le \varepsilon_1\} \subset G,$$

приведенное выше, является наиболее простым звездным множеством и представляет собой замкнутый круг с центром в точке (x_0, y_0) (рис. 12.7).

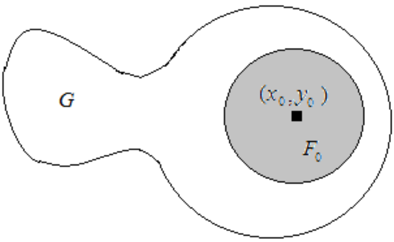

Рис. 12.7. Круг с границей – наиболее простое звездное множество.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция* $z = f(x, y)$ *определена в некотором звездном относительно точки* (x_0, y_0) *множестве* F_0. *Пусть в каждой точке множества* F_0 *функция* $f(x, y)$ *имеет* *дифференциалы 1-го, 2-го, ..., n-го порядков. Положим* $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$. *Тогда справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right) f(x_0,y_0) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x_0,y_0) + ... + \\ + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n-1} f(x_0,y_0) + \\ + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),$$

где $0 < \theta < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad \text{где} \quad 0 \le t \le 1.$$

Отметим, что $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x, y)$. Эта функция есть сложная функция $F(t) = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x_0 + th$, $\eta = y_0 + tk$. Так как дифференциал функции f существует, то существует производная F' функции F:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial \xi}h + \frac{\partial f}{\partial \eta}k = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}h + \frac{\partial}{\partial \eta}k\right) f.$$

Так как второй, ..., n-ый дифференциалы функции f существуют, то существуют также и вторая, ..., n-ая производные функции $F(t)$. Значит, для функции $F(t)$ мы можем написать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + ... + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(\theta t),$$

где $0 < \theta < 1$. Положим $t = 1$. Тогда имеем

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + ... + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta) \\ (0 < \theta < 1).$$

Следовательно, для функции f получим

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right) f(x_0,y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x_0,y_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n-1} f(x_0,y_0) +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\,,$$

где $0 < \theta < 1$. ►

Через дифференциалы формула Тейлора запишется так:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1} f(x_0,y_0) + \frac{1}{n!}d^n f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\,,$$

где $0 < \theta < 1$.

56.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, случай $n = 1$

Для $n = 1$ формула Тейлора примет вид

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$

где $0 < \theta < 1$.

Допустим, что второй дифференциал $d^2 f(x_0,y_0)$ существует в точке (x_0,y_0). Это значит, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0), т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \cdot (x-x_0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 \cdot (y-y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 \cdot (x-x_0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \cdot (y-y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0\,,$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Если подставим $x = x_0 + \theta h$, $y = y_0 + \theta k$, то получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \theta\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 h + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 k\right\} + o\left(\theta\sqrt{h^2+k^2}\right)\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \theta\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 h + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 k\right\} + o\left(\theta\sqrt{h^2+k^2}\right)\,,$$

при $\rho \to 0$. Отсюда

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 +$$
$$+\theta\left\{h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2kh\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right\} + o\left(\theta^2(h^2+k^2)\right)\,,$$

или окончательно,

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \theta\left\{d^2 f(x_0,y_0) + o(h^2+k^2)\right\} \qquad (\rho \to 0)\,.$$

Это вид формулы, удобный для исследования функции на экстремум.

56.3. Экстремумы функций многих переменных

Определения экстремумов для функций многих переменных остаются такими же, как и для функций одной переменной.

Теорема (необходимые условия экстремума функций многих переменных). *Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то для того, чтобы функция $f(x,y)$ в этой точке имела экстремум необходимо, чтобы ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке (x_0, y_0) были равны нулю.*

Доказательство очевидно. Положим $y = y_0$, сохраняя x переменным. Тогда получим функцию от одной переменной $f(x, y_0)$. По теореме Ферма, если эта функция достигает в точке x_0 экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, т. е. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Аналогично доказывается, что в точке экстремума $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Таким образом, условие обращения в нуль частных производных функции в точке (x_0, y_0) является необходимым для существования экстремума функции в этой точке. ►.

Определение. Точки, в которых частные производные обращаются в нуль, называются *критическими.*

Для критических точек формула Тейлора принимает вид

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \theta \left\{ d^2 f(x_0, y_0) + o(h^2 + k^2) \right\} .$$

Предположим, что $\left(d^2 f\right)_0 \not\equiv 0$. Рассмотрим квадратичную форму

$$\left(d^2 f\right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 .$$

Ясно, что если эта квадратичная форма строго положительная, то в точке (x_0, y_0) функция f имеет минимум, если эта квадратичная форма строго отрицательная, то в точке (x_0, y_0) функция имеет максимум. Если квадратичная форма знакопеременная, то экстремума не будет. Если квадратичная форма отрицательная, но не строго отрицательная (положительная, но не строго положительная), то второго дифференциала не достаточно, чтобы ответить на вопрос, есть ли в точке экстремум.

2 семестр
Лекция 25
(05.05.68)

§ 57. Неявные функции

57.1. Теоремы о неявных функциях для случая одного уравнения

Пусть функция $z = F(x, y)$ определена в некоторой окрестности $O^2(x_0, y_0) \subset E^2$ точки (x_0, y_0) и пусть $z_0 = F(x_0, y_0) = 0$.

