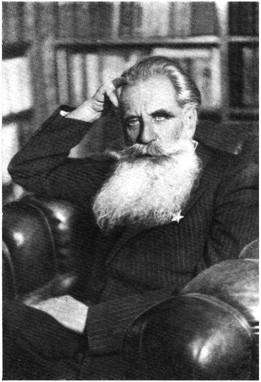
О работе кафедры высшей алгебры МГУ в 2015-2019 гг.

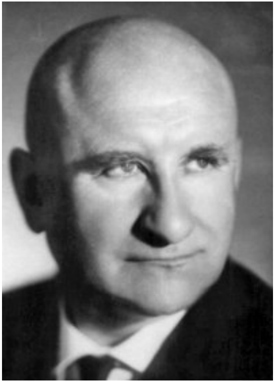
В. А. Артамонов

2019 г.

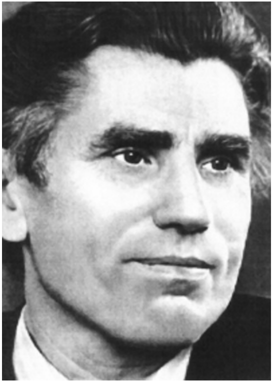
Кафедра высшей алгебры Московского государственного университета была основана в 1929 году академиком АН СССР О.Ю. Шмидтом. В том же году начал работать научно-исследовательский семинар кафедры.



С 1949 года кафедру возглавлял профессор А.Г. Курош.



В 1972 – 2000 гг. заведующим кафедрой был член-корреспондент РАН А.И. Кострикин.



С 2001 по 2015 годы кафедру возглавил профессор В.Н. Латышев.

С 2016 года кафедру возглавляет профессор В.А.Артамонов.

Научные исследования на кафедре проводятся по следующим направлениям:
1) «Общая алгебра», включающая в себя изучение колец, модулей, теории групп, универсальной алгебры, компьютерной алгебры, теории кодирования; (А. В. Михалёв, В. Н. Латышев, В. А. Артамонов, М. В. Зайцев,Е. И. Бунина, А. Э. Гутерман, Ю.П.Размыслов, И. А. Чубаров, О.В. Маркова, А. А. Клячко, О.В. Куликова А.Л.Канунников.)
2) «Алгебраическая геометрия, коммутативная и гомологическая алгебра»; (Ю. Г. Прохоров и др.)
3) «Группы и алгебры Ли, их действия и инварианты»; (Э. Б. Винберг, Д. А. Тимашев, С. А. Гайфуллин, А.А. Шафаревич и др.)
В разное время на кафедре работали И.Р.Шафаревич, Ю.И.Манин, В.А.Исковских, А.Л.Шмелькин, Е.Б.Дынкин, М.М. Постников, А.И. Ширшов и др.

В докладе отражены направления исследований, проводимых на кафедре. Спектр этих направлений показывает, что на кафедре представлены все основные разделы современной алгебры.

Одновременно с созданием кафедры алгебры начал работу научно-исследовательский семинар кафедры, который продолжает активную работу в традиционное время по понедельникам.

Кафедра алгебры в ноябре 1954 г.

1 ряд: А.Ф. Сулинский (асп.), Лю Шао-Сюэ (асп.), А.И.Ширшов, А.П.Мишина, М.Г.Зайцева (асп.), Ю.И. Сорокин, Л.А.Скорняков.
2 ряд: В.И.Узков, Н.Я. Виленкин, А.Г. Курош, И.Р.Шафаревич, Л.Я.Окунев, А.П. Дицман, И.В. Проскуряков.
3 ряд: Е.П.Шимбирева, З.М.Кишкина, Н.Н.Мягкова, П.А.Гольберг, Е.Б.Дынкин, М.М.Постников, Л.И.Головина, Д.М.Махарадзе (асп.).

4 ряд: Ц.Е.Дидидзе (асп.), В.М.Курочкин, Л.Е.Садовский, Я.В.Хион (асп.), Э,Б,Кикодзе (асп.),

В.А.Андрунакиевич, О.Н.Головин.

Теория групп является одной из основных тем научных исследований сотрудников кафедры с момента ее основания. О.Ю.Шмидт и А.Г. Курош внесли значительный вклад в ее развитие. Важную роль играет теорема Крулля-Шмидта о прямых разложениях в группах и модулях, а также результаты о группах Миллера-Морены.
В середине 30-х годов А.Г.Курош доказал известную теорему о подгруппах свободного произведений групп. Эта теорема позднее передоказывалась многими авторами, в частности, топологическими методами.

