А.М.Седлецкий

Целые функции в анализе

II-IV курсы

Содержание

Введение

Целая функция (ц.ф.) — это функция, аналитическая во всей комплексной плоскости. Теория целых функций составляет большую, содержательную ветвь математического анализа. Интерес к ц.ф. объясняется не только внутренней красотой теории, но и многочисленными ее приложениями в анализе (в спектральной теории, в теории рядов экспонент), в дифференциальных и более общих функциональных уравнениях, в теории вероятностных законов распределения, в физике (радиотехника, оптика). Ц.ф. дают эффективный аппарат исследования.

Простейшая ц.ф. — это алгебраический полином

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n.$$

Полиномы классифицируются по их степени n. Между числом корней полинома и его степенью существует простая связь: эти величины равны.

Сначала мы познакомимся со шкалой роста трансцендентных (т.е. не сводящихся к полиному) ц.ф. Что касается вопроса о связи между распределением корней ц.ф. и ее ростом, то он является ключевым в теории. Центральное место он займет и в нашем курсе. Мы рассмотрим также приложение ц.ф. к некоторым вопросам анализа.

1 Некоторые понятия и обозначения

1.1 Считающая функция

Пусть $Z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел (точек) без конечных предельных точек, пронумерованная в порядке неубывания их модулей. В Z могут встретиться и одинаковые точки (например, $z_s = z_{s+1} = \ldots = z_{s+m-1}$); это означает, что данная точка z_s входит в Z с кратностью m. Если все точки в Z различны, то она называется простой.

Обозначим через $n(t)$ $(= n_Z(t))$ число точек Z в круге $|z| < t$. Функцию $n(t)$ $(t > 0)$ называют *считающей функцией* последовательности Z. Очевидно, $n(t)$ — неотрицательная, неубывающая функция с точками роста $|z_n|$ и с интервалами постоянства $(|z_n|, |z_{n+1}|)$ (см. рис.).

В тех случаях, когда мы будем иметь дело с интегралом от функции $n(t)/t$ в окрестности точки $t = 0$, то будем предполагать (не всегда оговаривая особо), что $n(0+0) = 0$ (т.е. $0 \notin Z$); при этом общность рассуждений не уменьшается.

Для характеристики роста элементов последовательности вводят понятия показателя сходимости и плотности.

1.2 Показатель сходимости

Определение Показателем сходимости последовательности Z называют

$$\tau = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}} < \infty\right\}.$$

Если ряд расходится, то полагают $r = \infty$.
Пример $Z = \{r\}_1^{\infty},\ r = 1$.

Предложение 1 (Эквивалентное определение r)

$$r = \overline{\lim}_{r \to \infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r}. \tag{1}$$

Лемма 1 *1. Следующий ряд и интеграл*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \quad (\alpha > 0) \tag{2}$$

сходятся или расходятся одновременно.

2. В случае сходимости ряда или интеграла

$$\lim_{t \to \infty} \frac{n(t)}{t^{\alpha}} = 0. \tag{3}$$

$\square$ Частичную сумму ряда, участвующего в определении r, запишем в виде интеграла Стилтьеса, к которому затем применим формулу интегрирования по частям:

$$\sum_{|z_n|<r} \frac{1}{|z_n|^\alpha} = \int_0^r \frac{dn(t)}{t^\alpha} = \frac{n(r)}{r^\alpha} + \alpha \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\alpha+1}} dt. \tag{4}$$

(мы учли, что $n(0+0) = 0$). Если ряд в (2) сходится, то левые (а значит и правые) части в (4) равномерно ограничены по r. Оба слагаемых в правой части положительны. Поэтому интегралы в правой части (4) равномерно ограничены по r. В силу неотрицательности подинтегральной функции, интеграл в (2) сходится.

Благодаря неубыванию функции $n(t)$,

$$\int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{\alpha+1}} dt \geqslant n(r) \int_r^\infty \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha} \frac{n(r)}{r^\alpha}.$$

Если интеграл в (2) сходится, то левая часть стремится к 0 при $r \to \infty$. Следовательно, условие (3) выполнено. Теперь сходимость ряда следует из (4) и сходимости интеграла. $\blacksquare$

Доказательство предложения 1 Обозначим через λ верхний предел в (1). Надо показать, что $\tau = \lambda$.

Из определения верхнего предела следует, что $\forall \varepsilon > 0$

$$n(t) < t^{\lambda+\varepsilon}, \quad t \geqslant t_0(\varepsilon), \tag{5}$$

$$t^{\lambda-\varepsilon} < n(t), \quad t = t_k \uparrow \infty. \tag{6}$$

Если $\alpha > \lambda$, то в силу (5), при достаточно малом ε интеграл в (2) сходится. По определению $\tau \leqslant \lambda$.

Пусть $\alpha < \lambda$; положим $2\varepsilon = \lambda - \alpha$. Тогда (6) показывает, что

$$n(t) > t^{\alpha+\varepsilon}, \quad t = t_k \uparrow \infty,$$

и условие (3) не соблюдено. По лемме ряд в (2) расходится; следовательно, $\tau \geqslant \lambda$.

Следствие 1 $\forall \varepsilon > 0$

$$n(r) < r^{\tau+\varepsilon}, \quad r \geqslant r_0(\varepsilon).$$

1.3 Плотности

Определение *Верхней плотностью* последовательности Z при порядке ρ называют

$$\overline{\Delta}_\rho = \overline{\Delta}_\rho(Z) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{|z_n|^\rho}.$$

Если $\overline{\lim}$ заменить на $\underline{\lim}$ (на $\lim$), то получаем определение нижней плотности $\underline{\Delta}_\rho$ (плотности Δ_ρ).

Пример $Z = \{n^2/9\}_1^\infty, \quad \Delta_{1/2} = 3.$

Верхняя и нижняя плотности существуют всегда, в отличии от (обычной) плотности.

Предложение 2 (Эквивалентное определение плотности)

$$\overline{\Delta}_\rho(Z) = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^\rho}. \tag{7}$$

При вычислении $\underline{\Delta}_\rho$ и Δ_ρ следует заменить $\overline{\lim}$ на $\underline{\lim}$ и на $\lim$ соответственно.

$\square$ Обозначим через $\overline{D}_\rho$ верхний предел в (7). Надо показать, что $\overline{\Delta}_\rho = \overline{D}_\rho$. При достаточно малых возмущениях последовательности Z ни $\overline{D}_\rho$, ни $\overline{\Delta}_\rho$ не изменятся. Поэтому заменяя в Z кратные точки достаточно близкими простыми точками (не меняя суммирования кратности), мы можем считать, что Z проста.

Тогда $n(|z_j| + 0) = j$ и для произвольной последовательности $\{z_{n_i}\}$ либо

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n_i}{|z_{n_i}^\rho|} = \lim_{i\to\infty} \frac{n(|z_{n_i}| + 0)}{|z_{n_i}^\rho|}, \tag{8}$$

либо оба предела не существуют.

В силу неубывания функции $n(t)/t^\rho$ в интервалах $(|z_n|, |z_{n+1}|)$ постоянства функции $n(t)$, величина $\overline{D}_\rho$ равна правой части в (8) для некоторой последовательности $\{z_{n_i}\}$. Тогда (8) показывает, что $\overline{\Delta}_\rho \geqslant \overline{D}_\rho$.

Наоборот, величина $\overline{\Delta}_\rho$ равна левой части в (8) для некоторой подпоследовательности $\{z_{n_i}\}$. Теперь (8) показывает, что $\overline{\Delta}_\rho \leqslant \overline{D}_\rho$. Аналогично устанавливаются равенства для нижних пределов, после чего они автоматически верны для пределов обычных. $\blacksquare$

2 Шкала роста целых функций

Всюду в дальнейшем

$$M(r) = M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Пусть $f(z) \not\equiv const$ — ц.ф. Из принципа максимума модуля следует, что $M(r)$ возрастает. Далее, согласно теореме Лиувилля,

$$M(r) \to \infty, \quad r \to \infty.$$

Справедлива

Обобщенная теорема Лиувилля *Пусть $f(z)$ — ц.ф. Если при $r \to \infty$*

$$M(r) = O(r^\alpha), \quad \alpha \geqslant 0, \tag{9}$$

то $f(z)$ есть полином степени не выше $[\alpha]$.

□ Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{10}$$

По неравенствам Коши

$$|c_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Значит, в силу (9), $|c_n| = O(r^{\alpha - n})$. Если $n > \alpha$, то правая часть стремится к 0 при $r \to \infty$. Следовательно, $c_n = 0$ для $n > \alpha$, и степенной ряд (10) превращается в полином степени $\leqslant [\alpha]$. ■

Эта теорема показывает, что степенная шкала непригодна для классификации трансцендентных ц.ф. по их росту.

Определение Говорят, что ц.ф. $f(z)$ имеет *конечный порядок роста*, если для некоторого $\mu > 0$

$$M(r) < e^{r^\mu}, \quad r \geqslant r_0(\mu). \tag{11}$$

Порядком роста ρ (или просто *порядком*) ц.ф. $f(z)$ называют нижнюю грань тех $\mu > 0$, для которых выполнено (11). Ясно, что $\rho \geqslant 0$. Если (4) не имеет места ни при каком $\mu > 0$, то полагают $\rho = \infty$.

Выведем формулу для порядка ц.ф. Из определения следует, что $\forall \varepsilon > 0$

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \quad r \geqslant r_0(\varepsilon),$$
$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M(r), \quad r = r_k \uparrow \infty.$$

После двукратного логарифмирования получаем

$$n \ln\ln M(r) < (\rho + \varepsilon) \ln r, \quad r \geqslant r_0(\varepsilon),$$
$$(\rho - \varepsilon) \ln r < \ln\ln M(r), \quad r = r_k \uparrow \infty.$$

Так как ε произвольно, то эти неравенства показывают, что

$$\rho = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}.$$

Это и есть искомая формула.

Замечание 1 *Ясно, что порядок можно определить как нижнюю грань тех $\mu > 0$, для которых*

$$M(r) = O(e^{r^\mu}), \quad r \to \infty.$$

Наряду понятием порядка вводят понятие типа ц.ф.

Определение Пусть ц.ф. $f(z)$ имеет порядок $\rho \in (0, \infty)$. Говорят, что $f(z)$ имеет конечный тип, если при некотором $a > 0$

$$M(r) < e^{ar^\rho}, \quad r \geqslant r_0(a). \tag{12}$$

Типом σ ц.ф. $f(z)$ называют нижнюю грань тех $a > 0$, для которых выполнено (12). Ясно, что $\sigma \geqslant 0$. Если (12) не имеет места ни при каких $a > 0$, то полагают $\sigma = \infty$.

Выведем формулу для типа. Из определения следует, что $\forall \varepsilon > 0$

$$M(r) < e^{(\sigma+\varepsilon) r^\rho}, \quad r \geqslant r_0(a), e^{(\sigma-\varepsilon) r^\rho} < M(r), \quad r = r_k \uparrow \infty.$$

Логарифмируя эти неравенства, имеем

$$\ln M(r) < (\sigma+\varepsilon)r^{\rho}, \quad r \geqslant r_0(a), (\sigma-\varepsilon)r^{\rho} < \ln M(r), \quad r = r_k \uparrow \infty.$$

В виду произвольности ε, эти неравенства дают формулу

$$\sigma = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}.$$

Замечание 2 *Тип можно определить, как нижнюю грань тех $a > 0$, для которых*

$$M(r) = O(e^{ar^{\rho}}), \quad r \to \infty.$$

В случаях, когда $\sigma = 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\sigma = \infty$, ц.ф. $f(z)$ называют соответственно ц.ф. минимального, нормального, максимального типа. Запись $f(z) \in [\rho, \sigma]$ будет означать, что порядок ц.ф. $f(z)$ не выше ρ, то тип не выше σ.

