О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике

Сэр Альфред Брей Кемпе 1849-1922

Дело А.Кемпе

- Адвокат. Член (с 1881), казначей и вице-президент (1899–1919) Королевского общества, президент (1892-1894) Лондонского математического общества, рыцарь (1913).
- Ученик А.Кэли, до 42 лет также зарабатывавшего на жизнь адвокатурой
- 1876 – публикация статьи об общем методе черчения алгебраических кривых
- 1879 - опубликована работа с решением проблемы четырёх красок (В 1890 П. Хивудом в ней найдена ошибка)

У инженеров

- Механизм – конструкция, допускающая непрерывное движение. Служит для передачи и преобразования движений. Теория механизмов.
- В противном случае конструкция называется фермой. Фермы мостов. Строительная механика.

Давид Гильберт

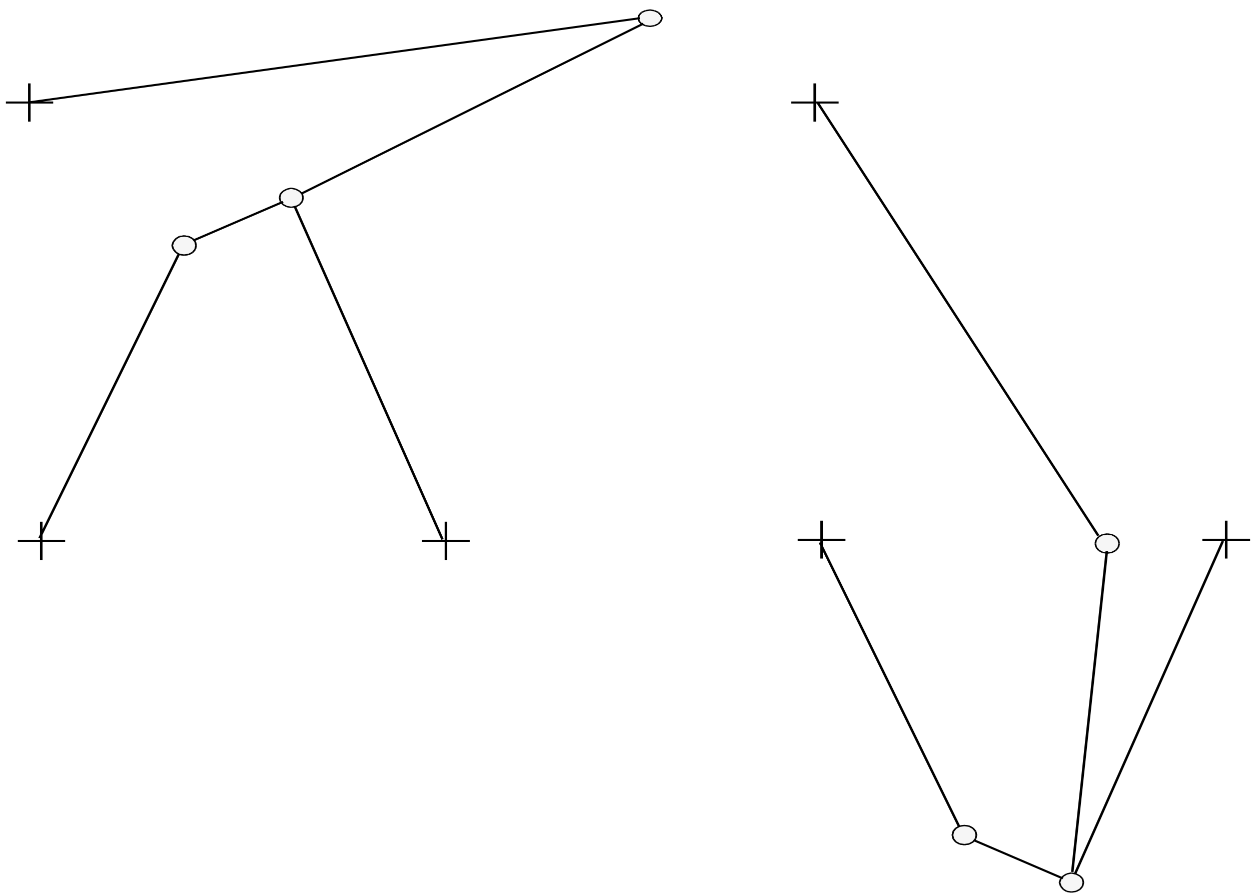
- «Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости»

