РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт истории естествознания и техники им С.И.Вавилова

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

для подготовки
к кандидатскому экзамену

по

ИСТОРИИ
И
ФИЛОСОФИИ НАУКИ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Москва
«Янус-К»
2003

УДК 53(091)
ББК 22.3г
М 545

Методические материалы для подготовки к кандидатскому экзамену по истории и философии науки (история математики) / Отв. ред. и сост. С.С. Демидов. – М.: Янус-К, 2003 г. – 40 с.

ISBN 5-8037-0137-8

В первом разделе настоящей брошюры предлагается программа-минимум кандидатского экзамена по истории и философии науки (история математики), разработанная Институтом истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН и механико-математическим факультетом Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Второй раздел брошюры – фрагмент готовящегося учебника по этой программе (см. раздел 5.9 программы), подготовленный сотрудниками механико-математического факультета МГУ – доцентами В.Б. Демидовичем, А.В. Дорофеевой и профессором В.М. Тихомировым.

Ответственный редактор и составитель д.ф.-м.н. *Демидов С.С.*

ISBN 5-8037-0137-8

Содержание

Несколько вводных замечаний об истории математики

Демидов С.С.

1. Об истории математики как науке

История математики одна из наиболее почтенных по возрасту областей знания. Она немногим моложе самой математики, сложившейся как теоретическая наука в VI–V вв. до н.э. в Древней Греции. Первый известный нам историк математики – ученик Аристотеля Евдем Родосский (IV в. до н.э.), автор не дошедшей до нас истории геометрии. В дальнейшем она следовала в фарватере самой математики, переживая вместе с ней периоды подъема и упадка. Интерес к истории математики несколько усилился в эпоху Возрождения (П. Рамус (1515–1572), Б. Бальди (1533–1617)) и получил значительное развитие в XVIII веке, в значительной мере благодаря поддержке молодых академий наук. Здесь мы назовем имена парижских академиков Ж. Монтюкла (1725–1799), автора «Истории математики», вышедшей в двух томах в 1758 г. и переизданной в четырех томах в 1799–1802 гг., и Ш. Боссю (1730–1814), опубликовавшего в 1800 г. получивший широкую известность двухтомный «Опыт общей истории математики», а также геттингенского профессора А.Г. Кестнера (1717–1800), не успевшего, правда, довести до конца «Историю математики от возрождения наук до конца XVIII столетия», изданную в 1796–1800 гг. В XIX в. этот интерес не ослабевал – достаточно упомянуть имена Г. Либри (1803–1869) с его четырехтомной «Историей математических наук в Италии» (1838–1841) и М. Шаля (1793–1880) с «Историческим обзором происхождения и развития геометрических методов» (1837). Однако начало формирования истории математики как самостоятельного раздела современной науки, приходится на 70–90-е гг. XIX в., когда начинаются систематические исследования в этой области, появляются специализированные журналы, возникает историко-математическое сообщество (М. Кантор (1829–1920) и И. Тропфке (1866–1939) в Германии, Г. Цейтен (1839–1920) в Дании, П. Таннери (1843–1904) во Франции, В.В. Бобынин (1849–1919) и И.Ю. Тимченко (1863–1939) в России, Г. Энестрем (1852–1923) в Швеции, Э. Бортолотти (1866–1947) в Италии). Ведущими фигурами в этом сообществе становятся М. Кантор и Г. Цейтен. Первому из них принадлежат фундаментальные четырехтомные «Лекции по истории математики» (в 1880–1908 гг., переизданные дважды; последний четвертый том, посвященный математике XVIII в., был написан международным коллективом авторов), Г. Цейтену – известные книги «Учение о конических сечениях в древности» (1884), «История математики в древности и в средние века» (1893; русск. перевод 1932), «История математики в XVI и XVII веках» (1903; русск. перевод 1933). С этими авторами связывают два основные подхода к изучению математики прошлого – антикваристский, когда материал исследуется исключительно в современном изучаемому памятнику историческом контексте (М. Кантор), и презентистский, когда изучение ведется с позиций современной исследователю науки (Г. Цейтен). В XX в. история математики – активно развивающаяся дисциплина, в которой работают как математики (например, Д. Стройк (1894–2000), Б. ван дер Варден (1903–1996), А.Н. Колмогоров (1903–1987), А. Вейль (1906–1998), Ж. Дьедонне (1906–1992), Б.В. Гнеденко (1912–1995)), так и профессиональные историки математики (такие как Т. Хис (1861–1940), О. Нейгебауэр (1899–1990), А.П. Юшкевич (1906–1993), Д. Уайтсайд (р. 1932)).

2. Зачем нужна математику история математики?

История математики как научная дисциплина предстает перед нами в двух обличьях. С одной стороны, это – часть истории науки (ибо нельзя мыслить развитие математики вне идеологии и реальной практики науки в целом, в частности, механики и физики, границы которых с математикой оказываются подчас совершенно условными), тесно связанная с философией. С другой стороны, это – дисциплина, изучающая саму математику, рассматриваемую в историческом измерении. С этой точки зрения, она оказывается в том же ряду, что и философия и основания математики. То есть в ряду дисциплин практически математических (во всяком случае требующих основательной математической квалификации). В этом втором обличье история математики и является необходимой составной частью полноценного математического образования. Прежде всего, математик должен иметь представление о пути, пройденном его наукой от зарождения первых ее понятий и методов до современного ее состояния, т.е. научиться видеть ее не в статике, а в динамике развития. «Она должна ответить на вопросы о том, как возникали и развивались основные математические понятия, идеи и методы, какие основные периоды прошла в своем развитии математика, каков исторический путь отдельных математических дисциплин и теорий, в какой связи с практическими потребностями людей и задачами других наук происходило развитие математики, как проявлялась в нем внутренняя логика развития, какой характер носила математика различных народов, чем прославили себя великие математики прошлого, с именами которых должен быть знаком всякий культурный математик, какой вклад в историю науки внесли отечественные математики...», – писала в 1955 г. во «Вводной лекции к курсу "История математики"», читавшемуся на механико-математическом факультете МГУ, замечательный историк и философ математики С.А. Яновская (1896–1966) (Историко-математические исследования. М., 1958. Вып.11. С.193–194).

История математики, предлагая разнообразный фактический материал, не учит как должен вести себя действующий математик: как выбирать тему исследования, как решать задачу, но сознательно подойти к подобным вопросам в состоянии лишь человек, знающий историю. Правильно оценить соотношение прикладных и не имеющих сегодня приложений исследований можно только, зная историю. Пытаться оценить место решаемой задачи в сегодняшней математике и в ходе ее развития можно только, зная историю. Вообще, размышлять о математике, о ее задачах, целях, месте в современной культуре можно только, опираясь на ее историю. В этом практическое значение истории математики для всякого лица, претендующего быть в математике Мастером. Через историю математики действующий математик оказывается способным воспринимать связь своей деятельности со всем многообразием проявлений человеческой культуры – в этом состоит гуманитарное ее значение.

Значимость истории математики для математического творчества превосходно чувствовали выдающиеся ее деятели. Поэтому неудивительно, что великий А.Н. Колмогоров находил время и для чтения трудов И. Ньютона, и для написания историко-математических сочинений, и для редактирования книг историко-математического содержания.

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

«История и философия науки»

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Программа-минимум разработана Институтом истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН и Московским государственным университетом им.М.В. Ломоносова (механико-математический факультет).

Авторы программы – д.ф.-м.н. С.С. Демидов, д.филос.н. А.Г. Барашев, к.ф.-м.н. С.С. Петрова. При ее подготовке были учтены замечания члена-корреспондента РАН А.Н. Паршина, д.ф.-м.н. М.И. Зеликина и д.ф.-м.н. В.М. Тихомирова.

1. Периодизация истории математики

1.1. *Основные этапы развития математики: периодизация А.Н. Колмогорова*

2. Математика Древнего мира

2.1. *Истоки математических знаний*. Первоначальные астрономические и математические представления эпохи неолита. Представления о числах и фигурах в первобытном обществе. Системы счисления.

2.2. *Математика в догреческих цивилизациях*. Древний Египет – источники, нумерация, арифметические и геометрические знания.

Древний Вавилон – источники, шестидесятиричная позиционная система счисления. Арифметика. Решение линейных, квадратных уравнений и систем уравнений с двумя неизвестными. «Пифагорейские тройки». Числовой, алгоритмический характер вавилонской математики. Геометрические знания. Проблема влияния египетской и вавилонской математики на последующее развитие математического знания.

2.3. *Древняя Греция*. Источники. Рождение математики как теоретической науки. Фалес. Пифагорейцы. Место математики в пифагорейской системе знания. Арифметика пифагорейцев. Первая теория отношений. Открытие несоизмеримости. Классификация иррациональностей Теэтета. Геометрическая алгебра. Геометрия циркуля и линейки. Знаменитые задачи древности – удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга – и их решение в XIX в.; трансцендентность числа «пи» и седьмая проблема Д. Гильберта. Парадоксы бесконечного. Апории Зенона. Атомизм Демокрита. Евдокс. Строение отрезка. Роговидные углы. Аксиома Евдокса–Архимеда. Теория отношений Евдокса. «Метод исчерпывания». Место математики в философии Платона. «Математический платонизм» как взгляд на сущность математики. Математика в философской концепции Аристотеля.

2.4. *Математика эпохи эллинизма*. Синтез греческих и древневосточных социокультурных и научных традиций. Аксиоматическое построение математики в «Началах» Евклида. Структура «Начал». Правильные многогранники и структура космоса. Архимед. Дифференциальные и интегральные методы. Аполлоний. Теория конических сечений. Роль теории конических сечений в развитии математики и математического естествознания (законы Кеплера, динамика Ньютона). Ценностные иерархии объектов, средств решения задач и классификация кривых в античной геометрии. Математика первых веков новой эры (Герон, Птолемей). «Арифметика» Диофанта. Роль диофантова анализа в истории алгебры и алгебраической геометрии с древности до наших дней (решение проблемы Морделла, доказательство Великой теоремы Ферма). Представления о предмете и методах математики у неоплатоников, «математический платонизм» как развитие этих представлений. Закат античной культуры и комментаторская деятельность математиков поздней античности.

2.5. *Математика в древнем и средневековом Китае.* Китайская нумерация и арифметические действия. «Математика в девяти книгах» – выдающийся культурный памятник древнего Китая. Структура математического текста. Геометрия, теория пропорций, системы линейных уравнений, инфинитезимальные процедуры, отрицательные числа. Счетная доска и вычислительные методы.

2.6. *Математика в древней и средневековой Индии.* Источники. Цифровая позиционная система. Появление записи нуля. Дроби. Задачи на пропорции. Линейные и квадратные уравнения. Неопределенные уравнения. Отрицательные и иррациональные числа. Суммирование бесконечных рядов. Геометрические знания. Достижения в области тригонометрии.

3. Математика Средних веков и эпохи Возрождения

3.1. *Средневековая математика как специфический период в развитии математического знания.* Математика арабского Востока. Переводы греческих авторов. Трактат ал-Хорезми «Об индийском счете» и победное шествие «арабских» цифр по средневековой Европе. «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы». Классификация квадратных уравнений. Выделение алгебры в самостоятельную науку. Омар Хайям. Кубические уравнения. Практический характер математики. Геометрические исследования: теория параллельных в связи с попытками доказать V постулат Евклида. Арифметизация теории квадратичных иррациональностей в работах арабских комментаторов Евклида. Инфинитезимальные методы. Отделение тригонометрии от астрономии и превращение ее в самостоятельную науку.

3.2. *Математика в средневековой Европе.* Математика в Византии. Переводы с арабского и греческого. Индийская нумерация, коммерческая арифметика, арифметическая и геометрическая прогрессии, практически ориентированные геометрические и тригонометрические сведения у Леонардо Пизанского (Фибоначчи). Творчество Фибоначчи. «Арифметика, изложенная в 10 книгах» И. Неморария. Развитие античных натурфилософских идей и математика. Оксфордская и Парижская школы. Схоластические теории изменения величин (учение о конфигурации качеств, о широтах форм) как предвосхищение математики переменных величин XVII в. Дискуссии по проблемам бесконечного, непрерывного и дискретного в математике.