Пример Полином есть целая функция порядка 0.
Пример Пусть

$$f(z) = e^{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

В этом случае $M(r) = e^{|a_0| r^n (1+o(1))}$; значит $\rho = n$, $\sigma = |a_0|$.
Пример Пусть $f(z) = \sin \pi z$. Тогда $M(r) \leqslant e^{\pi r}$ и

$$M(r) \geqslant \frac{1}{2}(e^{\pi r} - e^{-\pi r}) \sim \frac{1}{2} e^{\pi r},$$

значит $\rho = 1$, $\sigma = \pi$.
Пример Пусть $f(z) = 1/\Gamma(z)$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Так как $\Gamma(z)$ не обращается в нуль, то $f(z)$ — ц.ф. Имеет место формула Стирлинга

$$\ln \frac{1}{|\Gamma(z)|} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \ln |z| + x - 1 + y \arg z + O(1)$$

вне кружков одинакового радиуса δ с центрами в точках 0, -1, $-2, \ldots$ — корнях функции $f(z)$ (константа в "O" зависит от δ). Беря $0 < \delta < 1/2$ и учитывая, что функция $M(r)$ возрастает, видим, что $M(r) \asymp \exp(r \ln r)$. Следовательно $\rho = 1$, $\sigma = \infty$.

3 Выражение порядка и типа целой функции через ее тейлоровские коэффициенты

Рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{13}$$

Так как его радиус сходимости вычисляется по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

то функция (13) является целой тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 0.$$

Оказывается модули Тейлоровских коэффициентов ц.ф. полностью характеризуют ее рост.

Теорема 1 *Порядок роста ц.ф. (13) вычисляется по формуле*

$$\rho = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln(1/|c_n|)}.$$

Теорема 2 *Если ц.ф. (13) имеет порядок $\rho \in (0, \infty)$, то ее тип вычисляется по формуле*

$$(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim}_{n\to\infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Теоремы 1, 2 дают возможность строить в виде степенных рядов ц.ф. произвольного роста. Они показывают, в частности, что порядок и тип производной $f'(z)$ такие же, как у $f(z)$. Подробности и доказательства этих теорем опускаем.

4 Показатель сходимости и плотности последовательности корней целой функции

4.1 Формула Пуассона-Йенсена

Для функции $f(z) = u(z) + iv(z)$, аналитической в круге $|z| < R$ и непрерывной при $|z| \leqslant R$ хорошо известна формула Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} u(Re^{i\theta}) d\theta + iv(0), \quad |z| < R.$$

Она восстанавливает аналитическую функцию по граничным значениям ее вещественной части (с точностью до чисто мнимой постоянной).

Предположим, что функция $f(z)$ аналитична при $|z| \leqslant R$, где она не обращается в 0. Тогда функция $\ln f(z)$ аналитична при $|z| \leqslant R$. По формуле Шварца

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta + i\gamma, \quad |z| < R. \tag{14}$$

Путь теперь $f(z)$ имеет корни $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ в круге $|z| < R$, а на окружности $|z| = R$ по прежнему $f(z) \neq 0$. Образуем показательную функцию

$$g(z) = f(z) \Big/ \prod_{k=1}^{n} \frac{R(z - a_k)}{R^2 - \overline{a}_k z}, \tag{15}$$

очевидно, аналитическую и не обращающуюся в 0 при $|z| \leqslant R$. Кроме того, $|g(z)| = |f(z)|$ на окружности $|z| = R$, так как

$$\left| \frac{R(z - a_k)}{R^2 - \overline{a}_k z} \right| = 1, \quad |z| = R.$$

Применим к $g(z)$ формулу (14):

$$\ln g(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta + ic, \quad |z| < R.$$

Вспоминая вид (15) функции $g(z)$, отсюда получаем: для $|z| < R$

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta + \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{R(z - a_k)}{R^2 - \overline{a}_k z} + ic, \quad |z| < R. \tag{16}$$

Это и есть формула Пуассона-Йенсена. Надо только уточнить, как понимаются логарифмы, входящие под знак суммы. Для выделения однозначной ветви функции

$$\ln \frac{R(z - a_k)}{R^2 - \overline{a}_k z} \tag{17}$$

проводится разрез — отрезок $[a_k,\ R^2/a_k]$. Если точка z попадает на этот разрез, то условимся понимать под значением функции (17) ее значение на одном из берегов разреза (общем для всех точек z этого разреза.

4.2 Формула Йенсена

Пусть функция $f(z)$ аналитична при $|z| \leqslant R$, не обращается в 0 на окружности $|z| = R$, $f(0) \neq 0$ и $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ — корни $f(z)$ в круге $|z| < R$. Отделим в (16) вещественные части, а затем положим $z = 0$. Получим

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta + \sum_{|a_k| < R} \ln \frac{a_k}{R}$$

или

$$\sum_{|a_k|<R} \ln \frac{a_k}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)|.$$

Запишем левую часть в виде интеграла Стилтьеса, к которому затем применим формулу интегрирования по частям. Тогда

$$\sum_{|a_k|<R} \ln \frac{a_k}{R} = \int_0^R \ln \frac{R}{t} dn(t) = \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt$$

(внеинтегральный член обратится в 0). В итоге имеем

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)|. \tag{18}$$

Это очень часто применяемое соотношение носит название формулы Йенсена.

Следствие 2 *Пусть $f(z)$ — ц.ф., $n(t)$ — считающая функция последовательности ее корней. Пусть $|f(0)| = 1$. Тогда для любого $\gamma > 0$ и всех $r > 0$*

$$n(r) \leqslant \frac{1}{\gamma} \ln M(e^{\gamma} r). \tag{19}$$

□ Положим в (18) $R = e^{\gamma} R$. Тогда в силу неубывания $n(t)$,

$$\ln M(e^{\gamma} r) \geqslant \int_0^{e^{\gamma} r} \frac{n(t)}{t} \, dt \geqslant \int_r^{e^{\gamma} r} \frac{n(t)}{t} \, dt \geqslant \gamma \cdot n(r),$$

и (19) верно, если на окружности $|z| = e^{\gamma} r$ нет корней $f(z)$. В силу непрерывности правой части и неубывания левой, (19) распространяется на все значения r. ■

Следствие 3 *Пусть $|f(0)| = 1$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\ln |f(Re^{i\theta})|| d\theta \leqslant 2 \ln M(R). \tag{20}$$

□ Обозначим при $x > 0$

$$\ln^+ x = \max(0, \ln x), \quad (\ln^+ x \geqslant 0),$$
$$\ln^- x = \min(0, \ln x), \quad (\ln^- x \leqslant 0).$$

Имеем

$$\ln x = \ln^+ x + \ln^- x, \quad x > 0 \qquad (*)$$
$$|\ln x| = \ln^+ x - \ln^- x, \quad x > 0.$$

Пусть

$$I_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^{\pm} |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

Тогда с учетом (*) правая часть в формуле Йенсена и левая в (20) соответственно равны $I_+ + I_-$ и $I_+ - I_-$. Формула Йенсена показывает, что

$$I_+ + I_- \geqslant 0 \;\Rightarrow\; -I_- \leqslant I_+.$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства I_+, видим, что левая часть в (20) не превосходит $2I_+$, что в вою очередь не больше, чем $2 \ln M(R)$. ■

4.3 Теоремы единственности

Формула Йенсена и оценка (19) позволяют быстро получить основные утверждения этого параграфа. Сделаем только одно замечание (которое следует помнить и в дальнейшем). Применяя к ц.ф. $f(z)$ формулу Йенсена, мы можем предполагать, что $|f(0)| = 1$: это не снизит общности, так как мы всегда можем перейти к функции

$$f_1(z) = c(z - z_0)^m f(z)/z^m,$$

(где m — кратность корня $z = 0$, $z_0 \notin Z$, а c — подходящая константа) этому условию удовлетворяющей. У функции $f_1(z)$ рост и считающая функция последовательности корней $n(t)$, те же, что и у функции $f(z)$ (при $t > 1$).

Теорема 3 *Показатель сходимости последовательности корней функции не превосходит ее порядка ($\tau \leqslant \rho$).*

☐ Положим в (19) $\gamma = 1$:

$$n(r) \leqslant \ln M(er).$$

Учитывая эту оценку и вспоминая эквивалентное определение показателя сходимости, находим

$$\tau = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} \leqslant \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(er)}{\ln er - 1} = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(er)}{\ln er} = \rho.$$

■

Теорема 4 *Пусть ц.ф. $f(z)$ имеет конечный порядок $\rho > 0$ и тип σ, и пусть Z — последовательность ее корней. Тогда*

$$1) \quad \overline{\Delta}_\rho(Z) \leqslant e\rho\sigma, \qquad 1) \quad \underline{\Delta}_\rho(Z) \leqslant \rho\sigma,$$

☐ Положим в (19) $\gamma = 1/\rho$ и поделим почленно на r^ρ. Тогда

$$\frac{n(r)}{r^\rho} \leqslant e\rho \frac{\ln M(e^{1/\rho} r)}{(e^{1/\rho} r)^\rho},$$

и переходя к верхнему пределу, получаем утверждение 1).

При $\varepsilon > 0$ по эквивалентному определению плотности

$$n(t) > (\underline{\Delta}_\rho - \varepsilon) t^\rho, \quad t > t_0 = t_0(\varepsilon). \tag{21}$$

Пусть $1 > \delta > 0$ фиксировано; возьмем r столь большим, чтобы $\delta r > t_0$. Формула Йенсена (18) и оценка (21) дают

$$\ln M(r) \geqslant \int\limits_{\delta r}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt > (\underline{\Delta}_\rho - \varepsilon) \int\limits_{\delta r}^{r} t^{\rho - 1}\, dt = \frac{(\underline{\Delta}_\rho - \varepsilon)}{\rho}\, r^\rho (1 - \delta^\rho).$$

Значит

$$\underline{\Delta}_\rho - \varepsilon < \frac{\rho}{1 - \delta^\rho} \frac{\ln M(r)}{r^\rho}, \quad r > t_0/\delta,$$

и устремляя r к бесконечности, видим, что $\underline{\Delta}_\rho - \varepsilon < \rho\sigma(1 - \delta^\rho)^{-1}$. Так как ε и δ можно брать произвольно малыми, то отсюда следует утверждение 2). ■

Замечание 3 *Если $f(z)$ имеет конечный тип, то теорема 2 конечно следует из теоремы 4.*

Замечание 4 *Константы $e\rho\sigma$ и $\rho\sigma$ в теореме 4 точные.*

Теорема 3 может быть переформулирована в следующем виде.

Теорема *Пусть целая функция $f(z)$ конечного порядка ρ обращается в ноль в точках последовательности, у которой показатель сходимости $\tau > \rho$. Тогда $f(z) \equiv 0$.*

Утверждения такого сорта носят название *теорем единственности*. Аналогично своя теорема единственности порождается теоремой 4.

5 Целые функции и бесконечные произведения

5.1 Построение целой функции по заданной последовательности корней

Пусть $(z_1, \quad, z_n) \in \mathbb{C}$ — конечный набор точек; найдется полином $P(z)$, обращающийся в 0 в точках z_i и только в них. Действительно, достаточно положить

$$P(z) = a_0(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n), \quad a_0 \in \mathbb{C}\,,\ a_0 \neq 0. \tag{22}$$

Наоборот, произвольный полином с корнями $z_1, \quad, z_n$ может быть записан в виде (22).

