ИНТЕГРАЛЫ

https://math.msu.ru/node/1421

Процесс вычисления производной ф-ции $y = f(x)$ называется дифференцированием.

Обратное действие — интегрирование.

Если обозначить множество всех ф-ций $\mathcal{F}(x)$, то можно рассматривать дифференцирование и интегрирование как линейные операторы:

$$D: \mathcal{F}(x) \longrightarrow \mathcal{F}(x)$$

$$f(x) \xrightarrow{d} f'(x) \overset{\text{об}}{=} g(x)$$

$$I: \mathcal{F}(x) \longrightarrow \mathcal{F}(x)$$

$$g(x) \longrightarrow f(x) + C$$

$\Rightarrow$ чтобы научиться интегрировать, нужно выучить ТАБЛИЦУ интегралов, которая получается из таблицы производных, и ПРАВИЛА интегрирования.

Интегралы бывают РАЗНЫЕ:

I. <u>Неопределенные</u>: $\equiv$ множество первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } F'(x) = f(x)$$

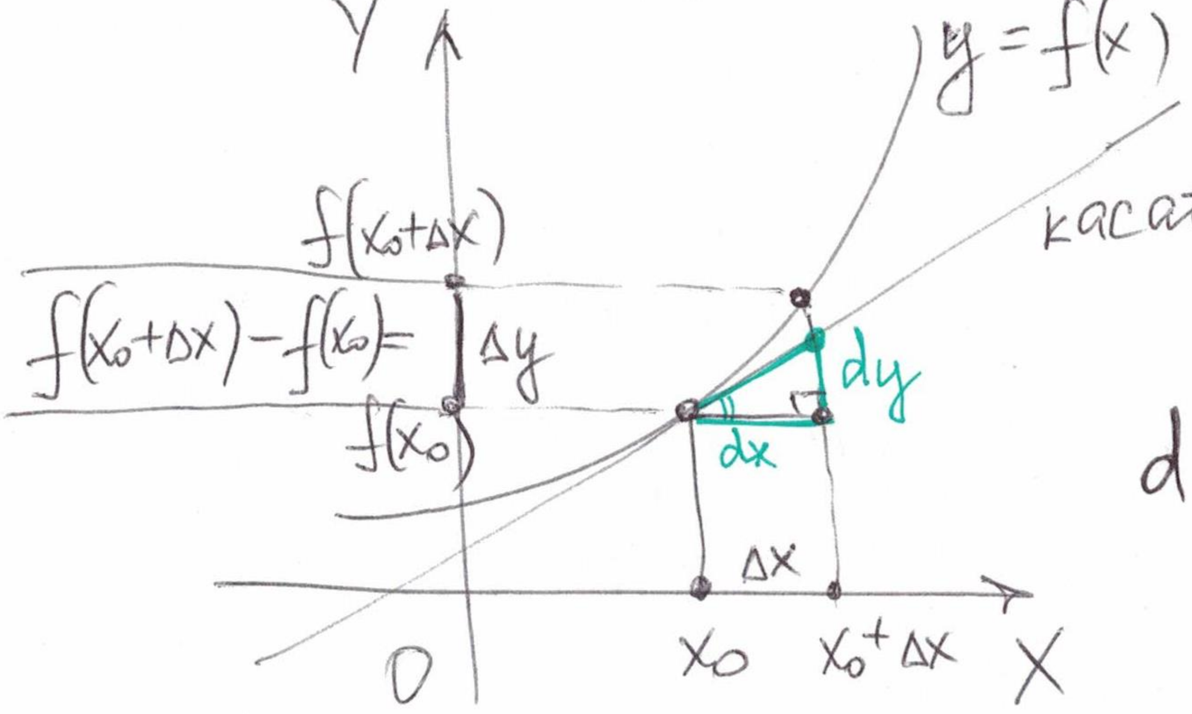
II. <u>Определенные</u>: $\equiv$ число конечное ("площадь криволинейной трапеции")

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \text{предел интегр. сумм, если } \begin{cases} 1)\ \langle a;b\rangle \equiv \text{отрезок} \\ 2)\ f(x) \text{ непрерывна на } [a;b] \end{cases}$$

III. <u>Несобственные</u>

появляются, когда нарушаются эти требования.

