Проблема Полиа о конвертации перманента

А. Э. Гутерман

Московский государственный университет

1. Mikhail V. Budrevich, Alexander E. Guterman, Permanent has less zeros than determinant over finite fields, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, 579, 2012, 33-42.

2. Gregor Dolinar, Alexander E. Guterman, Bojan Kuzma, Pólya convertibility problem for symmetric matrices, Math. Notes, 92 (5), 2012, 684-698.

3. Mikhail V. Budrevich, Alexander E. Guterman, On the Gibson bounds over finite fields, Serdica Math. J. 38, 2012, 395–416

4. Gregor Dolinar, Alexander E. Guterman, Bojan Kuzma, Marko Orel, On the Polya permanent problem over finite fields, European J. of Combinatorics, 32, 2011, 116-132

5. Gregor Dolinar, Alexander E. Guterman, Bojan Kuzma, On Gibson barrier for Polya problem, Fundamental and Applied Mathematics, 16(8), 2010, 73-86

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

и

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

здесь $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{S}_n$ — группа перестановок $\{1, 2, \ldots, n\}$, $sgn(\sigma) \in \{-1, 1\}$ — знак σ.

	det	per
Геометрия	Ориентированный объем	Комбинаторная геометрия
Алгебра	$\lambda_1 \cdots \lambda_n$	Границы
Сложность	$O(n^3)$	$\sim (n-1) \cdot (2^n - 1)$

Формула Райзера

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \sum_{X \in \Lambda_{n-t}} \prod_{i=1}^{n} r_i(X)$$

$r_i(X) = \sum_{j=1}^{t} x_{ij}$ — iая строчная сумма

Λ_{n-t} — множество всехl $n \times (n-t)$ подматриц A

Количество отображений, сохраняющих инвариант, определяет “меру” его сложности

Теорема 1 [Фробениус, 1896]

$$T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$$

— линейное, биективное

$$\det(T(A)) = \det A \qquad \forall A \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\Downarrow$$

$$\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{C}), \det(PQ) = 1 :$$

$T(A) = PAQ \quad \forall A \in M_n(\mathbb{C})$ или $T(A) = PA^tQ \quad \forall A \in M_n(\mathbb{C})$

Теорема 2 [Marcus, May] Линейное отображение T сохраняет перманент $\Longleftrightarrow$

$$T(A) = P_1 D_1 A D_2 P_2 \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F}), \text{ или}$$

$$T(A) = P_1 D_1 A^t D_2 P_2 \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F})$$

здесь D_i — обратимые диагональные матрицы, $i = 1, 2$

P_i — матрицы перестановки, $i = 1, 2$

Полиа, 1913:

$n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \operatorname{per} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

Проблема. Полиа, 1913. $\exists$ единый способ приписывания $\pm$ элементам

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$, т.ч. $\mathrm{per}(a_{ij}) = \det(\pm a_{ij})$?

$$n = 2\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

Сеге, 1914. $n > 2$: НЕТ.

Почему?

$n = 3$: рассмотрим $J_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Тогда $\operatorname{per} J_3 = 6$, но

$$\det \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix} < 6$$

т.к. -1 входит в 2 слагаемые, т.е. все 6 слагаемых не могут быть положительны.

Подмножества M_n?

Иногда возможно:

1. $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ f & g & h \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -c & d & e \\ f & -g & h \end{pmatrix}$

2. A: $a_{ij} = 0$, если $j - i \geq 2$ (матрицы Хессенберга)

$$A \mapsto \tilde{A} = (\tilde{a_{ij}}): \tilde{a_{ij}} = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{если } j - i = 1 \\ a_{ij}, & \text{иначе} \end{cases}$$

3. A — (3-диагональная) матрица Якоби

$A \mapsto \widehat{A} = (\widehat{a_{ij}})$:

$$\widehat{a_{st}} = \begin{cases} \mathrm{i}\, a_{st}, & \text{если } s \neq t \\ a_{ss}, & \text{если s=t} \end{cases}$$

Проблема. При каких условиях существует отображение $\Phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_m(\mathbb{F})$, удовлетворяющее

$$\operatorname{per} A = \det \Phi(A)?$$

Линейные ?