Ученик О.Н. Головина — А.Л.Шмелькин на основании теории вербальных произведений получил новое доказательство теоремы Нейманнов о том, что относительно операции произведения все многообразия групп образуют свободную полугруппу и нулем и единицей.

А.Ю.Ольшанским, учеником А.Л.Шмелькина, была построена серия не конечно базируемых многообразий разрешимых групп. Им решены проблемы фон Неймана, О.Шмидта, Мальцева, Куроша-Черникова, Громова, Бэра, Басса-Любоцкого. По этим результатам А.Ю. Ольшанский был удостоен премии Мальцева РАН в 2000 г. А.Ю.Ольшанский был приглашенным докладчиком на ICM-82.
Среди учеников А.Ю.Ольшанского — Д.В. Осин (приглашенный докладчик на ICM-2018), С.Иванов, В.С. Губа, А.А.Клячко, О.В.Куликова и др.

Среди учеников А.Л.Шмелькина - Ю.П.Размыслов. Им решены проблема Капланского о центральном многочлене и проблема Энгеля о нильпотентности энгелевых алгебр Ли, проблема тождеств со следом полных матричных алгебр и др. В последние годы Ю.П.Размыслов изучал p-адический аналог уравнений Шредингера, центральные полиномы в неприводимых представлениях простых алгебр Ли, неаффинные дифференциально-алгебраические кривые и т.д.

А.А. Клячко доказал гипотезу Кервера–Лауденбаха для групп без кручения: нетривиальную группу без кручения нельзя сделать тривиальной путем добавления одного образующего и одного соотношения. Например, непростую группу без кручения нельзя сделать неабелевой простой путем добавления одного образующего и одного соотношения.

Исследуя некоторые вопросы об уравнениях над группами, А.А. Клячко обнаружил следующий интересный аппроксимационный факт: для любых двух элементов свободной группы, которые не сопряжены и не сопряжены к обратным друг к другу, найдется гомоморфизм этой свободной группы на некоторую конечную группу, переводящий эти элементы в элементы разного порядка.

Одним из основных результатов А.И.Кострикина является решение ограниченной проблемой Бернсайда. Пусть $p \geqslant 5$ – простое число. Рассматриваются конечные группы периода p с фиксированным множеством порождающих. Доказано, что порядки всех таких групп ограничены.
В круге интересов А.И.Кострикина и И.Р. Шафаревича находилась проблема описания конечномерных простых алгебр Ли в простой характеристике. Ими выдвинута гипотеза о строених таких алгебр, сыгравшая важную роль в классификации этих алгебр.

Одним из важных направлений исследований на кафедре является теория колец и модулей. А.Г.Курош доказал теорему о подалгебрах свободного произведения неассоциативных, (анти)коммутативных алгебр. Им поставлен вопрос, получившый название проблемы А.Г.Куроша, о локальной конечномерности ассоциативной алгебраической алгебры, т.е. ассоциативной алгебры, в которой каждый элемент алгебраичен. Она имеет положительное решение в PI-алгебрах.

Учеником Л.А.Скорнякова является А.В.Михалев. За цикл работ по комбинаторной и компьютерной алгебре А.А. Михалев был удостоен в 2003 году премии имени И.И. Шувалова (первой степени) Московского государственного университета.

А.В. Михалев и его ученики развили теорию функциональных множеств в кольцах. Благодаря этой теории были решены все проблемы Херстейна о лиевских изоморфизмах первичных колец, было дано описание класса отображений лиевского типа, а также отмечены приложения к описанию отображений, сохраняющих алгебраические свойства элементов.

Ученица А.В. Михалева — Е.И.Бунина распространила теорему А.И.Мальцева об элементарной эквивалентности общих линейных групп над полями на достаточно широкий класс колец коэффициентов и класс линейных групп.

А.В.Михалевым и его учеником К.И.Бейдаром создана теория ортогонально полных алгебраических систем, позволившая решить ряд проблем в теории колец (кольца с дополнительными структурами; классы неассоциативных колец).
Ученик А.В.Михалева — А.Э. Гутерман классифицировал отображения колец матриц, сохраняющие различные свойства матриц.
В работах В.Т.Маркова совместно с коллегами построены новые коды над кольцами Галуа с улучшенными характеристиками по сравнению с аналогичными конструкциями над конечными полями.
А.Л.Канунниковым в 2016 году доказаны критерии выполнения теорем Голди для ассоциативных градуированных колец с групповой градуировкой.

