ИНТЕГРАЛЫ 2

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Высокий логарифм

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) + C$$

Длинный логарифм

Выделение полного квадрата.

$$\boxed{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}$$

1) $x^2+4x-5 = x^2+\underbrace{2\cdot 2x}_{4x}+2^2-2^2-5 =$

$= (x+2)^2-9$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+4x-5} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-\underset{3^2}{9}} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+2-3}{x+2+3}\right|+C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$$

(2) $2x^2 - 4x + 5 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{5}{2}\right)$

$= 2\left((x-1)^2 + \frac{3}{2}\right) \Longrightarrow$

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 3/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{3/2}\right)} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3/2}}$$

$$+ C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C$$

Разложение правильной дроби в сумму простейших.

1

$$\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)} \overset{\text{об}}{=} У$$

1. $$\frac{1}{(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} = \frac{Ax+4A+Bx-3B}{(x+4)(x-3)}$$

$$= \frac{(A+B)\cdot x + (4A-3B)}{(x-3)(x+4)}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x^1: & 0 = A+B \\ x^0: & 1 = 4A-3B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 1 = -7B \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{7} \qquad A = \frac{1}{7}$$

2. $y = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x+4} =$

$= \frac{1}{7} \ln|x-3| - \frac{1}{7} \ln|x+4| + C =$

$= \frac{1}{7} \ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right| + C$

Интегрирование по частям

Знаем: $(uv)' = u'v + v'u$

В дифференциальном виде:

$$d(uv) = v\cdot du + u\cdot dv$$

$$\Rightarrow\ u\,dv = d(uv) - v\cdot du$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Примеры: 1 $\int \ln x\,dx = ? \stackrel{\text{об}}{=} I$

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\cdot dx \\ v = \int dx = x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$$I = x\ln x - \int \cancel{x}\cdot\frac{dx}{\cancel{x}} = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C \ -\ \text{Ответ}$$

(2) $\displaystyle\int (2x+3)e^x dx \overset{\text{об}}{=} J$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

I. $\begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow J = (2x+3)\cdot e^x -$

$-\displaystyle\int e^x \cdot 2dx = (2x+3)\cdot e^x - 2e^x + C =$

$= \underline{(2x+1)e^x + C}$ — Ответ.

II. $\begin{cases} u = e^x \\ dv = (2x+3)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = x^2+3x \end{cases} \Rightarrow$

$J = e^x(x^2+3x) - \displaystyle\int (x^2+3x)\cdot e^x dx \Rightarrow$ У–У–У!!!

③ $\int x^2 \ln x\,dx \overset{\text{об}}{=} Y$

I. $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \ln x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} du = 2x\,dx \\ v = \int \ln x\,dx = \underline{\underline{\text{У-У-У!!!}}} \end{array}$

II. $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$Y = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \int \dfrac{x^{\cancel{3}\,2}}{3} \cdot \dfrac{dx}{\cancel{x}} = \underline{\dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^3}{3} + C}$ Ответ.

III. $\begin{cases} u = x^2 \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x\ln x + x)dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow$

$Y = x^3 \ln x - \int x(2x\ln x + x)dx = \text{У-У-У!!!}$

$$① = x\ln x - x$$

$$\Rightarrow Y = x^2(x\ln x - x) - \underbrace{\int (x\ln x - x)\cdot 2x\,dx}_{2\int x^2\ln x\,dx - 2\int x^2 dx}$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

обозн. Y

$\Rightarrow$ имеем

$$Y = x^3(\ln x - 1) - \Big(2Y - 2\underbrace{\int x^2 dx}_{x^3/3 + C_1}\Big)$$

$$\Rightarrow 3Y = x^3(\ln x - 1) + \frac{2}{3}x^3 + C_1$$

$$Y = \frac{x^3}{3}(\ln x - 1) + \frac{2}{9}x^3 + C =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C \text{ — Ответ.}$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

④ $$\int e^{\arccos x}\,dx \overset{\text{об}}{=} Y$$

1. $$\begin{cases} u = e^{\arccos x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{\arccos x} \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = x e^{\arccos x} - \int x \cdot \frac{-e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \star$$

2. $$\int \frac{x e^{\arccos x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int e^{\arccos x} \cdot \frac{\overset{\frac{1}{2}d(x^2)}{x\,dx}}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{+\arccos x}\,\frac{d\left(x^2\cdot(-1)+1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\int e^{\arccos x}\cdot \cancel{2}\,d\left(\sqrt{1-x^2}\right) =$$

$$= -\int e^{\arccos x}\cdot d\left(\sqrt{1-x^2}\right) \overset{\text{об}}{=} J_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \\ &= 2\cdot t^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}}$$

$$3.\ \begin{cases} u_1 = e^{\arccos x} \\ dv_1 = d\left(\sqrt{1-x^2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = \dfrac{-e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ v_1 = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_1 = -\left(\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arccos x} + \int \sqrt{1-x^2}\cdot \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx\right)$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arccos x} - \underbrace{\int e^{\arccos x}\cdot dx}_{\text{обозн. } y}$$

$$\Rightarrow (\star):\quad y = xe^{\arccos x} + y_1 = xe^{\arccos x} - \sqrt{1-x^2}\,e^{\arccos x} - y$$

$$\Rightarrow 2y = e^{\arccos x}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + 2C \Rightarrow y = \frac{1}{2}e^{\arccos x}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + C$$

Отв.

Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где}$$

1) $\langle a;b \rangle \equiv$ отрезок

2) $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$

3) $F'(x) = f(x)$

Примеры: 1 $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx = F(9) - F(2)$

1) $\int (x-1)^{1/3} dx = \int (x-1)^{1/3} d(x-1) = \frac{3(x-1)^{4/3}}{4} + C$

2) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx = \frac{3}{4}(x-1)^{4/3}\Big|_2^9 = \frac{3}{4}\left(8^{4/3} - 1^{4/3}\right) =$

$= \frac{3}{4}(16-1) = \frac{45}{4}$ Ответ.

(2) $$\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$$

1) $$\int \frac{x^2+3}{x-2}\,dx = \int \frac{x^2+3-4+4}{x-2}\,dx = \int (x+2)\,dx + 7\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} + 7\ln|x-2| + C$$

2) $$\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx = \left(\frac{(x+2)^2}{2} + 7\ln|x-2|\right)\Bigg|_3^4 =$$

$$= \left(18 - \frac{25}{2} + 7\ln 2 - 7\underbrace{\ln 1}_{0}\right) = \frac{11}{2} + 7\ln 2$$

Ответ.

Замена переменной в определённом интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\,,$$ где

1) $\langle a;b\rangle$ и $\langle \alpha;\beta\rangle \equiv$ отрезки

2) $f(x)$ непрерывна на $\langle a;b\rangle$;

$x=\varphi(t)$ непрерывна на $\langle \alpha;\beta\rangle$,

$\exists$ производная $\varphi'(t)$ и она тоже непрерывна,

при этом $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

Примеры: 1 $\displaystyle\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}} \overset{\text{об}}{=} Y$

1) пусть $\sqrt{3x-2} = t$, тогда: а) $x = \frac{1}{3}(t^2+2)$

б) $dx = \frac{2}{3}t\,dt$

$\Downarrow$

в) $\begin{cases} \overset{b}{x} = 6 \Rightarrow \overset{\beta}{t} = 4 \\ \overset{a}{x} = 1 \Rightarrow \overset{\alpha}{t} = 1 \end{cases}$

Ответ.

$$\boxed{\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)}$$

$$\parallel$$

2) $\displaystyle Y = \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{t\,dt}{1+t} = \frac{2}{3}\left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4 - \ln 5 - 1 + \ln 2\right)$

т.к. $\displaystyle\int \frac{t+1-1}{1+t}dt = \int dt - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = t - \ln|t+1| + C$

② $\int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx \overset{\text{об}}{=} \mathcal{Y}$

1\. Пусть $\sqrt{x^2-4} = t$, тогда

1) $\begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = 2 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

2) $x^2 = t^2 + 4 \Rightarrow x = \sqrt{t^2+4}$

3) $dx = \frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{t^2+4}}\,dt$

$\Rightarrow \mathcal{Y} = \int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{t \cdot t\,dt}{\sqrt{t^2+4} \cdot \sqrt{t^2+4}} = \int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{t^2\,dt}{t^2+4}$

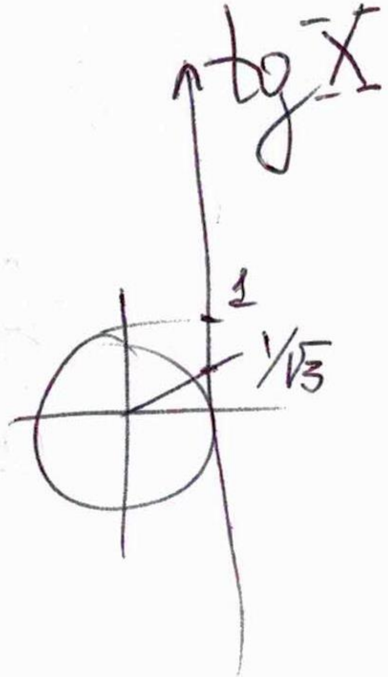
2. $\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4}\,dt = \int dt - 4\int \frac{dt}{t^2+4} =$

$$= t - 4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C$$

3. $\Rightarrow \quad Y = \left(t - 2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2/\sqrt{3}} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\pi/6} - 0 + \operatorname{arctg}0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$$ Ответ.



Дома: 1. 6.162 + ① $\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$

② $\int \frac{dx}{x^2-3x+3}$

2. 6.124, 6.125, 6.126, 6.129, 6.130, 6.134

3. 6.335, 6.341, 6.346, 6.349, 6.350, 6.351