Теорема (Маркус, Минк, 1961). *Не существует линейных отображений* $\Phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}), n > 2$, *удовлетворяющих* $\operatorname{per} A = \det \Phi(A)$ $\forall\ A \in M_n(\mathbb{F})$.

Теорема (Й. фон зюр Гафен, 1987). *Пусть* $\mathbb{F}$ *бесконечно,* $char(\mathbb{F}) \neq 2$. *Не существует аффинных биективных отображений* $\Phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}), n > 2$ *удовлетворяющих* $\operatorname{per} A = \det \Phi(A)$ $\forall\ A \in M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство: основано на алгебраической геометрии.

Пример. Существуют небиективные нелинейные конвертеры Φ : $M_n(\mathbb{F}) \to M_m(\mathbb{F})$ между *per* и *det*:

$$\Phi : A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(\det A - \operatorname{per} A) \\ \\ 1 & \frac{1}{2}(\det A + \operatorname{per} A) \end{pmatrix} \oplus \mathrm{Id}_{m-2}\,.$$

Тогда $\operatorname{per} A = \det \Phi(A)$ и $\det A = \operatorname{per} \Phi(A)$.

Пример. Существуют биективные нелинейные конвертеры между *per* и *det* над бесконечными полями:

Для любого бесконечного $\mathbb{F}$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$

$$\operatorname{card}\{A \in M_n(\mathbb{F}) | \det A = \mu, \ \operatorname{per} A = \lambda\} =$$

$$= \operatorname{card} \mathbb{F}$$

$$= \operatorname{card}\{A \in M_n(\mathbb{F}) | \det A = \lambda, \ \operatorname{per} A = \mu\},$$

следовательно, биекции между этими множествами существуют, следовательно, существует общая биекция.

КОНЕЧНЫЕ ПОЛЯ ?

Теорема. [Гутерман, Долинар, Кузма, Орел] $\forall\ n \geq 3\ \exists\ q_0 = q_0(n)$:

$\forall$ *конечное поле* $\mathbb{F}$, $\operatorname{ch}\mathbb{F} \neq 2$, $|\mathbb{F}| \geq q_0$ *не существует биективных отображений* $\Phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, *удовлетворяющих*

$$\operatorname{per} A = \det \Phi(A). \tag{1}$$

Если $n = 3$ *вывод справедлив* $\forall$ *конечного поля,* $\operatorname{ch}\mathbb{F} \neq 2$.

$$|D_n| = |M_n| - |GL_n|$$

$$\Downarrow$$

если $n \geq 4$

$$|D_n| = q^{n^2} - \prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1}) = q^{n^2-1} + q^{n^2-2} + O(q^{n^2-5})$$

$$|D_n| = q^{n^2} - \prod_{k=1}^{n}(q^n - q^{k-1}) = q^{n^2-1} + q^{n^2-2} + 0 + 0 + O(q^{n^2-5})$$

$$L_n = q^{n^2-1} - q^{n^2-2} + O(q^{n^2-3}) \qquad (n \geq 4),$$

$$U_n = q^{n^2-1} + 0 + O(q^{n^2-3}) \qquad (n \geq 4).$$

$$L_n \leq P_n \leq U_n < D_n$$

Вероятность

[П. Эрдош, А. Реньи] Какова вероятность того, что перманент данной матрицы равняется 0?

Теорема. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– конечное поле,* $\operatorname{ch}\mathbb{F} \neq 2$*. Тогда* $\forall\ \lambda \in \mathbb{F}$

$$P(\operatorname{per} A = \lambda) = \frac{1}{q} + O(\frac{1}{q^2}).$$

Теорема (Будревич, Гутерман). *Пусть* $\mathbb{F}$ *— конечное поле,* $\mathrm{ch}\,\mathbb{F} \neq 2$.

