ЮБИЛЕЙНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ»
(МГУ, 2014 г., декабрь)

О задачах Д. Кнута и Р. Беллмана и их обобщениях

В. В. Кочергин

МГУ имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра дискретной математики

Задача об эффективном возведении в степень

Задача: вычислить степень x^n по данным x и натуральному n.

Вычисление x^{16}: x^2, x^4, x^8, x^{16} (5 операций умножения).

Вычисление x^{23}: x^2, x^4, x^5, x^{10}, x^{11}, x^{22}, x^{23} (7 операций умножения).

Очевидно, что, с одной стороны, для вычисления x^n требуется не менее $\log n$ операций умножения, а с другой, — для любого n можно предложить метод вычисления x^n, использующий не более $2\log n$ (точнее, не более $\log n + s(n)$, где $s(n)$ — количество единиц в двоичной записи числа n) операций.

Вопрос о наиболее экономичном способе вычисления x^n с помощи операций умножения — классическая задача, которая обычно формулируется в аддитивной постановке как задача об аддитивных цепочках.

Задача об аддитивных цепочках

Аддитивной цепочкой для натурального числа n называется последовательность целых чисел

$$a_0 = 1, a_1, \ldots, a_r = n,$$

удовлетворяющая свойству: для каждого k, $1 \leq k \leq r$, найдется два целых числа (не обязательно различных) i и j, $0 \leq i, j \leq k-1$, таких, что $a_k = a_i + a_j$.

Число r называется *длиной* этой аддитивной цепочки. Минимальная длина аддитивной цепочки для n называется *аддитивной сложностью вычисления натурального числа* n и обозначается через $l(n)$.

Очевидно, что минимальное число операций умножения, достаточное для вычисления x^n, равно $l(n)$. Поэтому иногда вместо $l(n)$ будет использоваться обозначение $l(x^n)$.

Задача в общем виде

Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$ с неотрицательными коэффициентами без нулевых строк.

Аддитивной цепочкой для матрицы A называется последовательность q-мерных векторов (наборов) вида

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots, \mathbf{v}_q = (0, 0, \ldots, 1), \mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \ldots, \mathbf{v}_{q+r},$$

начинающуюся с q единичных векторов и удовлетворяющую условиям:

1) для каждого k, $q + 1 \leq k \leq q + r$, найдется два натуральных числа (не обязательно различных) i и j, $1 \leq i \leq k-1$, $1 \leq j \leq k-1$, таких, что $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$ (сложение векторов покомпонентное);

2) $\{(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1q}), (a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2q}), \ldots, (a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{pq})\} \subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{q+r}\}$.

Число r называется длиной цепочки.

Минимальная длина аддитивной цепочки для матрицы A называется *аддитивной сложностью* (*вычисления, порождения, реализации*) *матрицы* A и обозначается через $l(A)$.

Задача об аддитивной сложности матриц по-существу совпадает с известной задачей о сложности вычисления систем одночленов (систем коммутативных мономов) — величина $l(A)$ численно равна минимально возможному числу операций умножения, достаточному для вычисления по переменным $x_1, x_2, \dots, x_q$ задаваемой матрицей A системы одночленов

$$f_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}},$$

$$f_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}},$$

$$\dots,$$

$$f_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}$$

(при этом допускается многократное использование промежуточных результатов). Для величины $l(A)$ используется также обозначение $l(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

«Вычисление системы одночленов»

«Входы» : $x_1, x_2, \ldots, x_q$;

используемые операции: умножение;

вычисляемые функции: $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$;

мера сложности: $l(A)$.

«Вычисление системы целочисленных линейных форм»

«Входы» : $x_1, x_2, \ldots, x_q$;

используемые операции: сложение и вычитание;

вычисляемые функции: $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q,\ \ldots,\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q$,

мера сложности: $l_2(A)$.

«Вычисление системы элементов свободной абелевой группы»

«Входы»: $x_1, x_2, \ldots, x_q, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_q^{-1}$;

используемые операции: умножение;

вычисляемые функции: $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$;

мера сложности: $l_F(A)$.

«Реализация целочисленных матриц вентильными схемами с кратными путями»

Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$ с неотрицательными элементами.

Ориентированный граф S без ориентированных циклов будем называть *вентильной схемой с кратными путями* (или *вентильной схемой с предписанным числом путей*), *реализующей матрицу* A, если:

1) в S выделено p вершин — входных полюсов и q вершин — выходных полюсов, причем в S нет ориентированных путей от одного входа к другому, от одного выхода к другому, от выхода к входу;

2) для любой пары (i, j), $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, число ориентированных путей от i-го входа к j-му выходу равно в точности a_{ij}.