Определение. Если существуют окрестность $O^1(x_0) \subset E^1$ точки x_0 и такая функция $y = f(x)$, определенная в этой окрестности, которая обращает уравнение $F(x, y) = 0$ в тождество, т. е. для которой выполнены следующие условия:

1) $f(x_0) = y_0$,

2) $\forall\, x \in O^1(x_0) \quad F(x, f(x)) \equiv 0$,

то говорят, что *уравнение* $F(x, y) = 0$ *определяет неявно функцию* $y = f(x)$.

Таким образом, вопрос

1. о существовании неявной функции – это вопрос о существовании такой окрестности точки x_0 и такой функции $f(x)$, что выполняются условия 1) и 2) определения.

Кроме того, естественно встают вопросы

2. о единственности и

3. о гладкости неявной функции, т. е. о непрерывности и дифференциальных свойствах.

Мы рассматривали простейший случай этой задачи, когда говорили об обратной функции. Мы задавали функцию $y = \varphi(x)$ и рассматривая уравнение $F(x, y) = y - \varphi(x) = 0$ отвечали на вопрос, когда это уравнение разрешимо относительно x, т. е. искали решение уравнения в виде $x = \psi(y)$. Мы уже видели, что это возможно, если функция φ монотонна и непрерывна, что бывает, например, когда $\varphi'(x) > 0$ ($\varphi'(x) < 0$) (условие непрерывности и строгой монотонности функции $\varphi'(x)$). Заметим, что $\varphi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ – отлична от нуля частная производная по той переменной, относительно которой разрешаем уравнение.

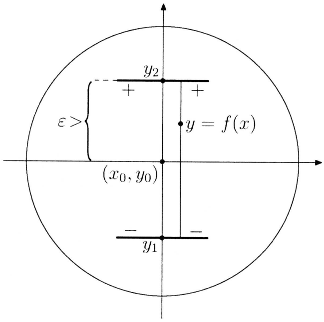

Рис. 12.8. Теорема о существовании неявной функции, построение.

Теорема существования неявной функции для случая одного уравнения. *Пусть в окрестности* $O^2(x_0, y_0)$ *точки* (x_0, y_0) *задана функция* $z = F(x, y)$, *которая непрерывна в этой окрестности и пусть* $F(x_0, y_0) = 0$ *и частная производная* $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$ *функции* $F(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0) *отлична от* 0. *Тогда существует такая окрестность* $O^1(x_0) \subset E^1$ *точки* x_0 *и существует такая функция* $y = f(x)$, *определенная в этой окрестности, которая непрерывна в точке* x_0, *удовлетворяет условию* $y_0 = f(x_0)$, *причем* $\forall\, x \in O(x_0) \quad F(x, f(x)) \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $F(x_0, y)$, которая определена для некоторой окрестности $O^1(y_0)$ точки y_0. Зададим $\varepsilon > 0$. Производная функции $F(x_0, y)$ в точке y_0 отлична от нуля. Будем считать для определенности, что $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Это значит, что функция $F(x_0, y)$ строго возрастает в точке y_0, значит найдется такая окрестность $O^1_*(y_0) \subset O^1(y_0)$, что будет выполняться $F(x_0, y) > F(x_0, y_0)$, если $y > y_0$ и $y \in O^1_*(y_0)$, и $F(x_0, y) < F(x_0, y_0)$, если $y < y_0$ и $y \in O^1_*(y_0)$. Будем считать, что радиус этой окрестности $O^1_*(y_0)$ меньше ε. Таким образом мы получили, что $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \varepsilon_1 \;\; (0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon)$, $\forall y$, $y_0 < y < y_0 + \varepsilon_1$, $F(x_0, y) > 0$ и $\forall y$, $y_0 - \varepsilon_1 < y < y_0$, $F(x_0, y) < 0$. Зафиксируем числа y_1, y_2 (рис. 12.8) такие, что

$$y_0 - \varepsilon < y_1 < y_0 < y_2 < y_0 + \varepsilon\,.$$

Тогда $F(x_0, y_1) < 0$, $F(x_0, y_2) > 0$, $F(x_0, y_0) = 0$.

Рассмотрим функцию $F(x, y_1)$, определенную в окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и непрерывную в этой окрестности. Таким же свойством обладает функция $F(x, y_2)$. Но значение $F(x_0, y_1) < 0$, а $F(x_0, y_2) > 0$. Отсюда, по теореме о сохранении знака непрерывной функции одной переменной $\exists\,\delta > 0 \;\; \forall\, x$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $F(x, y_1) < 0$ и $F(x, y_2) > 0$.

Теперь рассмотрим функцию $F(x, y) = \varphi(y)$, где x – фиксированная точка такая, что $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Эта функция положительна для $y = y_2$ и отрицательна для $y = y_1$. Кроме того, эта функция непрерывна. Значит, существует такая точка $y = f(x)$, в которой эта функция φ обращается в 0 (по теореме о промежуточном значении непрерывной функции): $\varphi(y) = 0$.

Таким образом, $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, существует точка $y = f(x)$ такая, что $F(x, f(x)) = 0$. При этом $|f(x) - y_0| < \varepsilon$. Отметим, что непрерывность функции $y = f(x)$ еще не доказана, так как $f(x) = f_\varepsilon(x)$ сама зависит от ε.