3.3. *Математика в эпоху Возрождения.* Проблема решения алгебраических уравнений, расширение понятия числа, совершенствование символики, решение уравнений 3-й и 4-й степеней в радикалах. Алгебра Виета. Проблема перспективы в живописи Ренессанса и математика. Иррациональные числа. Отрицательные, мнимые и комплексные числа (Дж. Кардано, Р. Бомбелли и др.). Десятичные дроби. Тригонометрия в астрономических сочинениях.

4. Рождение и первые шаги математики переменных величин

4.1. *Математика и научно-техническая революция XVI–XVII вв.* Механическая картина мира и математика. Новые формы организации науки. Развитие вычислительных средств – открытие логарифмов. Жизнь и творчество Р. Декарта. Число у Декарта. Рождение аналитической геометрии.

Теоретико-числовые проблемы в творчестве Ферма. Создание основ проективной геометрии в работах Дезарга и Паскаля. Переписка Ферма и Паскаля и первые теоретико-вероятностные представления. Появление статистических исследований.

Развитие интеграционных и дифференциальных методов в XVII в. (И. Кеплер, Б. Кавальери, Б. Паскаль). Жизнь и творчество И. Ньютона и Г. Лейбница. Открытие Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления. Спор о приоритете и различия в подходах. Первые шаги математического анализа (И. и Я. Бернулли и др.). Проблема обоснования дифференциального и интегрального исчислений и критика Беркли.

4.2. *Математика и Великая французская революция.* Создание Политехнической и Нормальной школ и их влияние на развитие математики и математических наук. Развитие математического анализа в XVIII в. Расширение поля исследований и выделение основных ветвей математического анализа – дифференциального и интегрального исчислений в узком смысле слова, теории рядов, теории дифференциальных уравнений – обыкновенных и с частными производными, теории функций комплексного переменного, вариационного исчисления. Математическая трилогия Л. Эйлера. Жизнь и творчество Л. Эйлера. Классификация функций у Эйлера. Основные понятия анализа. Обобщение понятия суммы ряда. Спор о колебании струны. Развитие понятия функции. Расширение понятия решения дифференциального уравнения с частными производными – понятия классического и обобщенного решений, появление понятия обобщенной функции в XX столетии. Проблема обоснования алгоритмов дифференциального и интегрального исчислений. Подходы Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, Л. Карно, Ж. Даламбера. Вариационные принципы в естествознании.

5. Период современной математики

5.1. *Математика XIX в.* Организация математического образования и математических исследований. Ведущие математические школы. Математические журналы и общества. Школа К. Вейерштрасса. Жизнь и деятельность С.В. Ковалевской. Организация первых реферативных журналов и международных математических конгрессов – в Цюрихе (1897), Париже (1900). Начало издания в Германии «Энциклопедии математических наук». Доклад Д. Гильберта «Математические проблемы» (1900).

5.2. *Реформа математического анализа.* Идеи Б. Больцано в области теории функций. О. Коши и построение анализа на базе теории пределов. Нестандартный анализ А. Робинсона (1961) и проблема переосмысления истории возникновения и первоначального развития анализа бесконечно малых. К. Вейерштрасс и арифметизация анализа. Теория действительного числа (Г. Кантор, Р. Дедекинд). Г. Кантор и создание теории множеств. Открытие парадоксов теории множеств. Создание теории функций действительного переменного (А. Лебег, Р. Бэр, Э. Борель).

5.3. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* Проблема интегрируемости уравнений в квадратурах (результаты Ж. Лиувилля по интегрированию уравнения Риккати, С. Ли и его подход к проблеме). Перестройка оснований теории в трудах О. Коши (задача Коши, доказательство существования решения задачи Коши). Линейные дифференциальные уравнения, теория Штурма–Лиувилля, аналитическая теория дифференциальных уравнений.

Качественная теория А. Пуанкаре и теория устойчивости А.М. Ляпунова. Теория динамических систем – от А. Пуанкаре до КАМ-теории.

5.4. *Теория уравнений с частными производными.* Теория уравнений первого порядка (теория Лагранжа–Шарпи, работы И. Пфаффа, О. Коши и К. Якоби, «второй метод Якоби», теория С. Ли). Общая геометрическая теория уравнений с частными производными (С. Ли, Э. Картан, Д.Ф. Егоров).

Теория потенциала и теория теплопроводности Ж.-Б. Фурье и теория уравнений математической физики. Классификация уравнений по типам (эллиптические, параболические и гиперболические) П. Дюбуа-Реймона. Теорема Коши–Ковалевской. Понятие корректности краевой задачи по Ж. Адамару. Взгляд на общую теорию как на общую теорию краевых задач для уравнений различных типов. Системы уравнений с частными производными. 19-я и 20-я проблемы Гильберта и теория эллиптических уравнений в XX в.

5.5. *Теория функций комплексного переменного.* Геометрическая интерпретация комплексных чисел. О. Коши и его результаты в построении теории функций комплексного переменного. Геометрическая теория функций комплексного переменного Б. Римана. Римановы поверхности. Принцип Дирихле. Аналитическое направление К. Вейерштрасса теории функций комплексного переменного. Целые и мероморфные функции. Теорема Пикара. Абелевы функции. Автоморфные функции. Униформизация.

5.6. *Эволюция геометрии в XIX–начале XX вв.* Создание проективной геометрии. Жизнь и творчество К.Ф. Гаусса. Дифференциальная геометрия. Открытие Н.И. Лобачевским неевклидовой геометрии. Априоризм Канта и неевклидова геометрия. Интерпретации неевклидовой геометрии. Риманова геометрия. «Эрлангенская программа» Ф. Клейна. «Основания геометрии» Д. Гильберта и эволюция аксиоматического метода (содержательная, полуформальная, формальная аксиоматизации).

Рождение топологии. Комбинаторная топология А. Пуанкаре. Диссертация М. Фреше (1906). Теория топологических пространств. Теория размерности. Возникновение алгебраической топологии.

Геометрическая теория алгебраических уравнений. Идеи Р. Клебша и М. Нетера. Итальянская школа алгебраической геометрии. Аналитическая теория многообразий.

5.7. *Эволюция алгебры в XIX–первой трети XX в.* Проблема разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Э. Галуа и рождение теории групп. Развитие теории групп в XIX в. (А. Кэли, К. Жордан, теория непрерывных групп С. Ли). Аксиоматика теории групп. Теория групп и физика (кристаллография, квантовая механика). Развитие линейной алгебры. Английская школа символической алгебры. Кватернионы У. Гамильтона, гиперкомплексные системы, теория алгебр. Теория алгебраических чисел. Формирование понятий тела, поля, кольца. Формирование «современной алгебры» в трудах Э. Нетер и ее школы. Эволюция предмета алгебры от теории алгебраических уравнений до теории алгебраических структур.

5.8. *Аналитическая теория чисел.* Проблема распределения простых чисел (К.-Ф. Гаусс, П. Дирихле, П.Л. Чебышев, Ж. Адамар, Ш. Валле-Пуссен), теория трансцендентных чисел (Ж. Лиувилль, Ш. Эрмит, А.О. Гельфонд), аддитивные проблемы – проблема Гольдбаха (И.М. Виноградов) и проблема Варинга (Д. Гильберт, Г. Харди). Алгебраическая теория чисел – работы К.-Ф. Гаусса, обоснование теории делимости для полей корней из единицы (Э. Куммер), а затем для произвольных полей алгебраических чисел (Р. Дедекинд, Е.И. Золотарев, Л. Кронекер), доказательство квадратичного и биквадратичного (К.-Ф. Гаусс), а затем и кубического закона взаимности (Г. Эйзенштейн, К. Якоби). Геометрическая теория чисел (Г. Минковский, Г.Ф. Вороной).

5.9. *Вариационное исчисление Эйлера.* Создание метода вариаций. Вторая вариация и условия Лежандра и Якоби. Теория сильного экстремума Вейерштрасса. Теория Гамильтона–Якоби. Инвариантный интеграл Гильберта. Вариационные задачи с ограничением. Теория экстремальных задач в XX в. Принцип максимума Понтрягина.

Рождение функционального анализа: «функциональное исчисление» В.Вольтерра, С. Пинкерле, исследования по интегральным уравнениям (И. Фредгольм, Д. Гильберт), вариационному исчислению. Понятие гильбертова пространства. Банаховы пространства (С. Банах, Н. Винер).

5.10. *Развитие теории вероятностей во второй половине XIX–первой трети XX вв.* Формирование основ теории вероятностей. Трактат Я. Бернулли «Искусство предположений». Появление основных теорем теории вероятностей. П. Лаплас и теория вероятностей. Предельные теоремы теории вероятностей. Петербургская школа П.Л. Чебышева и теория вероятностей XIX–начала XX вв. Проблема аксиоматизации теории вероятностей. Аксиоматика А.Н. Колмогорова.

5.11. *Математическая логика и основания математики в XIX–первой половине XX вв.* Предыстория математической логики. Символическая логика Г. Лейбница. Квантификация предиката. Логика А. де Моргана. Алгебра логики Дж. Буля и У. Джевонса. Символическая логика Дж. Венна. Алгебра логики Э. Шредера и П.С. Порецкого. Исчисление высказываний Г. Фреге. «Формуляр математики» Дж. Пеано. «Principia Mathematica» Б. Рассела и

А. Уайтхеда. Работы по основаниям геометрии и арифметики конца XIX в. Кризис в основаниях математики в начале века и попытки выхода из него: логицизм, формализм, интуиционизм. Формалистское понимание математического существования. Непротиворечивость как основная характеристика математической теории. Конструктивизм. Аксиоматизация теории множеств. Континуум-гипотеза и попытки ее доказательства от Г. Кантора до П. Коэна. Результаты К. Геделя и кризис гильбертовской программы обоснования математики. Возникновение группы Бурбаки, ее деятельность и идеология. Реакция на нее математического сообщества.

5.12. *История вычислительной техники.* Абак, механические счетные машины (В. Шиккард, Б. Паскаль, Г. Лейбниц, П.Л. Чебышев), аналитическая машина Ч. Бэббеджа, электромеханические счетные машины, создание электронных вычислительных машин. Появление персональных компьютеров. Экспансия информатики. Допустимость компьютерного доказательства – проблема четырех красок.

5.13. *Математика XX в.* Основные этапы жизни математического сообщества – до Первой мировой войны, в промежутке между Первой и Второй мировыми войнами, во второй половине XX в. Математические конгрессы, международные организации, издательская деятельность, премии (Филдсовская премия, премия Р. Неванлинны и др.). Ведущие математические школы и институты. Творчество А. Пуанкаре и Д. Гильберта.

6. Математика в России и в СССР

6.1. *Математика в России до середины XIX в.* Математические знания в допетровской Руси. Математика в Академии наук в XVIII в. Школа Л. Эйлера. Реформы Александра I. Жизнь и творчество Н.И. Лобачевского.

6.2. *Математика в России во второй половине XIX в.* Реформы Александра II. Жизнь и творчество П.Л. Чебышева. Школа П.Л. Чебышева. Создание Московского математического общества и деятельность Московской философско-математической школы.

6.3. *Математика в России и в СССР в XX в.* Организация математической жизни в стране накануне Первой мировой войны. Конфронтация Петербурга и Москвы. Рождение Московской школы теории функций действительного переменного. Математика в стране в первые годы Советской власти. Идеологические бури 30-х гг. Рождение Советской математической школы. Математические съезды и конференции, издания, институты. Ведущие математические центры. Творчество А.Н. Колмогорова.

Список рекомендуемой литературы

1. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М., 1963.
2. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. *А.П. Юшкевича.* М., 1970–1972, Т.1–3.
3. История отечественной математики / Под ред. *И.З. Штокало.* Киев, 1966–1970. Т.1–4.
4. *Колмогоров А.Н.* Математика // Большая Советская Энциклопедия. 2-е изд. 1954. Т. 26.
5. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. *А.Н. Колмогорова, А.П. Юшкевича.* М., 1978.

6. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций / Под ред. *А.Н. Колмогорова* и *А.П. Юшкевича*. М., 1981.
7. Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей / Под ред. *А.Н. Колмогорова, А.П. Юшкевича*. М, 1987.
8. Очерки по истории математики / Под ред. *Б.В. Гнеденко*. М., 1997.
9. *Рыбников К.А.* История математики. М., 1994. (В последние годы в виде отдельных брошюр, изданных МГУ, появились дополнительные главы к книге, затрагивающие развитие ряда математических дисциплин в XX в.)
10. *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 года. – М., 1968.