Так как ц.ф. имеет, вообще говоря, бесконечное множество корней, то для нее аналог представления (22) выглядит значительно сложней.

Всюду в дальнейшем используем обозначение: если p — целое положительное число,то

$$E(u;p) = \begin{cases} (1-u), \quad p = 0 \\ (1-u)\exp\left(u + \dfrac{u^2}{2} + \ldots + \dfrac{u^p}{p}\right), \quad p > 0 \end{cases}$$

Лемма 2 *При* $|u| \leqslant \frac{1}{2}$ $(u \in \mathbb{C}\,)$

$$|\ln E(u;p)| \leqslant 2|u|^{p+1}, \quad \ln 1 = 0$$

□ Разлагая функцию $\ln(1-u)$ в степенной ряд, имеем

$$\ln E(u;p) = -\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{u^k}{k},$$

$$|\ln E(u;p)| \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} |u|^k = \frac{u^{p+1}}{1-|u|} \leqslant 2|u|^{p+1}.$$

■

Теорема 5 (Вейерштрасс) *Пусть* $\{z_n\}_1^\infty \in \mathbb{C}$ *— произвольная последовательность с условием* $z_n \to \infty$, $z_1 \neq 0$. *Тогда существует целая функция* $F(z)$, *обращающаяся в* 0 *в точках* $\{z_n\}$ *и только в них*

□ Выберем последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{p_n+1} < \infty, \quad \forall R > 0 \tag{23}$$

(можно положить $p_n = n - 1$, тогда при $|z_n| \geqslant 2R$ общий член ряда не превосходит $(1/2)^n$).

Пусть $R > 0$ фиксировано. Рассмотрим бесконечное произведение

$$\sum_{|z_n|\geqslant 2R} E\left(\frac{z}{z_n}; p_n\right) = \sum_{|z_n|\geqslant 2R} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n}\right) \tag{24}$$

и докажем его равномерную сходимость в круге $|z| < R$.

Так как $|z/z_n| \leqslant 1/2$, то по лемме ряд

$$\sum_{|z_n|\geqslant 2R} \left|\ln E\left(\frac{z}{z_n}; p_n\right)\right|$$

мажорируется, в силу (23), сходящимся числовым рядом, и значит, сходится равномерно при $|z| < R$. Следовательно, бесконечное произведение (24) сходится равномерно при $|z| < R$ и представляет в этом круге аналитическую функцию.

Обозначим

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}; p_n\right) = \prod_{|z_n|<2R} \prod_{|z_n|\geqslant 2R} . \tag{25}$$

По только что доказанному последний сомножитель есть функция, аналитическая при $|z| < R$. Предыдущий сомножитель, будучи конечным произведением дает ц.ф. Так как $R > 0$ в наших рассуждениях произвольно, то $F(z)$ — ц.ф. Утверждение о нулях $F(z)$ очевидно. ■

5.2 Понятие канонического произведения

Бесконечное произведение (25) упрощается, если последовательность $\{z_n\}$ имеет конечный показатель сходимости. Действительно, тогда при некотором целом $p \geqslant 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} < \infty \tag{26}$$

и условие (23) выполняется с $p_n = p$. В этом случае естественно брать наименьшее из целых p, обладающих свойством (6).
Определение Пусть целое $p \geqslant 0$ таково, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p}} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} < \infty. \tag{27}$$

Тогда бесконечное произведение

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}; p\right)$$

называется *каноническим произведением*, а число p называется *родом* канонического произведения.

В силу теоремы Вейерштрасса, каноническое произведение $\pi(z)$ есть ц.ф., обращающаяся в 0 в точках $\{z_n\}$ и только в них.

Замечание 5 *Если p — род канонического произведения, а τ — показатель сходимости последовательности его корней, то*

$$p \leqslant \tau \leqslant p+1.$$

5.3 Представление ц.ф. в виде бесконечного произведения

Теорема 6 *Пусть $f(z)$ — ц.ф. Пусть ее ненулевые корни образуют последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, а m — кратность корня $z=0$. Тогда*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}; p_n\right), \tag{28}$$

где $g(z)$ — некоторая ц.ф., а последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$ удовлетворяет условию (23).

□ Пусть $F(z)$ — ц.ф., заданная бесконечным произведением (25). По теореме Вейерштрасса ц.ф. $z^m F(z)$ имеет те же корни, что $f(z)$. Значит функция

$$G(z) = f(z)/(z^m F(z))$$

— целая и не обращается в ноль. Тогда функция $\ln G(z) = g(z)$ — целая. Потенцируя и вспоминая вид $F(z)$, получаем требуемое. ■

Замечание 6 *Отсутствие подробной информации о функции $g(z)$ связано с тем, что $f(z)$ в этой теореме — произвольная ц.ф. В следующем параграфе для целых функций конечного порядка представление (28) будет существенно уточнено.*

6 Представление целой функции конечного порядка

6.1 Теорема Адамара

Следующая теорема является центральной в теории целых функций.

Теорема 7 *Пусть $f(z)$ — ц.ф. конечного порядка ρ, $\{z_n\}_1^{\infty}$ — ее ненулевые корни, а m — кратность корня $z=0$. Тогда*

$$f(z) = z^m e^{P_s(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}; p\right),$$

где $P_s(z)$ — полином степени $s \leqslant \rho$, а $\prod$ — каноническое произведение рода $p \leqslant \rho$.

□ Пусть $f(0) \neq 0$. Фиксируем произвольное z. Выберем число $R > |z| = r$ так, чтобы на окружности $|z| = R$ не было корней $f(z)$. Пусть $s = [\rho]$, ясно, что $s > \rho - 1$. Запишем формулу Йенсена-Пуассона.

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta + \sum_{|z_n|<R} \ln \frac{R(z - z_k)}{R^2 - \overline{z}_k z} + ic$$

и продифференцируем ее $s + 1$ раз:

$$[\ln f(z)]^{(s+1)} = \frac{(s+1)!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^{s+2}} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta - s! \sum_{|z_n|<R} \frac{1}{(z_n - z)^{s+1}} + s! \sum_{|z_n|<R} \frac{\overline{z}_n^{\,s+1}}{(R^2 - \overline{z}_n z)^{s+1}}. \quad (29)$$

Обозначим через $A(R)$ и $B(R)$ соответственно интеграл и последнюю сумму в правой части. Утверждается, что $A(R),\ B(R) \to 0, \quad R \to \infty$. Действительно, так как $f(z)$ имеет порядок ρ, то $\forall \varepsilon > 0$ при $R > R_0(\varepsilon)$

$$\ln M(R) < R^{\rho+\varepsilon}, \quad n(R) < R^{\rho+\varepsilon}$$

(см. следствие из §4). Фиксируем ε столь малым, что $s + 1 > \rho + \varepsilon$. Тогда при достаточно больших R по следствию 3 из §3

$$|A(R)| \leqslant (s+1)! \frac{2R \ln M(R)}{(R - r)^{s+2}} = O(R^{\rho+\varepsilon-s-1}) \to 0,$$

$$|B(R)| \leqslant s! \sum_{|a_n|<R} \frac{1}{|R^2/\overline{z}_k - z|^{s+1}} \leqslant \frac{s! n(R)}{(R - r)^{s+1}} = O(R^{\rho+\varepsilon-s-1}) \to 0.$$

Таким образом, предельным переходом при $R \to \infty$ в (29) находим:

$$(\ln f(z))^{(s+1)} = -s! \lim_{R\to\infty} \sum_{|z_n|<R} \frac{1}{(z_n - z)^{s+1}} = -s! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^{s+1}} \quad (30)$$

(ряд в правой части сходится в обычном смысле, т.к. $s + 1 > \rho > \tau$).

Теперь проинтегрируем формулу (30) $s + 1$ раз от 0 до z по некоторому пути, не имеющему общих точек с разрезами (см. §3, п.1), за возможным исключением самой точки z.

После первого шага будем иметь

$$(\ln f(z))^{(s)} - c_0 = -(s-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^s} \Bigg|_0^z = -(s-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z_n - z)^s} - \frac{1}{z_n^s} \right).$$

Теперь ясно, что после $s + 1$ шагов получим

$$\ln f(z) - P_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln(z - z_n) - \ln(-z_n) + \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 + \ldots + \frac{1}{s} \left(\frac{z}{z_n} \right)^s \right).$$

Потенцируем:

$$f(z) = e^{P_s(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left(\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 + \ldots + \frac{1}{s} \left(\frac{z}{z_n} \right)^s \right).$$

Это еще не совсем то, что требуется — получившееся бесконечное произведение не обязано быть каноническим. Пусть p — наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям (27) (§5, п.2). Мы уже отмечали, что $s + 1 > \tau$, а потому $p \leqslant s$. Запишем $f(z)$ в виде

$$e^{P_s(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}; p \right) \prod_{n=1}^{\infty} \exp \left(\frac{1}{p+1} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p+1} + \ldots + \frac{1}{s} \left(\frac{z}{z_n} \right)^s \right).$$

Благодаря выбору p, последнее произведение даст $\exp(Q_s(z))$, где $Q_s(z)$ — полином степени $s \leqslant \rho$. Объединяя этот сомножитель с $\exp(P_s(z))$, полностью поучаем утверждение теоремы для случая $f(0) \neq 0$. Но отсюда следует общий случай: действительно, только что доказанную часть надо применить к функции $f(z)/z^m$. ■

Определение Число $\max(s, p)$ называют *родом* целой функции $f(z)$. Род целой функции не превосходит ее порядка.

6.2 Следствия теоремы Адамара

Следствие 4 *Если ц.ф. $f(z)$ конечного порядка ρ не имеет корней, то*

$$f(z) = e^{P_s(z)}, \tag{31}$$

где $P_s(z)$ — полином степени $s \leqslant \rho$.

Следствие 5 *Целая функция $f(z)$ нецелого порядка имеет бесконечное множество корней.*

□ Если бы у $f(z)$ совсем не было корней, то по следствию 4 $f(z)$ имела бы вид (31). Но тогда $\rho = s$, т.е. порядок $f(z)$ есть целое число. Противоречие.

Если у $f(z)$ конечное число корней $z_1, \dots, z_n$, то надо доказанную часть применить к функции $f(z)/[(z-z_1)\dots(z-z_n)]$ ■

Следствие 6 *Преобразование Фурье финитной (интегрируемой) функции имеет бесконечное число нулей.*

□ Для удобства считаем, что финитная функция $\varphi(t)$ сосредоточена на $(-a, a)$, т.е. ее преобразование Фурье имеет вид

$$f(z) = \int\limits_{-a}^{a} e^{izt}\varphi(t)dt, \quad 0 < a < \infty.$$

При любом z под знаком интеграла возможно дифференцирование, поэтому $f(z)$ — ц.ф. Далее,

$$|e^{izt}| \leqslant e^{|y||t|}, \quad y = \operatorname{Im} z$$

и значит

$$|f(z)| \leqslant \|\varphi\|_1 \, e^{a|y|}, \quad M(R) = O(e^{ar}).$$

Таким образом, порядок $f(z)$ не выше первого.