Докажем непрерывность (рис. 12.9). Зададим монотонно убывающую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$. По этой последовательности, по доказанному, получим последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, которую можем взять монотонно убывающей к нулю, такую, что

$$\forall\, x,\ |x - x_0| < \delta_1, \quad |f_1(x) - y_0| < \varepsilon_1\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\forall\, x,\ |x - x_0| < \delta_n, \quad |f_n(x) - y_0| < \varepsilon_n\,.$$

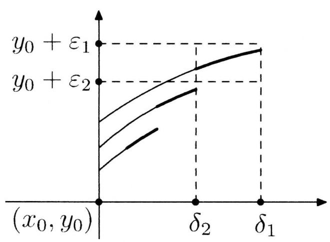

Рис. 12.9. Теорема о существовании неявной функции, непрерывность.

Положим $f(x) = f_n(x)$, если $\delta_{n+1} \leq |x - x_0| < \delta_n$ и пусть выполняется $f(x_0) = y_0$. Тогда $|f(x) - y_0| < \varepsilon_n$ если $|x - x_0| < \delta_n$. А это значит, что

$$f(x) \to f(x_0) = y_0 \quad \text{при} \quad x \to x_0 \,.$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ определена в окрестности $O^1(x_0) = \{x : |x - x_0| < \delta_1\}$ и непрерывна в точке x_0 . ►

Теорема единственности неявной функции для случая одного уравнения. *Пусть выполнены условия теоремы существования неявной функции для случая одного уравнения и кроме того, частная производная* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *положительна* (*отрицательна*) *в окрестности* $O^2(x_0, y_0)$ *точки* (x_0, y_0) . *Тогда существует такая окрестность* $O^1(x_0)$ *точки* x_0 , *что в этой окрестности существует, и притом единственная, функция* $y = f(x)$ *такая, что* $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой точки $x \in O^1(x_0)$ (под окрестностью $O^1(x_0)$ подразумевается окрестность, построенная в теореме существования неявной функции) функция $\varphi(y) = F(x, y)$ строго возрастает, так как $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$, причем $\varphi(y_2) > 0$, $\varphi(y_1) < 0$. Но так как функция $\varphi(y)$ непрерывна и строго возрастает, то существует единственная точка $y^* = f(x)$ такая, что $\varphi(y^*) = 0$. При этом функция $y^* = f(x)$ автоматически непрерывна в $O^1(x_0)$, так как по предыдущей теореме существования неявной функции для одного уравнения эта функция непрерывна в точке x_0 , а в других точках этой окрестности условия теоремы также выполняются. ►

Теорема о дифференцируемости неявной функции. *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы единственности неявной функции для одного уравнения и кроме того функция* $F(x, y) \in D(x_0, y_0)$. *Тогда неявная функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теоремам существования и единственности существует единственная неявная функция $y = f(x)$. Ясно, что $F(x, f(x)) - F(x_0, y_0) = 0$. С другой стороны,

$$F(x, f(x)) - F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y_0 + o(\rho) \quad (\rho \to 0)\,.$$

Здесь $\Delta y_0 = f(x) - y_0$. Значит

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y_0 + o(\rho) = 0 \quad (\rho \to 0)\,.$$

$o(\rho)$ мы можем представить в виде $o(\rho) = \alpha\Delta x_0 + \beta\Delta y_0$, где $|\alpha| \to 0$, $|\beta| \to 0$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \alpha\right\}\Delta x_0 + \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 + \beta\right\}\Delta y_0 = 0\,.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \alpha}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 + \beta}\,.$$

Правая часть этого выражения имеет предел при $\Delta x_0 \to 0$, значит, $f'(x_0)$ существует, причем

$$f'(x_0) = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0}\,.$$

►

Следствие. *Если* $z = F(x,y)$ *дифференцируема в* $O^2(x_0,y_0)$, *то неявная функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в* $O^1(x_0)$.

Замечание. Пусть $y = f(x)$ – неявная функция, задаваемая уравнением $F(x,y) = 0$ и определенная в окрестности $O^1(x_0)$. Тогда имеем $F(x, f(x)) \equiv 0$ и по правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x) = 0\,.$$

Для применения дифференцирования надо знать, что внутренняя функция дифференцируема.

57.2. Теоремы о неявных функциях для систем уравнений

Пусть в некоторой окрестности $O^3(x^0, y_1^0, y_2^0) \subset E^3$ точки (x^0, y_1^0, y_2^0) определена система уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y_1,y_2) = 0 \\ G(x,y_1,y_2) = 0 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} F(x^0,y_1^0,y_2^0) = 0 \\ G(x^0,y_1^0,y_2^0) = 0 \end{array}\right. .$$

Определение. Если существует окрестность $O^1(x^0) \subset E^1$ точки x^0 и такие функции $\begin{cases} y_1 = f(x) \\ y_2 = g(x) \end{cases}$, определенные в этой окрестности, которые обращают систему уравнений

$$\begin{cases} F(x, y_1, y_2) = 0 \\ G(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

в тождество, т. е. для которых выполнены следующие условия:

1) $\begin{cases} y_1^0 = f(x^0) \\ y_2^0 = g(x^0) \end{cases}$,

2) $\forall\, x \in O^1(x_0)$ $\begin{cases} F(x, f(x), g(x)) \equiv 0 \\ G(x, f(x), g(x)) \equiv 0 \end{cases}$, то говорят, что система *уравнений* $\begin{cases} F(x, y_1, y_2) = 0 \\ G(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$ *определяет в окрестности* $O^1(x^0)$ *неявные функции* $\begin{cases} y_1 = f(x) \\ y_2 = g(x) \end{cases}$.