$\forall\ \ n \geq 3$ *число нулей* per $\leq$ *число нулей* det.

Теорема (Будревич, Гутерман). *Пусть* $\mathbb{F}$ *— конечное поле,* $\mathrm{ch}\,\mathbb{F} \neq 2$.

Тогда $\forall\ \ n \geq 3$ *не существует биективного отображения*

$T : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, *удовлетворяющего*

$$\mathrm{per}\, A = \det T(A).$$

Проблема (Полиа). Для данной $(0{,}1)$-матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\exists$ ли B, полученная изменением некоторых $+1$ элементов A на -1, т.ч.

$$\operatorname{per} A = \det B?$$

Следующие проблемы ей эквивалентны:

1. Четный цикл: $\exists$ ориентированный цикл четной длины в орграфе?

2. Знаковая разрешимость: Когда $A \in M_n(\mathbb{R})$ обладает свойством, что каждая матрица с той же знаковой схемой невырожденна?

[Brualdi, Shader, 1991]: Охарактеризованы конвертируемые (0,1) матрицы, которые изменение $\forall$ 0 на 1 превращает в неконвертируемые

. . . .

Существует более 30 эквивалентных проблем [W. McCuaig, *The Electronic Journal of Combinatorics* **11** (2004), R79].

Пусть M_n — множество всехl $n \times n$ $\{0,1\}$ матриц над $\mathcal{R}$ — кольцо характеристики 0.

$\mathrm{S}_n \subseteq M_n$ — подмножество симметричных матриц.

$v(A)$ — число единиц 1 в A. NB: $v(A) = \sum$ всех элементов A.

$X \circ A$ обозначает произведение Адамара (покомпонентное) двух матриц.

Определение.

$A \in M_n$ *конвертируема* если $\exists\ X \in M_n(\pm 1)$:

$$\operatorname{per} A = \det(X \circ A) \qquad .$$

$A \in \mathrm{S}_n$ *симметрично конвертируема*, если $\exists\ X \in \mathrm{S}_n(\pm 1)$:

$$\operatorname{per} A = \det(X \circ A) \qquad .$$

$A \in \mathrm{S}_n$ *слабо симметрично конвертируема*, если $\exists\ X \in \mathrm{S}_n(\pm 1)$:

$$\operatorname{per} A = |\det(X \circ A)| \qquad .$$

НАБЛЮДЕНИЕ

$A \in \mathrm{S}_n$ *слабо симметрично конвертируема*.

Тогда A *конвертируема*.

Домножим строку A на -1.

Может ли матрица с произвольным числом единиц быть конвертируемой?

Теорема. [Гибсон, 1971] *Пусть* $A \in M_n$ — *конвертируема,* $\operatorname{per} A > 0$.

Тогда $v(A) \leq \Omega_n := \dfrac{n^2 + 3n - 2}{2}$.

Равенство $\Leftrightarrow \exists$ *матрицы-перестановки* P, Q: $A = PT_nQ$.

Здесь *матрица Гибсона* $T_n = (t_{ij}) \in M_n, \quad G_n = (g_{ij}) \in M_n$,

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 1 \le i < j < n \\ 1, & \text{если} \quad i \ge j \text{ or } j = n \end{cases}, \qquad g_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad i + j \le n - 1 \\ 1, & \text{или} \quad i + j > n - 1 \end{cases}$$

Заметим, что $G_n = T_n Q_n$ для $Q_n = Q(\sigma)$, т.ч.

$$\sigma = (1, n-1)(2, n-2), \ldots, (\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor (n+1)/2 \rfloor),$$

здесь $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое $\le x$.

