Устойчивость орторекурсивных разложений по системам подпространств

В.В. Галатенко,
Т.П. Лукашенко,
В.А. Садовничий

26 декабря 2014 г.

Орторекурсивные разложения по системам элементов (Т.П. Лукашенко, 1999, 2001)

H – гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нормированная последовательность элементов H, f – элемент H. Индуктивно строятся последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0 = f\,;$$

$$c_{n+1} = (r_n, e_{n+1})\,; \qquad r_{n+1} = r_n - c_{n+1} e_{n+1}\,.$$

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ называется *орторекурсивным разложением* элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Орторекурсивные разложения по системам элементов (Т.П. Лукашенко, 1999, 2001)

Орторекурсивное разложение – естественное обобщение классического разложения в ряд Фурье по ортогональной системе.

Орторекурсивные разложения сохраняют простоту вычисления коэффициентов разложения. Для орторекурсивных разложений справедливы тождество и неравенство Бесселя, эквивалентность сходимости к разлагаемому элементу и равенства Парсеваля. Орторекурсивные разложения удовлетворяют требованию оперативности (on-line свойству). Орторекурсивные разложения не требуют ортогональности системы.

Однако для орторекурсивных разложений теряется возможность естественного распараллеливания вычисления коэффициентов разложения.

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по переполненным системам (В.В. Галатенко, 2005)

H – гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$– нормированная последовательность элементов H, f – элемент H.

$$r_0^{err} = f\,;$$

$$c_{n+1}^{err} = \left(r_n^{err}, e_{n+1}\right)\left(1+\varepsilon_{n+1}\right)+\xi_{n+1}; \quad r_{n+1}^{err} = r_n^{err} - c_{n+1}^{err} e_{n+1}.$$

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{err} e_n$ называется *орторекурсивным разложением* элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с ошибками* $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по переполненным системам (В.В. Галатенко, 2005)

Орторекурсивное разложение по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *абсолютно устойчивым к ошибкам из класса* E, если для каждого элемента f из H и каждой последовательности $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty} \in E$ орторекурсивное разложение f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\{(\varepsilon_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в точности к f.

E_0: финитные последовательности;

$E_{1,2}$: $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\varepsilon_n| < 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty.$

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по переполненным системам (В.В. Галатенко, 2005)

Замечание. Абсолютная устойчивость орторекурсивного разложения по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ к ошибкам из класса E_0 эквивалентна следующему утверждению: для каждого f из H и каждого натурального N орторекурсивное разложение f по системе, полученной из $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ удалением первых N элементов, сходится к f.

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по переполненным системам (В.В. Галатенко, 2005)

Теорема А. *Абсолютная устойчивость орторекурсивного разложения по системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *к ошибкам из класса* E_0 *влечет абсолютную устойчивость орторекурсивных разложений по этой системе к ошибкам из класса* $E_{1,2}$.

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по переполненным системам (В.В. Галатенко, 2005)

Теорема Б. *Если нормированные системы* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *квадратично близки, то есть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - \tilde{e}_n\|^2 < \infty,$$

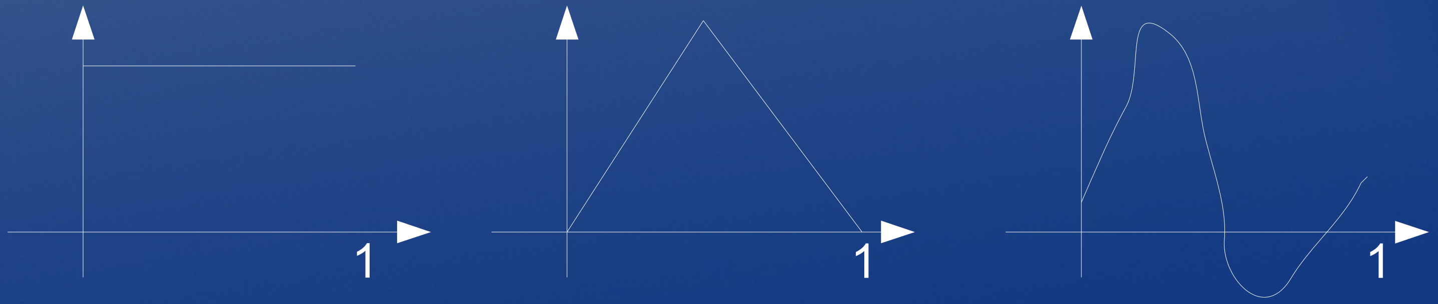
то абсолютная устойчивость орторекурсивного разложения по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *к ошибкам из класса* E_0 *влечет абсолютную устойчивость орторекурсивного разложения по системе* $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *к ошибкам из класса* E_0.