Положим

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{D(F, G)}{D(y, z)}$$

(этот определитель называется *якобианом*).

Замечание. Якобианы и их формальные свойства. Пусть заданы функции $F(y_1, y_2)$, $G(y_1, y_2)$ и функции $y_1 = \varphi(x_1, x_2)$, $y_2 = \psi(x_1, x_2)$. Тогда для сложных функций

$$F(y_1, y_2) = F_1(x_1, x_2)\,, \quad G(y_1, y_2) = G_1(x_1, x_2)$$

имеет место тождество

$$\frac{D(F, G)}{D(x_1, x_2)} = \frac{D(F, G)}{D(y_1, y_2)} \cdot \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x_1, x_2)}\,.$$

Мы получили естественное обобщение формулы для производной сложной функции одного переменного.

2 семестр
Лекция 26
(08.05.68)

Лемма. *Пусть функция* $z = F(x,y)$ *определена в некоторой окрестности* $O^2(x_0,y_0)$ *точки* (x_0,y_0) *и пусть в этой окрестности существуют частные производные* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, *непрерывные в самой точке* (x_0,y_0), *а* $F(x_0,y_0)=0$. *Тогда существует такая окрестность* $O_1^2(x_0,y_0)\subset O^2(x_0,y_0)$, *в которой функция* $F(x,y)$ *будет непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы об ограниченности непрерывной функции существует окрестность $O_1^2(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0), в которой частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ будут ограничены, т. е. $\exists\, M>0\ \ \forall\,(x,y)\in O_1^2(x_0,y_0)\ \ \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|\le M$, $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\le M$.
Возьмем две точки $(x,y),(x',y')\in O_1^2(x_0,y_0)$. Для этих точек

$$\Delta F(x,y)=F(x',y')-F(x,y)=F(x',y')-F(x,y')+F(x,y')-F(x,y).$$

Применив формулу Лагранжа, получим, что

$$\Delta F(x,y)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\xi}(x'-x)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\eta}(y'-y).$$

Значит, для любых точек $(x,y),(x',y')\in O_1^2(x_0,y_0)$

$$|\Delta F|\le M\left\{|\Delta x|+|\Delta y|\right\}.$$

Отсюда следует, что функция F непрерывна в точке (x,y), т. е. функция F непрерывна во всей окрестности $O_1^2(x_0,y_0)$ (использована только ограниченность частных производных).

Заметим, что из достаточного условия дифференцируемости (п. 54.2, с. 253) следует, что $F(x,y)\in D(x_0,y_0)$. ▶

Таким образом нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Если функция* $F(x,y)$ *имеет в точке* (x_0,y_0) *непрерывные частные производные* $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\in C(x_0,y_0)$ *и* $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\ne 0$, *а* $F(x_0,y_0)=0$, *то в некоторой окрестности* $O^1(x_0)$ *точки* x_0 *существует единственная непрерывная неявная функция* $y=f(x)$, *дифференцируемая в точке* x_0. *Если же частные производные непрерывны в некоторой окрестности* $O^2(x_0,y_0)$ *точки*

(x_0, y_0), *то неявная функция* $y = f(x)$ *будет дифференцируема в некоторой окрестности* $O^1_*(x_0) \subset O^1(x_0)$ *точки* x_0.

Теорема (обобщенная теорема о неявной функции). *Пусть функция* $z = F(x_1, x_2, y)$ *определена в некоторой окрестности* $O^3(x_1^0, x_2^0, y^0)$ *точки* (x_1^0, x_2^0, y^0) *и в этой окрестности имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$. *Пусть также* $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \neq 0$ *и* $F(x_1^0, x_2^0, y^0) = 0$. *Тогда найдется такая окрестность* $O^2(x_1^0, x_2^0)$ *точки* (x_1^0, x_2^0), *в которой существует , причем единственная, функция* $y = f(x_1, x_2)$ *такая, что*

1) $y^0 = (x_1^0, x_2^0)$,

2) $F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \equiv 0$, *причем эта функция* $y = f(x_1, x_2)$ *дифференцируема в окрестности* $O^2(x_1^0, x_2^0)$.