Список дополнительной литературы

1. *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России. М.–Л., 1946.
2. Историко-математические исследования. Вып.1–35. М., 1948–1994; 2-я серия. Вып. 1(36)–7(41). М., 1995–2002.
3. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М., 1978.
4. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Под ред. *А.П. Юшкевича*. М., 1976.
5. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей / Под ред. *А.П. Юшкевича*. М., 1977.

Теория экстремальных задач и создание функционального анализа

Демидович В.Б., Дорофеева А.В., Тихомиров В.М.

Многое побуждает людей ставить и решать экстремальные задачи – задачи на максимум и минимум.

Для древних стимулом были эстетические причины, стремление к совершенству, любознательность. Эти черты были свойственны человеку во все времена, и поныне они дают поводы к поиску оптимальных решений.

Вторая причина связана с не совсем понятным свойством природы: при осуществлении природных явлений кто-то как бы решает некие задачи на минимум или максимум, так что законы природы диктуются экстремальными принципами.

И нельзя не назвать прагматические причины, стремление человека наилучшим образом распорядиться имеющимися у него ресурсами. Это приводит к необходимости решать экстремальные задачи в экономике, технике, при управлении различными процессами.

Цель этой главы – ознакомить читателя с историей теории экстремума и с влиянием этой теории на формирование некоторых разделов анализа двадцатого века.

Первые задачи на максимум и минимум

Простейшие задачи на максимум и минимум обсуждались уже на заре развития греческой математики. Древнейшими из них являются, по-видимому, классические *изопериметрическая* задача (*нахождение замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь*) и *изопифанная* задача (*определение замкнутой поверхности заданной площади, ограничивающей наибольший объем*). Они были вызваны к жизни эстетическими причинами – поиском совершенных форм.

В комментариях трудов Аристотеля, принадлежащих Симпликию (VI в. н.э.) (одному из учеников афинской школы платоников), утверждается, что еще до Аристотеля (384–322 до н.э.) было осознано, что *среди изопериметрических фигур наибольшей вместимостью обладает круг, а среди изопифанных – шар.* Зенодор (III–II вв. до н.э.) доказал, что из всех изопериметрических многоугольников с равным числом сторон наибольшую площадь имеет правильный – это может служить ключем к решению изопериметрической задачи. (Сочинение Зенодора не сохранилось, до нас дошло его изложение в комментариях Теона Александрийского (IV в. н.э) к «Альмагесту» Птолемея.)

Решения задач на максимум и минимум встречаются у всех трех величайших математиков древности – Евклида (III в. до н.э.), Архимеда (287–212 до н.э.) и Аполлония (ок. 260–ок. 170 до н.э.). В «Началах» Евклида решена одна задача на минимум – *о параллелограмме, у которого одна вершина совпадает с вершиной треугольника, а остальные лежат на сторонах, – наименьшей площади.* Архимед в сочинении «О шаре и цилиндре» доказывает, что *среди сегментов шара* *заданной боковой поверхности наибольшим объемом обладает полушар.* Аполлоний в своем великом труде «Конические сечения» (или «Коники», как его часто называют) рассматривает задачу о том (далее цитируется книга Б.Л. ван дер Вардена «Пробуждающаяся наука» [1]): «*как провести из одной точки О к коническому сечению самый длинный и самый короткий отрезок*». При этом, – пишет далее ван дер Варден, – «он дает больше, чем обещает: он определяет все проходящие через *О* прямые, которые пересекают коническое сечение под прямым углом (в настоящее время их называют нормалями), разбирает, при каком положении *О* задача имеет два, три или четыре решения». Невозможно не восхититься этому!

Первый вариационный принцип в естественных науках был также сформулирован в античности: Герон Александрийский (I в. до н.э.) в сочинении «О зеркалах», анализируя поведение луча света, утверждает, что «*луч света всегда должен идти кратчайшим путем*». Отсюда он вывел закон отражения света от зеркала.

В XVII в., еще до рождения анализа, был решен ряд экстремальных задач из геометрии. Ученики Галилея Эванжелиста Торричелли (1608–1647) и Винченцо Вивиани (1622–1703) решили несколько планиметрических задач, например, о нахождении *точки на плоскости сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.* Несколько экстремальных задач из механики решил сам Галилео Галилей (1564–1642). В частности, он доказал, что *наибольшая дальность полета снаряда соответствует наклону ствола орудия в сорок пять градусов.* Об экстремальных задачах, решенных до начала развития теории см. [2–6].

Начальный этап теории экстремума

Множество экстремальных задач решено в книге Иоганна Кеплера (1571–1630) «Новая стереометрия винных бочек» (1615) (в частности, там решается задача *о цилиндре, максимального объема, вписанном в шар*). В этой книге содержится мысль о том, что «вблизи всякого максимума изменения нечувствительны». Эта идея находит свое математическое выражение в теореме, которую связывают ныне с именем Пьера Ферма (1601–1665). Согласно этой теореме *в точке локального экстремума*[1] *гладкой функции ее производная должна равняться нулю.* Ферма вспоминал, что эта мысль пришла ему в голову впервые в 1629 г., но письменно он выразил суть дела в послании к Робервалю в 1638 г. Понятия производной тогда не было, и Ферма (для полиномов) объяснял, что в точке экстремума (как мы сейчас скажем) *главная линейная часть функции нулевая.* В том же письме Ферма проиллюстрировал свой метод решением задачи *о прямоугольном треугольнике максимальной площади с заданной суммой катетов.*

С письма Ферма Робервалю естественно отсчитывать начало теории экстремума.

1) Здесь и всюду далее речь идет об экстремальности *в локальном смысле.*

Ферма (1662) впервые в новое время выдвинул и вариационный принцип в физике. Закон преломления света, установленный экспериментально Вилленбордом Снеллиусом (1580–1626), Ферма вывел из общего вариационного принципа в оптике, согласно которому *свет избирает такую траекторию от одной точки до другой, по которой его путь всего короче по времени.*

Математический анализ своим рождением во многом обязан потребности решать задачи на максимум и минимум. Это подчеркивали оба создателя анализа – Ньютон и Лейбниц. Исаак Ньютон (1643–1727) заложил начала анализа (или, по его выражению, «метода флюксий») в 1665–1667 гг., находясь в тот период в небольшом селении Вулстропе (месте своего рождения), где он скрывался от свирепствовавшей в Англии чумы. Изложение основ метода флюксий содержалось в работе «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», завершенной, по-видимому, к 1669 г. Содержание этого труда было частично раскрыто в переписке 1671 г., а полностью он был опубликован лишь в 1711 г. Для Ньютона производная – это флюксия, скорость изменения функции, и потому необходимое условие экстремума он выразил так: «Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течет ни назад, ни вперед».

Готфриду Лейбницу (1646–1716) принадлежит первая публикация по анализу (Acta Eruditorum, 1684)[2]. Заглавие работы начинается со слов: «Новый метод нахождения наибольших и наименьших величин...». И Ньютон, и Лейбниц уже явно формулируют необходимое условие экстремума в некоторой точке в гладкой задаче без ограничений, как равенство нулю производной в этой точке.

Следующее замечательное событие в теории экстремума произошло в 1696 г., когда на страницах Acta Eruditorum появилась заметка Иоганна Бернулли (1667–1748), озаглавленная так: «Новая задача, к решению которой приглашаются математики». Там был поставлен такой вопрос: *«какое должен быть путь AMB тела M, спускающегося в вертикальной плоскости из точки A в точку B под действием собственной тяжести, за кратчайшее время»*. Эта задача получила название *задачи о брахистохроне* (кривой наискорейшего спуска). Лейбниц охарактеризовал эту задачу как «прекрасную и доныне неизвестную».

На приглашение И. Бернулли откликнулись его старший брат Якоб Бернулли (1654–1705), Гийом Лопиталь (1661–1704) (бравший уроки у И. Бернулли, автор первого учебника по математическому анализу), Лейбниц и еще один ученый, который опубликовал свое решение анонимно. Но И. Бернулли как «ex unge leonem» (по когтям – льва) определил автора – им был Ньютон.

С задачи о брахистохроне ведут отсчет новому разделу теории экстремума – вариационному исчислению, хотя до брахистохроны, в «Математических началах натуральной философии» (опубликованных в 1887 г.) Ньютоном было описано решение задачи инженерного происхождения (о теле вращения, испытывающего наименьшее сопротивление при движении в разреженной среде), где, как и в задаче о брахистохроне, аргументом является

2) Acta Eruditorum – первый научный журнал в истории.

кривая. Ньютон опубликовал решение в виде пропорции, которую И. Бернулли и Лопиталь записали как дифференциальное уравнение $\frac{yy'^3}{(1+y'^2)}=\frac{a}{4}$. Они проинтегрировали это уравнение подстановкой $y'=p$ и получили выражение для решения (кривой Ньютона) в параметрическом виде: $y=\frac{a(1+p^2)^2}{4p^3}$, $x=\frac{a}{4}\left(\frac{1}{4p^4}+\frac{1}{p^2}+\ln p\right)+C$.

Но о кривой, доставляющей минимум в «аэродинамической задаче Ньютона» (кривой Ньютона) уместно будет поговорить подробнее позже, когда будут рассматриваться проблемы современной теории экстремума, а именно, проблемы оптимального управления.

О начале развития теории экстремума и вариационного исчисления см. [2; 4–6; 7].

Работы Эйлера и Лагранжа по вариационному исчислению

Иоганн Бернулли поставил перед юношей, слушавшим его лекции в Базельском университете, проблему: *найти общий метод решения задач, сходных с брахистохроной*. Этим юношей (поступившим в университет в 13 лет) был Леонард Эйлер (1707–1783). Он опубликовал общий метод решения задач «сходных с брахистохроной» в 1732 г., а затем совершенствовал его в течение 12 лет. Итоги своих размышлений Эйлер подвел в своем знаменитом мемуаре «Methodus Inveniendi...» (Geneva, 1744) («Метод нахождения кривых линий, обладающих свойством максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» [8]).

Эйлер рассмотрел класс задач, включающий брахистохрону, называемых ныне *простейшими задачами вариационного исчисления*. Их можно описать так: *среди гладких плоских кривых* $x(\cdot)$, *определенных на фиксированном отрезке* $[t_0, t_1]$ *и принимающих на концах его заданные значения* x_0, x_1, *требуется найти такую, для которой интеграл* $\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt$ *с заданной функцией* $L=L(t,x,\dot{x})$ *(называемой интегрантом) достигает своего минимального (или максимального) значения*. *Формализация* такой экстремальной задачи имеет вид:

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \to \mathrm{extr},\ x(t_i)=x_i\ (i=0,1), \tag{1}$$

где полагается, что $x(\cdot)\in C^1([t_0,t_1])$, а интегрант L является функцией непрерывно-дифференцируемой.

Для задачи (1) Эйлер нашел необходимое условие экстремума, согласно которому кривая $\hat{x}(\cdot)$, подозреваемая на экстремум, должна удовлетворять следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, получившему название «уравнения Эйлера»:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_{x(t)}=0,$$

где $\hat{L}_{x(t)}=L_x(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))$, $\hat{L}_{\dot{x}}(t)=L_{\dot{x}}(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))$. Решения уравнения Эйлера стали называть *экстремалями* задачи (1). Константы, содержащиеся в общем решении этого уравнения, следует затем использовать для удовлетворения соответствующих *граничных условий* задачи (1).

Для вывода своего уравнения Эйлер разбил отрезок $[t_0,t_1]$ точками $\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_{n-1}<\tau_n$ (полагая $\tau_0=:t_0, \tau_n=:t_1$) на n равных промежутков длины $\Delta t=\dfrac{t_1-t_0}{n}$, заменил кривую $x(\cdot)$ ломаной с вершинами (τ_k,x_k), где $x_k=x(t_0+k\Delta t)$ $(k=0,\ldots,n-1)$, производную $\dot{x}(\cdot)$ – наклонами этой ломаной, определяемыми отношениями $\left\{\dfrac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t}\right\}_0^{n-1}$, а интеграл – суммой $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}L\left(t_k,x_k,\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t}\right)\Delta t$. Задача о вычислении экстремума интеграла была сведена таким образом к задаче на отыскание экстремума функции n переменных. Впервые подобный прием применил Лейбниц, решая задачу о брахистохроне.