Учеником А.Г. Куроша является А.И.Ширшов, переехавший затем в Новосибирск. Учеником А.И. Ширшова является В.Н.Латышев. В круг их научных интересов входят исследования по комбинаторным свойствам колец. В частности, В.Н.Латышевым построена общая модель алгебр, в идеалах которых можно определить стандартный базис. Построены алгоритмы распознавания наличия полиномиального тождества в некоторых ассоциативных алгебрах.

Одним из наиболее продуктивных направлений в исследовании тождеств ассоциативных и неассоциативных алгебр является в последние годы изучение количественных характеристик и числовых инвариантов, связанных с тождественными соотношениями. С каждой алгеброй можно связать целочисленную последовательность так называемых n-х коразмерностей .

Еще в начале 70-х годов прошлого века было замечено (А. Регев, В.Н. Латышев), что эта последовательность имеет экспоненциально ограниченный рост для любой ассоциативной алгебры с нетривиальным тождеством. В то же время для ассоциативной алгебры без тождеств эта последовательность растет как гамма-функция. В конце 90-х годов А. Джамбруно и М.В. Зайцев подтвердили гипотезу Амицура в общем случае для ассоциативных алгебр. Параллельно для алгебр Ли гипотеза была опровергнута М.В. Зайцевым и С.П. Мищенко. Тем не менее позднее для конечномерных алгебр Ли было получено положительное решение (М.В. Зайцев).

В частности, вычислено точное значение основания экспоненты роста тождеств супералгеры $b(2)$ и построен новый пример шестимерной разрешимой супералгебры, для которой также вычислено точное значения экспоненты роста тождеств. Кроме того, построен новый пример «тонкой» градуировки, основанной на обобщении матриц Паули, на одной из конечомерных простых супералгебр Ли и вычислено значение градуированной PI-экспоненты.
Описана структура градуированных алгебр с делением на конечномерных простых вещественных алгебрах. Получена классификация конечномерных вещественных градуированных алгебр с делением.
Доказаны существование и целочисленность экспоненты роста коразмерностей центральных полиномов ассоциативных алгебр

Для общих квантовых многочленов В.А.Артамоновым, учеником А.Г.Куроша, показано, что проективные модули ранга не менее два свободны над общими квантовыми многочленами (решение квантовой проблемы Серра). Если две квантовые алгебры Морита-эквивалентны, то они изоморфны. Были также описаны многообразия линейных алгебр, в которых решетка подмногообразий является цепью. Доказана свободность проективных метабелевых групп и алгебр Ли.

Функция длины конечномерных алгебр и их систем порождающих является важным инвариантом как для алгебры, так и для её приложений к вычислительной математике, механике и теории кодирования. Существует гипотеза Паза 1984г. о том, что длина любого порождающего множества алгебры матриц порядка n не превышает 2n-2, которая является открытой проблемой. Перспективным направлением исследования в рамках данной проблемы является вычисление длин систем порождающих матричной алгебры и ее подалгебр при условии, что матрицы обладают некоторой структурой.

2018 год: А.Э. Гутерманом и О.В. Марковой совместно с Т. Лаффи, Х. Шмигоц (Дублинский университетский колледж, Ирландия) эта гипотеза доказана в предположении, что порождающее множество содержит циклическую матрицу, т.е. матрицу с минимальным многочленом наибольшей возможной степени, или матрицу близкую к циклической. Также исследованы некоторые семейства матриц, на которых достигается максимальная длина 2n-2.

2019 год: А.Э. Гутерманом и О.В. Марковой совместно с Ф. Мерманом (Берлинский технический университет, Германия) получены результаты о длине семейств квази-коммутирующих матриц. Для пар квази-коммутирующих матриц получены достижимые верхняя и нижняя оценки длины как функции от порядка матриц и степеней корней из единицы, возникающих как коэффициенты квази-коммутирования. Доказано, что реализуемыми значениями длины в этом случае будут все целые значения из отрезка между минимальным значением и числом n-1 и одно особое максимальное значение. В частности, дано частичное отрицательное решение проблемы Константайна—Дарнолла [D. Constantine, M. Darnall, Lengths of finite dimensional representations of PBW-algebras, Linear Algebra Appl., 395 (2005), 175–181]: показано что длина пары квази-коммутирующих матриц не может принимать значение 2n-3.