Доказательство этой теоремы аналогично данным ранее доказательствам соответствующих теорем о неявной функции. Заметим, что дифференцируя тождество $F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \equiv 0$ получим

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial y} df = 0,$$

откуда

$$df = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}} dx_1 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial y}} dx_2.$$

Теорема о неявной функции для систем уравнений. *Пусть даны две функции* $\left\{ \begin{array}{l} u = F(x, y, z) \\ v = G(x, y, z) \end{array} \right.$, *заданные в некоторой окрестности* $O^3(x_0, y_0, z_0)$ *точки* (x_0, y_0, z_0) *и пусть*

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{array} \right. .$$

Пусть в этой окрестности функции F *и* G *имеют непрерывные первые частные производные и*

$$J(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Тогда существует такая окрестность $O^1(x_0)$ *точки* x_0, *что в этой окрестности система уравнений* $\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$ *имеет единственное решение* $\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \\ z = g(x) \end{array} \right.$, *удовлетворяющее условиям:*

1) $y_0 = f(x_0)$; $z_0 = g(x_0)$;

2) $F(x, f(x), g(x)) \equiv 0$; $G(x, f(x), g(x)) \equiv 0$;

3) *функции f и g имеют в окрестности $O^1(x_0)$ непрерывные производные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как якобиан $J(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то по крайней мере одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial y}$ или $\frac{\partial F}{\partial z}$ в точке (x_0, y_0, z_0) отлична от нуля. Пусть $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \neq 0$. Рассмотрим уравнение $G(x, y, z) = 0$. По обобщенной теореме о неявной функции существуют такая окрестность $O^2(x_0, y_0)$ и единственная определенная в ней функция $z = h(x, y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $z_0 = h(x_0, y_0)$;

2) $G(x, y, h(x, y)) \equiv 0$ в окрестности $O^2(x_0, y_0)$;

3) функция $h(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в окрестности $O^2(x_0, y_0)$. Заменяя в системе второе уравнение равносильным ему $z = h(x, y)$, получим равносильную систему $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ z = h(x, y) \end{cases}$. Подставив $z = h(x, y)$ в первое уравнение, получим систему $\begin{cases} F(x, y, h(x, y)) = 0 \\ z = h(x, y) \end{cases}$.

Введем вспомогательную функцию $\Phi(x, y) = F(x, y, h(x, y))$. Так как

$$\Phi(x_0, y_0) = F(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = F(x_0, y_0, z_0) = 0\,,$$

то условием разрешимости уравнения $\Phi(x, y) = 0$ будет условие $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \neq 0$. Вычислим частную производную $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$. Для этого продифференцируем по y равенство $\Phi(x, y) = F(x, y, h(x, y))$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y}\,.$$

Так как $G(x, y, h(x, y)) \equiv 0$, то дифференцируя это уравнение по y, получим

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y} = 0\,.$$

Отсюда $\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}}$. Подставив это значении в выражение для $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = \frac{J(x,y,z)}{\frac{\partial G}{\partial z}}\,.$$

По условию $J(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ и $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \neq 0$ и значит, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$ в окрестности $O^2(x_0, y_0)$. Следовательно, существуют такая окрестность $O^1(x_0)$ и единственная функция $y = f(x)$, для которой $y_0 = f(x_0)$, $F\left(x, f(x), h\left(x, f(x)\right)\right) \equiv 0$, причем функция f имеет непрерывные частные производные в окрестности $O^1(x_0)$. Теперь наша система примет вид $\begin{cases} y = f(x) \\ z = h(x,y) \end{cases}$, откуда

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = h(x, f(x)) = g(x) \end{cases}.$$

По теореме о дифференцируемости сложной функции функция g имеет в окрестности $O^1(x_0)$ непрерывную частную производную g'. Кроме того,

$$f(x_0) = y_0, \quad g(x_0) = h(x_0, f(x_0)) = h(x_0, y_0) = z_0\,.$$

Подстановкой можно убедиться, что в $O^1(x_0)$

$$\begin{cases} F(x, f(x), g(x)) \equiv 0 \\ G(x, f(x), g(x)) \equiv 0 \end{cases}. \quad \blacktriangleright$$

Пусть отображение $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ задается с помощью функций $\begin{cases} y_1 = f(x_1, x_2) \\ y_2 = g(x_1, x_2) \end{cases}$, причем $\begin{cases} f(x_1^0, x_2^0) = y_1^0 \\ g(x_1^0, x_2^0) = y_2^0 \end{cases}$. Применим теорему о неявной функции к системе $\begin{cases} F \equiv f(x_1, x_2) - y_1 = 0 \\ G \equiv g(x_1, x_2) - y_2 = 0 \end{cases}$.
Пусть

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{D(f,g)}{D(x_1, x_2)}\,.$$

Тогда получим в качестве следствия следующую теорему.
Теорема о существовании обратной функции. *Пусть функции* $f, g \in C^1\left(O^2(x_1^0, x_2^0)\right)$ *и в окрестности* $O^2(x_1^0, x_2^0)$ *якобиан*

$J(x_1, x_2) \neq 0$. *Тогда найдется* $O^2_*(x_1^0, x_2^0)$ *такая, в которой существуют единственные обратные функции* $\begin{cases} x_1 = \varphi(y_1, y_2) \\ x_2 = \psi(y_1, y_2) \end{cases}$.

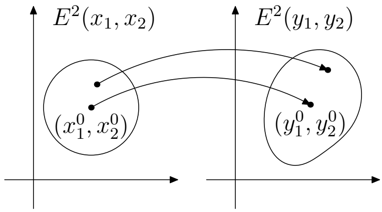

Рис. 12.10. Теорема об обратной функции.