Первые задачи с кратными интегралами также рассматривал Эйлер (1770). Не имея развитой техники работы с двойными и криволинейными интегралами, он ограничился выводом необходимого условия для задачи от двух переменных на плоском прямоугольнике. В 1813 г., решая задачу о притяжении точки трехосным эллипсоидом, Карл Гаусс (1777–1855), доказав формулы для преобразования объемного интеграла в поверхностные и поверхностных в криволинейные, вывел аналог уравнения Эйлера для двумерных задач. В общей форме это уравнение было получено Михаилом Васильевичем Остроградским (1801–1862) в 1834 г. Если рассматривается задача

$$\int_{\Omega}L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt\to\text{extr},\quad x|_{\partial\Omega}=\xi, \tag{2}$$

где $t\in\mathbb{R}^d$ – d-мерная независимая переменная, Ω – область в $\mathbb{R}^d$, $\partial\Omega$ – граница этой области, $x=x(t)$ – подлежащая определению функция, $\dot{x}(t)=\left(\dfrac{\partial x(t)}{\partial t_1},\ldots,\dfrac{\partial x(t)}{\partial t_d}\right)$ – ее градиент, L – интегрант задачи (2), являющийся функцией $2d+1$ переменной, ξ – функция, определяющая в задаче (2) граничное условие, то реализация на (подозреваемой на экстремум) функции $\hat{x}(\cdot)$ уравнения Эйлера в современных обозначениях имеет вид:

$$\operatorname{div} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0$$

(здесь $\hat{L}_x(t) = L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$, $\hat{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$).

В 1755 г. к Эйлеру присоединился еще один великий математик XVIII в. – Жозеф Лагранж (1736–1813). В письме к Эйлеру от 12 августа 1755 г. Лагранж изложил другой подход к исследованию свойств экстремальных кривых. Он предложил для нахождения экстремума *варьировать кривую, подозреваемую на экстремум*, выделяя главную линейную часть приращения. Чуть модернизируя то, что предложил Лагранж, можно сказать, что он (как в свое время Ферма для задачи о минимизации функции одного переменного) выделил главную линейную часть у приращения функционала J задачи (1) в точке $\hat{x}(\cdot)$:

$$J(\hat{x}(\cdot) + \delta x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \delta J(\hat{x}(\cdot)) + \dots,$$

где $\delta J(\hat{x}(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_{\dot{x}}(t)\delta\dot{x}(t) + \hat{L}_x(t)\delta x(t))\,dt$. Это выражение получило название *первой вариации* функционала J в точке $\hat{x}(\cdot)$. Если $\hat{x}(\cdot)$ доставляет экстремум в задаче (1), то первая вариация функционала J в этой точке должна равняться нулю. Преобразовав первую вариацию, Лагранж вывел и само уравнение Эйлера для задачи (1). Сейчас этот вывод содержится в любом учебнике по вариационному исчислению.

Эйлер высоко оценил метод девятнадцатилетнего юноши. В своем ответе он написал, что сумел продвинуться в теории, используя методологию Лагранжа, но он будет воздерживаться от публикации своих результатов, предоставляя своему юному коллеге извлечь все следствия из своих идей – беспримерный акт благородства.

Лагранж опубликовал изложение своих идей в работе «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегралов» в первом томе Туринской академии (Miscellanea Taurininensia, v.1, 1759). Эйлер начал свои публикации по этим вопросам спустя почти десятилетие после получения первого письма Лагранжа. В работе «Элементы исчисления вариаций» (Novi Comm. Petrop, v.X, 1764) он вводит термин *«вариация»* и *«вариационное исчисление»*.

В своих исследованиях Эйлер и Лагранж по существу выступили провозвестниками создания гладкого бесконечномерного анализа. Приведем слова Эйлера: «Когда речь идет о кривой [...], то при помощи дифференциалов мы переходим от одних точек кривой к другим точкам той же кривой, в то время, как если перейти от этой кривой к другой, ей очень близкой [...], то он осуществляется при помощи вариаций».

Эйлер и Лагранж принялись изучать также задачи с ограничениями. Для таких задач Лагранж стал применять общий прием, суть которого на примере гладких задач с ограничениями типа равенств

$$f_0(x) \to \text{extr},\ f_i(x) = 0\ (1 \le i \le m),\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (3)$$

он выразил в следующих словах: «Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно прибавить к функции, о которой говорилось, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум и минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных». (J.Lagrange. Ouevres, Paris, 1881, v.9, p.292). Иначе говоря, Лагранж предлагал, вводя набор $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, составлять функцию $\mathcal{L}(x,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x)$ (правда сначала в такой *функции Лагранжа* полагали множитель при $f_0(x)$ равым единице, но со временем было осознано, что правильнее этот функционал также умножать на неопределенный множитель λ_0; числа λ_i [3] принято называть *множителями Лагранжа*) и для построенной так функции искать ее экстремум, действуя так, «как если бы ее переменные были бы независимыми», т.е. применять теорему Ферма для экстремальной задачи без ограничений. В итоге мы приходим к следующему необходимому условию локального экстремума в задаче (3):

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x,\lambda)}{\partial x}=0\Leftrightarrow\frac{\partial\mathcal{L}(x,\lambda)}{\partial x_i}\quad(i=1,\ldots,n).$$

Это равенство называют иногда *условием стационарности*, а сам предложенный метод решения задач вида (3) – *правилом множителей Лагранжа*. Аналогичные приемы Лагранж применял и в задачах вариационного исчисления.

Методы Эйлера и Лагранжа позволили найти решения множества конкретных задач, интересных для естествознания и геометрии. Среди них задачи *о провисании тяжелой нити* (вопрос был поставлен Галилеем в 1638 г.), *о минимальной поверхности вращения* (этим вопросом интересовался Лейбниц), *о кратчайших линиях на поверхности* (вопрос поставил И. Бернулли), *о равновесии упругой струны и балки* (задача была сформулирована и решена самим Эйлером). Теми же методами были решены разнообразные варианты классической изопериметрической задачи.

Пьер Мопертюи (1698–1759), Эйлер и Лагранж, осознали, что вариационное исчисление является языком естествознания и что законы природы выводятся из соответствующих вариационных принципов. Предметом оживленных дискуссий был так называемый *принцип наименьшего действия*, из которого выводились разнообразные законы природы. Само слово «действие» (actio) было впервые употреблено Лейбницем. В несколько расплывчатой форме принцип наименьшего действия выразил Мопертюи, объявив об универсальности этого закона. Эйлер и Лагранж придали смутным высказываниям Мопертюи точный смысл и сумели вывести из принципа наименьшего действия законы

3) Предполагая, что не все множители λ_i равны нулю.

движения. Это дало повод Эйлеру произнести такие (часто цитируемые) слова: «В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума».

О развитии вариационного исчисления в XVII в. см. [7; 9–11].

Работами Эйлера и Лагранжа были заложены основания теории экстремума. Естественно задаться вопросом:

Из каких частей складывается теория экстремума?

Исследовать экстремальную задачу средствами анализа становится возможным после ее *формализации*, т.е. перевода ее формулировки на язык математического анализа.

Формализовать экстремальную задачу – это значит описать минимизируемый функционал $f_0(f_0\colon X \to \overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\})$, его область определения X и ограничение $\Omega \subset X$. Ограничения обычно задаются системой равенств и неравенств.

Мы далее употребляем такую запись формализованной проблемы:

$$f_0(x) \to \min(\max),\ x \in \Omega$$

(или $f_0(x) \to \text{extr},\ x \in \Omega$, где уже применяемым нами ранее термином «экстремум», введенным Паулем Дюбуа-Реймоном (1831–1889) в 1879 г., объединяются понятия максимума и минимума). В связи с каждой экстремальной задачей можно поставить такие вопросы:

- каковы необходимые условия экстремума в задаче?
- как описывается эволюция решения при возмущении задачи и каковы достаточные условия экстремума?
- существует ли решение задачи?
- возможно ли найти решение явно и, если это затруднительно, то как найти его численно?

Так что далее мы рассказываем об истории необходимых условий, достаточных условий и теории Гамильтона–Якоби, теории существования и алгоритмов нахождения решений. А по ходу дела будем обсуждать связи теории экстремума с проблемами естествознания, техники и экономики.

Необходимые условия экстремума

Необходимыми условиями экстремума для разнообразных классов экстремальных задач занимались многие выдающиеся математики. Известны необходимые условия Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Остроградского (об этом мы уже кое-что сказали), Лежандра, Пуассона, Якоби, Вейерштрасса, Кнезера, Больца, Блисса, Джона, Куна–Таккера, Понтрягина и многих, многих других.

Но выяснилось, что все эти необходимые условия могут быть осознаны, если руководствоваться уже описанной нами идеей Лагранжа: составь функцию Лагранжа и действуй, как если бы переменные были независимы. Проиллюстрируем это сначала на примере общих задач вариационного исчисления.

Пусть экстремальная задача рассматривается на конечном промежутке $\Delta = [a, b]$, и пусть

$$z = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \in Z = C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times C(\Delta, \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R}^2.$$

(Это значит, что здесь $x(\cdot)$ является непрерывно-дифференцируемой n–мерной вектор-функцией, $u(\cdot)$ – непрерывной r-мерной вектор-функцией, а t_0, t_1 являются *подвижными* концами интегрирования, причем $a < t_0 < t_1 < b$.) Введем *функционалы Больца*

$$\mathcal{B}_i(z) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))\,dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))\ (i = 0, 1, \ldots, m),$$

где $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R},\ f_i = f_i(t, x, u)$ – их интегранты, а $\psi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \psi_i = \psi_i(t_0, \xi_0, t_1, \xi_1)$ – их терминанты. Экстремальную задачу вида

$$\mathcal{B}_0(z) \to \text{extr},\ \mathcal{B}_i(z) = 0\ (1 \le i \le m),\ \dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)) \tag{4}$$

с непрерывной n–мерной вектор-функцией $\varphi(t, x, u)$ (определяющей соответствующую *дифференциальную связь*) будем называть *задачей Лагранжа*.

Локальный экстремум задачи (4) в пространстве Z называется *слабым*. Прежде чем формулировать необходимое условие слабого экстремума для такой задачи в общем случае, сформулируем его для одной частной (сводящейся к (4)) задачи без оганичений, называемой далее *задачей Больца*:

$$\mathcal{B}(z) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), u(t))\,dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \text{exrt}, \tag{5}$$

где L и l – гладкие функции. Необходимым условием того, что четверка $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ доставляет слабый экстремум в задаче (5), служит следующий набор требований (далее наличие «крышечек» понимается в том же, как и ранее, смысле):

1) *условие стационарности по* $x : -\dfrac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0$;

2) *условие стационарности по* $u : \hat{L}_u(t) = 0$;

3) *условия трансверсальности по* $x : \hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)},\ \hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{L}_{x(t_1)}$;

4) *условиями стационарности по подвижным концам интегрирования*:
$-\hat{L}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0,\quad \hat{L}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0.$

Если последовать теперь за мыслью Лагранжа, то для получения необходимых условий слабого экстремума в общей задаче Лагранжа (4) надо составить функцию Лагранжа[4]:

---

4) Далее используется сокращенная запись $p \cdot x$ вместо $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ для вектора-строки $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и вектора-столбца x с координатами $\{x_1, \ldots, x_n\}$, выписанными в столбец. Когда мы пишем $\mathbb{R}^n$ подразумеваем, что это – совокупность векторов-столбцов. Множители Лагранжа мы полагаем вектор-строками.

$$\mathcal{L}(z,\lambda)=\int_{t_0}^{t_1}\mathbb{L}(t,x(t),\dot{x}(t),u(t))\,dt+l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),\qquad (6)$$

где $\lambda=(\lambda_0,\ldots,\lambda_m,p(\cdot))$ – набор множителей Лагранжа,

$F(t,x,u)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(t,x,u)$ – *полный интегрант*,

$\mathbb{L}(t,x,\dot{x},u)=F(t,x,u)+p(t)\cdot(\dot{x}-\varphi(t,x,u))$ – *лагранжиан*,

$l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\psi_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))$ – *полный терминант* задачи (4), и уже для построенной функции $\mathcal{L}(z,\lambda)$ выписать необходимые условия слабого экстремума, действуя при этом так, «как если бы ее переменные были бы независимыми». Иными словами для получающейся задачи Больца следует выписать рассмотренные выше условия стационарности по x и по u, условия трансверсальности по x и условия стационарности по подвижным концам интегрирования. Этот способ решения задачи (4) мы будем называть *принципом Лагранжа для задачи Лагранжа*.