Структура конструкции, граф $G(V, E)$

- Конструкция состоит из рычагов (прямолинейных стержней), имеющих на концах шарниры, и соединённых между собой и с некоторыми точками плоскости этими шарнирами.
- Шарниры могут быть двух сортов: свободные (кружочки) и закреплённые (крестики).
- Шарнир допускает все возможные вращения смежных ему рычагов в плоскости.

.

Это один или разные механизмы?



«Теорема» Кемпе

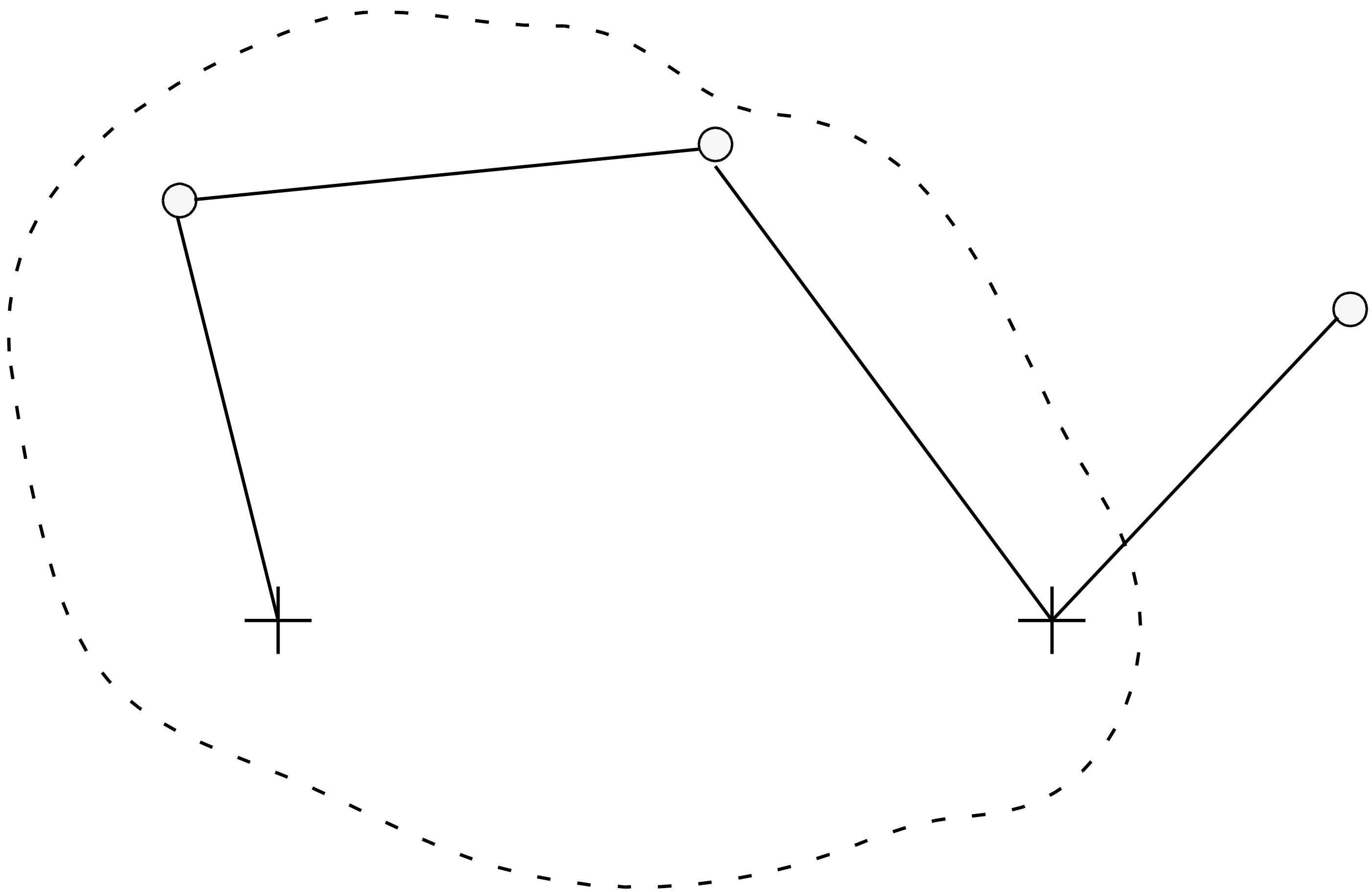
On a general method of describing plane curves of the n-th degree by Linkwork (1876)