Сложность $l(S)$ вентильной схемы S — это число ребер (вентилей) в схеме S. Положим $l(A) = \min l(S)$, где минимум берется по всем схемам, реализующим матрицу A.

В 1937 г. А. Шольц ввел понятие аддитивной цепочки.

А. Брауэр, 1939:

$$l(n) \sim \log n;$$

$$l(n) \leq \log n + \frac{\log n}{\log\log n} + O\left(\frac{\log n \log\log\log n}{(\log\log n)^2}\right).$$

П. Эрдёш, 1960: для почти всех n

$$l(n) = \log n + \frac{\log n}{\log\log n} + o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right).$$

Гипотеза Шольца — Брауэра:

$$l(2^m - 1) \leq m - 1 + l(m).$$

А. Шенхаге, 1975:

$$l(n) \geq \log n + \log s(n) - 2{,}13,$$

где $s(n)$ — число единиц в двоичной записи числа n.

В 1963 г. Р. Беллман, а затем в 1964 г. Е. Страус сформулировали задачу о сложности вычисления одночлена от q переменных $l(x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_q^{a_q})$.

В 1969 г. Д. Кнут [Искусство программирования, т. 2, разд. 4.6.3., упр. 32] поставил задачу о сложности вычисления p степеней одной переменной т. е. нахождения величины $l(x^{a_1},x^{a_2},\ldots,x^{a_p})$.

Е. Страус, 1964: для любого фиксированного q

$$l(x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_q^{a_q})\sim\log(\max a_i).$$

А. Яо, 1976: для любого фиксированного p

$$l(x^{a_1},x^{a_2},\ldots,x^{a_p})\sim\log(\max a_i).$$

Д. Добкин и Р. Липтон, 1980 (с использованием результата Т. Соузарда, 1974):

$$l\left(x^{1^2},x^{2^2},\ldots,x^{p^2}\right)\sim p.$$

«Двойственность»

Независимо (1981) А. Ф. Сидоренко; Дж. Оливос; Д. Кнут и К. Пападимитриу: **задачи Беллмана и Кнута эквивалентны**.

Утверждение. Для любой целочисленной матрицы A с неотрицательными элементами размера $p \times q$ без нулевых строк и столбцов выполняется равенство

$$l(A) + p = l\left(A^T\right) + q.$$

Утверждение. Для любой целочисленной матрицы A размера $p \times q$ выполняются неравенства $-q \leq l_2\left(A^T\right) - l_2(A) \leq p$.

В отличие от мер сложности l и l_2, мера сложности l_F не обладает свойством двойственности:

$$l_F\left(\left(2^k, 2^{-k}\right)\right) = k + 1, \quad l_F\left(\left(2^k, 2^{-k}\right)^T\right) = 2k.$$

А для меры сложности l равенство $l(A) = l(A^T)$ очевидно.

П. Доуни, Б. Леонг, Р. Сети (1981) установили, что задача распознавания по набору натуральных чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_p, l)$ существования аддитивной цепочки, имеющей длину l и содержащей числа $n_1, n_2, \ldots, n_p$, является NP-полной.

Поэтому естественно рассматривать исходные задачи в асимптотической постановке (при $\sum |a_{ij}| \to \infty$) — требуется найти метод вычисления матрицы A со сложностью в том или ином смысле близкой к значению $l(A)$, $l_2(A)$ или $l_F(A)$ соответственно (для всех или почти для всех матриц).

Верхние оценки для задачи Беллмана — Кнута

Пусть $N = n_1 n_2 \dots n_m$, $\sum n_i \to \infty$.

Теорема.

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) \le \frac{\log N}{\log\log N}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}\right)\right) + \\ + O(m + \log\max n_i),$$

Теорема (совместно с С. Б. Гашковым).

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) \le \log\max n_i + \\ + \frac{\log N}{\log\log N}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}\right)\right) + O(m),$$

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *при* $x \to \infty$ *удовлетворяет условиям* $f(x) \to \infty, \quad \log f(x) = o(\log x)$. *Тогда выполняются неравенства*

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots, x_m^{n_m}) \le \log(\max n_i)(1 + o(1)) + \frac{\log N}{\log\log N}(1 + o(1)) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \left(\lceil \log_{(m/(f(m))^2)} n_i \rceil - \log_{(m/(f(m))^2)} n_i \right),$$

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_m}) \le \log(\max n_i)(1 + o(1)) + \frac{\log N}{\log\log N}(1 + o(1)) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \left(\lceil \log_{(m/(f(m))^2)} n_i \rceil - \log_{(m/(f(m))^2)} n_i \right) - m.$$

Следствие.