Распространение принципа Лагранжа на решение различных задач классического вариационного исчисления было предметом исследований на протяжении двух столетий. Вот как это осуществлялось в исторической перспективе.

В «Methodus Inveniendi...» Эйлер вывел необходимое условие слабого экстремума не только для простейшей задачи вариационного исчисления, о чем уже рассказывалось, но также для *изопериметрической задачи* вида

$$\int_{t_0}^{t_1}f_0(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt\to\text{extr},\ \int_{t_0}^{t_1}f_1(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt=\alpha,\ x(t_i)=x_i\ (i=0,1)$$

и для *задачи со старшими производными*

$$\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),\cdots,x^{(n)}(t))\,dt\to\text{extr},\ x^{(k)}(t_i)=x_i^k\ (i=0,1;\ 0\le k\le n-1).$$

В последнем случае искомое необходимое условие связано с дифференциальным уравнением, называемым *уравнением Эйлера–Пуассона* (Симеон Пуассон (1781–1840) исследовал задачу со старшими производными в более общей ситуации). Ученик Вейерштрасса Адольф Кнезер (1862–1930) исследовал условия экстремума в задачах с подвижными концами и вывел условия трансверсальности (ему же принадлежит и сам термин «трансверсальность»). При этом все эти, и многие другие результаты, являются следствиями сформулированного выше общего принципа Лагранжа.

Две теоремы

В двадцатом веке (к девятнадцатому мы еще вернемся) произошли два значительных изменения: во-первых, стали изучать *задачи с неравенствами*, а во-вторых, вариационное исчисление получило дальнейшее развитие в рамках *оптимального управления*. Обсудим их на примере *минимизации* функционалов.

Формализация конечномерной задачи на минимум с ограничениями-неравенствами имеет вид:

$$f_0(x) \to \min,\ f_i(x) \le 0\ (1 \le i \le m'),\ f_i(x) = 0\ (m'+1 \le i \le m),\ x \in \Omega, \qquad (3')$$

где Ω – заданное в $\mathbb{R}^n$ подмножество. Ее функция Лагранжа по форме такая же, как и для задачи (3): $\mathcal{L}(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$.

Задачу оптимального управления на минимум с ограничениями-неравенствами можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_0(z) \to \min,\ \mathcal{B}_i(z) \le 0\ (1 \le i \le m'),\ \mathcal{B}_i(z) = 0\ (m'+1 \le i \le m), \\ &\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)),\ u(t) \in U, \end{aligned} \qquad (4')$$

где U – заданное подмножество в $\mathbb{R}^r$. Для задачи (4') будем считать, что она рассматривается в пространстве элементов $z = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, где $x(\cdot)$ – *кусочно* непрерывно-дифференцируемая n-мерная вектор-функция, а $u(\cdot)$ – *кусочно* непрерывная r-мерная вектор-функция. Как и в задаче (4), здесь вводятся набор соответствующих множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m, p(\cdot))$, полный интегрант $F = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x,u)$, лагранжиан $\mathbb{L} = F + p(t)\cdot(\dot{x} - \varphi(t,x,u))$, полный терминант $l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$, а также *функция Понтрягина*

$$H = p(t)\cdot\varphi(t,x,u) - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x,u) = \mathbb{L}_{\dot{x}}\cdot\dot{x} - F.$$

Добавим еще, что *допустимый* в задаче (4') элемент $\hat{z} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ называется локальным *сильным минимумом*, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого допустимого элемента $z = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, для которого $|t_0 - \hat{t}_0| + |t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon$ и $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1]\cap[\hat{t}_0,\hat{t}_1])} < \varepsilon$, выполняется неравенство $\mathcal{B}_0(z) \ge \mathcal{B}_0(\hat{z})$.

Мы видим, что задача (3') обобщает (3), а (4') – (4), но видны также отличия (3') от (3) и (4') от (4) – наличие неравенств и ограничений «типа включений». Сформулируем для задач (3'), (4') основополагающие утверждения.

Теорема 1 (принцип Лагранжа для задачи (3')).

I. *Гладкий случай. Пусть $\Omega = R^n$, а все функции f_i непрерывно-дифференцируемы в окрестности точки $\hat{x}$. Тогда, если $\hat{x}$ – локальный минимум в задаче (3'), то найдутся множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, не равные одновременно нулю, такие, что выполняются условия*

a) *неотрицательности:* $\lambda_i \geq 0 \quad (0 \leq i \leq m')$;

b) *дополняющей нежесткости:* $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0 \quad (1 \leq i \leq m')$;

c) *стационарности:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\hat{x}, \lambda)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0.$$

II. *Выпуклый случай. Пусть подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ выпукло, функции f_i $(0 \leq i \leq m')$ выпуклы на $\mathbb{R}^n$, а $f_i(m'+1 \leq i \leq m)$ – аффинны (т.е. суммы линейной функции и константы). Тогда, если $\hat{x}$ – локальный минимум в задаче (3'), то найдутся множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, не равные одновременно нулю, такие, что выполняются условия*

a) *неотрицательности:* $\lambda_i \geq 0 \quad (0 \leq i \leq m')$;

b) *дополняющей нежесткости:* $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0 \quad (1 \leq i \leq m')$;

c) *принцип минимума:* $\min\limits_{x \in \Omega} \mathcal{L}(x, \lambda) = \mathcal{L}(\hat{x}, \lambda)$.

Теорема 2 (принцип Лагранжа для задачи (4')).

Пусть в задаче (4') выполняется условие гладкости, согласно которому все функции ψ_i непрерывно дифференцируемы в точке $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$, все функции f_i и отображение φ непрерывны вместе со своими производными f_{ix}, φ_x в окрестности множества

$$\{(t, x, u) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1], \quad x = \hat{x}(t), \quad u = \hat{u}(t)\},$$

Тогда, если $\hat{z} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ доставляет в (4') локальный сильный минимум, то найдутся множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m, p(\cdot))$, не равные одновременно нулю, такие, что выполняются условия

a) *неотрицательности:* $\lambda_i \geq 0 \quad (0 \leq i \leq m')$;

b) *дополняющей нежесткости:* $\lambda_i \mathcal{B}_i(\hat{z}) = 0 (1 \leq i \leq m')$;

c) *стационарности по x:*

$$-\frac{d}{dt}\hat{\mathbb{L}}_{\dot{x}}(t) + \hat{\mathbb{L}}_x(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{p}(t) + p(t) \cdot \hat{\varphi}_x(t) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_{ix}(t);$$

d) *трансверсальности по x:*

$$\hat{\mathbb{L}}_{\dot{x}}(\hat{t}_i) = (-1)^i \hat{l}_{x(t_i)} \quad (i = 0, 1) \Leftrightarrow p(\hat{t}_i) = (-1)^i \hat{l}_{x(t_i)};$$

e) *стационарности по подвижным концам интегрирования:*

$$(-1)^{i+1}\hat{F}(\hat{t}_i)+\hat{l}_{t_i}+\hat{l}_{x(t_i)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_i)=0 \quad (i=0,1) \Leftrightarrow \hat{H}(\hat{t}_i)=(-1)^{i+1}\hat{l}_{t_i} \ (i=0,1);$$

f) *принцип минимума по u*:

$$\min_{u\in U}\mathbb{L}(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),u)=\hat{\mathbb{L}}(t),$$

или соответствующий ему принцип максимума Понтрягина

$$\max_{u\in U}H(t,\hat{x}(t),u,p(t))=\hat{H}(t).$$

Доказательства обеих этих теорем содержатся в [2]. Теорему 2 мы будем называть коротко *принципом максимума.*

Об общей теории экстремума см. [2].

Завершение теории необходимых условий в вариационном исчислении

Теоремы 1 и 2 были получены в середине двадцатого века (чуть позже мы расскажем о том, кем они были доказаны), а сейчас вернемся опять во времена Эйлера и Лагранжа, чтобы рассмотреть достижения математиков восемнадцатого и девятнадцатого столетий с позиций принципа Лагранжа.

Простейшая задача вариационного исчисления (1) *на минимум* очевидным образом сводится к задаче Лагранжа

$$\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),u(t))\,dt\to\min,\ \dot{x}(t)=u(t),\ x(t_i)=x_i\ \ (i=0,1),\ u(t)\in\mathbb{R} \qquad (4'')$$

(здесь $z=(x(\cdot),u(\cdot))\in C^1([t_0,t_1])\times C([t_0,t_1])$, t_0, t_1 – *фиксированные* концы интегрирования, а интегрант L – гладкая функция своих переменных). Если применить теорему 2 к задаче (4"), то, вводя лагранжиан $\mathbb{L}=L(t,x,u)+p(t)(\dot{x}-u)$ (нетрудно проверить, что в задаче (4") полным интегрантом можно считать исходный интегрант $L=L(t,x,u)$ *с единичным* множителем при нем – допущение равенства нулю множителя Лагранжа при L приводит к противоречию с принципом максимума), принцип минимума по u примет следующую форму:

$$L(t,\hat{x}(t),u)+p(t)(\dot{\hat{x}}(t)-u)\ge\hat{L}(t)+p(t)(\dot{\hat{x}}(t)-\hat{u}(t))\Leftrightarrow$$

$$L(t,\hat{x}(t),u)-p(t)u\ge\hat{L}(t)-p(t)\hat{u}(t)\quad(\forall u\in\mathbb{R},\forall t\in[t_0,t_1]). \qquad (7)$$

Заметим, что здесь $\hat{u}(t)=\dot{\hat{x}}(t)$, и что в задаче Лагранжа (4") из принципа минимума по u должно реализовываться равенство $\hat{\mathbb{L}}_u=0\Leftrightarrow\hat{L}_u(t)-p(t)=0$, откуда $p(t)=\hat{L}_{u(t)}$. Поэтому условие (7) по отношению к исходной задаче (1) можно переписать в виде

$$L(t,\hat{x}(t),u)-L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))-L_{\dot{x}}(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))(u-\dot{\hat{x}}(t))\geq 0 \quad (8)$$

$(\forall u\in\mathbb{R}, \forall t\in[t_0,t_1])$.

Соотношение (8) называется *необходимым условием Вейерштрасса локального сильного минимума* для простейшей задачи вариационного исчисления (1). (Функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет в задаче (1) локальный сильный минимум, если существует число $\varepsilon>0$ такое, что в этой задаче $J(x(\cdot))\geq J(\hat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции $x(\cdot)$ при $\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1])}<\varepsilon$.)

Роль Карла Вейерштрасса (1815–1897) в вариационном исчислении исключительно велика. Он читал лекции по этому предмету с 1859 по 1890 гг., и они оказали большое воздействие на развитие всей теории экстремальных задач в девятнадцатом веке. Опубликованы эти лекции были много позднее – в 1927 г. в собрании его сочинений. Условие Вейерштрасса (8) означает, что функция $u\to L(t,\hat{x}(t),u)-\hat{L}_{\dot{x}}(t)u$ достигает своего минимума при $\hat{u}(t)=\dot{\hat{x}}(t)$, и следовательно вторая производная $L_{uu}(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))$ неотрицательна. А поэтому, возвращаясь к задаче (1), приходим к неравенству

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t)\geq 0,\ t\in[t_0,t_1] \quad (9)$$

в качестве *необходимого условия локального сильного минимума* для простейшей задачи вариационного исчисления. Требование (9) впервые появилось у Адриена Лежандра (1752–1833) как необходимое условие локального *слабого* минимума в задаче (1) – оно содержится в его «Мемуаре о различении максимумов и минимумов», опубликованном в 1786 году. Поэтому сейчас соотношение (9) называется просто *необходимым условием Лежандра* для локального минимума в простейшей задаче вариационного исчисления.