- *Всякий достаточно малый кусок произвольной плоской алгебраической кривой представляет собой множество положений шарнира плоского шарнирного механизма.*

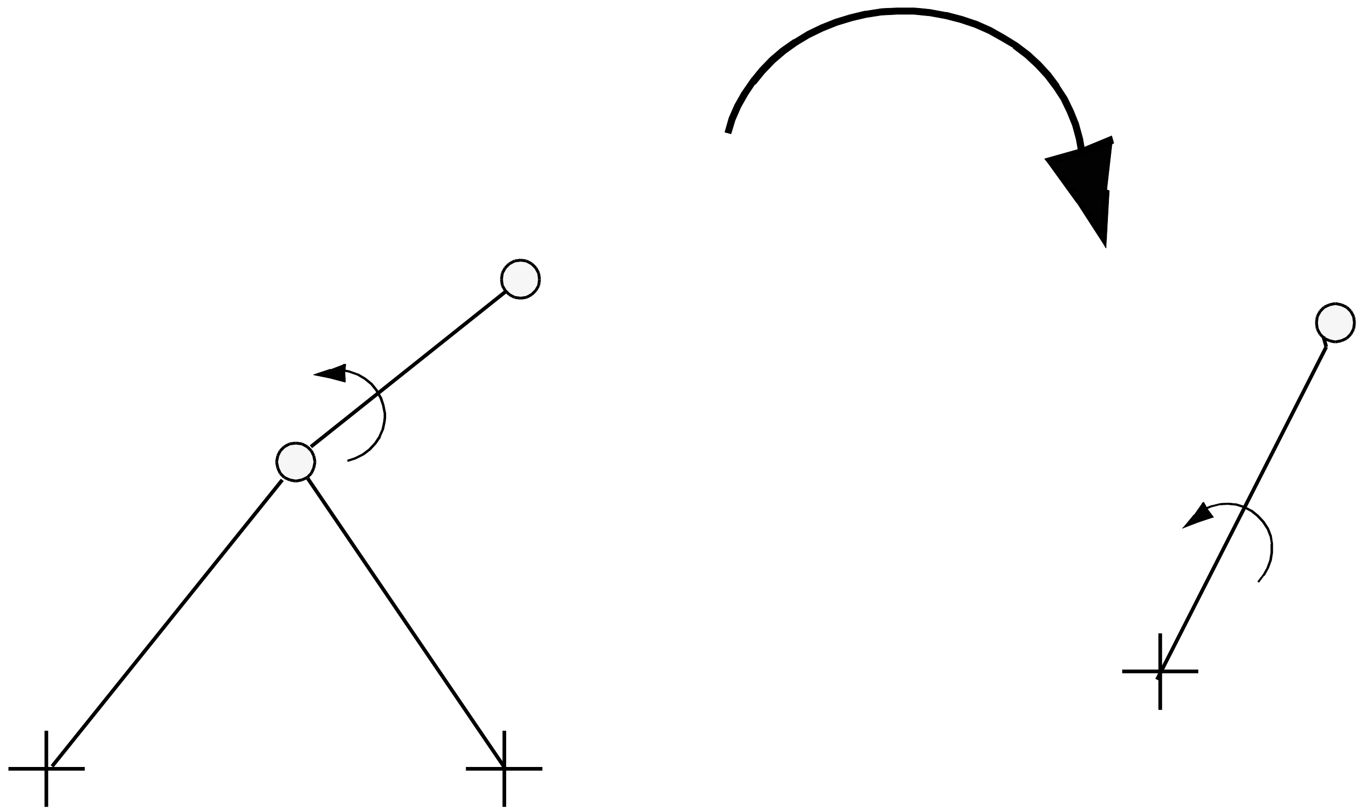
Шарнирная структурная схема (ШСС) механизма