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots, x_m^{n_m}) \lesssim \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N} + m,$$

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_m}) \lesssim \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N}.$$

Нижние оценки для задачи Беллмана — Кнута

Тривиальная оценка:

$$l(x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_m^{n_m}) \geq \max(\log(\max n_i), m'-1)+m-1,$$

где m' — число различных чисел в множестве $\{n_1,n_2,\dots,n_m\}$.

Мощностная оценка:
Пусть последовательность наборов $\tilde{n}(s) = \big(n_1(s),n_2(s),\dots,n_{m(s)}(s)\big)$, $s = 1,2,\dots$, удовлетворяет условию $N=\prod_{i=1}^{m(s)} n_i(s)\to\infty$ при $s\to\infty$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ доля наборов $(k_1,k_2,\dots,k_m)$, где $k_i\leq n_i$, удовлетворяющих соотношению

$$l\left(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_m^{k_m}\right) \geq \frac{\log N}{\log\log N}\left(1+(1-\varepsilon)\frac{\log\log\log N}{\log\log N}\right),$$

стремится к единице при $s\to\infty$.

Для произвольного набора $\tilde{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ различных натуральных чисел через σ обозначим перестановку, упорядочивающую набор $\tilde{n}$ по возрастанию: $n_{\sigma(1)} < n_{\sigma(2)} < \dots < n_{\sigma(m)}$. Положим

$$\mathfrak{M}\left(\tilde{n}\right) = \big\{(k_1, k_2, \dots, k_m) \mid \\ k_1 < k_2 < \dots < k_m,\ k_i \in \mathbb{N},\ 1 \le k_i \le n_{\sigma(i)},\ i = 1, 2, \dots, m\big\}.$$

Также положим $K = k_1 k_2 \dots k_m$.

Теорема. *Пусть последовательность наборов* $\tilde{n}(s) = \big(n_1(s), \dots \dots, n_{m(s)}(s)\big)$, $s = 1, 2, \dots,$ *различных натуральных чисел удовлетворяет условию* $\prod_{i=1}^{m(s)} n_i(s) \to \infty$ *при* $s \to \infty$. *Тогда существуют такие положительные константа* c *и функция* $f(x)$, *стремящаяся к* 0 *при* $x \to \infty$, *что доля наборов* $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ *из* $\mathfrak{M}\left(\tilde{n}(s)\right)$, *удовлетворяющих соотношению*

$$\left| l\left(x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_m}\right) - \left(\log k_m + \frac{\log K}{\log\log K}\right)\right| \le f(K)\frac{\log K}{\log\log K} + cm,$$

стремятся к единице при $s \to \infty$.

Таким образом, для почти всех наборов $\tilde{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ при условии $m = o\left(\log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N}\right)$ справедливы соотношения

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}) \sim \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N},$$

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_m}) \sim \log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N}.$$

Одно применение задачи Кнута

Последовательность S слов (наборов) из конечного алфавита $\mathfrak{A}$

$$\tilde{\tau}_1, \quad \tilde{\tau}_2, \quad \ldots, \quad \tilde{\tau}_r = \tilde{\alpha}$$

называется *схемой конкатенации*, реализующей (вычисляющей) слово (набор) $\tilde{\alpha}$, если для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, r$, слово $\tilde{\tau}_i$ можно представить в виде $\tilde{\tau}_i = \tilde{\beta}_{i_1}\tilde{\beta}_{i_2}$, где для $j = 1, 2$ либо β_{i_j} — буква из алфавита $\mathfrak{A}$, либо $\beta_{i_j} = \tau_m$ для некоторого m, удовлетворяющего условию $m \leq i-1$. *Сложностью* $l_c(S)$ схемы конкатенации S называется число r. Положим $l_c(\tilde{\alpha}) = \min l_c(S)$, где минимум берется по всем схемам конкатенации, реализующим слово $\tilde{\alpha}$ в алфавите $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A} = \{0,\ 1\}$.

Обозначим через M_n^k множество всех двоичных наборов (слов) длины n, содержащих ровно k единиц. Положим

$$l_c(k, n) = \max_{\tilde{\alpha} \in M_n^k} l_c(\tilde{\alpha}), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Доопределим выражение $\log C_n^k / \log\log C_n^k$ при $k = 0$ и $k = n$ нулем.