Решая проблему о достаточных условиях в простейшей задаче вариационного исчисления (1), Карл Якоби (1804–1851) разложил разность $J(\hat{x}(\cdot)+\delta x(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot))$ по $\delta x(\cdot)$ вплоть до второго порядка и изучил поведение *второй вариации* $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot))$ функционала J в точке $\hat{x}(\cdot)$. Применяя интегрирование по частям (при естественных для задачи (1) ограничениях $\delta x^2(t_0)=\delta x^2(t_1)=0$), ее можно представить в виде

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}(A(t)\,\delta\dot{x}^2(t)+B(t)\delta x^2(t))\,dt,$$

где $A(t)=\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$, а $B(t)=\hat{L}_{xx}(t)-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}x}(t)$. Условие локального слабого минимума в точке $\hat{x}(\cdot)$ для задачи (1) в терминах первой и второй вариации аналогично условию минимальности для конечномерной экстремальной задачи: $\delta J(\hat{x}(\cdot))=0$ и $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot))\geq 0$.

Вопрос о неотрицательности второй вариации на экстремали $\hat{x}(\cdot)$, доставляющей локальный слабый минимум в задаче (1), можно свести к анализу экстремальной задачи с квадратичным функционалом

$$\int_{t_0}^{t_1} (A(t)\dot{h}^2(t) + B(t)h^2(t))\, dt \to \min,\ h(t_0) = h(t_1) = 0, \tag{10}$$

имеющей очевидное решение – тождественный нуль. После формализации (10) как задачи Лагранжа (уже исследованного вида (4'')) и применения к ней принципа максимума, тогда придем к неравенству $A(t) \geq 0$ ($\forall t \in [t_0, t_1]$). А это означает, что (как и утверждалось выше) условие Лежандра (9) действительно является необходимым условием локального слабого минимума для задачи (1).

Уравнение Эйлера для задачи (10) имеет вид:

$$-\frac{d}{dt}(A(t)\dot{h}(t)) + B(t)h(t) = 0 \tag{11}$$

(оно получило название *однородного уравнения Якоби* для задачи (1)). Нули ненулевого решения уравнения (11) с начальным условием $h(t_0) = 0$ называют *точками, сопряженными с точкой* t_0. Если сопряженная с t_0 точка τ принадлежит интервалу (t_0, t_1), то на ломаной кривой, идущей по решению уравнения (11) от t_0 до τ, а затем нулем, квадратичный функционал задачи (10) принимает нулевое значение (как и на тождественном нуле). Но можно показать, что этот факт (наличие «ломаной экстремали») противоречит принципу максимума (для задачи (10) после ее формализации как задачи Лагранжа). Отсюда вытекает, что, «сгладив» угловую точку, можно добиться того, что квадратичный функционал задачи (10) принимает отрицательное значение. А это означает, что $\hat{x}(\cdot)$ не является в задаче (1) локальным слабым минимумом. Отсутствие в интервале (t_0, t_1) сопряженной с t_0 точки называют *условием Якоби* для задачи (1).

Резюмируя вышесказанное получаем, что необходимыми условиями локального слабого минимума в задаче (1) служат реализация на $\hat{x}(\cdot)$ уравнения Эйлера, условие Лежандра и условие Якоби. Эти же условия плюс условие Вейерштрасса являются необходимыми условиями для локального сильного минимума в данной задаче.

Таким образом, используя формализацию задачи (1) в виде задачи Лагранжа с применением теоремы 2, может быть изложена теория Якоби локального слабого минимума (которая была построена им в 1836–1837 гг.) и теория Вейерштрасса локального сильного минимума для простейшей задачи вариационного исчисления.

На протяжении более века, начиная с «Methodus Inveniendi...» до семидесятых–восьмидесятых годов девятнадцатого века, не было дано достаточно строгого доказательства необходимых условий для задач вариационного исчисления с ограничениями. Даже для простейшей задачи с ограничениями – изопериметрической задачи – такое доказательство впервые дал лишь Вейерштрасс. Именно он обнаружил, что в функции Лагранжа при минимизируемом функционале не надо писать множителя лишь при справедливости некоего специального требования (которое можно отбросить, если домножать функционал на неопределенный множитель). Неопределенный множитель

λ_0 ввел Кнезер. Удовлетворившее блюстителей строгости доказательство принципа Лагранжа для простейшей задачи Лагранжа вида

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt \to \min, \quad \dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$$

с закрепленными концами интегрирования было дано Адольфом Майером (1839–1908) в 1886 г. Построение общей теории задачи Лагранжа растянулась еще на полстолетия и было завершено к сороковым годам двадцатого века в основном усилиями «чикагской школы» – группой американских математиков, среди которых укажем Гилберта Блисса (1876–1961), Марстона Морса (1892–1977), Эдуарда Мак-Шейна (1904–1988), Магнуса Хестенса (1906–1991). Итоги этих исследований подробно изложены в монографии Блисса [12]. Все эти достижения ныне покрываются теоремой 2.

О теории вариационного исчисления в XIX и XX вв. см. [7, 11–14].

Выпуклые экстремальные задачи и рождение выпуклого анализа

В конце тридцатых годов XX в. родилось линейное программирование – теория конечномерных задач о минимизации или максимизации линейной функции при линейных ограничениях. Эти задачи были вызваны к жизни проблемами экономики. Ныне общепризнано, что начало развитию линейного программирования было положено скромной брошюрой Леонида Витальевича Канторовича (1912–1986) «Математические методы организации производства», выпущенной издательством Ленинградского университета в 1939 г. В силу ряда причин политического характера Л.В.Канторовичу не было позволено активно заниматься теорией линейного программирования и ее приложениями к конкретной экономике, и дальнейшее развитие линейного программирования происходило в сороковые годы двадцатого столетия за рубежами нашей страны. Это развитие во многом связано с именами Джона фон Неймана (1903–1957), Альберта Таккера (1906–1995), его учеников Гарольда Куна и Дэвида Гейла, а также с деятельностью Джорджа Данцига. В развитии экономической теории на базе линейного программирования большое участие принял Тьяллинг Купманс. Ему и Л.В. Канторовичу в 1975 г. была присуждена Нобелевская премия по экономике.

В 1948 году Фритц Джон (1910–1994) (иногда его фамилию по-русски транскрибируют, как Йон) доказал гладкий вариант теоремы 1. Ее выпуклый вариант был доказан в диссертации Вильяма Каруша (1917–1997), защищенной в 1942 г. в Чикагском университете, а затем переоткрыт Куном и Таккером в 1951 г.

Развитие линейного программирования и теории выпуклых экстремальных задач привело к рождению специальной главы, занявшей промежуточное положение между анализом и геометрией и получившей (с легкой руки Таккера) название *выпуклого анализа*. Он состоит как бы из двух частей – теории выпуклых множеств (эта теория зародилась еще в XIX столетии в трудах Огюстена Коши (1789–1857), Германа Минковского (1864–1909) и др.) и теории выпуклых функций, получившей важный импульс от Вернера Фенхеля (1905–1988): в его канадских лекциях 1949 г. были заложены основы теории двойственности выпуклых функций и построены начала выпуклого исчисления. Итоги двадцатилетнего развития выпуклого анализа были подведены в монографии Ральфа Терри Рокафеллара «Выпуклый анализ» (см. обо всем этом в книге [15].

Достаточные условия экстремума и теория Гамильтона–Якоби

Вопрос о достаточных условиях в вариационном исчислении впервые (в частном случае) изучал И. Бернулли, но его работа 1718 г. оставалась неизвестной вплоть до XX в. Систематически эти проблемы стал изучать Лежандр. В упомянутом нами «Мемуаре о различении максимумов и минимумов в вариационном исчислении» он стал рассматривать вторую вариацию. Подобно тому, как для функции одного переменного для получения достаточного условия экстремума используется вторая производная (достаточным условием минимума гладкой функции $f(\cdot)$ в точке $\hat{x}$ являются соотношения $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) > 0$), Лежандр искал условия того, что при $\delta J(\hat{x}(\cdot)) = 0$ выполнялось бы неравенство $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot)) > 0$. (То гда и появилось необходимое условие Лежандра (9) для задачи (1).)

Некоторое время Лежандр полагал, что реализация на $\hat{x}(\cdot)$ *усиленного условия Лежандра* ($A(t) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0 (t \in [t_0, t_1])$) в задаче (1) уже *достаточно* для положительности второй вариации $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot))$. И действительно, он привел вторую вариацию к «квадрату суммы»:

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (A(t)\delta\dot{x}^2(t) + B(t)\delta x^2(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} A(t)\left(\delta\dot{x}(t) + w(t)\delta x(t)\right)^2 dt, \quad (12)$$

решив, для определения функции $w(\cdot)$, уравнение Риккатти. Но вскоре и сам Лежандр, и Лагранж осознали, что здесь что-то не так, ибо функция $w(\cdot)$ может иметь особенности.

Проблему достаточности слабого экстремума разрешил лишь Якоби. Он понял, что реализация одних *локальных* условий на кривой $\hat{x}(\cdot)$ (а именно уравнения Эйлера и условия Лежандра, пусть и в усиленном смысле) еще не может быть гарантией того, что рассматриваемая кривая дает минимум (соответственно, максимум) функционала задачи вида (1). В связи с этим Якоби привел замечательный пример – геодезические на сфере. Для дуги большого круга выполнены и уравнение Эйлера, и условие Лежандра, но если большой круг проходит через диаметрально противоположную точку, то он не минимален. Якоби показал, что, помимо реализации на кривой $\hat{x}(\cdot)$ уравнения Эйлера и усиленного условия Лежандра, нужно еще потребовать выполнения *глобального* условия – *усиленного условия Якоби*, означающего отсутствие сопряженной с t_0 точки в полуинтервале $(t_0, t_1]$ – чтобы гарантировать в задаче (1) достижение локального слабого минимума на данной кривой.

Условие Якоби допускает замечательное геометрическое описание: огибающая семейства экстремалей, имеющих общую начальную точку, не должна пересекаться с кривой, подозреваемой на экстремум, на всем отрезке, на котором эта кривая рассматривается. При выполнении усиленного условия Якоби функция $w(\cdot)$ не имеет особенностей на $[t_0, t_1]$, и потому предложенное в (12) приведение второй вариации $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot))$ к «квадрату суммы» будет уже корректно.

В своих исследованиях Якоби опирался на идеи Уильяма Гамильтона (1805–1865), которые тот применял для задач механики и оптики. Идеи Гамильтона в свою очередь опирались на так называемый *принцип Гюйгенса*, который можно в первом приближении сформулировать так: любой фрагмент экстремали является экстремалью. Гюйгенс строил волновую теорию света, и волновой фронт у него был «огибающей» волновых фронтов от источников света, принадлежавших некоторому предшествующему волновому фронту. Гамильтон писал: «Следует сравнивать динамически возможные движения, варьируя конечные точки системы». Здесь заложена фундаментальная идея *возмущения экстремальной задачи* с целью включения ее в семейство близких задач. Эту идею и воспринял Якоби. Вслед за Гамильтоном (рассматривавшим систему лучей), он стал рассматривать семейства экстремалей и находить подобия волновых фронтов в задачах вариационного исчисления, «варьируя конечные точки системы». На этом пути и было завершено построение общей теории, получившей в вариационном исчислении название *теории Гамильтона–Якоби*.

Существование решений

Тема «существование решений» непосредственно связана с двадцатой проблемой Гильберта – одной из двадцати трех знаменитых проблем, поставленных в его докладе на парижском Международном математическом конгрессе 1900 г. (см. [16]). При постановке проблемы Гильберт произнес такие пророческие слова: «Я убежден, что будет возможно доказывать теоремы существования с помощью общего принципа, чья сущность навеяна принципом Дирихле. Этот общий принцип, возможно, приблизит нас к ответу на следующий вопрос: имеет ли решение каждая регулярная вариационная проблема, если самому понятию "решение" при случае придавать расширенное толкование».

"Общий принцип" доказательства теорем существования, о котором говорил Гильберт, это, скорее всего, принцип компактности Вейерштрасса–Лебега–Бэра (согласно которому *полунепрерывная снизу функция достигает на компакте своего минимума*). На этом принципе базируется большинство теорем существования. А идея расширения – будь то самого понятия решения или же функционального пространства, в котором ищется решение – одна из центральных в современной теории существования решений.