2 семестр
Лекция 27
(12.05.68)

§ 58. Дополнение к теории экстремума функций многих переменных

Для функций одной переменной, заданной на отрезке, мы уже рассматривали задачу о нахождении абсолютного экстремума (см. § 32 с. 133). Рассмотрим теперь эту задачу для функции двух переменных $z = f(x, y)$, определенной в некотором замкнутом множестве $\bar{D}$ с внутренностью D и границей ∂D. Нахождение абсолютного экстремума в $\bar{D}$, как и в одномерном случае, тоже состоит из двух задач (рис. 12.11):

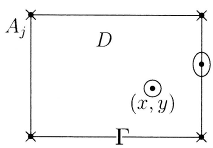

Рис. 12.11. Поиск экстремума функции многих переменных.

1) нахождение экстремума в открытой области D;

2) нахождение экстремума на границе ∂D области D.
Первую задачу мы уже решали для дифференцируемых функций (см. п. 56.3, с. 272). Здесь можно ограничиться нахождением критических точек (x_i, y_i), в которых $df = 0$, если их конечное число. Во второй задаче, в отличие от случая функции одной переменной, граница множества состоит из большого числа точек и метод простого перебора граничных точек здесь применить нельзя. Если граница области гладкая, то можем ее представить уравнением $F(x,y) = 0$, где $F \in C^1(D)$. Тогда задача 2) – это задача нахождения экстремума функции $z = f(x,y)$ при условии, что ее переменные связаны уравнением $F(x,y) = 0$, $(x,y) \in \partial D$. Эта задача называется *задачей на условный экстремум.* Если граница области задается с помощью нескольких уравнений $F_i(x,y) = 0$ $(i = 1, 2, ..., k)$, то "идем по размерности вниз т. е. исследуем на экстремум функцию $z = f(x,y)$ сначала в открытой области D, затем на линиях $F_i(x,y) = 0$, затем в концевых точках A_j этих линий (рис. 12.11).

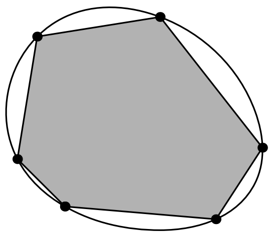

Рис. 12.12. Приближение области многоугольником.

Отметим, что для линейной функции $f(x,y) = ax + by$ методы дифференциального исчисления для поиска экстремума не применимы, и область D, не являющуюся многоугольником, приближенно заменяют многоугольником (например, с 10 – 20 вершинами) (рис. 12.12).

Рассмотрим теперь задачу нахождения условного экстремума.

58.1. Условный экстремум

Пусть имеется функция $z = f(x,y)$ при наличии уравнения связи $F(x,y) = 0$. Будем считать, что уравнение $F(x,y) = 0$ удовлетворяет тем условиям, которые были сформулированы в теореме о существовании неявной функции. Если разрешить относительно y уравнение $F(x,y) = 0$, то получим уравнение $y = \varphi(x)$, откуда $z = f(x, \varphi(x)) = \psi(x)$. Критические точки находятся из уравнения $\psi'(x) = 0$, т. е. из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x) = 0\,.$$

Производную $\varphi'(x)$ можно найти, продифференцировав уравнение $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'(x) = 0\,.$$

Таким образом, мы получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi' = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi' = 0 \\ F(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Здесь число уравнений увеличилось, так как значение φ' в критической точке можно рассматривать как новую неизвестную. Относительно φ' система линейна.

Предположим, что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Тогда из второго уравнения $\varphi' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

Отсюда получим систему для нахождения критических точек, не решая уравнения связи

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ F(x,y) = 0 \end{cases}.$$

58.2. Метод множителей Лагранжа

Этот метод сводит задачу на нахождение условного экстремума к уже знакомой задаче на безусловный экстремум. Для нахождения условного экстремума исследуют на экстремум вспомогательную функцию трех переменных – функцию Лагранжа

$$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda F(x,y)\,.$$

Для нахождения критических точек (см. п. 56.3) надо решить систему $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=0$, т. е.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0 \\ F(x,y)=0 \end{cases}.$$

Как и в предыдущем пункте, мы получили систему уравнений для нахождения условного экстремума (критических точек), только здесь вместо φ' стоит λ. Если исключить λ из этой системы, то получается в точности та система уравнений, которая фигурирует в конце предыдущего пункта.

В случае нескольких уравнений связи поступаем аналогичным образом. Пусть имеется функция $z=f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$ от $n+m$ переменных, причем известно, что ее переменные удовлетворяют m уравнениям связи

$$F_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0\,.$$

Предположим, что все уравнения связи удовлетворяют условиям существования неявной функции. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\Phi=f+\lambda_1F_1+...+\lambda_mF_m\,.$$

Докажем, что для нахождения критических точек надо решить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,...,n) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_j}=0 \quad (j=1,...,m) \\ F_j=0 \quad (j=1,...,m) \end{cases}.$$

Мы знаем, что уравнение, определяющее критические точки, есть $dz=0$, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1+...+\frac{\partial f}{\partial y_m}dy_m=0\,.$$

Продифференцируем уравнения связи:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m = 0\,.$$

Умножив первое уравнение на $\lambda_1, \ldots$, последнее на λ_m и сложив с уравнением, написанным выше, получим

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right)dx_1 + ...+ \\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_n} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\right)dx_n+ \\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\right)dy_1 + ...+ \\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_m} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\right)dy_m = 0\,.
\end{aligned}$$