Теорема. *Пусть* $\{(k_m, n_m)\}, m = 1, 2, \ldots,$ *— последовательность пар целых чисел, удовлетворяющая условиям:*

$$0 \leq k_m \leq n_m,$$

$$n_m \to \infty \quad \textit{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда при $m \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$l_c(k_m, n_m) \sim \log n_m + \frac{\log C_{n_m}^{k_m}}{\log\log C_{n_m}^{k_m}}.$$

Функции Шеннона

При $K \geq 2$ положим $L(p, q, K) = \max l(A)$, где максимум берется по всем целочисленным матрицам $A = (a_{ij})$ с неотрицательными элементами без нулевых строк размера $p \times q$, удовлетворяющим условиям $a_{ij} \leq K - 1$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$.

Аналогично, при $K \geq 2$ положим $L_2(p, q, K) = \max l_2(A)$, $L_F(p, q, K) = \max l_F(A)$, где максимум берется по всем целочисленным матрицам $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$, удовлетворяющим условиям $|a_{ij}| \leq K - 1$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$.

Теорема (Н. Пиппенджер, 1980). *При условии* $pq \log K \to \infty$

$$L(p, q, K) = \min(p,\, q) \log K + \\ + \frac{pq \log K}{\log(pq \log K)} \left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log(pq \log K)}{\log(pq \log K)}\right)^{1/2}\right)\right) + O(\max(p,\, q)).$$

Теорема. *При условии* $pq\log K \to \infty$

$$L_2(p,q,K) = \min(p,\, q)\log K + \\ + \frac{pq\log(2K-1)}{\log(pq\log K)}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log(pq\log K)}{\log(pq\log K)}\right)^{1/2}\right)\right) + O(\max(p,\, q));$$

Теорема. *При условии* $pq\log K \to \infty$

$$L_F(p,q,K) \le \min(p,\, q+1)\log K + \\ + \frac{pq\log(2K-1)}{\log(pq\log K)}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log(pq\log K)}{\log(pq\log K)}\right)^{1/2}\right)\right) + O(\max(p,\, q));$$

$$L_F(p,q,K) \ge \max\left(\min(p,\, q+1)\log K,\, \frac{pq\log(2K-1)}{\log(pq\log K)}\right) + O(\max(p,\, q)).$$

Наконец, при $K \geq 2$ положим $L(p,q,K) = \max l(A)$, где максимум берется по всем целочисленным матрицам $A = (a_{ij})$ с неотрицательными элементами размера $p \times q$, удовлетворяющим условиям $a_{ij} \leq K-1$, $i = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,q$.

Теорема (Н. Пиппенджер, 1979). *При условии* $pq\log K \to \infty$

$$L(p,q,K) = 3\min(p,\, q)\log_3 K + \\ + \frac{pq\log K}{\log(pq\log K)}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log(pq\log K)}{\log(pq\log K)}\right)^{1/2}\right)\right) + O(\max(p,\, q)).$$

Универсальная нижняя оценка

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размера $p \times q$, а число k удовлетворяет неравенствам $1 \le k \le \min(p,q)$. Для наборов индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, таких что $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le p$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le q$, обозначим через $A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)$ квадратную матрицу порядка k, состоящую из элементов, находящихся на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Положим

$$D(A) = \max_{k\colon\, 1 \le k \le \min(p,q)} \left(\max_{(i_1,\ldots,i_k;\, j_1,\ldots,j_k)} |\det A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)| \right).$$

Таким образом, $D(A)$ — это максимум абсолютных величин миноров матрицы A, где максимум берется по всем минорам.

Теорема. *Для любой ненулевой целочисленной матрицы A справедливы неравенства:*

$$l(A) \ge \log D(A), \quad l_2(A) \ge \log D(A), \quad l_F(A) \ge \log D(A), \quad l(A) \ge 3\log_3 D(A).$$

Вычисление систем целочисленных линейных форм

Теорема. *Пусть последовательность целочисленных матриц* $A(n) = \big(a_{ij}(n)\big)$ *размера* $p(n) \times q(n)$ *при* $n \to \infty$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{p+q}{(\log\log D(A))^{1/2}} \to 0.$$

Тогда

$$\log D(A(n)) \le l_2\,(A(n)) \le \log D(A(n)) + o\big(\log D(A(n))\big).$$

Таким образом, для самой «сильной» вычислительной модели для любых фиксированных (и даже слаборастущих) размеров матрицы установлена асимптотика роста сложности:

$$l_2(A(n)) \sim \log D(A(n)).$$

Результат предыдущей теоремы переносится на следующую вычислительную модель.