Постараемся раскрыть смысл высказывания Гильберта и рассказать о развитии его идей.

Начнем с простейшей задачи вариационного исчисления (1), причем для определенности положим, что она рассматривается *на минимум*. Существует ли решение в такой задаче? На этот вопрос невозможно ответить, не пояснив, где ищется само решение. В данном одномерном случае имеется естественная возможность – ввести самое широкое пространство, в котором сама задача может иметь смысл. Таковым является пространство абсолютно-непрерывных функций. Его обозначают $AC([t_0,t_1])$ (или $W_1^1([t_0,t_1])$). А что может препятствовать существованию решения в этом пространстве? Можно назвать три основные причины: невыпуклость интегранта $L = L(t,x,\dot{x})$ по $\dot{x}$, недостаточный рост этого интегранта по $\dot{x}$ и неограниченность функционала J снизу. Вот классические примеры, подтверждающие это.

Пример 1 (Больца):

$$J_1(x(\cdot)) = \int_0^1 ((\dot{x}^2(t)-1)^2 + x^2(t))\,dt \to \min,\ x(0) = x(1) = 0.$$

Пример 2 (Вейерштрасса)[5]:

$$J_2(x(\cdot)) = \int_0^1 t^2\dot{x}^2(t)\,dt \to \min,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Пример 3 (гармонический осциллятор):

$$J_3(x(\cdot)) = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))\,dt \to \min,\ x(0) = x(2\pi) = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что в примерах 1 и 2 нижняя грань равна нулю, но ни на одной функции из $AC([0,1])$ она не достигается, а в примере 3 нижняя грань равна $-\infty$. В первом примере функция $\dot{x} \to (\dot{x}^2-1)^2 + x^2$ невыпукла, во втором примере функция $\dot{x} \to t^2\dot{x}^2$ не растет при $t = 0$. Леонида Тонелли (1885–1946) установил, что если устранить эти причины (т.е. потребовать, чтобы интегрант L удовлетворял условию выпуклости по $\dot{x}$, условию роста по $\dot{x}$ и был ограничен снизу), то решение задачи вида (1) будет существовать. А Николай Николаевич Боголюбов (1909–1992) доказал, что с теоретической точки зрения можно считать, что условие выпуклости интегранта у таких задач всегда выполнено (ибо можно так «расширить задачу», что она заменится другой, равносильной, но с условием выпуклости). Эти два результата лежат в основе теории существования в случае, когда t одномерно.

Существенно труднее случай $t \in \mathbb{R}^d$, $d > 1$. Существование решений соответствующих задач вариационного исчисления было одной из горячо обсуждаемых тем в течение всего двадцатого столетия. Здесь надо назвать имена Жака Адамара (1865–1963), Сергея Натановича Бернштейна (1880–1968), Норберта Винера (1894–1964), Ларса Гардинга, Рихарда Куранта (1888–1972), Анри Лебега (1875–1941), Жана Лере (1906–1998), Чарльза Морри (1907–1984), Эбергарда Хопфа (1902–1983) и др. Теория существования в многомерных задачах повлекла рождение новой ветви функционального анализа –

5) Этим знаменитым примером Вейерштрасс аргументировал неполноту аргументов Римана, касающихся принципа Дирихле.

теории функциональных пространств. Родоначальником ее стал Сергей Львович Соболев (1908–1989), его работы были продолжены Лораном Шварцем (1915–2002). Их пионерские исследования далее развивались многими математиками (Марко Иосифович Вишик, Жан Луи Лионс (1928–2001) и др.).

Этот подход базируется на том, что производится расширение прежде всего *самих пространств*, на которых рассматриваются вариационные задачи. Так были заложены основы теории *обобщенных функций* (или по другой терминологии – *теории распределений*). При этом несколько модифицируется сам принцип компактности, и само пространство подыскивается так, чтобы удовлетворить уже модифицированному принципу компактности.

Скажем сначала об этой модификации. Рассмотрим общую задачу минимизации:

$$f(x) \to \min,\ x \in \Omega \subset X, \tag{13}$$

где X – банахово пространство, $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$ – минимизируемый функционал, а Ω – область, задающая ограничение задачи. Напомним, что последовательность элементов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$ называется *слабо сходящейся к элементу* x, если для любого непрерывного линейного функционала на X имеет место сходимость $\langle x^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle$. *Сепарабельное* банахово пространство, в котором из каждой ограниченной последовательности его элементов можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, называется *рефлексивным пространством* (если $X = \mathbb{R}^d$, а Ω – соответственно, область в $\mathbb{R}^d$, то $L_p(\Omega)$ при $1 < p < \infty$ будет примером рефлексивного пространства). Подмножество пространства X называется *секвенциально слабо замкнутым*, если предел слабо сходящейся последовательности его элементов принадлежит этому подмножеству. Наконец, функционал f в задаче (13) называется *коэрцитивным*, если для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ его лебегово множество $\mathcal{L}_\alpha(f) = \{x \in \Omega \mid f(x) \le \alpha\}$ непусто и ограничено в X. Имеет место следующий результат: *если в задаче* (13) *функционал определен на рефлексивном пространстве, обладает свойствами полунепрерывности снизу относительно слабой сходимости и коэрцитивен, а ограничение – секвенциально слабо замкнуто, то решение задачи существует.*

Многомерная теорема Тонелли о существовании решения (охватывающая и одномерный случай) для задачи вида (2) формулируется так: *если интегрант $L = L(t, x, \dot{x})$ является непрерывной по всем переменным, непрерывно-дифференцируемой по $\dot{x}$ функцией, выпуклой по $\dot{x}$ (при фиксированных t и x) и удовлетворяющей условию роста $L(t, x, \dot{x}) \ge \alpha|\dot{x}|^p + \beta$, где $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\infty > p > 1$, то в пространстве $W_p^1([\Omega])$ существует решение задачи.*

Заметим, что если в одномерной ситуации пространство вида $W_p^1([t_0, t_1]) = \{x(\cdot) \mid \dot{x}(\cdot) \in L_p(t_0, t_1)\}$ применялось математиками уже в начале XX в., то в многомерном случае определение пространства $W_p^1([\Omega])$ (здесь замыкание области Ω предполагается компактным) появилось лишь в 30-е гг. двадцатого столетия. Поясним его построение.

Пусть $x = x(\cdot)$ – функция из $L_p(\Omega)$. Ее обобщенной частной производной первого порядка $\frac{\partial x}{\partial t_k}$ называется линейный функционал на пространстве $C_0^\infty([\Omega])$ (т.е. бесконечно дифференцируемых на Ω функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$), причем такой, что

$$\int\limits_{\Omega} x(t)\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_k}\,dt = -\left\langle \frac{\partial x}{\partial t_k}, \varphi \right\rangle \;\; (\forall \varphi = \varphi(\cdot) \in C_0^\infty([\Omega])).$$

Пространством Соболева $W_p^1(\Omega), 1 \le p \le \infty$ называется совокупность функций $x(\cdot) \in L_p(\Omega)$, у которых все обобщенные частные производные первого порядка принадлежат $L_p(\Omega)$. Норма в пространстве $W_p^1(\Omega)$ определяется формулой:

$$\|x(\cdot)\|^p_{W_p^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\left(|x(t)|^p + \sum_{k=1}^{d}\left|\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\right|^p \right) dt.$$

Доказательство теоремы Тонелли в многомерном случае проходит по общей схеме: доказывается, что из минимизирующей последовательности обобщенных функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность к элементу из $W_p^1([\Omega])$ (здесь требуется чуть углубиться в теорию обобщенных функций), и поясняется, что выпуклость позволяет перейти к пределу по подпоследовательности.

Алгоритмы оптимизации

Алгоритмы нахождения решений экстремальных задач базируются на разных идеях, среди которых выделим методы *целесообразного спуска*, методы *отсечения и штрафа* и методы *конечномерной аппроксимации*. Так, известный симплекс-метод решения задач линейного программирования, а также многие методы оптимизации квадратичных задач основываются на идее целесообразного спуска. В свою очередь, используя приемы отсечения и штрафа, строятся весьма эффективные методы выпуклой оптимизации, позволяющие добиться сходимости (по функционалу) со скоростью геометрической прогрессии независимо от размерности задачи. Наконец, в задачах вариационного исчисления и оптимального управления широко применяются различные способы аппроксимации задач конечномерными.

В целом же процедуры решения экстремальных задач подразделяются на «прямые» (когда в них не используются необходимые условия экстремума) и «непрямые». Коротко поясним смысл некоторых из них.

Касаясь вопросов минимизации квадратичной функции, рассмотрим задачу.[6)]

$$Q(x) = \frac{1}{2} x^T Ax - b^T \cdot x - c \to \min, \; x \in \mathbb{R}^n, \; A > 0, \tag{14}$$

где A – заданная $n \times n$-матрица, b – заданный n-вектор, c – заданное число, x - n-вектор, подлежащий определению. Задача (14), безусловно, принадлежит к числу простейших и актуальнейших проблем минимизации. Она конечномерна и «растет на бесконечности», и потому ее решение $\hat{x}$ (в силу принципа компактности) существует. По теореме Ферма должно удовлетворяться равенство $Q'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow A\hat{x} = b$, и дело сводится, таким образом, к решению линейной алгебраической системы. Это – задача линейной алгебры и ей посвящена огромная литература, не относящаяся к оптимизации. Одним из основных методов решения таких систем является *метод Гаусса* последовательного исключения неизвестных. Он прост по вычислительной схеме и устойчив по отношению к ошибкам округления. При реализации он требует $n^3/3$ умножений (несмотря на значительные усилия последних лет добиться существенного сокращения этого числа не удается).

Что же касается способов решения задачи вида (14), основанных на идее «целесообразного спуска», то здесь мы лишь отметим, что их суть состоит в построении «направленного пошагового спуска к минимуму» непосредственно для функции $Q(\cdot)$. Таковыми способами, например, являются классические в вычислительной математике метод *сопряженных градиентов*, метод *наискорейшего спуска* и различные их модификации. Подробнее с ними можно познакомиться в любой книге по численной оптимизации.

Для задач линейного программирования очень эффективным оказался уже упоминавшийся *симплекс-метод* их решения. Этот метод, окончательно разработанный Данцигом в 1947 г., сыграл исключительную роль в истории численных методов оптимизации. Многие математики (в том числе и сам Данциг) не раз говорили, что воспринимают, как чудо пятидесятилетнюю триумфальную «службу» симплекс-метода в бесчисленных исследованиях прикладного характера. Вот как об этом говорит сам Данциг: «The tremendous power of the simplex method is a constant surprise to me» («Меня всегда поражала исключительная мощь симплекс-метода»).

Разрабатывались и иные способы решения задач линейного программирования. В частности, для них успешно применяются методы, основанные на введении «штрафной функции», сводящей рассматриваемую задачу минимизации с ограничениями к задаче минимизации без ограничений (или с ограничениями более простой структуры) для некоторой *параметрической* функции, решение которой в пределе (по параметру) дает ответ в исходной экстремальной задаче (конструкции Нарендры Кармакара, Ильи Иосифовича Дикина и др.).

6) Далее значок T означает транспонирование, а запись $A > 0$ – положительную определенность квадратичной матрицы A.

В выпуклой оптимизации весьма эффективной оказалась идея «отсечения». Пусть рассматривается экстремальная задача

$$f(x) \to \min, \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \tag{15}$$

где функция f выпукла, множество Ω выпукло и компактно. В середине шестидесятых годов Анатолий Юрьевич Левин в России и Дональда Ньюман в США предложили метод поиска минимума в задаче (15) (в предположении, что f дифференцируема, а множество Ω содержит внутреннюю точку), базирующийся на теореме Грюнбаума–Хаммера. Согласно этой теореме, если через центр тяжести выпуклого тела Ω в d-мерном пространстве провести гиперплоскость, то она разобьет это тело на две части Ω' и Ω'', причем объем любой из них не будет превосходить величины $(1-1/e)$ от объема тела Ω. Метод, построенный на применении этой теоремы и получивший название *метода центрированных сечений*, состоит в следующем: сначала находится центр тяжести x_0 тела Ω, затем вычисляется градиент $f'(x_0)$ и отсекается от тела Ω его часть $\{x \in \Omega \mid f'(x_0) \cdot (x - x_0) > 0\}$ (легко понять, что в этой части разыскиваемого минимума нет), а далее с оставшейся частью тела Ω поступают аналогично.