Приравняв к нулю коэффициенты перед $dy_1, \ldots, dy_m$, получим линейную систему уравнений относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Определитель этой системы есть якобиан $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)} \neq 0$. Тогда существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_m} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0\,.$$

Так как $dx_1, \ldots, dx_n$ – дифференциалы независимых переменных, то из уравнения $dz = 0$ следует

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_n} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_n} = 0
\end{array}\right. .$$

Добавив к этим уравнениям предыдущие уравнения связи, мы и получим систему, состоящую из $n + m + m$ уравнений с $n + 2m$

неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, указанную выше. При этом уравнения связи могут быть записаны в более симметричном виде $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

2 семестр
Лекция 28
(17.05.68)

58.3. Достаточные условия экстремума неявной функции

Пусть задана функция $z = f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$, причем

$$F_j(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \quad (j = 1, ..., m).$$

Нами была введена функция Лагранжа

$$\Phi = f + \lambda_1 F_1 + ... + \lambda_m F_m$$

и было доказано, что критические точки

$$(x_1^0, ..., x_n^0, y_1^0, ..., y_m^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$$

находятся из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, ..., n) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = 0 \quad (j = 1, ..., m) \\ F_j = 0 \quad (j = 1, ..., m) \end{cases}.$$

Исследуем второй дифференциал $d^2 f = d^2 \Phi$ в критической точке. Пусть λ_j – те числа, которые удовлетворяют выписанной выше системе. Имеем:

$$d^2\Phi = d^2 f + \lambda_1 d^2 F_1 + ... + \lambda_m d^2 F_m,$$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + ... \right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial y_1} d^2 y_1 + ...,$$

$$d^2 F_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + ... \right)^2 F_j + \frac{\partial F_j}{\partial y_1} d^2 y_1 + ...$$

Отсюда

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial y_1}dy_1 + ...\right)^2 (f + \lambda_1 F_1 + ... + \lambda_m F_m) +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\right) d^2 y_1 + ... = 0\,.$$

Но

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и значит,

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial y_1}dy_1 + ...\right)^2 \Phi\,.$$

В этой формуле, так как $d^2 f = d^2\Phi$, надо учесть уравнения связи. Продифференцировав уравнения связи, найдем выражение dy_j через dx_i. Исследуя получившуюся квадратичную форму на знакоопределенность, получим достаточные условия условного экстремума как в пункте 56.3.

58.4. Дополнения к достаточным условиям абсолютного экстремума

Пусть $z = f(x_1, ..., x_n)$. Изучим поведение второго дифференциала $\left(d^2 f\right)_0$ в критической точке. Имеем

$$\Delta f = \theta \left\{ \left(d^2 f\right)_0 + o(\rho^2) \right\}\,,$$

где $\rho^2 = (dx_1)^2 + ... + (dx_n)^2$, $0 < \theta < 1$. Если квадратичная форма строго положительна, то и приращение Δf строго положительно.
Лемма о квадратичных формах. *Пусть квадратичная форма*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l = \Phi(x)$$

строго положительная, т.е. $\Phi(x) > 0$ *при всех* $x \neq 0$. *Положим*

$$|x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2\,.$$

Тогда существует такое число $C > 0$, *что* $\forall x \;\; \Phi(x) \geq C\,|x|^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно ограничиться случаем $|x| = 1$, так как $\Phi(tx) = t^2\Phi(x)$, $|tx|^2 = t^2\,|x|^2$. Функция $\Phi(x) \in C(E^n)$. Множество $|x| = 1$ – сфера радиуса 1 – замкнутое ограниченное и следовательно, компактное в евклидовом пространстве множество. По теореме о непрерывной на компактном множестве функции $\Phi(x)$ достигает на единичной сфере своего минимального значения. Значит, найдется точка x_0, $|x_0| = 1$, такая, что

$$\min_{|x|=1} \Phi(x) = \Phi(x_0) = C > 0\,.$$

Тогда $\forall x$, $|x| = 1$, $\Phi(x) \geq C$. ►

58.5. Функциональная зависимость

Пусть

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)\,,$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)\,,$$
$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

– функции, заданные на некотором множестве D^3. Когда y_3 – линейная функция $y_3 = Ay_1 + By_2$, мы имеем простейший вид функциональной зависимости – линейную зависимость. Пусть

$$x^0 = (x_1^0,\, x_2^0,\, x_3^0) \in D^3, \quad y_1^0 = f_1(x^0), \quad y_2^0 = f_2(x^0), \quad y^0 = \left(y_1^0, y_2^0\right)\,.$$

Если для какой-нибудь из функций y_i, например, для y_3, существует функция $\Phi(y_1, y_2)$, определенная в окрестности $O^2\left(y^0\right)$ такая, что для любого x из некоторой окрестности $O^3(x^0)$

$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) = \Phi\left(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)\right)\,,$$

то будем говорить, что между функциями y_1, y_2, y_3 существует *функциональная зависимость*, именно, что f_3 *выражается через* f_1 *и* f_2.

Если функции f_1, f_2, $f_3 \in D\left(O^3(x^0)\right)$ и $\Phi(y_1, y_2) \in D\left(O^2\left(y^0\right)\right)$, то будем говорить, что эта функциональная зависимость *гладкая*, именно, что f_3 *гладко выражается через* f_1 *и* f_2.