Предположим противное, $f(z)$ имеет не более конечного числа корней $z_1, \dots, z_n$. Применяя к функции $f(z)/[(z-z_1)\dots(z-z_n)]$ следствие 4, имеем

$$f(z) = P(z)e^{Az+b},$$

$P(z)$ — полином. Отсюда легко следует, что $\overline{\lim}_{|x|\to\infty}|f(x)| > 0$. А это противоречит теореме Римана-Лебега по которой $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. ■

Следствие 7 (Разложение синуса в бесконечное произведение)

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

□ Положим $f(z) = \sin \pi z / z$. Мы знаем, что $\rho = 1$. Корни $f(z)$ — это последовательность $\{n\}_{n \in \mathbb{Z}\setminus 0}$. Число p, удовлетворяющее условиям (27) в §5, равно 1. По теореме Адамара

$$\frac{\sin \pi z}{z} = e^{az+b} \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} = e^{az+b} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{32}$$

Левая часть есть четная функция. Это же относится и к последнему бесконечному произведению. Значит, функция $\exp(az+b)$ — четная. Но это возможно только при $a = 0$. Тогда $\exp(az+b) = c$, и подставляя в (32) $z = 0$, находим, что $c = \pi$. ■

7 Рост канонического произведения

Теоремы §4 — это типичные утверждения типа: у ц.ф. фиксированного роста не может быть "слишком много" корней. Утверждение обратного порядка гласило бы, что ц.ф. с заданными корнями не может расти "слишком быстро". Оно, конечно, неверно, так как на рост целой функции влияют множители вида $\exp(g(z))$, и в частности $\exp(P_s(z))$. В этом параграфе мы увидим, что исключив присутствие таких множителей, можно получить обращение теоремы 3 из §4.

7.1 Оценка бесконечного произведения.

Лемма 3 *1) При* $p = 0$

$$\ln|E(u;p)| \leqslant \ln(1+|u|).$$

2) При $p > 0$

$$\ln|E(u;p)| \leqslant A(p)\frac{|u|^{p+1}}{1+|u|}, \quad u \in \mathbb{C}\,.$$

□ Имеем

$$E(u;p) = (1-u)\exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}\right),$$

$$\ln|E(u;p)| = \mathrm{Re}\left(\ln(1-u) + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}\right). \tag{33}$$

При $p = 0$ степени в правой части отсутствуют и 1) верно.

Докажем 2). Пусть сначала $|u| \leqslant 1/2$. Как и при доказательстве леммы §5, находим

$$\ln|E(u;p)| \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} = \frac{|u|^{p+1}}{1-|u|} \leqslant 3\frac{|u|^{p+1}}{1+|u|}. \tag{34}$$

Если же $|u| \geqslant 1$, то из (33) следует:

$$\ln|E(u;p)| \leqslant 2|u| + \frac{|u|^2}{2} + \ldots + \frac{|u|^p}{p} \leqslant C_p|u|^p \leqslant 2C_p\frac{|u|^{p+1}}{1+|u|}. \tag{35}$$

Неравенства (34), (35) показывают, что отношение

$$(\ln|E(u;p)|)/(|u|^{p+1}(1+|u|)^{-1})$$

ограничено сверху на множестве $|u| \in [0,1/2] \cup [1,\infty)$. Но в кольце $1/2 \leqslant |u| \leqslant 1$ это отношение представляет непрерывную функцию, и следовательно, также ограничено. В итоге оно ограничено для всех $|u| \in [0,\infty)$, что и требовалось доказать. ■

Лемма 4 *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{p+1}} < \infty, \quad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n};p\right).$$

Тогда

$$\ln M(r) \leqslant A_p r^p\left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}}\,dt + r\int_r^{\infty}\frac{n(t)}{t^{p+2}}\,dt\right)$$

□ По лемме 3 при $p > 0$

$$\ln M(r) \leqslant A_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{p+1}}{|z_n|^p(|z_n|+r)} = A_p r^{p+1}\int_0^{\infty}\frac{dn(t)}{t^p(t+r)}. \tag{36}$$

Интегрируем по частям. В силу леммы из §1, внеинтегральный член обратится в 0, и мы получаем

$$\ln M(r) \leqslant A_p r^{p+1}\int_0^{\infty}\left(\frac{p}{t^{p+1}(t+r)} + \frac{1}{t^p(t+r)^2}\right)n(t)dt \leqslant C_p r^{p+1}\int_0^{\infty}\frac{n(t)}{t^{p+1}(t+r)}\,dt.$$

Интеграл в правой части представим в виде суммы интегралов $I + J$, берущихся соответственно по $(0,r)$ и (r,∞). В J заменяем $t+r$ на t, а в I — на r. Это дает требуемую оценку. Случай $p = 0$ разбирается так же. ■

В условиях леммы 4 средний член в (36) есть $o(r^{p+1})$ при $r \to \infty$. Значит, справедлива

Лемма 5 *В условиях и обозначениях леммы 4 функция* $f(z)$ *растет не сильнее, чем функция порядка* $p+1$ *и минимального типа.*

7.2 Рост канонического произведения

Теорема 8 (Борель) *Порядок канонического произведения равен показателю сходимости последовательности его корней.*

□ Всегда $\tau \leqslant \rho$, поэтому следует показать, что $\rho \leqslant \tau$. Мы знаем, что $p \leqslant \tau \leqslant p+1$, где p — род канонического произведения $\pi(z)$. Рассмотрим два случая: $\tau < p+1$ и $t = p+1$.

1) $p \leqslant \tau < p+1$. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ $\tau + \varepsilon < p+1$. Мы знаем (§4), что $n(t) < t^{r+\varepsilon},\ t \geqslant t_0$. Теперь по лемме 4

$$\ln M(r) \leqslant c \cdot r^p \left(c_1 + \int\limits_{r_0}^{r} t^{\tau+\varepsilon-p-1} dt + r \int\limits_{r}^{\infty} t^{\tau+\varepsilon-p-2} dt \right) =$$

$$= c \cdot r^p \left(c_1 + r^{r+\varepsilon-p}/(\tau+\varepsilon-p) + r^{\tau+\varepsilon-p}/(p+1-\tau-\varepsilon) \right) = O(r^p) + O(r^{\tau+\varepsilon}).$$

Так как $p < \tau + \varepsilon$, то $\ln M(r) = O(r^{\tau+\varepsilon})$. Значит $\rho \leqslant \tau$.

2) Если $\tau = p+1$, то все дает лемма 5. ■

Следствие 8 *В адамаровском представлении функции $f(z)$*

$$\rho = \max\{s, \tau\}.$$

□ Нам известно, что $s \leqslant \rho$ и $\tau \leqslant \rho$, т.е. $\max\{s, \tau\} \leqslant \rho$. Надо показать обратное. Применяя последовательно адамаровское представление и теорему Бореля, видим, что

$$\ln M_f(r) = O(r^s) + \ln M_\pi(r) = O(r^s) + O(r^{\tau+\varepsilon}).$$

Значит $\rho \leqslant \max\{s, \tau\}$. ■

Следствие 9 *Для ц.ф. нецелого порядка $\rho = \tau$.*

□ Так как s — целое число, а ρ — нет, то максимум, присутствующий в следствии 8, не может равняться s. ■

7.3

Из оценки $n(r) < \ln M(er)$ (§4, формула (19)) следует, что для любой ц.ф. и для любого $q > 0$

$$\int^{\infty} \frac{\ln M(r)}{r^q}\, dr < \infty \Rightarrow \int^{\infty} \frac{n(r)}{r^q}\, dr < \infty. \tag{37}$$

Согласно теореме Бореля рост канонического произведения определяется его нулями. Поэтому возникает вопрос: не обращается ли в этом случае импликация (37)?

Сначала мы рассмотрим случаи, когда о поведении интеграла

$$\int^{\infty} \frac{\ln M(r)}{r^q}\, dr \tag{38}$$

можно высказать вполне определенные заключения.

1) Если $q > 1 + \rho$, то интеграл (38) сходится.

□ Действительно, выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q - 1 > \rho + \varepsilon$. Мы знаем, что

$$\ln M(r) < r^{\rho+\varepsilon}, \quad r \geqslant r_0(\varepsilon).$$

Значит, при некотором $h > 0$

$$r^{-q} \ln M(r) < r^{-1-h}, \quad r \geqslant r_o.$$

■

2) Если $q < 1 + \rho$, то интеграл (38) расходится.

□ Достаточно показать, что расходится правый интеграл в (37). Предположим противное; тогда при некотором $\varepsilon > 0$

$$\int^{\infty} \frac{n(r)}{r^{1+\rho-\varepsilon}}\, dr < \infty.$$

По лемме §1 $\sum 1/|z_n|^{\rho-\varepsilon} < \infty$, что невозможно, так как по теореме Бореля $\rho = \tau$. $\blacksquare$

Итак, при $q \gtrless 1+\rho$ вопрос о сходимости интеграла (38) решается просто. Поэтому мы заинтересуемся импликацией

$$\int^{\infty} \frac{n(r)}{r^{1+\rho}}\, dr < \infty \Rightarrow \int^{\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{1+\rho}}\, dr < \infty. \tag{39}$$

Напомним, что $p \leqslant \tau \leqslant p+1$, т.е. $p \leqslant \rho \leqslant p+1$. Случай $\rho = p$ также прост.

3) Если $\rho = p$, то интеграл (38) расходится.

$\square$ Если бы он сходился, то сходился бы и правый интеграл в (37), что по лемме §1 равносильно сходимости ряда $\sum 1/|z_n|^p$, а это невозможно по определению рода канонического произведения. $\blacksquare$

Теорема 9 *1) Если $p < \rho < p+1$, то (39) имеет место.*

2) При $\rho = p+1$ утверждение 1) теряет силу.

$\square$ 1) Итак, $p < \tau < p+1$. По лемме 4

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{1+\tau}}\, dr \leqslant A \left(\int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{1+\tau-p}} \int_1^{r} \frac{n(t)}{t^{p+1}}\, dt + \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{\tau-p}} \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}}\, dt \right).$$

Меняя порядок интегрирования, находим

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{1+\rho}}\, dr \leqslant A \left(\int_1^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}}\, dt \int_t^{\infty} \frac{dr}{r^{1+\tau-p}}\, dr + \int_1^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}}\, dt \int_1^{t} \frac{dr}{r^{\tau-p}} \right) \leqslant A_1 \int_1^{\infty} \frac{n(t)}{t^{1+\tau}}\, dt$$

и утверждение 1) доказано, т.к. $\tau = \rho$. 2) Заметим, что при $\rho = 1+p$ левый интеграл в (39) всегда сходится, в силу леммы §1 определения рода. Для $p = 0$, $\tau = \rho = 1$ мы построим каноническое произведение, для которого

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r)}{r^2}\, dr = +\infty. \tag{40}$$

Пусть $\{z_n\}$ — положительная последовательность с условием $n(r) \sim r/\ln^{\alpha} r$, $1 < \alpha \leqslant 2$. По предложению 1 §1 $\tau = 1$. Далее, левый интеграл в (39) сходится при $\rho = 1$. Значит

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

есть каноническое произведение рода $p = 0$. Имеем

$$\ln M(r) = \int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{t}\right) dn(t) = r \int_0^{\infty} \frac{n(t)dt}{t(t+r)}$$

(мы проинтегрировали по частям). Теперь

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r)}{r^2} dr = \int_1^{\infty} \frac{dr}{r} \int_0^{\infty} \frac{n(t)dt}{t(t+r)} = \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t}\, dt \int_1^{\infty} \frac{dr}{r(t+r)} = \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^2} \left(\left(\ln \frac{r}{t+r} \right) \Big|_{r=1}^{\infty} \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^2} \ln(1+t) dt.$$

Подынтегральная функция ведет себя как $1/(t \ln^{\alpha-1} t)$, $t \to \infty$. Поскольку $\alpha - 1 \leqslant 1$, то соотношение (40) имеет место. $\blacksquare$

8 Вид целой функции и распределение ее нулей

8.1 Порядок целой функции — нецелое число

Как мы видели в предыдущем параграфе, если порядок ρ ц.ф. не есть целое число, то $\rho = \tau$. Оказывается, в этом случае также довольно просто судить и о типе ц.ф.