В 2019 году решена проблема Вонга-Краутера 1974г. об оценке перманента (-1,1)-матриц. Найдена точная оценка и для каждого значения ранга охарактеризованы те матрицы, на которых она достигается. Budrevich M.V., Guterman A.E. Kr?uter conjecture on permanents is true, Journal of Combinatorial Theory - Series A, 162 (2019) 306-343.

И.Р.Шафаревич за цикл работ по решению обратной задачи теории Галуа над полями алгебраических чисел (открытие общего закона взаимности и решение обратной задачи Галуа для разрешимых групп) получил Ленинскую премию (1959). И.Р.Шафаревичем и его учеником Е.С.Голодом получено отрицательное решение знаменитой проблемы о башне полей классов. Е. С. Голод, используя эти методы строит пример ассоциативной ненильпотентной ниль-алгебры с конечным числом образующих и пример бесконечной финитно-аппроксимируемой p-группы с конечным числом образующих. Первый из этих примеров дает отрицательный ответ на вопрос А. Г. Куроша. Второй пример дает отрицательное решение общей проблемы Бернсайда о периодических группах, а именно, существуют бесконечные конечно-порожденные (и даже финитно-аппроксимируемые) p-группы.

Отметим совместную работу Ю.И.Манина (ученика И.Р.Шафаревича) и В.А.Исковских (ученика Ю.И.Манина), решивших проблему Люрота. Ю.И. Манин создал метод дифференциальных операторов на алгебраических многообразиях, зависящих от параметра, на его основе решил проблему Морделла для функциональных полей.

Среди результатов Ю.Г.Прохорова, ученика В.А.Исковских, можно выделить следующие: получена классификация трехмерных исключительных канонических гиперповерхностных и некоторых других типов особенностей, доказана гипотеза о логканонических порогах. Завершена классификация конечных подгрупп групп Кремоны.

Ю. Прохоровым совместно с С. Мори (RIMS, Kyoto University) продолжалась работа над долгосрочным проектом по классификации аналитических типов экстремальных стягиваний трехмерных терминальных стягиваний со слоями размерности ≤ 1.
В 2009 г. Ж.-П. Серр задал вопрос: является ли группа бирациональных автоморфизмов алгебраического многообразия жордановой? В настоящее время в работах Ю. Прохорова и К. Шрамова получено существенное продвижение в этой проблеме. Внимание было уделено как геометрическому, так и арифметическому аналогу проблемы (аналогу теоремы Минковского для групп бирациональных преобразований). В частности, даны ответы на два вопроса, поставленные Ж.-П. Серром. Вычислены константы Жордана для групп бирациональных автоморфизмов рационально связных многообразий размерности ≤ 3.

Ю. Прохоровым исследовались различные специальные (p-группы, простые и квазипростые группы) конечные подгруппы в трехмерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$. В частности, исследованы трехмерные (возможно особые) многообразия Фано, возникающие в эквивариантной программе минимальных моделей, их автоморфизмы, особенности, семейства прямых и коник и.т.д . Имеется продвижение в очень трудной проблеме стабильной сопряженности конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$.
Ю. Прохоровым совместно с М. Зайденбергом (университет г. Гренобль, Франция) исследовались многомерные многообразия Фано с числом Пикара 1, являющиеся компактификациями аффинного пространства $\mathbb{C}^n$. Эта тема продолжает исследования цилиндрических многомерных многообразий Фано,

Достижения кафедры в теория алгебраических и дискретных групп преобразований, групп и алгебр Ли можно разделить по следующим темам: алгебры Ли и связанные с ними алгебры, дискретные группы и геометрия Лобачевского, коммутативные и сферические однородные пространства, сложность действий редуктивных групп, эквивариантные вложения однородных пространств, теория инвараинтов, приложения к дифференциальной геометрии.

В теории алгебр Ли классифицированы двуступенно нильпотентные алгебры Ли с факторами центрального ряда размерностей не выше (5,5) или (6,3), включающие в себя все двуступенно нильпотентные алгебры Ли размерности 9 (Д.А. Тимашев, ученик Э.Б.Винберга). Найдены группы автоморфизмов и индексы этих алгебр, вычислены максимальные размерности абелевых подалгебр. Построены квазиэллиптические плоскости над алгебрами Кантора–Аллисона, в частности, над тензорными произведениями композиционных алгебр (Э.Б. Винберг). Показано, что все классические и особые простые компактные группы Ли могут быть реализованы как группы движений таких плоскостей.