- а) G(V,E) конечный связный граф без петель и кратных рёбер
- б) вершины крестики смежны лишь вершинам кружочкам,
- в) подграф графа G(V,E) на вершинах кружочках связен,
- г) условие, вытекающее из подвижности свободных шарниров, из него следует, например, что каждый кружочек смежен не более чем одному крестику

Сосредоточимся на одном механизме – условие в).



Упрощение ШСС механизма – условие г). Приведённая ШСС.



В теории механизмов

- "57. Кинематическая схема механизма: структурная схема механизма с указанием размеров звеньев, необходимых для кинематического анализа механизма"

Формализация основных понятий

- Закреплённая шарнирная схема (ЗШС)

это ШСС, для которой заданы положения закреплённых шарниров в плоскости, причём разным закреплённым шарнирам отвечают различные точки плоскости.

- Кинематическая шарнирная схема (КШС): это ЗШС плюс набор *d* квадратов длин рычагов.

Задание ЗШС определяет

- Два многомерных пространства параметров: R^{2m} и R^r, m – число свободных шарниров, r – число рычагов.

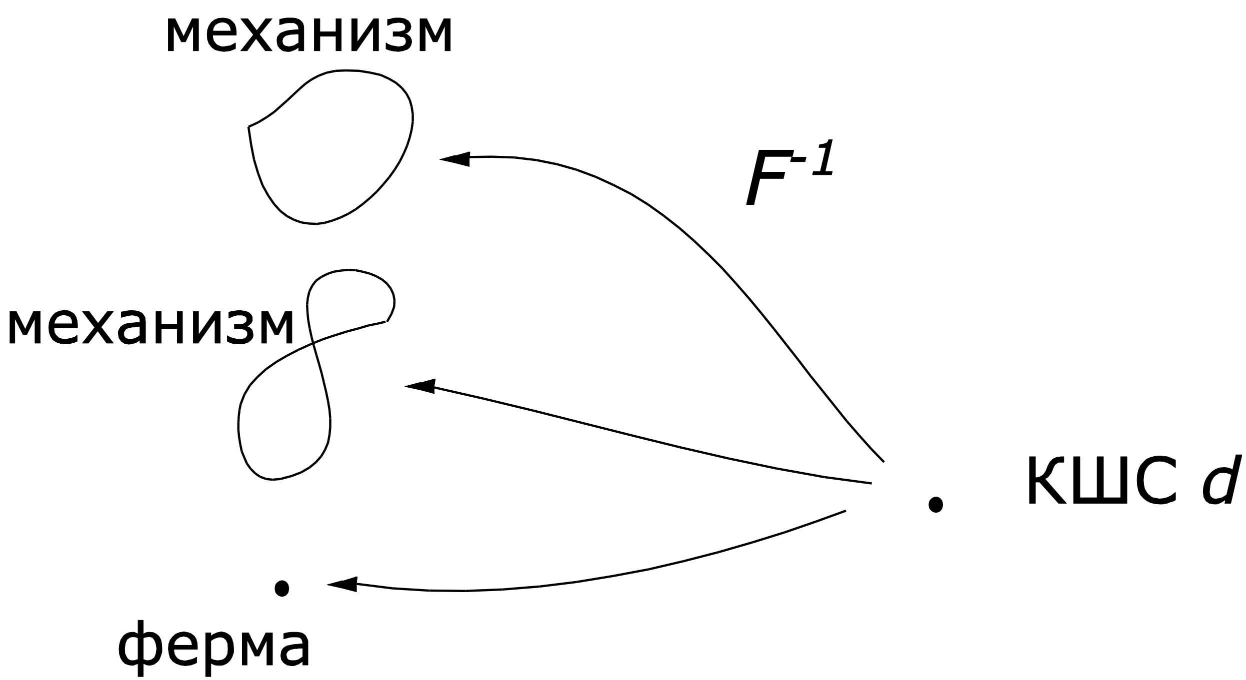
  И отображение F одного из них в другое, называемое рычажным. Оно сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов.