Геометрический смысл дифференциала функции в точке x_0:



касательная $y = kx + b$,

где $k = f'(x_0)$

differentio ≡ разность

$$dx = \Delta x$$

$$dy \neq \Delta y, \text{ а}$$

$$\boxed{\Delta y = dy + o(\Delta x)}, \text{ но}$$

можно доказать: ☆ $\boxed{dy = y'(x)dx}$ и все свойства производных переписать в дифференциальном виде. В том числе таблицу производных:

$$d(x^2) = 2x\,dx \qquad d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$d(e^x) = e^x dx \qquad d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

$$d(\sin x) = \cos x\,dx \qquad \dots$$

1. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C,$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$

3. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

4. $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (a > 0),$

5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C,$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C,$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C,$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1,$

Свойства интегралов неопределенных:

I. (связь с обратным характером по отношению к дифференцированию)

$$\int d f(x) = f(x) + C$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

II. Свойства линейности интегралов:

1) $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

2) $\int k f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

Примеры: 1. $\int \frac{2x+3}{x^4}dx = 2\int \frac{dx}{x^3} + 3\int \frac{dx}{x^4} =$

$= 2 \cdot \int x^{-3}dx + 3 \cdot \int x^{-4}dx = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 3 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + C$

$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + C$

2. $$\int 2^x\left(1+3x^2\cdot 2^{-x}\right)dx = \int 2^x dx + 3\int x^2 dx =$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + C$$

3. $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$$

Подведение под знак дифференциала

1. $\int \sin 2x \cdot dx \neq -\cos 2x + C$ $\qquad \int \sin t \, dt = -\cos t + C$

$\Rightarrow$ Хочу видеть $d(2x) = ?$

По $\star$ $d(2x) = 2 \cdot dx \Rightarrow$ из dx всегда можно

сделать $d(kx)$: $dx = \frac{1}{k} \cdot d(kx)$

$$\Rightarrow \int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

2. $\int \sqrt{3+x} \, dx = \int \sqrt{3+x} \, d(x+3) =$ $\qquad \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2}$

т.к. $d(x+k) = (x+k)' \cdot dx = dx$

$$= \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} + C$$

$$x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$$

$$x\,dx = \frac{1}{2} d(x^2)$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$$

$$a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot d(a^x)$$

$$\sin x\,dx = -d(\cos x)$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\mathrm{ctg}\,x)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

$$e^x dx = d(e^x)$$

$$\cos x\,dx = d(\sin x)$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\mathrm{tg}\,x)$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}\,x)$$

$$3.\ \int (3-4\sin x)^{1/3} \underbrace{\cos x\,dx}_{d(\sin x)} = \frac{1}{-4}\int (3-4\sin x)^{1/3}\, d(\sin x \cdot (-4))$$

$$= -\frac{1}{4}\int (3-4\sin x)^{1/3}\, d(3-4\sin x) =$$ $$\int t^{1/3}\,dt = \frac{3}{4}t^{4/3}+C$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}(3-4\sin x)^{4/3}+C$$

$$4.\ \int \sin\ln x \cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{d(\ln x)} = \int \sin\ln x\, d(\ln x) = -\cos\ln x + C$$

см. п. 1
(выше)

В таблице интегралов есть $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$

Вычислим и выучим:

(1) $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1} = \frac{1 \cdot 2}{4} \cdot \int \frac{d(x/2)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} =$

$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

Аналогично:

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{3 \cdot d(x/3)}{\sqrt{1-(x/3)^2}} =$

$= \arcsin \frac{x}{3} + C$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

③ Сначала выведем $\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} =$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

т.к. $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-1}{2(x+1)}$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \implies$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2 \cdot a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

"Высокий" логарифм

Есть и "низкий".

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

8. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$ не учить

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$ не учить

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$

16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C.$

Замена переменной в неопределённом интеграле.

1. $\int x(5x-1)^{19}dx \overset{об}{=} J$

Пусть $t = 5x-1$, тогда 1) $x = \frac{1}{5}(t+1)$

2) $dx = \frac{1}{5}t'\cdot dt = \frac{1}{5}dt$

$$\Rightarrow J = \int \frac{1}{5}(t+1)\cdot t^{19}\cdot \frac{1}{5}dt =$$

$$= \frac{1}{25}\left(\int t^{20}dt + \int t^{19}dt\right) = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{21}t^{21} + \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{20}\cdot t^{2}$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{21}}{21} + \frac{(5x-1)^{20}}{20}\right) + C$$

$$2.\ \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}} \overset{\text{об}}{=} Y$$

Пусть $\sqrt{1-x^3} = t$, тогда 1) $1-x^3 = t^2 \Rightarrow$

$x = \sqrt[3]{1-t^2}$; 2) $dx = \left(\sqrt[3]{1-t^2}\right)' \cdot dt =$

$$= \frac{-2t}{3(1-t^2)^{2/3}}\, dt$$

$$\Rightarrow Y = \int \frac{-2\cancel{t}\, dt}{3\sqrt[3]{1-t^2}\cdot \cancel{t} \cdot \sqrt[3]{(1-t^2)^2}} = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right| + C$$

Домашнее задание:

1) 6.22, 6.26, 6.28, 6.29а, 6.34, 6.36, 6.37, 6.43;
2) 6.48, 6.51, 6.53, 6.56, 6.59, 6.61, 6.65, 6.71, 6.77, 6.78;
3) 6.115, 6.117, 6.120, 6.122.