Принцип переноса в теории диофантовых приближений

Герман О.Н.
мехмат МГУ, кафедра теории чисел

В докладе речь пойдёт об улучшении классической теоремы Малера, лежащей в основе так называемого *принципа переноса* — одного из наиболее важных принципов теории диофантовых приближений. Этот принцип связывает "двойственные" задачи. К примеру, задачу о совместных приближениях вещественных чисел $\theta_1, \ldots, \theta_n$ рациональными с задачей приближения нуля значениями линейной формы $\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n + x_{n+1}$ в целых точках.

Нагляднее всего теорема Малера формулируется в терминах последовательных минимумов псевдоприсоединённых параллелепипедов.

Определение 1. Пусть M — выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^d$ с центром в начале координат. Тогда *k-м последовательным минимумом* $\mu_k(M)$ тела M (относительно решетки $\mathbb{Z}^d$) называется инфимум таких $\mu > 0$, что μM содержит k линейно независимых точек с целыми координатами.

Определение 2. Пусть $h_1, \ldots, h_d$ — d линейных форм на $\mathbb{R}^d$ с матрицей H, $\det H = 1$, и пусть $h_1^*, \ldots, h_d^*$ — двойственный набор линейных форм, то есть $\langle h_i, h_j^* \rangle = \delta_{ij}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение. Пусть также задан набор положительных чисел $\eta_1, \ldots, \eta_d$. Рассмотрим параллелепипед

$$\Pi = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |h_i(\mathbf{z})| \leqslant \eta_i,\ i = 1, \ldots, d \right\}.$$

Тогда параллелепипед

$$\Pi^* = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |h_i^*(\mathbf{z})| \leqslant \frac{1}{\eta_i} \prod_{j=1}^{d} \eta_j,\ i = 1, \ldots, d \right\}$$

называется *псевдоприсоединенным* к параллелепипеду Π.

Теорема 1 (К. Малер, 1937)**.** *Пусть Π — параллелепипед в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке начала координат. Тогда*

$$\mu_1(\Pi^*) \leqslant 1 \implies \mu_1(\Pi) \leqslant d - 1.$$

Мы расскажем о следующем усилении теоремы Малера:

Теорема 2. *В условиях теоремы 1*

$$\mu_1(\Pi^*) \leqslant 1 \implies \mu_1(\Pi) \leqslant d^{\frac{1}{2(d-1)}}.$$

Более того, если

$$\mu_1(\Pi^*) \leqslant 1 \qquad \text{и} \qquad \mu_1(\Pi) \geqslant 1,$$

то

$$\mu_k(\Pi) \leqslant d^{\frac{1}{2(d-k)}}, \quad k = 1, \ldots, d - 1.$$