$$F: R^{2m} \to R^r, \quad d_{ij} = (p_i - p_j)^2, \quad ij \in E.$$

Определение механизма

- Конфигурационное пространство механизма – есть неодноточечная компонента связности полного прообраза $F^{-1}(d)$.
- Одноточечным компонентам связности $F^{-1}(d)$ отвечают фермы
- Точку $p \in R^{2m}$ называем шарнирником. Это либо ферма, либо определённое положение механизма.

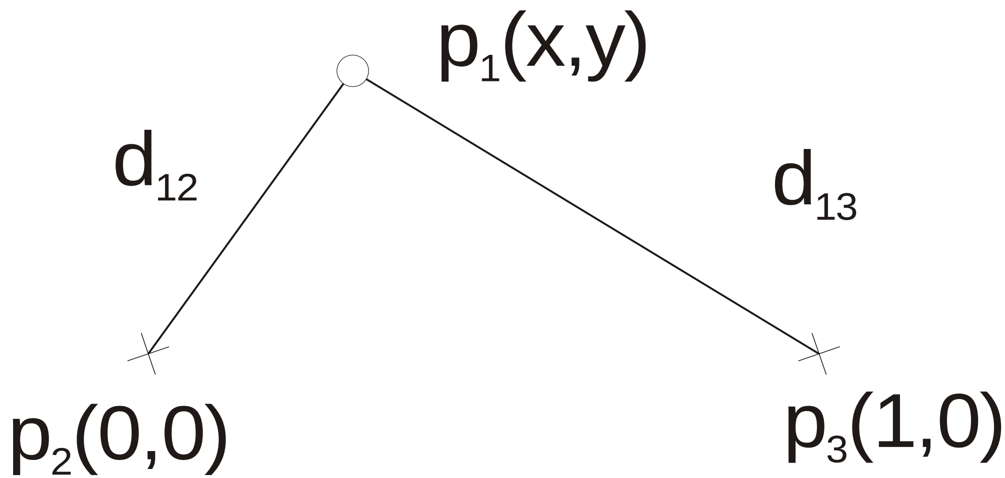
Прообразы при рычажном отображении



У отвлечённых математиков

- Конфигурационное пространство шарнирного механизма – это $F^{-1}(d)$ - то, что у меня называется конфигурационным пространством КШС. Причём, на граф $G(V,E)$ не накладывается никаких условий, кроме разве лишь отсутствия петель (Капович, Миллсон). Другие авторы накладывают условия конечности, связности.

Простейший пример рычажного отображения



$$d: \begin{cases} d_{12} = x^2 + y^2 \\ d_{13} = (x-1)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$|dF| = 2^2 \begin{vmatrix} x & y \\ x-1 & y \end{vmatrix} = 4y.$$

У отвлечённых математиков

- Конструкция предыдущего примера называется шарнирным механизмом, а его конфигурационное пространство состоит, вообще говоря, из двух точек.
- Удобство этого для математиков состоит в том, что конфигурационное пространство КШС всегда является алгебраическим множеством, в отличии от его компоненты связности.

Определения по Кингу

- An abstract linkage is a finite graph L with a positive number $\ell(vw)$ assigned to each
- edge vw.
- So we say that a linkage $\mathcal{L}$ is a foursome (L, ℓ, V, μ) where (L, ℓ) is an abstract
- linkage, $V \subset V(L)$ is a subset of its vertices, and $\mu: V \to C$….