Теорема 10 *Пусть порядок ρ ц.ф. $f(z)$ не есть целое число. Тогда ее тип σ и верхняя плотность последовательности корней $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)$ одновременно*

а) равны 0,

б) равны ∞,

в) конечны и положительны.

□ По теореме 4 §4 $\overline{\Delta}_\rho \leqslant e\rho\sigma$. Поэтому все будет доказано, если мы получим наоборот, оценку σ сверху через $\overline{\Delta}_\rho$.

Мы знаем, что $p \leqslant \tau \leqslant p+1$, а $\rho = \tau$. Но ρ — нецелое; значит, $p < \rho < p+1$.

Далее, по определению $\overline{\Delta}_\rho$ имеем: $\forall \varepsilon > 0$

$$n(t) < (\overline{\Delta}_\rho + \varepsilon)t^\rho, \quad t \geqslant t_o(\varepsilon).$$

Теперь по лемме 4 §7

$$\ln M_\pi(r) \leqslant C_p r^p \left(c_\varepsilon + (\overline{\Delta}_\rho + \varepsilon)) \left(\int\limits_{t_0}^{r} t^{\rho-p-1}dt + r\int\limits_{r}^{\infty} t^{\rho-p-2}dt \right) \right) \leqslant O(r^p) + A(\overline{\Delta}_\rho + \varepsilon)r^\rho \leqslant A(\overline{\Delta}_\rho + 2\varepsilon)r^\rho, \ r > t_0,$$

где A зависит от p и ρ. По теореме Адамара

$$\ln M_f(r) \leqslant O(r^s) + \ln M_\pi(r) \leqslant A(\overline{\Delta}_\rho + 3\varepsilon)r^\rho,$$

так как $s < \rho$. Следовательно $\sigma \leqslant A(\overline{\Delta}_\rho + 3\varepsilon)$. Но ε произвольно, а A от ε не зависит. Итак, $\sigma \leqslant A\overline{\Delta}_\rho$. ■

8.2 Порядок целой функции — целое число

Здесь утверждение теоремы 10 теряет силу. В этом случае на тип ц.ф. влияют старший коэффициент полинома в адамаровском представлении функции и распределение корней по аргументам.

Пусть $f(z)$ — ц.ф. целого порядка ρ. Так как степень полинома в адамаровском представлении $f(z)$ не выше ρ, то мы можем написать

$$f(z) = e^{P_\rho(z)}\pi(z) = \exp(a_\rho z^\rho + Q_{\rho-1})\pi(z), \tag{41}$$

где $|a_\rho| \geqslant 0$, $\pi(z)$ — каноническое произведение; пусть p — род $\pi(z)$, $\{z_n\}$ — корни $f(z)$ (не считая общности, мы считаем, что $f(0) \neq 0$).

а) Случай $\rho \geqslant p+1$ разбирается просто. Так как ρ — целое, то, очевидно, условие $\rho \geqslant p+1$ равносильно условию

$$\sum \frac{1}{|z_n|^\rho} < \infty. \tag{42}$$

Теорема 11 (Линделеф) *Пусть $f(z)$ — ц.ф. целого порядка ρ. Если имеет место условие (42), то*

$$\sigma = |a_\rho|.$$

□ По лемме 5 §7 каноническое произведение $\pi(z)$ растет не быстрее, чем функция порядка $p+1$ и минимального типа. У нас $p+1 \leqslant \rho$; поэтому

$$\ln M_\pi(r) \leqslant o(1)r^\rho. \tag{43}$$

Далее,

$$\max_{|z|=r} \operatorname{Re} P_\rho(z) = |a_\rho|(1+o(1))r^\rho. \tag{44}$$

Из (41), (43), (44) имеем

$$\ln M(r) \leqslant |a_\rho|(1+o(1))r^\rho,$$

т.е. $\sigma \leqslant |a_\rho|$.

Наоборот. Так как $M(r) \geqslant |f(re^{i\theta}|$ для всех значений θ, то беря точку $re^{i\theta}$, в которой достигается максимум (44), находим

$$\ln M(r) \geqslant \ln|f(re^{i\theta}| = |a_\rho|(1+o(1))r^\rho + \ln|\pi(re^{i\theta})|.$$

Теперь используем неравенство треугольника и оценку (43):

$$\ln M(r) \geqslant |a_\rho|(1+o(1))r^\rho.$$

Таким образом, $\sigma \geqslant |a_\rho|$. В итоге $\sigma = |a_\rho|$. $\blacksquare$

Мы разобрали случай $\rho \geqslant p+1$ и теперь должны предположить, что $\rho < p+1$. Так как ρ — целое, то это значит, что $\rho \leqslant p$. Но по лемме Адамара $p \leqslant \rho$. Значим, нам остается рассмотреть

б) Случай $\rho = p$. Это условие равносильно условию

$$\sum \frac{1}{|z_n|^\rho} = \infty. \tag{45}$$

Этот случай — более тонкий. Полезно разобрать следующий пример.

Пример Пусть

$$f_1(z) = \sin\frac{\pi}{2}z, \quad f_2(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Мы знаем, что обе функции имеют порядок $\rho = 1$. Далее, ясно, что в обоих случаях $\Delta_1 = 1$ (условие (45) выполнено). Однако, первая функция — нормального типа, а вторая — максимального. Сейчас мы увидим, что максимальный тип функции $1/\Gamma(z)$ вызван отсутствием у ее корней должной симметрии.

Обозначим

$$\delta_f(r) = \left| a_\rho + \frac{1}{\rho}\sum_{|z_n|<r}\frac{1}{z_n^\rho}\right|, \quad \overline{\delta}_f = \overline{\lim}_{r\to\infty}\delta_f(r), \quad \gamma_f = \max\{\overline{\delta}_f, \overline{\Delta}_\rho\}.$$

Теорема 12 (Линделеф) *Пусть $f(z)$ — ц.ф. целого порядка ρ и выполнено условие (45). Тогда величины σ, γ_f одновременно*

а) равны нулю,

б) равны бесконечности,

в) конечны и положительны.

$\square$ Считаем для простоты, что $|f(0)| = 1$. Так как речь идет о типе, то $\rho = p > 0$. Продифференцируем p раз формулу Пуассона-Йенсена и положим $z = 0$ (достаточно в формуле (29) §6 положить $s+1 = p$, $z = 0$). Получим

$$\left|[\ln f(z)]^{(p)}_{z=0} + (p-1)!\sum_{|z_n|<r}\frac{1}{z_n^\rho}\right| = \frac{p!}{\pi}\frac{1}{r^p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|d\theta + (p-1)\frac{n(r)}{r^p}. \tag{46}$$

Значение

$$(\ln f(z))^{(p)}_{z=0}$$

есть умноженный на $p!$ коэффициент при z^p тейлоровского разложения функции

$$\ln f(z) = P_\rho(z) + \ln\pi(z) = P_\rho(z) + \sum_n\left(\ln\left(1-\frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_n}\right)^p\right).$$

Написанный ряд сходится равномерно в окрестности точки $z = 0$, а каждый его член в этой точке обращается в 0 с кратностью p. Значит, коэффициент при z^p в разложении $\ln\pi(z)$ отсутствует, и потому

$$(\ln f(z))^{(p)}_{z=0} = p!a_\rho.$$

Таким образом, левая часть в (46) есть $\delta_f(r)$. Применяя следствие 3 из §4, имеем

$$\delta_f(r) \leqslant (2\ln M(r))/r^p + \frac{1}{p}\frac{n(r)}{r^p}.$$

По определению типа σ и верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho$ отсюда

$$\delta_f(r) \leqslant 2\sigma + \frac{1}{p}\overline{\Delta}_\rho.$$

Но $\overline{\Delta}_\rho \leqslant e\rho\sigma$ (§4). Значит, $\overline{\delta}_f \leqslant C_p\sigma$. Объединяя это с только что применявшимся неравенством $\overline{\Delta}_\rho \leqslant e\rho\sigma$, получаем

$$\gamma_f \leqslant A_p\cdot\sigma. \tag{47}$$

Надо доказать обратную оценку. Пусть $r = |z|$. Запишем адамаровское представление функции $f(z)$ в виде

$$\exp\left(z^\rho\left(a_\rho + \frac{1}{\rho}\sum_{|z_n|<r}\frac{1}{z_n^\rho}\right)\right)e^{Q_{p-1}(z)}\prod_{|z_n|<r}E\left(\frac{z}{z_n};p-1\right)\prod_{|z_n|\geqslant r}E\left(\frac{z}{z_n};p\right).$$

С помощью леммы 3 §7 отсюда получаем

$$\ln|f(z)| \leqslant \delta_f(r)r^p + A_p\left(r^p\int\limits_0^r \frac{dn(t)}{t^{p-1}(t+r)} + r^{p+1}\int\limits_r^\infty \frac{dn(t)}{t^p(t+r)}\right) + o(r^p).$$

Интегрируем по частям и учитываем, что $n(t)/t^{p+1} \xrightarrow{t\to\infty} 0.$

$$\ln M(r) \leqslant \delta_f(r)r^p + C_p\left(r^{p-1}\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t^p}dt + r^{p+1}\int\limits_r^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}}\,dt\right) + o(r^p).$$

Воспользуемся неравенством $n(t) < (\overline{\Delta}_\rho+\varepsilon)t^p,\ t \geqslant t_0(\varepsilon)$, поделим полученное неравенство на r^ρ и перейдем к верхнему пределу. Найдем

$$\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r^\rho} \leqslant \overline{\delta}_f + K_p\overline{\Delta}_p \leqslant B_p\gamma_f,$$

т.е. $\sigma \leqslant B_p\gamma_f$. Остается объединить это с (47). ■

9 Теоремы Фрагмена-Линделефа

Эти теоремы представляют собой обобщение принципа максимума модуля на неограниченные области.

Если функция $f(z)$ аналитична в угле $a < \arg z < b$ и непрерывна на его замыкании (имеются ввиду конечные точки), то для нее вводятся понятия понятия и типа так же, как и для целой функции (теперь $M_f(r) = \max\{|f(z)|:\ |z| = r,\ a < \arg z < b\}$).

