Правило Лопиталя для неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$

И.Х. Сабитов

Пусть в некотором интервале (a,b) даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, обе стремящиеся к ∞ при $x \to a+0$. Предположим, что функции имеют в некоторой правой полуокрестности $\mathring{U}_+(a)$ точки a производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$. Тогда верно следующее утверждение

$$\exists \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \bar{R} \ \Rightarrow \ \exists \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

т.е. *из существования предела отношения производных следует существование предела отношения самих функций с равенством этих пределов.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда значение предела A конечно. Нам нужно показать выполнение определения предела $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in \mathring{U}_+(a) : \forall x \in (a, x_0) \Rightarrow |\frac{f(x)}{g(x)} - A| < \varepsilon. \tag{1}$$

Покажем, что такое требуемое x_0 действительно существует. Пользуясь существованием предела $\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ можем записать утверждение

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} \ \exists x_1 \in \mathring{U}_+(a) : \forall x \in (a, x_1) \Rightarrow |\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Выберем в интервале (a, x_1) любые две точки x и $y > x$. На отрезке $[x, y]$ для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполнены условия теоремы Коши и поэтому в интервале (x, y) существует точка c, такая, что выполнено соотношение

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3}$$

Так как пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a+0$ равны бесконечности, то можем считать, что в интервале (a, x_1) эти функции отличны от нуля (в противном случае мы можем добиться этого, просо уменьшив этот интервал). Поэтому левую часть соотношения (3) можем представить в виде

$$\frac{f(x)(1 - \frac{f(y)}{f(x)})}{g(x)(1 - \frac{g(y)}{g(x)})},$$

и затем преобразовать (3) к виду

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}. \tag{4}$$

Зафиксируем значение y, а точку x устремим к a. Если бы мы знали, что при этом точка c тоже стремится к a, тогда получили бы, что правая часть в (3) стремится к значению A, и правило Лопиталя было бы доказано. Но про c мы знаем только, что эта точка находится в интервале (x, y) с фиксированным правым концом. Поэтому оценим разность $|\frac{f(x)}{g(x)} - A|$ другим способом. Представим правую часть в (4) в следующем виде

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{\frac{f(y)}{f(x)} - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} \tag{5}$$

В этом представлении второе слагаемое в правой части при $x \to a+0$ стремится к нулю (так как значения $f(y)$ и $g(y)$ - это фиксированные числа), поэтому существует значение $x_2 \in \mathring{U}_+(a)$, такое, что для всех $x \in (a, x_2)$ выполнено неравенство

$$|\frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{\frac{f(y)}{f(x)} - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Выберем теперь любое $x_0 \leq min(x_1, x_2)$. Для этого x_0 будет выполнено требуемое условие (1) определения предела для отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$, так как из (4),(5) и (6) имеем

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - A| < |\frac{f'(c)}{g'(c)} - A| + |\frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{\frac{f(y)}{f(x)} - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Точно такие же рассуждения пригодны и для случая $x \to b - 0$, с включением случая $x \to +\infty$.

Остается рассмотреть случай $A = \infty$. Но он очевидным образом доказывается из вида соотношения (3): дробь $|\frac{f'(c)}{g'(c)}|$ по условию может быть сделана как угодо большой, а дробь $\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}$ при $x \to a+0$ стремится к 1.

Правило Бернулли-Лопиталя для типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ доказано. Но надо помнить, что оно не допускает обращения, т.е. из существования предела отношения функций не вытекает существование предела отношения производных, что подтверждается примерами (рассмотрите примеры

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} \left(\frac{0}{0}\right), \ \lim_{x\to\infty} \frac{2x - \sin x}{3x + \sin x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Таким образом, это правило дает только **достаточное** условие существования предела отношения функций как типа $\dfrac{0}{0}$, так и типа $\dfrac{\infty}{\infty}$.