Из рецензии

- "В следующем разделе статьи приведены определения, на мой взгляд, наиболее разумно формализующие основные понятия геометрии шарнирных механизмов"
- *Лучше написать, например, что "для целей настоящей статьи мы предпочитаем использовать ..."*

Мой ответ рецензенту

- В том-то и дело, что мои определения созданы не для одной статьи. Я продвигаю основанную на них формализацию теории шарнирных механизмов вот уже 30 лет во многих статьях в надежде, что в итоге она будет принята механиками. Моя формализация существенно отличается от позднейших формулировок Каповича, Милсона и других, действительно, введённых для целей отдельных статей на тему развития результата Кемпе. Смысл слова «механизм» в этих статьях коренным образом расходится с его смыслом в теории механизмов.

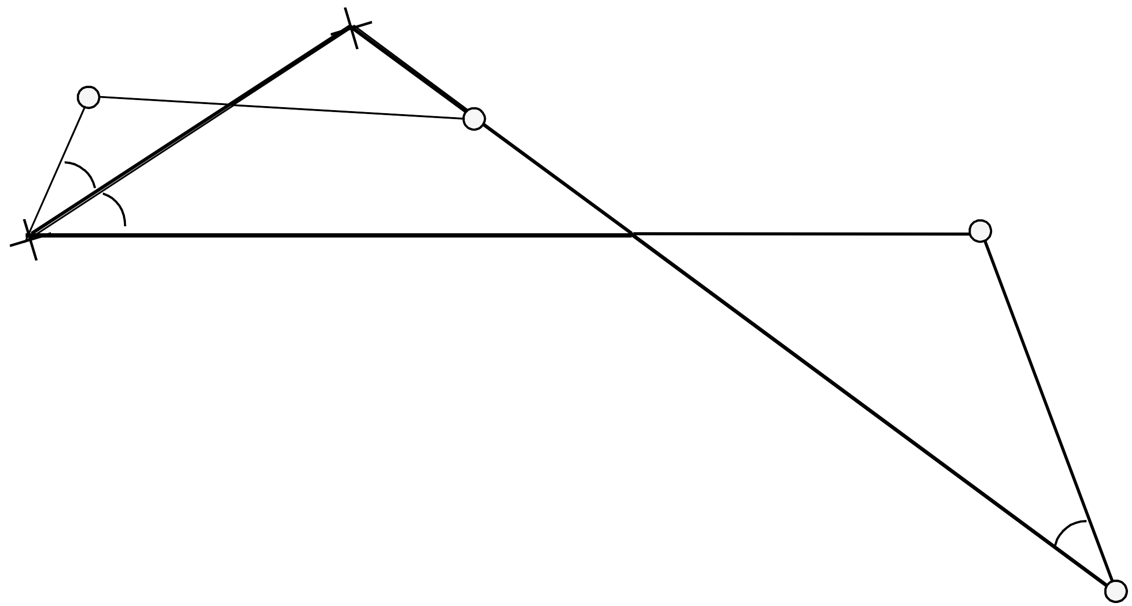
Новейшее развитие результата Кемпе

- *J. Hopcroft, D. Joseph, S. Whitesides (1984).* Заметили неточность у Кемпе.
- *D. Jordan and M. Steiner Configuration Spaces of Mechanical Linkages (1999*) Средствами базовой математики доказали:
- **Теорема.** *Для любого компактного алгебраического множества $X \subset R^k$ найдётся КШС, некоторая компонента конфигурационного пространства которой гомеоморфна X.*