Теорема. Необходимое и достаточное условие гладкой функциональной зависимости. *Пусть* f_1, f_2, $f_3 \in D\left(O^3(x^0)\right)$.

Тогда для того, чтобы между функциями f_1, f_2, f_3 *существовала гладкая функциональная зависимость, необходимо и достаточно, чтобы якобиан* $J = \frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} \equiv 0$ *в некоторой окрестности* $O^3(x^0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть существует функция $\Phi(y_1, y_2)$, определенная в окрестности $O^2\left(y^0\right)$ такая, что для любого x из окрестности $O^3(x^0)$

$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) = \Phi\left(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)\right) = \Phi(y_1, y_2).$$

Тогда для $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}.$$

Здесь коэффициенты $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}$ не зависят от i. Следовательно, третья строка якобиана

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

линейно выражается через две предыдущие строки с коэффициентами $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}$. По свойствам определителей отсюда следует, что $J \equiv 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть известно, что $J \equiv 0$ в окрестности $O^3(x^0)$. Допустим, что ранг матрицы якобиана равен 2 и, для определенности, пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall\, x \in O^3(x^0)$. Тогда, по известной теореме о ранге матрицы из линейной алгебры, третья строка якобиана линейно выражается через первые две. Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) - y_1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) - y_2 = 0 \end{cases}.$$

По теореме о неявной функции эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_3, y_1, y_2) \\ x_2 = \varphi_2(x_3, y_1, y_2) \end{cases}.$$

Продифференцируем тождества

$$\begin{cases} f_1(\varphi_1, \varphi_2, x_3) = y_1 \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2, x_3) = y_2 \end{cases}$$

по x_3 и получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0\,,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0\,.$$

Тогда и

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0$$

как линейная комбинация двух предыдущих строк. Но

$$y_3 = f_3\left(\varphi_1(x_3, y_1, y_2), \varphi_2(x_3, y_1, y_2), x_3\right) = \Phi(x_3, y_1, y_2)$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\,.$$

Следовательно, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0$. Тогда y_3 – это функция лишь переменных y_1, y_2, т. е. $y_3 = \Phi(y_1, y_2)$.

Если все миноры якобиана второго порядка равны нулю, то все его строки пропорциональны и функции y_i выражаются через какую-нибудь одну из них, например, через y_1, с помощью выражения вида $y_i = a_i y_1 + c_i$. Это и будет искомая функциональная зависимость в данном случае. ▶

Литература

[1] Валле-Пуссен де ла Ш.-Ж. * [3] Курс анализа бесконечно малых. Т.I. – Петроград: Гостехиздат, 1922.

[2] Виноградова И. А. , Олехник С. Н. , Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М. : Издательство Московского Университета, 1988.

[3] Гелбаум Б. , Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М. : Мир, 1967 .

[4] Колмогоров А. Н. , Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1989.

[5] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 2 т. – М. : Высшая школа, 1981.

[6] Ландау Э. * Основы анализа. – М. : Государственное издательство иностранной литературы, 1947.

[7] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М. : Наука, 1971.

[8] Погорелов А. В. * Лекции по дифференциальной геометрии. – Харьков: Наука, 1956.

[9] Рудин У. * Основы математического анализа. – М. : Мир, 1957.

[10] Фихтенгольц Г. М. * Основы математического анализа. В 2 т. – М. : Наука, 1964.

[3] Знаком " * " отмечена литература, рекомендованная С. Б. С. на лекциях. (Ред.)

[11] Фихтенгольц Г. М. * Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. – М. : Наука, 1969.

[12] Хинчин А. Я. * Краткий курс математического анализа. – М. : Гостехиздат, 1957.

[13] Шибинский В. М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа. – М. : Высшая школа, 2007.

Предметный указатель

Лектор Стечкин Сергей Борисович
Редакторы Радославова Татьяна Васильевна,
Холщевникова Наталья Николаевна

ЛЕКЦИИ С. Б. СТЕЧКИНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. Том I.
М., Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2012 – 304 с.

Оригинал макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 21.12.2011 г.
Формат 60×90 $1/16$. Объем 19 п.л.
Заказ 2 Тираж 200 экз.

Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ
г. Москва, Ленинские горы.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета

Сергей Борисович Стечкин
(1920 – 1995)

Круг научных интересов доктора физико-математических наук, профессора С. Б. Стечкина был весьма широк. Это классические задачи по теории приближения функций, теории тригонометрических и ортогональных рядов, задачи по приближению неограниченных операторов ограниченными и геометрические задачи теории приближений, исследования по теории чисел.

Помимо основной работы в Математическом институте им. В. А. Стеклова, С. Б. Стечкин вел большую педагогическую работу в Московском и Уральском государственных университетах, его лекции пользовались неизменным успехом у слушателей. Многие его ученики стали известными учеными.

В 1957 - 1967 годах С. Б. Стечкин был заместителем директора МИАН по Свердловскому отделению, созданному при его активном участии, затем СОМИ было преобразовано в Институт Математики и Механики Уральского Отделения РАН. В 1967г. С. Б. Стечкин организовал журнал "Математические заметки"и первые двадцать лет был его главным редактором. Вот уже скоро четыре десятка лет проводятся летние научные математические школы С. Б. Стечкина, сначала под его руководством, а с 1996 под руководством его учеников.