Доказано, что всякая подгруппа группы Кокстера и целочисленной группы Лоренца содержит подгруппу конечного индекса, которая либо абелева, либо имеет неабелеву свободную факторгруппу. Доказано, что в пространствах Лобачевского размерности >15 не существует прямоугольных многогранников конечного объема. Доказано, что всякая арифметическая дискретная группа простейшего типа в пространстве Лобачевского размерности >5 не является когерентной. Описаны конечные абелевы накрытия ориентируемых компактных поверхностей рода 2, а также произвольного рода при условии, что экспонента группы Галуа равна p^2. Получена классификация коммутативных неприводимых однородных пространств гейзенбергова типа (Э.Б. Винберг).

Э.Б. Винберг доказал, что при $4 \leq n \leq 10$ алгебра автоморфных форм группы целочисленных псевдоортогональных матриц сигнатуры (2,n) свободна, а из его более общего совместного результата с О.В. Шварцманом следует, что при n>10 эта алгебра не является свободной (хотя соответствующие группы порождаются отражениями).
В совместной работе Э.Б. Винберга и О.С. Якимовой доказано, что для любой группы Ли на любом инвариантном подмногообразии дуального пространства ее алгебры Ли существует полная система полиномиальных функций в инволюции (относительно канонической собки Пуассона).
Используя известный метод сдвига инвариантов вкупе с классическим методом Кронекера приведения поры кососимметрических билинейных форм к каноническом виду, аспирантка кафедры А.А. Гаража построила новые классы полных систем полиномиальных функций в инволюции на алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$.

В совместной работе Э.Б. Винберга и Г. Абельса дано явное описание свободной двуступенно нильпотентной полугруппы Ли с тремя образующими в виде некоторого криволинейного многогранника в 6-мерном пространстве и получена теоретико-вероятностная интерпретация этого результата в терминах неравенств между тремя независимыми случайными величинами.

Обобщение этого результата на произвольное число образующих (и, соответственно, случайных величин) является очень интересной, но трудной задачей.

В теории редуктивных алгебраических групп преобразований важным инвариантом действия является его сложность, определяемая как коразмерность орбиты общего положения борелевской подгруппы. Здесь также получен ряд замечательных результатов. Дана характеризация сложности однородного пространства редуктивной группы в терминах собственного (-1)-подпространства инволюции Вейля (Э.Б. Винберг).

Получена интерпретация сложности однородного пространства в терминах теории представлений как экспоненты роста кратностей неприводимых подмодулей в пространствах сечений линейных расслоений на однородном многообразии (Д.А. Тимашев).

Найдены достаточные условия стабильности действия редуктивной подгруппы на сферическом многообразии редуктивной группы. Классифицированы простые подгруппы простых алгебраических групп, стабильно действующие на спектре алгебры U-инвариантов. Доказана стабильность диагонального действия полупростой группы на произведении достаточно большого числа копий любого аффинного многообразия. Описаны инварианты и орбиты в «ручных» тензорных произведениях векторных пространств (Э.Б. Винберг с учениками). Вычислена степень замкнутой трехмерной орбиты в произвольном $SL(2)$-модуле (Д.А. Тимашев).

В.А.Артамоновым и В.Т.Марковым в рамках совместного проекта с индийскими математиками изучались применения конечных квазигрупп для защиты информации. Оказалось, что наиболее подходящим класссом таких квазигрупп являются полиномиально полные, где любая операция представляется композицией основных квазигрупповых с добавлением всех констант. Основной целью исследования является построение полиномиально полных квазигрупп, нахождению достаточных условий полноты квазигруппы.
Указаны достаточные условия полиномиальной полноты конечной квазигруппы в терминах дважды транзитивности действия в квазигруппе подгруппы перестановок, связанной с латинским квадратом. Это свойство сохраняется при переходе к изотопу.

Доказано, что любая конечная квазигруппа порядка n вложима в полиномиально полную квазигруппу порядка не выше 2n. Введена операция бипроизведения квазигрупп и доказано, что свойства 2-транзитивности действия сохраняется. Тем самым строятся полиномиально полные квазигруппы, порядок которых является степенью 2. Отсюда получаются полиномиально полные квазигруппы указанных порядков без подквазигрупп.