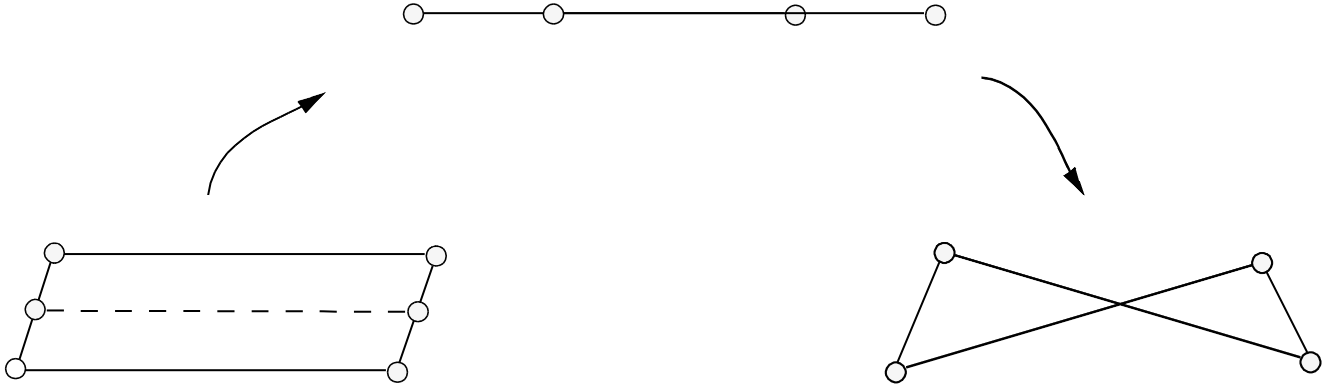
«Закрытие» темы

- 1998 - 2002 Kapovich M., Millson J.J.
- 1998 King Henry C.
- Теорема 1. Для любого компактного алгебраического множества $X \subset R^k$ найдётся «механизм», конфигурационное пространство которого аналитически изоморфно конечному набору непересекающихся копий множества X.

Удвоитель на основе антипараллелограмма



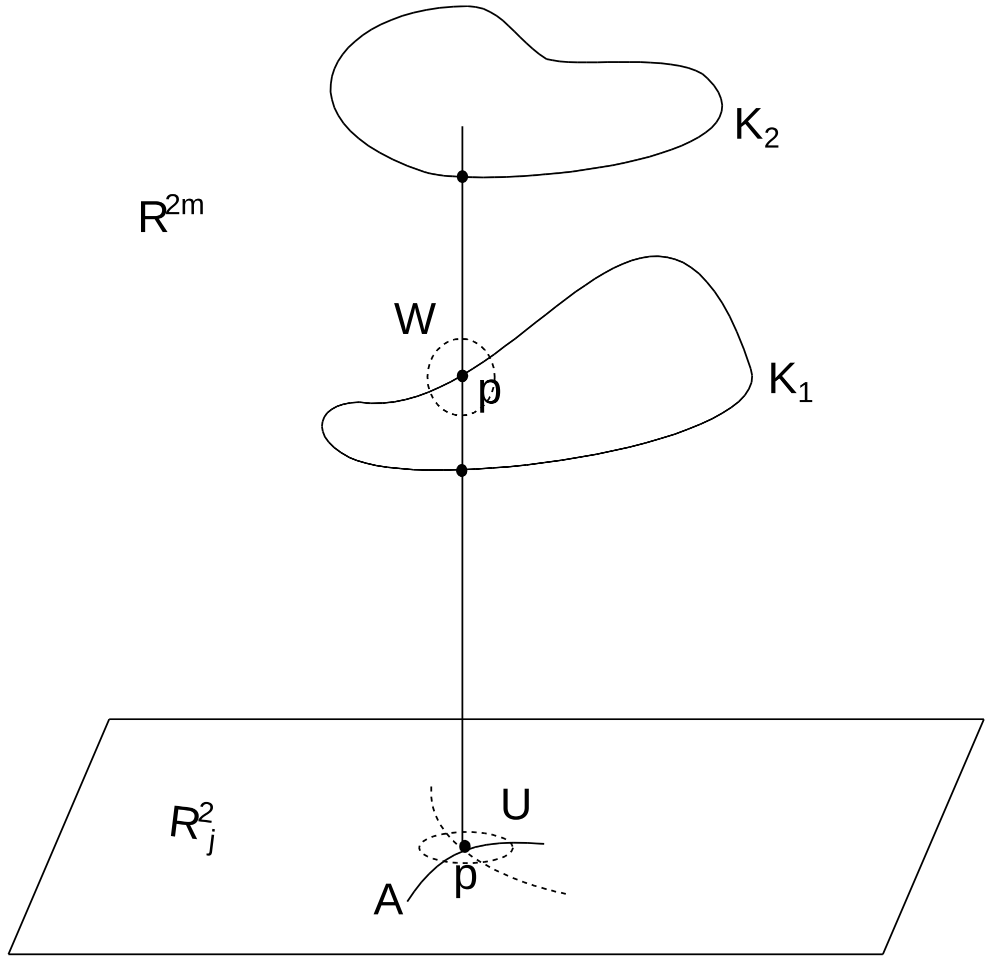
Переход параллелограмм - антипараллелограмм