Теорема 13 *Пусть функция $f(z)$ аналитична в угле $D = \{z:\ a < \arg z < b\}$, непрерывна в конечных точках D и имеет порядок не выше ρ. Если на сторонах угла $|f(z)| \leqslant M$ и $b - a < \pi/\rho$, то $|f(z)| \leqslant M$ всюду в $\overline{D}$.*

□ Для удобства считаем, что $a = -b = -\alpha$. Тогда $\rho < \pi/(2\alpha)$. Фиксируем числа $\varepsilon > 0$ и ρ_1 такими, чтобы $\rho + \varepsilon < \rho_1 < \pi/(2\alpha)$. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi_\delta(z) = f(z)\exp(-\delta z^{\rho_1}), \quad \delta > 0.$$

Так как по условию

$$|f(z)| \leqslant \exp(|z|^{\rho+\varepsilon}), \quad |z| \geqslant r_0 = r_0(\varepsilon),$$

то при $|z| = R > r_0$

$$|\varphi_\delta(z)| \leqslant \exp(|z|^{\rho+\varepsilon} - \delta|z|^{\rho_1}\cos\rho_1\alpha).$$

Далее, $\cos\rho_1\alpha > 0$, а $|\exp(-\delta z^{\rho_1})| \leqslant 1$ в $\overline{D}$, значит,

$$|\varphi_\delta(z)| \leqslant M, \quad (\arg z = \pm\alpha) \cup (|z| = R);$$

R — достаточно большое; поэтому для любой фиксированной точки z_0 сектора $|z| < R,\ |\arg z| < \alpha$ по принципу максимума модуля имеем

$$|\varphi_\delta(z_0)| \leqslant M$$

или

$$|f(z_0)| \leqslant M\exp(\delta|z_0|^{\rho_1}\cos\rho_1\theta_0), \quad z_0 = |z_0|e^{i\theta}.$$

Так как $\delta > 0$ здесь можно взять произвольно малым, то теорема доказана. ■

Теорема 14 *Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $D = \{z:\ |\arg z| < \pi/(2\rho)\}$, непрерывна в конечных точках $\overline{D}$ и имеет порядок ρ и тип σ. Если $|f(z)| \leqslant M$ на сторонах угла, то*

$$|f(z)| \leqslant M\exp(\sigma|z|^\rho\cos\rho\theta), \quad z = |z|e^{i\theta} \in \overline{D}.$$

□ По условию

$$|f(z)| \leqslant \exp((\sigma+\varepsilon)|z|^\rho), \quad |z| \geqslant r_0 = r_0(\varepsilon)$$

Значит, функция

$$\varphi_\varepsilon(z) = f(z)\exp(-(\sigma+2\varepsilon)z^\rho)$$

ограничена по модулю на сторонах D и на положительном луче вещественной оси. Функция $\varphi_\varepsilon(z)$ имеет порядок не выше ρ и поэтому по теореме 13 она ограничена по модулю в каждом из углов

$$0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2\rho}, \quad \frac{-\pi}{2\rho} \leqslant \arg z \leqslant 0.$$

Значит, в $\overline{D}$ $\varphi_\varepsilon(z)$ имеет порядок не выше δ, где $\delta > 0$ — произвольно. Беря $\delta < \rho$ и снова применяя теорему 5 (уже для $\overline{D}$) и учитывая, что $|\varphi_\varepsilon(z)| \leqslant M$ на сторонах D, заключаем, что $|\varphi_\varepsilon(z)| \leqslant M$, $z \in \overline{D}$ или

$$|f(z)| \leqslant M \exp((\sigma + 2\varepsilon)|z|^\rho \cos\rho\theta), \quad z \in \overline{D}.$$

Остается перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. ■

Следствие 10 *Пусть функция $f(t)$ имеет в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$ *порядок $\rho = 1$ и тип σ. Если $|f(z)| \leqslant M$ на мнимой оси, то*

$$|f(z)| \leqslant M e^{\sigma \operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Следствие 11 *Пусть функция $f(t)$ имеет в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *порядок $\rho = 1$ и тип σ. Если $|f(z)| \leqslant M$ на вещественной оси, то*

$$|f(z)| \leqslant M e^{\sigma \operatorname{Im} z}, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Теорема 15 *Пусть ц.ф. $f(z)$ имеет рост не выше чем первого порядка и минимального типа. Тогда $|f(z)|$ неограничен ни на одной прямой, если $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$.*

□ Всегда можно придти к случаю, когда данная прямая — вещественная ось. Если бы $|f(z)|$ был ограничен на ней, то применяя следствие 11 к полуплоскости $\operatorname{Im} z \gtreqless 0$, мы получили бы, что $|f(z)| \leqslant M$ во всей плоскости. По теореме Лиувилля $f(z) \equiv \mathrm{const}$. Мы рассмотрели случай $\rho = 1$. Если $\rho < 1$, то надо применить теорему 13. ■

Следствие 12 *Пусть ц.ф. $f(z) \in [1/2, 0]$. Тогда $|f(z)|$ неограничен ни на какой полупрямой, если $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$.*

□ Пусть эта полупрямая есть вещественная полуось. Функция $f(z^2)$ есть целая класса $[1, 0]$. Если $|f(z)|$ ограничен на этой полуоси, то $|f(z^2)|$ ограничен на вещественной оси. По тереме 15 $f(z^2) \equiv \mathrm{const}$. ■

10 Индикатор роста функции

10.1 Тригонометрически ρ-выпуклые функции

Определение Функцию вида

$$H(\theta) = a\cos\rho\theta + b\sin\rho\theta \tag{48}$$

будем называть *ρ-тригонометрической.*

Определение Функция $h(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta < \beta$ называется *тригонометрически ρ-выпуклой*, если для любых точек θ_1, θ_3 таких, что $\alpha \leqslant \theta_1 < \theta_3 \leqslant \beta$, $\theta_3 - \theta_1 < \pi/\rho$, из условия

$$h(\theta_i) \leqslant H(\theta_i), \quad i = 1, 3, \tag{49}$$

где $H(\theta)$ — произвольная ρ-тригонометрическая функция, следует

$$h(\theta) \leqslant H(\theta), \quad \theta_1 < \theta < \theta_3. \tag{50}$$

Понятие тригонометрически ρ — выпуклости есть обобщение обычной выпуклости (когда $H(\theta) = a\theta + b$).

Если числа θ_1, θ_3, h_1, h_3 фиксированы и $\theta_3 - \theta_1 \neq k\pi/\rho$, $k \in \mathbb{Z}$, то существует единственная ρ — тригонометрическая функция $H(\theta)$, интерполирующая значения h_1, h_3 в точках θ_1, θ_3. Она имеет вид

$$H(\theta) = \frac{h_1 \sin\rho(\theta_3 - \theta) + h_3 \sin\rho(\theta - \theta_1)}{\sin\rho(\theta_3 - \theta_1)} \tag{51}$$

В самом деле, (51) показывает, что $H(\theta_j) = h_j,\ j = 1,3$. Чтобы доказать единственность, достаточно убедиться, что $h_j = 0\ (j = 1,3) \Rightarrow H(\theta) \equiv 0$. А это очевидно, так как функция (48) может быть записана в форме

$$H(\theta) = A\cos(\rho\theta - \alpha),$$

а потому ее нули образуют последовательность вида $\beta + k\pi/\rho$. Из (51) следует свойство подчиненности ρ-тригонометрических функций: если функция $\widetilde{H}(\theta)$ отвечает значениям $\widetilde{h}_1,\ \widetilde{h}_3$ и $\theta_3 - \theta_1 < \pi/\rho$, то

$$\widetilde{h}_j \leqslant h_j\ (j = 1,3) \Rightarrow\ \widetilde{H}(\theta) \leqslant H(\theta) \quad (\theta_1 < \theta < \theta_3),$$

причем если хотя бы при одном j слева неравенство строгое, то оно строгое и справа.

В нижеследующих леммах $h(\theta)$ — тригонометрически ρ-выпуклая функция на $[\alpha,\beta]$.

Лемма 6 *Если $h(\theta_1) = -\infty$ при некотором значении $\theta_1 \in [\alpha,\beta]$, то $h(\theta) \equiv -\infty$ в (α,β).*

□ Пусть для определенности $\theta_1 = \alpha$. Фиксируем точку θ_3 так, чтобы $\theta_3 - \theta_1 < \pi/\rho$, и числа $h_1,\ h_3$ так, чтобы $h_j \geqslant h(\theta_j),\ j = 1,3$. Построим соответствующую функцию (51). Тогда, в силу тригонометрической ρ-выпуклости, будем иметь $h(\theta) \leqslant H(\theta),\ \theta \in (\theta_1,\theta_3)$. Но значение h_1 мы можем, благодаря условию, брать сколь угодно близким к $-\infty$ (не меняя h_3). Значит $h(\theta) \equiv -\infty, \quad \theta_1 < \theta < \theta_3$.

Теперь в качестве новой точки θ_1 берем значение $\theta_1 - \varepsilon$ и повторяем рассуждение. После конечного числа шагов получим, что $h(\theta) \equiv -\infty$ на всем интервале (α,β). ■

Замечание 7 *Если при $\theta_j \to \theta_0 \in [\alpha,\beta]$ $h(\theta_j) \to -\infty$, то $h(\theta) \equiv -\infty$ в (α,β).*

Это доказывается незначительным изменением доказательства предыдущей леммы.

Таким образом, тригонометрически ρ-выпуклая функция $h(\theta)$ либо равна $-\infty$ в (α,β), либо ограничена как сверху, так и снизу; в последнем случае говорим, что $h(\theta)$ конечна.

Лемма 7 *Пусть $\alpha \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \leqslant \beta,\ \theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho,\ \theta_3 - \theta_2 < \pi/\rho$. Если*

$$h(\theta_1) \leqslant H(\theta_1), \quad h(\theta_2) = H(\theta_2), \tag{52}$$

то

$$h(\theta_3) \geqslant H(\theta_3)$$

□ Фиксируем точку $\theta' \in (\theta_1,\theta_2)$ столь близкой к θ_2, чтобы $\theta_3 - \theta' < \pi/\rho$. В силу тригонометрической ρ-выпуклости $h(\theta)$, из условий (52) следует, что

$$h(\theta') \leqslant H(\theta'). \tag{53}$$

Предположим противное: $h(\theta_3) < H(\theta_3)$. Пусть ρ-тригонометрическая $\widetilde{H}(\theta)$ интерполирует значения $H(\theta'),\ h(\theta_3)$ в точках $\theta',\ \theta_3$. Тогда в силу тригонометрической ρ-выпуклости функции (51) и по (53)

$$h(\theta_2) \leqslant \widetilde{H}(\theta_2) < H(\theta_2).$$

Мы поучили противоречие с правым условием (52). ■

Лемма 8 *Пусть $\alpha \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \leqslant \beta,\ \theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho,\ \theta_3 - \theta_2 < \pi/\rho$. Тогда, если $h(\theta)$ конечна, то*

$$h(\theta_1)\sin\rho(\theta_2 - \theta_3) + h(\theta_2)\sin\rho(\theta_3 - \theta_1) + h(\theta_3)\sin\rho(\theta_1 - \theta_2) \leqslant 0. \tag{54}$$

(Левую часть легко запомнить: надо расположить точки $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ по окружности, тогда их комбинация в каждом последующем члене получается из предыдущей круговым вращением.)

□ Из (51) следует, что (заменить θ_3 на θ_2, а θ — на θ_3)

$$H(\theta_1)\sin\rho(\theta_2 - \theta_3) + H(\theta_2)\sin\rho(\theta_3 - \theta_1) + H(\theta_3)\sin\rho(\theta_1 - \theta_2) = 0.$$

Пусть $H(\theta_j) = h(\theta_j),\ j = 1,2$; по лемме 7 $h(\theta_3) \geqslant H(\theta_3)$ ■

Лемма 9 *Если функция $h(\theta)$ конечна на $[\alpha,\beta]$, то она непрерывна в (α,β).*

□ Фиксируем $\theta_2 \in (\alpha, \beta)$. Пусть $\theta_1,\ \theta_3 \in [\alpha, \beta]$, $\theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$, $\theta_3 - \theta_2 < \pi/\rho$. Обозначим через $H_{ij}(\theta)$ ρ-тригонометрическую функцию, интерполирующую значения $h(\theta_i),\ h(\theta_j)$ в точках $\theta_i,\ \theta_j$ $(j = i+1)$. В силу тригонометрической ρ-выпуклости $h(\theta)$ по лемме 7

$$H_{2,3}(\theta) \leqslant h(\theta) \leqslant H_{1,2}(\theta), \quad \theta_1 < \theta \leqslant \theta_2;$$
$$H_{1,2}(\theta) \leqslant h(\theta) \leqslant H_{2,3}(\theta), \quad \theta_2 < \theta \leqslant \theta_3.$$

Значит при любом положении точки θ

$$\frac{H_{1,2}(\theta) - H_{1,2}(\theta_2)}{\theta - \theta_2} \leqslant \frac{h_{1,2}(\theta) - h_{1,2}(\theta_2)}{\theta - \theta_2} \leqslant \frac{H_{2,3}(\theta) - H_{2,3}(\theta_2)}{\theta - \theta_2}.$$

Функция $h(\theta)$ всюду дифференцируема; поэтому при $\theta \to \theta_2$ пределы крайних членов существуют. Следовательно средний член ограничен, что возможно только при $h(\theta) \to h(\theta_2)$. ■

Полагая в (54) $\theta_1 = \theta,\ \theta_2 = \theta + \pi/2\rho,\ \theta_3 = \theta + \pi/\rho$, получаем следующую лемму.