Примеры систем, орторекурсивное разложение по которым абсолютно устойчиво к ошибкам из класса E_0

Характеристические функции двоичных промежутков (характеристические функции промежутком, образующих покрытие в смысле Витали) – Т.П. Лукашенко, 2001.

Система Фабера-Шаудера – Т.П. Лукашенко, 1999.

Системы (двоичных) сжатий и сдвигов – А.В. Политов, 2010; А.Ю. Кудрявцев, 2012.



Орторекурсивные разложения по системам подпространств
(А.В. Политов, 2010; Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий, 2012)

H – гильбертово пространство, $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система замкнутых подпространств H, P_n – оператор ортогонального проектирования на H_n, f – элемент H. Индуктивно строятся последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность разлагающих элементов $\{\tilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0 = f;$$

$$\tilde{f}_{n+1} = P_{n+1}(r_n); \qquad r_{n+1} = r_n - \tilde{f}_{n+1}.$$

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n$ называется *орторекурсивным разложением* элемента f по системе $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Орторекурсивные разложения по системам подпространств (А.В. Политов, 2010; Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий, 2012)

Орторекурсивные разложения по системам подпространств обобщают орторекурсивные разложения по системам элементов $\left(H_n = \langle e_n \rangle\right)$.

Для них справедливы аналоги тождества и неравенства Бесселя, эквивалентность сходимости разложения к разлагаемому элементу и равенства Парсеваля.

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по системам подпространств

H – гильбертово пространство, $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система замкнутых подпространств H, P_n – оператор ортогонального проектирования на H_n, f – элемент H.

$$r_0^{err} = f\,;$$

$$\tilde{f}_{n+1}^{err} = P_{n+1}\left(r_n^{err}\right) + \xi_{n+1}\,;\; r_{n+1}^{err} = r_n^{err} - \tilde{f}_{n+1}^{err}.$$

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n^{err}$ называется *орторекурсивным разложением* элемента f по системе подпространств $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ошибками $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по системам подпространств

E_0: финитные последовательности;

E_1: $\sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{\xi}_n\| < \infty$;

E_2: $\sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{\xi}_n\|^2 < \infty$.

Теорема 1. *Абсолютная устойчивость орторекурсивного разложения по системе* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ *к ошибкам из класса* E_0 *влечет абсолютную устойчивость орторекурсивных разложений по этой системе к ошибкам из класса* $E_{1.}$

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по системам подпространств

Теорема 2. *Абсолютная устойчивость орторекурсивного разложения по системе* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ *к ошибкам из класса* E_0 *влечет абсолютную устойчивость орторекурсивных разложений по этой системе к ошибкам из класса* E_2, *удовлетворяющих дополнительному ограничению* $\bar{\xi}_n \in H_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по системам подпространств

Пусть в пространстве H дополнительно задана система замкнутых подпространств $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$, Q_n – оператор ортогонального проектирования на L_n.

Теорема 3. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n-Q_n\|^2<\infty$, *то абсолютная устойчивость орторекурсивного разложения по системе подпространств* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ *к ошибкам из класса* E_0 *влечет абсолютную устойчивость орторекурсивного разложения по системе* $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ *к ошибкам из класса* E_0.

Абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по системам подпространств

Пусть в пространстве H дополнительно задана система замкнутых подпространств $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$, Q_n – оператор ортогонального проектирования на L_n.

Теорема 3. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n - Q_n\|^2 < \infty$, *то абсолютная устойчивость орторекурсивного разложения по системе подпространств* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ *к ошибкам из класса* E_0 *влечет абсолютную устойчивость к ошибкам из этого класса орторекурсивного разложения по системе подпространств* $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Заключение

Орторекурсивные разложения являются естественным обобщением разложений по ортогональным системам в ряды Фурье.

Существенные преимущества орторекурсивных разложений – более мягкие требования к системе, по которой осуществляется разложение, и наличие для широкого класса систем абсолютной устойчивости к ошибкам в вычислении коэффициентов.

Переход от систем элементов к системам замкнутых подпространств не только не усложняет, но, наоборот, упрощает рассуждения и доказательства.