Обозначим через $l_{\{-\}}(A)$ минимально возможное число операций вычитания, достаточное для вычисления по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$, системы линейных форм $\{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{iq}x_q, \quad i = 1, 2, \ldots, p\}$, задаваемых целочисленной матрицей коэффициентов A.

Обозначим через φ «золотое сечение» , т. е. величину $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Теорема. *Пусть последовательность целочисленных матриц* $A(n) = \big(a_{ij}(n)\big)$ *размера* $p(n) \times q(n)$ *при* $n \to \infty$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{p+q}{\left(\log\log D(A)\right)^{1/2}} \to 0.$$

Тогда

$$l_{\{-\}}(A) \sim \log_\varphi D(A(n)).$$

Вычисление систем одночленов

Теорема. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц* $A(n) = (a_{ij}(n))$ *размера* 2×2 *с неотрицательными элементами и без нулевых строк, удовлетворяющей при* $n \to \infty$ *условию*

$$\max_{a_{ij} \in A(n)} a_{ij}(n) \to \infty,$$

справедливы оценки

$$\log D(A(n)) \leq l\left(A(n)\right) \leq \log D(A(n)) + O\left(\frac{\log \max a_{ij}(n)}{\log \log \max a_{ij}(n)}\right).$$

Теорема. *Для произвольных последовательностей целочисленных матриц $A(n) = (a_{ij}(n))$ и $B(n) = (b_{ij}(n))$ размеров, соответственно, $p(n)\times 2$ и $2\times q(n)$ с неотрицательными элементами и без нулевых строк, удовлетворяющих при $n \to \infty$ условиям*

$$\max_{a_{ij}\in A(n)} a_{ij}(n) \to \infty, \qquad \max_{b_{ij}\in B(n)} b_{ij}(n) \to \infty,$$

справедливы оценки

$$\log D(A(n)) \le l\left(A(n)\right) \le \log D(A(n)) + o\left(\frac{p(n)\log\max a_{ij}(n)}{\log\log\max a_{ij}(n)}\right),$$

$$\log D(B(n)) \le l\left(B(n)\right) \le \log D(B(n)) + o\left(\frac{q(n)\log\max b_{ij}(n)}{\log\log\max b_{ij}(n)}\right).$$

Теорема. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n) = (a_{ij}(n))$ размера 3×3 с неотрицательными элементами и без нулевых строк, удовлетворяющей при $n \to \infty$ условию*

$$\max_{a_{ij} \in A(n)} |a_{ij}(n)| \to \infty,$$

справедливы неравенства

$$\log D(A(n)) \le l\left(x^{a_{11}} y^{a_{12}} z^{a_{13}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}} z^{a_{23}}, x^{a_{31}} y^{a_{32}} z^{a_{33}}\right) \le$$
$$\le \log D(A(n)) + o\left(\log D(A(n))\right).$$

Обозначим через $A(t,n)$ квадратную матрицу порядка $2t$, $t \geq 2$, определяемую следующим образом. Первой строкой матрицы $A(t,n)$ является набор длины $2t$, первая половина разрядов которого равна n, а вторая половина — 0. Остальные $2t-1$ строки матрицы $A(t,n)$ получаются из первой строки последовательным циклическим сдвигом на один разряд вправо.

Теорема. *При условии* $t = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$l(A(t,n)) \sim \frac{2t}{t+1} \log D(A(t,n)).$$

Следствием этой теоремы является тот факт, что при вычислении системы одночленов, задаваемой матрицей $A(t,n)$, при $t \geq 3$ при всех достаточно больших n в силу неравенств $\frac{2t}{t+1}\log x \geq 1,5\log x > \log_\varphi x$ более эффективной операцией является не умножение, а деление.

Реализация матриц вентильными схемами с кратными путями

Теорема. *Для произвольного натурального m и произвольной последовательности матриц $\{A_n\}$ с неотрицательными элементами, каждая из которых имеет размер либо $2 \times q_n$, где $q_n \leq m$, либо $p_n \times 2$, где $p_n \leq m$, либо 3×3, при условии $D(A_n) \to \infty$ выполняется соотношение*

$$l(A_n) \sim 3 \log_3 D(A_n).$$

Теорема. *При условии $t = o\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)$ справедливо асимптотическое равенство*

$$l(A(t,n)) \sim \frac{6t}{t+1} \log D(A(t,n)).$$

Таким образом, приведен пример последовательности матриц размера $2t \times 2t$, для которой универсальную нижнюю оценку можно усилить асимптотически в $2t/(t+1)$ раз.