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix} \qquad G_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Теорема. [*Гутерман, Долинар, Кузма*]

$n \geq 3$, $A \in \mathrm{S}_n$, $\operatorname{per} A > 0$, A *конвертируема*.

Тогда $v(A) \leq \Omega_n = \dfrac{n^2 + 3n - 2}{2}$.

Пусть $v(A) = \Omega_n$ *тогда* A *является конвертируемой* $\Leftrightarrow$ $A = PG_nP^t$

для матрицы-перестановки P.

Симметричная конвертируемость с максимальным числом единиц

Теорема (Гутерман, Долинар, Кузма). $n \geq 3$, $A \in \mathrm{S}_n$, $\operatorname{per} A > 0$,

$v(A) = \Omega_n = \frac{n^2+3n-2}{2}$ *и* A *является конвертируемой. Тогда*

$n \neq 2 \pmod 4 \Longrightarrow A$ *является симметрично конвертируемой.*

$n = 2 \pmod 4 \Longrightarrow A$ *является слабо симметрично конвертируемой,*

но не симметрично конвертируемой.

Существует ли ω_n: $\forall\ A$: $v(A) < \omega_n \Rightarrow A$ — конвертируема ?

$$\omega_n = n + 5$$

Теорема. [*Литтл, 1972*] $n \geq 2$, $A \in M_n$,

$v(A) \leq n + 5 \Rightarrow A$ *является конвертируемой.*

$n+5$ — магическое число ?

Теорема (Гутерман, Долинар, Кузма). $n \geq 3$, $A \in M_n$, $v(A) = n+6$.

Тогда A *не является конвертируемой* $\Leftrightarrow$ $\exists$ *существуют матрицы-перестановки* P, Q: $PAQ = \mathrm{Id}_{n-3} \oplus J_3$, *где* $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Симметричные матрицы S_n ?

Теорема. [Гутерман, Долинар, Кузма]

1. $n \geq 2$, $A \in \mathrm{S}_n$, $v(A) \leq n+5 \Rightarrow A$ *слабо симметрично конвертируема.*

2. $n \geq 3$, $v(A) = n+6$. *Тогда* A *не конвертируема* $\Leftrightarrow \exists$ *матрицы-перестановки* P, Q: $PAQ = \mathrm{Id}_{n-3} \oplus J_3$.

3. A *конвертируема,* $v(A) = n+6$, $\Rightarrow A$ *слабо симметрично конвертируема.*

Между ω_n и Ω_n ?

Теорема. [Гутерман, Долинар, Кузма] *Пусть* $r \in \mathbb{Z}$: $\omega_n \leq r \leq \Omega_n$.

Тогда

1. $\exists\ A \in \mathrm{S}_n$: *слабо симметрично конвертируема*, $\mathrm{per}(A) \neq 0$, $v(A) = r$

2. $\exists\ B \in \mathrm{S}_n$: *не конвертируема*, $v(B) = r$

Можно ли улучшить магическое число для “хороших” матриц?

Определение.

1. Матрица A является разложимой если существует матрица-перестановка $P \in M_n : A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} P^t$, где B, D — квадратные.

2. $A \in M_n$ частично разложима, если существуют матрицы-перестановки $P, Q \in M_n$ такие, что $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} Q$, где B, D — квадратные матрицы.

3. Если A не является частично разложимой, то вполне неразложима.

- $A \in M_n$ вполне неразложима $\Longrightarrow$ A, то неразложима.

Пример. Матрица

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M_2$$

неразложима, но не вполне неразложима: $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Q = I$.

Для вполне неразложимых матриц

Теорема (Будревич, Гутерман, Долинар, Кузма). *Пусть* $A \in M_n$ — *вполне неразложима,* $v(A) \leq 2n + 2$. *Тогда* A — *конвертируема.*

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда A — вполне неразложима, неконвертируема и $v(A) = 9 = 2 \cdot 3 + 3$.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда A неразложима, не является вполне неразложимой, не конвертируема и $v(A) = n + 6$.