Однородные системы могут быть решены теми же методами, что и общие системы линейных уравнений, но часто общее решение однородной системы записывают с помощью так называемой *фундаментальной системы решений* (ФСР).

Определение 2. Набор решений $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(t)}\}$ называется фундаментальной системой решений однородной системы $AX = 0$, если любое решение X этой системы однозначно записывается в виде линейной комбинации

$$X = c_1 X^{(1)} + \ldots + c_t X^{(t)}.$$

Другими словами, коэффициенты $c_1, \ldots, c_t$ находятся однозначно по любому решению X.

Сразу заметим, что для однородной системы может существовать несколько ФСР, например, набор $\{k_1 X^{(1)}, \ldots, k_t X^{(t)}\}$ для любых отличных от нуля чисел $k_1, \ldots, k_t$ также будет ФСР. Обычно бывает достаточным указать хотя бы одну из ФСР. Ниже будет приведён стандартный способ составления ФСР.

Если же однородная система $AX = 0$ имеет только нулевое решение, то считается, что $t = 0$, т.е. ФСР тогда будет состоять из пустого множества фундаментальных решений (нулевое решение никогда не входит в ФСР. Почему?).

Пример. Найти ФСР системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$.

Решение. Запишем систему в матричном виде и решим её методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + 7x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы записываем в виде

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 7x_4, \\ x_3 = 3x_4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = -2c_1 - 7c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = 3c_2, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

На семинарах мы учились записывать такое решение в виде:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2c_1 - 7c_2 \\ c_1 \\ 3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} c_2.$$

Эта запись так же, как и слова в «Лекциях» О.В. Александровой, означает, что вектора $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений.

Свободными неизвестными здесь будут x_2 и x_4. Значит, ФСР состоит из двух решений $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, которые соответствуют значениям $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ и значениям $x_2 = 0$, $x_4 = 1$.

Эти фундаментальные решения заносим в таблицу:

ФСР	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$
x_1	-2	-7
x_2	1	0
x_3	0	3
x_4	0	1

Общее решение при этом может быть записано в виде

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = c_1 \cdot X^{(1)} + c_2 \cdot X^{(2)} = (-2c_1 - 7c_2;\ c_1;\ 3c_2;\ c_2)^T,$$

где $c_1 \in \boldsymbol{R}$, $c_2 \in \boldsymbol{R}$.

Ответ: **ФСР: $\{(-2, 1, 0, 0)^T, (-7; 0; 3; 1)^T\}$.**