Лемма 10 *Если $h(\theta)$ конечна и $\theta,\ \theta + \pi/\rho \in [\alpha, \beta]$, то*

$$h(\theta) + h(\theta + \pi/\rho) \geqslant 0.$$

10.2 Индикатор и его свойства

Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $\alpha < \arg z < \beta$ и непрерывна на его замыкании. Предположим, что $f(z)$ имеет конечный тип при порядке ρ (т.е. при некотором $a > 0$

$$|f(z)| < \exp(a|z|^\rho), \quad z \geqslant r_0). \tag{55}$$

Следуя Фрагмену и Линделефу, индикатором роста функции $f(z)$ назовем функцию

$$h(\theta) = h_f(\theta) = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}.$$

Очевидно, $\sigma \geqslant h(\theta)$. Индикатор характеризует рост $|f(z)|$ по направлениям.
Пример Пусть $f(z) = \exp((a - ib)z^\rho)$, $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$. Тогда

$$|f(re^{i\theta})| = \exp((a \cos \rho\theta + b \sin \rho\theta) r^\rho);$$

следовательно, индикатор $f(z)$ равен

$$a \cos \rho\theta + b \sin \rho\theta,$$

причем здесь $h(\theta) = \lim$, а не только $\overline{\lim}$.

Теорема 16 *Индикатор есть тригонометрически ρ-выпуклая функция.*

□ Ограниченность $h(\theta)$ сверху следует из (55). Пусть $H(\theta)$ — ρ-тригонометрическая функция, удовлетворяющая условиям (49). Фиксируем $\delta > 0$. Пусть функция

$$H_\delta(\theta) = a_\delta \cos \rho\theta + b_\delta \sin \rho\theta$$

интерполирует в точках $\theta_1,\ \theta_3$ $(\theta_3 - \theta_1 < \pi/\rho)$ значения $H(\theta_1) + \delta,\ H(\theta_3) + \delta$. Составим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z) \exp(-(a_\delta - ib_\delta)z^\rho).$$

Используя предыдущий пример, имеем

$$h_\varphi(\theta) = h_f(\theta) - H_\delta(\theta).$$

Так как $h_f(\theta_j) \leqslant H(\theta_j)$, $j = 1, 3$, то $h_\varphi(\theta_j) < 0$, и, следовательно, на лучах $\arg z = \theta_1,\ \theta_3$ $\varphi(z) \to 0$ при $z \to \infty$; в частности $|\varphi(z)| \leqslant C$ на этих лучах. По теореме Фрагмена-Линделефа $|\varphi(z)| \leqslant C$ при $\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_3$. Значит,

$$|f(z)| \leqslant C|\exp((a_\delta - ib_\delta)z^\rho)| = C \exp(H_\delta(\theta) r^\rho), \quad \theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta 3,$$

т.е.

$$h_f(\theta) \leqslant H_\delta(\theta), \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_3.$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 0$ и учитывая непрерывную зависимость функции (51) от $h_1,\ h_3$, получаем требуемое неравенство (50). $\blacksquare$

Из теоремы (16) и лемм предыдущего пункта сразу вытекают следующие свойства индикатора.

Свойство 1. Для любых $\alpha \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \leqslant \beta$ и таких, что $\theta_{j+1} - \theta_j < \pi/\rho$, имеет место соотношение (54).

Свойство 2. Индикатор $h(\theta)$ либо конечен на $[\alpha, \beta]$, либо $h(\theta) \equiv -\infty$ в (α, β) (конечность есть ограниченность).

Свойство 3. Если индикатор $h(\theta)$ конечен, то он непрерывен в (α, β).

Свойство 4. Если индикатор $h(\theta)$ конечен на $[\alpha, \beta]$ и $\theta,\ \theta + \pi/\rho \in [\alpha, \beta]$, то

$$h(\theta) + h(\theta + \pi/\rho) \geqslant 0. \tag{56}$$

Теперь речь пойдет о целых функциях. В этом случае, в силу свойства 3, индикатор есть непрерывная, 2π-периодическая функция.

Свойство 5. Пусть ц.ф. $f(z)$ имеет конечный тип при порядке ρ. Если $h(\theta) = -\infty$ при некотором θ, то $f(z) \equiv 0$.

$\square$ Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на части точками деления θ_j так, чтобы $\theta_{j+1} - \theta_j < \pi/\rho$. По свойству 2 $h(\theta) \equiv -\infty$, и поэтому на лучах $\arg z = \theta_j$ $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$. По теореме Фрагмена-Линделефа $|f(z)|$ ограничен в каждом угле $\theta_j \leqslant \arg z \leqslant \theta_{j+1}$, а значит и во всей плоскости. По теореме Лиувилля $f(z) \equiv \mathrm{const}$. Так как $f(re^{i\theta_j}) \xrightarrow{r\to\infty} 0$, то $c = 0$. $\blacksquare$

Теорема 17 *Пусть ц.ф. $f(z)$ имеет конечный тип при порядке ρ. И пусть индикатор $h(\theta)$ конечен. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists r_0 = r_0(\varepsilon)$ такое, что*

$$|f(z)| \leqslant \exp((h(\theta + \varepsilon) r^\rho)), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ |z| = r > r_0. \tag{57}$$

$\square$ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на части точками деления $o = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{n+1} = 2\pi$ так, чтобы на каждом отрезке $[\theta_j, \theta_{j+1}]$ колебание $h(\theta)$ не превосходило $\varepsilon/5$ и чтобы $\theta_{j+1} - \theta_j < \pi/\rho$. Пусть

$$H_j(\theta) = a_j \cos\rho\theta + b_j \sin\rho\theta$$

такая функция, что

$$H_j(\theta_j) = h(\theta_j) + \varepsilon/5 = h_j, \quad H_j(\theta_{j+1}) = h(\theta_{j+1}) + \varepsilon/5 = h_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Пусть

$$\varphi_j(z) = f(z)\exp(-(a_j - ib_j)z^\rho), \quad \theta_j \leqslant \arg z \leqslant \theta_{j+1}.$$

По построению $\varphi_j(z) \xrightarrow{z\to\infty} 0$ на лучах $\arg z = \theta_j,\ \theta_{j+1}$. По теореме Фрагмена-Линделефа $|\varphi_j(z)| \leqslant c_j$ в лучах $\theta_j \leqslant \arg z \leqslant \theta_{j+1}$. Значит,

$$|f(z)| \leqslant \exp(H_j(\theta) r^\rho), \quad \theta_j \leqslant \arg z \leqslant \theta_{j+1},$$

и при $r > r_j$ будет выполнено свойство

$$|f(z)| \leqslant \exp((H_j(\theta) + \varepsilon/5) r^\rho), \quad \theta_j \leqslant \arg z \leqslant \theta_{j+1}. \tag{58}$$

Так как углов $\theta_j \leqslant \arg z \leqslant \theta_{j+1}$ конечное число, то сравнивая (58) с (57), видим, что надо оценить $H_j(\theta)$ через $h(\theta)$ сверху. Для этого воспользуемся формулой (51). Имеем ($h_1 = h_j,\ h_3 = h_{j+1},\ \theta_1 = \theta_j,\ \theta_3 = \theta_{j+1}$)

$$H_j(\theta) = \frac{(h_j - h_{j+1})\sin\rho(\theta_{j+1} - \theta_j) + h_{j+1}(\sin\rho(\theta - \theta_j) - \sin\rho(\theta - \theta_{j+1}))}{\sin\rho(\theta_{j+1} - \theta_j)} =$$

$$= (h_j - h_{j+1})\frac{\sin\rho(\theta_{j+1} - \theta_j)}{\sin\rho(\theta_{j+1} - \theta_j)} + h_{j+1}\frac{\cos\rho\left(\theta - \frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2}\right)}{\cos\rho\frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{2}} = A + B, \quad \theta_j \leqslant \theta \leqslant \theta_{j+1}.$$

По построению $|A| < \varepsilon/5$. Далее, благодаря ограниченности $h(\theta)$, точки $\theta_j,\ \theta_{j+1}$ можно выбрать столь близкими друг к другу, чтобы

$$B = h_{j+1} + b, \quad |b| < \varepsilon/5.$$

Таким образом,

$$H_j(\theta) \leqslant h_{j+1} + 2\varepsilon/5 = h(\theta_{j+1}) + 3\varepsilon/5, \quad \theta_j \leqslant \theta \leqslant \theta_{j+1}$$

и вспоминая условие на колебание $h(\theta)$, получаем для всех j

$$H_j(\theta) \leqslant h(\theta) + 4\varepsilon/5, \quad \theta_j \leqslant \theta \leqslant \theta_{j+1}.$$

Теперь (57) следует из (58). ■

Из (57) следует, что $\sigma \leqslant \max h(\theta)$. Соединяя это с замечанием, сделанным после определения индикатора, имеем
Свойство 6.

$$\sigma = \max_{[0,2\pi]} h(\theta).$$

Свойство 7. Если индикатор ц.ф. $f(z)$ конечен, то

$$-\sigma \leqslant \min_{[0,2\pi]} h(\theta).$$

Следствие 13 *Ц.ф. $f(z)$ тогда и только тогда имеет минимальный тип при порядке ρ, когда $h(\theta) \equiv 0$.*

11 Приложения индикатора

11.1 Убывание функции и ее преобразование Фурье

Пусть функция $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, пусть $\widehat{f}(x)$ — ее преобразование Фурье, т.е.

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функции f и $\widehat{f}$ не могут убывать на бесконечности произвольно быстро одновременно. Одним из первых, кто заметил это был Харди.

Теорема 18 (Морган) *Пусть*

$$|f(t)| = O(\exp(-A|t|^p)), \quad A > 0,\ p > 1, \tag{59}$$

$$|f(t)| = O(\exp(-B|t|^p)), \quad B > 0,\ l > 1, \tag{60}$$

Если $1/p + 1/l < 1$, то $f \equiv \widehat{f} \equiv 0$.

□ Рассмотрим функцию

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(t)dt.$$

В силу (59),

$$|e^{-itz} f(t)| \leqslant \exp(|t||y| - A|t|^p), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{61}$$

Значит, $g(z)$ — целая функция. Ясно, что $g(x) = \widehat{f}(x)$.

Будем считать, что $A > 1/p$; к этому случаю всегда можно придти, беря вместо $f(t)$ функцию $f(\lambda t)$ при надлежащем $\lambda > 0$. Применяя последовательно оценку (61) и неравенство Юнга

$$|ty| \leqslant \frac{1}{p}|t|^p + \frac{1}{q}|y|^q, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

получаем

$$|g(z)| \leqslant e^{\frac{1}{q}|y|^q} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\left(A - \frac{1}{p}\right)|t|^p)dt = C\exp(\frac{1}{q}|y|^q).$$

Следовательно, рост $g(z)$ не выше, чем порядка q и нормального типа. Обозначим через $h(\theta)$ индикатор $g(z)$ при порядке q. Используя условие (60), имеем

$$h(0) \leqslant \overline{\lim_{x\to\infty}}(-B|x|^{l-q}) = -\infty,$$

так как $l > q$. По свойству 5 индикатора (§11) $g(z) \equiv 0$. Значит $\widehat{f}(x) \equiv 0 \equiv f(x)$. ■

11.2 Об обобщенной квазианалитичности

Теорема 19 (Шилов) *Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на всей оси и для всех $n,\ m \in \mathbb{Z}_+$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)| \leqslant CA^n n^{\alpha n} m^{\beta m}, \quad C,\ A,\ B > 0,\ 0^0 = 1. \tag{62}$$

Если $\alpha+\beta<1$, то $f(x)\equiv 0$.