Метод центрированных сечений не получил практического распространения в силу трудности нахождения центра тяжести. Но его основная идея применима к построению алгоритмов, имеющих большое практическое значение. Их разработкой занимались Давид Борисович Юдин, Аркадий Семенович Немировский, Наум Залманович Шор, Леонид Генрихович Хачиян, Юрий Евгеньевич Нестеров, Клод Лемарешаль, Аарон Бен-Таль и многие другие.

Для решении задач вариационного исчисления, в том числе задач с управлением, применяются в основном прямые методы. Начало их, как уже упоминалось, положено Лейбницем. Вот, что он писал своему ученику И. Бернулли 31 июля 1696 г. по поводу брахистохроны: «Таким образом, дело сводится к решению легкой задачи: даны две точки A и C и проходящая между ними горизонтальная прямая DE; требуется найти на этой прямой точку B, чтобы путь ABC был наискорейшим». Центральная идея здесь – сведение бесконечномерной задачи к конечномерной. Эта идея «дискретизации» весьма полезна с теоретической точки зрения (Лазарь Аронович Люстерник (1899– 1981) и Иван Георгиевич Петровский (1901–1973) построили теорию слабого экстремума Якоби, базируясь на такой идее). Необходимость решения задач вариационного исчисления, связанных с инженерными проблемами, стала особенно актуальной в начале XX в. Среди конкретных алгоритмов, реализующих идею редукции бесконечномерной задачи к конечномерной, выделяется предложенный в 1908 г. метод Ритца, развитый затем Борисом Григорьевичем Галеркиным (1871–1945) и Иваном Григорьевичем Бубновым (1872– 1919).

В непрямых методах решения экстремальных задач исключительную роль играют рекуррентные методы, в частности, различные модификации метода Ньютона.

Подробнее о методах решения задач на экстремум см. монографию [17].

Теория экстремума и рождение бесконечномерного анализа

Создание функционального анализа следует отнести к числу ярких научных достижений двадцатого века. Среди его творцов такие имена, как Жак Адамар, Стефан Банах (1892–1945), Норберт Винер, Вито Вольтерра (1860–1940), Израиль Моисеевич Гельфанд, Давид Гильберт (1862–1943), Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987), Марк Григорьевич Крейн (1907–1989), Анри Лебег, Лазарь Аронович Люстерник, Герман Минковский, Джон фон Нейман, Сальваторе Пинкерле (1853–1936), Анри Пуанкаре (1854–1912), Марсель Рисс (1886–1969), Фридьеш Рисс (1880–1956), Эрнест Фишер (1875–1959), Ивар Фредгольм (1866–1927), Морис Фреше (1878–1973), Феликс Хаусдорф (1868–1942), Эдвард Хелли (1884–1943), Лоран Шварц и др.

Проследим бегло эволюцию основных понятий анализа.

О понятии функции. В начале XX в. был совершен переход от числовых функций к функциям абстрактного аргумента. Приведем в подтверждение слова Фреше, сказанные в 1906 г.: «Мы скажем, что функциональная операция $\mathcal{U}$ определена на множестве E какой-либо природы (числа, кривые, точки и т.п.), если всякому элементу A из E соответствует значение $\mathcal{U}(A)$». В работах Вольтерра (замысел которых созрел, как считается, к 1883 г.) уже была сделана попытка создать *функциональное исчисление*, т.е. строить теорию функций, аргументом которых являются функции. Исходным материалом для Вольтерра явились задачи на экстремум. Сам же термин «функционал» был позже введен Адамаром (в его учебнике по вариационному исчислению).

О топологии. В девятнадцатом веке было осознано, что область определения функции должна быть оснащена понятием близости. Это было необходимо, в частности, для теории экстремума, ибо она, по-преимуществу, является теорией локального экстремума. Начальные топологические понятия были введены Георгом Кантором (1845–1918), определившим понятия предельной точки, замкнутого, открытого множества и т.п. Основы теоретико-множественной топологии были заложены Фреше, Хаусдорфом, Павлом Сергеевичем Александровым (1896–1982), Павлом Самуиловичем Урысоном (1898–1924) и др.

Исследование линейных уравнений и понятие линейного пространства. Теория линейных алгебраических уравнений с конечным числом переменных была построена в первой половине девятнадцатого столетия. Это привело к созданию линейной алгебры. Тогда же возникли первые интегральные уравнения. Теория линейных интегральных уравнений была создана в конце девятнадцатого столетия: Вольтерра в серии мемуаров, которые печатались, начиная с 1896 года, построил теорию уравнений, получивших его имя $\left(\int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau + x(t) = y(t)\right)$. Сделал он это методом дискретизации с последующим исследованием семейства конечномерных уравнений. Общая теория для интегрального уравнения вида $\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau + x(t) = y(t)$ была построена Фредгольмом (оно стало называться его именем). Он писал, что такое уравнение кажется ему «достойным особого внимания геометров, так как большинство проблем математической физики, которые сводятся к линейным дифференциальным уравнениям, выражаются этим функциональным уравнением». Фредгольм также использовал идею дискретизации и теорию бесконечных определителей, развивавшуюся Пуанкаре и Хельге Кохом (1870–1924) впоследствие. Эти работы потребовали рассмотрения пространства, в котором искалось решение. Таковым было пространство непрерывных на отрезке функций, которое давно уже неявно участвовало в исследованиях по анализу (Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894), Вейерштрасс и др.). Понятия бесконечномерного линейного пространства и линейного оператора в явной форме встречаются в работе Фреше 1912 г. Понятие *линейного* функционала на пространстве $C([t_0, t_1])$ появилось в работе Адамара 1901 г. Ныне термин «линейное пространство» часто заменяется термином «векторное пространство». О развитии теории интегральных уравнений см. [18–20].

Соединение линейной и топологической структуры. Уже в работе Фреше 1912 г. был явно описан основной объект линейного функционального анализа – линейное пространство, снабженное топологией. Этому предшествовали исследования Гильберта 1900–1910-х гг. по интегральным уравнениям с симметрическими ядрами, которые увенчались определением абстрактного гильбертова пространства и введение Ф. Риссом пространств $L_p(t_0, t_1)$ в 1906 г. Затем начала выкристаллизовываться идея нормированного пространства (Ф. Рисс, Хелли, Винер, Банах), и выдающуюся роль здесь сыграла монография Банаха «Теория линейных операций»[21], опубликованная во Франции в 1932 г. Понятие линейного топологического пространства было введено Колмогоровым в 1934 г., а его важнейший подкласс – локально-выпуклые пространства был определен в следующем году фон Нейманом. Изучение двойственности линейных топологических пространств началось с работы Адамара 1901 г. о непрерывных линейных функционалах на пространстве $C([t_0, t_1])$, а окончательную форму описанию пространства *сопряженного* к $C([t_0, t_1])$ придал Ф. Рисс в 1909 г. В 1907 г. Ф. Рисс и Фишер доказали «самодвойственность» гильбертова пространства. Бурбаки завершил построение теории двойственности для локально-выпуклых пространств.

Одним из первых программных выступлений, посвященных бесконечномерному анализу, был доклад Гильберта «Сущность и цели анализа функций бесконечного числа переменных», подготовленный им для Международного математического конгресса в Риме 1908 г. Это была попытка окинуть взором просторы зарождающейся новой науки и призвать к планомерному освоению новых территорий. «Конечно, – отмечал Гильберт – в подобном предприятии нам угрожает опасность потеряться в слишком трудных и туманных рассуждениях безо всякой пользы для более глубоких проблем. Но если ничто не собьет нас с пути, то мы уподобимся Зигфриду, перед которым огненный вал расступается сам собою, и тогда нас ждет чудесная награда – единое построение алгебры и анализа.» Гильберт предвидел, что вариационное исчисление будет базироваться на бесконечномерном анализе. Вот его слова: «Вариационное исчисление в широком смысле – это учение об изменении функций и в качестве такового оно является естественным продолжением дифференциального и интегрального исчисления». О зарождении функционального анализа см. [21–23].

Начала нелинейного анализа и теория экстремума. Определение производной, данное Фреше в 1912 г., позволило вложить классическое вариационное исчисление и (созданную на его основе в середине XX в.) теорию оптимального управления в общие рамки дифференциального исчисления и выпуклого анализа (в бесконечномерных пространствах). При этом сами задачи исследуются точно так же, как конечномерные задачи. Проблемы вариационного исчисления исследуются аналогично тому, как гладкие конечномерные задачи (и если правило множителей Лагранжа, скажем, доказывается с помощью конечномерной теоремы об обратном отображении, то аналогичная теорема, касающаяся задачи Лагранжа, доказывается с помощью бесконечномерного аналога теоремы об обратном отображении, первый вариант которого был доказан Люстерником в 1934 г.). А задачи оптимального управления для своего исследования требуют сочетания дифференциального исчисления и выпуклого анализа, ибо интегрирование влечет за собой некую (обычно скрытую) выпуклость. Наличие этой выпуклости находит свое отражение в знаменитом принципе максимума Понтрягина – необходимом условии в общей задачи оптимального управления. Так что та теория экстремума, которая была изложена выше, строится на сочетании нелинейного и выпуклого анализа.

О связях вариационного исчисления и оптимального управления с функциональным анализом см. [11; 24].

Список литературы

1. *Ван дер Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука. М., 1959.
2. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., 1979.
3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. / Под ред. *А.П.Юшкевича*). Т.3. М., 1972.
4. *Рыбников К.А.* Первые этапы развития вариационного исчисления // Историко-математические исследования (ИМИ). М.–Л., 1949. Вып.2. С.355–498.
5. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. М., 1986.
6. *Демидович В.Б.* Экстремальные задачи // Математика в школе. М., 2000. Вып.8. С.56–59.
7. *Дорофеева А.В., Тихомиров В.М.* История экстремальных задач и предыстория функционального анализа // Очерки по истории математики. / Ред. *Б.В.Гнеденко*. М., 1997. С.423–493.
8. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М., 1934.
9. Вариационные принципы механики / Под ред. *Л.С. Полака*. М., 1959.
10. *Дорофеева А.В.* Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций // ИМИ. М., 1961. Вып.14. С.101–180.

11. *Дорофеева А.В., Тихомиров В.М.* От правила множителей Лагранжа до принципа максимума Понтрягина // ИМИ. М., 1980. Вып.25. С.104–128.
12. *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. М., 1950.
13. *Дорофеева А.В.* Вариационное исчисление во второй половине XIX века // ИМИ. М., 1963. Вып.15. С.99–128.
14. Математика XIX века. Чебышевское направление теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Исчисление конечных разностей / Ред. *А.Н.Колмогорова* и *А.П.Юшкевича*). М., 1987.
15. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ. М., 2003.
16. Проблемы Гильберта / Под ред. *П.С.Александрова.* М., 1969.
17. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М., 2002.
18. *Дорофеева А.В.* Развитие теории интегральных уравнений до работ Гильберта // История и методология естественных наук (ИМЕН). М., 1973. Вып.14. С.92–105.
19. *Дорофеева А.В.* Создание классической теории интегральных уравнений с симметрическим ядром // ИМЕН. М. Вып.16. С.63–77.
20. *Полищук Е.М.* Вито Вольтерра. Л., 1977.
21. *Банах С.* Теория линейных операций. Москва–Ижевск, 2001.
22. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М., 1963.
23. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М., 1967.
24. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., 1974.

Методические материалы для подготовки к кандидатскому экзамену по истории и философии науки (история математики)

Сост. *С.С.Демидов*

Янус-К. Лицензия ИД №05875 от 21.09.2001
109316, Москва, ул. Стройковская, д.12, корп.2.

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»
140010, Люберцы, Октябрьский пр-кт, 403, т.554-21-86

ISBN 5-8037-0137-8

Подписано в печать 18.07.2003 Формат 60×90 1/16
Печать офсетная. Бумага газетная.
Печ. л. 2,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 2749