Вычисление систем элементов абелевых групп

Оценка $l_F(A) \geq \log D(A)$ может быть значительно улучшена уже в простейшем случае: $l_F\left(\left(2^k, 2^{-k}\right)^T\right) = 2\log D\left(\left(2^k, 2^{-k}\right)^T\right)$.

Пусть A — произвольная матрица размера $p \times q$. Положим

$$T(A) = \max_{j\colon 1\leq j\leq q} \left\{\max\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}, 0\} \left|\min\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}, 0\}\right|\right\}.$$

Таким образом, $T(A)$ — это максимум абсолютных величин попарных произведений элементов матрицы A, где максимум берется по всем парам элементов, удовлетворяющим двум условиям — эти элементы должны находиться в одном столбце и иметь разные знаки.

Теорема. *Для произвольной ненулевой целочисленной матрицы A справедливо неравенство $l_F(A) \geq \log\max\{D(A), T(A)\}$.*

Теорема. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц* $A(n) = (a_{ij}(n))$ *размера* $2 \times q(n)$, *удовлетворяющей условию*

$$\frac{q(n)}{\log\log \max\limits_{i,j} |a_{ij}(n)|} \to 0$$

при $n \to \infty$, *справедливо асимптотическое равенство*

$$l_F(A(n)) \sim \log \max\{D(A(n)), T(A(n))\}.$$

Пусть матрица $A = (a_{ij})$ имеет размеры 3×2. Под записью a_{st} при $s > 3$ и/или $t > 2$ будем понимать элемент a_{ij}, где i и j определяются из условий $1 \le i \le 3$, $i \equiv s \pmod 3$; $1 \le j \le 2$, $j \equiv t \pmod 2$.

Элемент a_{ij} матрицы A размера 3×2 называется *особым*, если выполняются следующие условия:

$$a_{ij} \neq 0, \quad a_{ij}a_{i+1,j} \le 0, \quad a_{ij}a_{i+2,j} \le 0, \quad |a_{i+1,j}| + |a_{i+2,j}| \neq 0.$$

Через $A(s,t)$ обозначим матрицу размера 2×2, в которой первой строкой является строка матрицы A, содержащая элемент a_{s1}, а второй — строка матрицы A, содержащая элемент a_{t1}.

Пусть a_{ij} — особый элемент матрицы A размера 3×2. Определим величину $r(a_{ij})$ следующим обазом:

1) если выполняются неравенства $\det A(i+1, i+2) \det A(i+2, i) \geq 0$ и $\det A(i+1, i+2) \det A(i, i+1) \geq 0$, то полагаем

$$r(a_{ij}) = |a_{ij} \det A(i+1, i+2)|\,;$$

2) если выполняется неравенство $\det A(i+1, i+2) \det A(i+2, i) < 0$, то полагаем

$$r(a_{ij}) = |a_{ij} \det A(i+1, i+2)| \frac{\max\{|a_{i1}|, |a_{i2}|, |a_{i+2,1}|, |a_{i+2,2}|\}}{D(A(i+2, i))};$$

3) если выполняется неравенство $\det A(i+1, i+2) \det A(i, i+1) < 0$, то полагаем

$$r(a_{ij}) = |a_{ij} \det A(i+1, i+2)| \frac{\max\{|a_{i1}|, |a_{i2}|, |a_{i+1,1}|, |a_{i+1,2}|\}}{D(A(i, i+1))}.$$

Для элементов a_{ij}, не являющихся особыми в целочисленной матрице A размера 3×2, положим $r(a_{ij})=0$. Далее, для матрицы A определим величину $R(A)$ равенством

$$R(A)=\max_{a_{ij}\in A} r(a_{ij}).$$

Теорема. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n)=(a_{ij}(n))$ размера 3×2, удовлетворяющей при $n\to\infty$ условию*

$$\max_{a_{ij}\in A(n)} |a_{ij}(n)|\to 0,$$

справедливо асимптотическое равенство

$$l_F(A(n))\sim\log\max\{D(A(n)),T(A(n)),R(A(n))\}.$$

Теорема. *При условии* $t = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$l_F(A(t,n)) \sim (t+1)\log n \sim \log D(A).$$

Теорема. *При условии* $t = o(\log n)$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\frac{l(A(t,n))}{l_F(A(t,n))} \sim \frac{2t}{t+1}.$$