Этого Кемпе не доказывал:

- Для произвольной плоской алгебраической кривой A, и точки $p \in A$ найдутся окрестность U точки p и механизм с конфигурационным пространством K и шарниром p_i для которого $\pi K \cap U = A \cap U$
- Здесь πK – проекция конфигурационного пространства механизма на плоскость положений i – го шарнира.

Конфигурационные пространства КШС и механизма и их проекции



Работы по уточнению доказательства Кемпе

- Abbott T. Generalizations of Kempe's Universality Theorem, MS Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2008
- Power S. Elementary proofs of Kempe universality, arXiv:1511.09002v2 [math.MG] 26 Apr 2017

Уточнённая формулировка теоремы Кемпе

- Для произвольной плоской алгебраической кривой A, и точки $p \in A$ найдётся механизм с шарниром p_j и такие окрестности $U \subset R^2$ точки p и $W \subset R^{2m}$окрестность точки $\mathbf{p}$, что $\pi(K \bigcap W)$=$A \cap U$, где π-- проекция на плоскость положений шарнира p_j.

Теорема о «подделке подписи». Рекламный ход Тёрстона.

- Теорема 2. Полиномиально параметризованная плоская кривая $r(t), a \leq t \leq b$ может быть прочерчена шарниром шарнирного механизма.
- Это не относится к не рациональным кривым, например к $x^4 + y^4 = 1$.

Из моего письма по поводу написанного про Кемпе в математическихэтюдах

- *"На этом Кемпе останавливается, так как для его «доказательства» теоремы «о подписи» нужен был механизм, делящий угол именно на три части."*
- есть клевета на Кемпе. В своём доказательстве он никак не выделял трисектор! И использовал умножитель на произвольное число.
- Кемпе в гробу перевернётся, услышав, что он неправильно доказал теорему Тёрстона "о подписи". Кемпе доказывал свою теорему, и доказал её так же, как Коши доказал теорему об однозначной определённости выпуклого многогранника. Да, с неточностью. Но исправимой даже легше, чем неточность, допущенная Коши. Тёрстон (которого и в проекте не было при жизни Кемпе) всего лишь постарался воскресить интерес к этой теме, и придумал рекламный ход с "подписью"!

Черты перезрелой математики 1:

- Источник задач и вдохновения находится исключительно внутри математики.
- Стремление к общности, воспринимаемое как самоцель.
- Математика начинает выступать не как орудие исследования природы, а как некий божок, призванный предписывать ей законы.

Черты перезрелой математики 2:

- Написание текста без учёта законов его восприятия. Единственный ориентир --- скрупулёзность, определённость понятий. Иной раз мнимая. Бросается в глаза неудобоваримость и заформализованность текста. Дж. Литлвуд называл такой стиль --- вдохновлённым дьяволом.

Черты перезрелой математики 3:

- Отсутствие стремления донести результаты своей деятельности до непосвящённых в секреты своей математической кухни. Некоторые пишут намеренно непонятно для посторонних. Даже если результаты могут иметь прикладной смысл, они изложены так, что необходим их перевод на более простой язык.
- Снобизм. Желание считать недозрелую математику недоматематикой или даже нематематикой.

Из ещё из одной рецензии

- Несмотря на то, что сам рецензент разделяет идеи Ковалева М.Д., последняя часть его работы кажется сугубо полемической. Она не про результаты, а про философию, которая стоит за математикой. Этим рассуждениям не место в научной статье. По мнению рецензента, после исправления - то есть удаления полемической части и исправления заголовка - статья может быть опубликована
- *Статья должна быть опубликована в «Чебышёвском сборнике» в неурезанном виде*

Подробнее ознакомиться с этим кругом вопросов можно по вышедшей в 2019 в издательстве УРСС моей книге

Благодарю за внимание!