□ Сначала покажем, что $f(z)$ — ц.ф. Затем оценим ее и применим одно из свойств индикатора.

Рассмотрим ряд Тейлора функции $f(z)$ с центром в точке x

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x)(z-x)^m}{m!}.$$

Пусть $x>0,\ |z-x|\leqslant 2x$; тогда, в силу (62),

$$|f^{(m)}(x)(z-x)^m| \leqslant 2^m |x^m f^{(m)}(x)| \leqslant C(2AB)^m \cdot m^{\alpha+\beta}m.$$

Значит в круге $|z-x|\leqslant 2x$ ряд Тейлора мажорируется рядом

$$C\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2AB)^m \cdot m^{\alpha+\beta}m}{m!},$$

сходящимся по условию $\alpha+\beta<1$. Значит $f(z)$ аналитична в круге $|z-x|<2x$; так как здесь x произвольно, то $f(z)$ — целая функция.

Представляя теперь значение $f(x+iy)$ рядом Тейлора с центром в точке x и используя условие (62), имеем

$$|x^n f(x+iy)| \leqslant CA^n n^{\alpha n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b|y|)^m m^{\beta m}}{m!},$$

так как

$$m! \geqslant C\sqrt{2\pi n}\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^m \geqslant C\left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^m.$$

Поэтому из предыдущего следует, что

$$|x^n f(x+iy)| \leqslant CA^n n^{\alpha n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(B_1|y|)^m}{(m!)^{1-\beta}} \left(\frac{1}{2^\beta}\right)^m.$$

Теперь по неравенству Гельдера ($p=1/(1-\beta)$)

$$|x^n f(x+iy)| \leqslant Cn^{\alpha n} A^n \exp(b|y|^{\frac{1}{1-\beta}}), \quad b>0,$$

и значит

$$|x^n f(x+iy)| \leqslant C\exp(b|y|^{\frac{1}{1-\beta}}) \min_n \left(\left(\frac{A}{|x|}\right)^n \cdot n^{\alpha n}\right), \quad b>0.$$

Считая n непрерывной переменной, находим дифференцированием, что написанный минимум достигается при

$$n = e^{-}1\left(\frac{A}{|x|}\right)^{-1/\alpha}, \tag{63}$$

и следовательно равен

$$\exp(-a|x|^{1/\alpha}), \quad a>0. \tag{64}$$

Значение (63) может оказаться нецелым числом; тогда надо взять вместо него одно из ближайших целых. Расстояние между этими числами $\leqslant 1$; поэтому значение минимума (64) сохранится за счет некоторого уменьшения константы a.

В итоге

$$|f(x+iy)| \leqslant C\exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}), \quad a,\ b>0.$$

Таким образом рост целой функции $f(z)$ не выше порядка $\rho = 1/(1-\beta)$ и нормального типа. По условию $\alpha+\beta<1$; отсюда $1/\alpha > \rho = 1/(1-\beta)$, и поэтому

$$h(0) = \overline{\lim_{x\to\infty}}(-a|x|^{1/\alpha-\rho}) = -\infty.$$

По свойству 5 индикатора $f(z)\equiv 0$. ■

11.3 О единственности аналитических функций

Теорема 20 *Пусть функция $f(z)$ аналитична при* $\operatorname{Re} z > 0$*, непрерывна при* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ *и допускает оценку*

$$|f(z)| \leqslant C \exp(A|z|), \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0. \tag{65}$$

Если $|f(iy)| \leqslant M < \infty$ *и*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln|f(x)|}{x} = -\infty, \tag{66}$$

то $f(z) \equiv 0$.

☐ Пусть $h_f(\theta)$ — индикатор $f(z)$ при порядке $\rho = 1$. Тогда условие (66) означает, что $h_g(0) = -\infty$. Фиксируем $N > 0$ и положим

$$F(z) = f(z)\exp(Nz).$$

Тогда $|F(z)|$ ограничен на мнимой оси константой M, допускает оценку типа (65) и $h_F(0) = -\infty$. В частности, $|F(z)|$ ограничен на вещественной полуоси. Применяя к $F(z)$ теорему Фрагмена-Линделефа для углов $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$, $-\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant 0$, заключаем, что $|F(z)| \leqslant C$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Теперь применяем теорему Фрагмена-Линделефа для угла $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$; получаем, что $|F(z)| \leqslant M$. Значит,

$$|f(z)| \leqslant Me^{-Nx}, \quad x = \operatorname{Re} z > 0,$$

и все следует из того, что N можно брать сколь угодно большим. ■

Теорема 21 *Пусть функция $f(z)$ аналитична при* $\operatorname{Re} z > 0$*, непрерывна при* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ *и допускает оценку (65). Если*

$$h_f(\pi/2) + h_f(-\pi/2) < 0, \tag{67}$$

то $f \equiv 0$.

☐ Пусть $F = f\exp(i\Delta z)$, $\Delta \in \mathbb{R}$. Используя условие (67), можно подобрать Δ так, чтобы $h_F(\pm\pi/2) < 0$. При этом оценка (65) сохранится и для F. По свойству 4 индикатора $h_F \equiv -\infty$. Но $f(\pm iy) \to 0$, $y \to \infty$; в частности, $|F(iy)| \leqslant M < \infty$. Остается применить теорему 20. ■

Теорема 22 *Пусть функция $f(z)$ аналитична при* $\operatorname{Re} z > 0$*, непрерывна при* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ *и допускает оценку (65). Если* $f(n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$h_f(\pi/2) + h_f(-\pi/2) < 2\pi,$$

то $f(z) \equiv 0$.

☐ Рассмотрим аналитическую при $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывную при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ функцию $F(z) = f(z)/\sin\pi z$. Т.к. для $\sin\pi z$ $h(\pm\pi/2) = \pi$, то

$$h_F(\pi/2) + h_F(-\pi/2) < 0.$$

Так как $|1/\sin\pi z| \leqslant c$ на полуокружностях $|z| = n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то на них $|F(z)| \leqslant c\exp(A|z|)$. Если же $n - 1/2 < |z| \leqslant n + 1/2$, то по принципу максимума модуля $|F(z)| \leqslant c\exp(A|z|)$. Значит функция $F(z)$ допускает оценку (65). Теперь можно сослаться на теорему 2. ■

Теоремы 21, 22 принадлежат Карлсону.

12 Убывание целых функций

Когда речь идет об убывании ц.ф. (или — что то же — об оценках их модуля снизу), надо иметь ввиду, что ц.ф. вообще говоря обращается в 0 на некоторой последовательности точек, идущей в бесконечность. Следующая теорема есть просто-напросто подробная переформулировка свойства 7 индикатора.

Теорема 23 *Пусть ц.ф. $f(z)$ имеет порядок $\rho > 0$ и нормальный тип σ. Тогда* $\forall\theta \in [0, 2\pi)$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \geqslant -\sigma.$$

Теорема 11 показывает, что глобальное убывание на луче ц.ф. заданного роста не может быть произвольно быстрым.

12.1

Обозначим
$$m(r)=m_f(r)=\min_{|z|=r}|f(z)|$$

Теорема 24 *Если $f(z)\in[1/2,0]$ и $f(z)\not\equiv c$, то для некоторой последовательности $r_n\to\infty$*
$$m_f(r_n)\to+\infty.$$

Лемма 11 *Пусть $0<\rho<1$. Пусть ц.ф.*
$$f(z)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{z_n}\right) \tag{68}$$
принадлежит классу $[\rho,0]$ (либо имеет порядок ρ и нормальный тип). Тогда функция $g(z)$, определяемая бесконечным произведением
$$g(z)=\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{|z_n|}\right), \tag{69}$$
есть также ц.ф. класса $[\rho,0]$ (либо имеет порядок ρ и нормальный тип), причем
$$m_f(r)\geqslant m_g(r)=g(-r),\quad M_f(r)\leqslant M_g(r)=g(r). \tag{70}$$

□ Так как $\tau\leqslant\rho$, то $\tau(z_n)<1$ и $\tau(|z_n|)=\tau(z_n)<1$. Поэтому и f и g суть канонические произведения рода $p=0$. В частности, $g(z)$ — ц.ф. Далее, у последовательностей $\{z_n\}$ и $\{-|z_n|\}$ совпадают верхние плотности при порядке ρ. Поэтому применяя теорему 10 (§8.1), заключаем, что $g(z)$, подобно $f(z)$, имеет минимальный (или нормальный) тип.

Далее, ясно, что
$$\left|1-\frac{r}{r_n}\right|\leqslant\left|1-\frac{re^{i\theta}}{r_n}\right|\leqslant\left|1+\frac{r}{r_n}\right|,\quad r=|z|,\ r_n=|z_n|, \tag{71}$$
поэтому $m_f(r)\geqslant g(-r),\quad M_f(r)\leqslant g(r).$ ■

Доказательство теоремы 24 По теореме Адамара функция $f(z)$ представима в виде (68) с точностью до множителя cz^m. Не снижая общности, считаем, что этот множитель отсутствует. По лемме $g(z)\in[1/2,0]$. По следствию 12 из §9 $|g(z)|$ неограничен на полупрямой $\arg z=\pi$. Т.е $|g(-r_n)|\to\infty$ для некоторой последовательности $r_n\to\infty$. Остается применить первое соотношение (70).

12.2 Теорема Бъерлинга

Чтобы уточнить рост $m(r)$ понадобится следующая

Теорема 25 (Бъерлинг) *Пусть $f(z)$ аналитична при $\operatorname{Re}z>0$ и непрерывна при $\operatorname{Re}z\geqslant0$. Пусть $f(z)\in[1,0]$ и*
$$|f(iy)|\leqslant\Phi(|y|),$$
где $\Phi(y)$ непрерывна и
$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\Phi(r)}{r^\rho}=0,\quad 0<\rho<1. \tag{72}$$
Тогда

а) Если Φ ограничена, то и $f(z)$ ограничена при $\operatorname{Re}z\geqslant0$.

б) Если Φ неограничена, то
$$\ln M(r)<\frac{1}{\cos(\pi\rho/2)}\ln\Phi(r),\quad r=r_n\to\infty.$$

□ Если Φ ограничена, то ограничена и $f(z)$ (по следствию 12 из §9). Пусть Φ неограничена. Рассмотрим функцию
$$F(z)=f(z)\exp(-\varepsilon z^\rho-a),\quad a>0,$$
где z^ρ положительна для положительных z. Для $=iy$ имеем
$$\ln|F(iy)|\leqslant\ln\Phi(|y|)-\varepsilon|y|^{rho}\cos\frac{\pi\rho}{2}-a. \tag{73}$$

Выберем $a = a(\varepsilon)$ так, чтобы
$$\ln \Phi(r) \leqslant r^\rho \cos \frac{\pi\rho}{2}\varepsilon + a \tag{74}$$
для всех r и при некотором $r = r(\varepsilon)$ был бы знак равенства. Это можно сделать благодаря условию (72). (Далее, так как Φ неограничена, то ясно, что $r(\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0)$. Тогда (73) показывает, что $|F(iy)| \leqslant 1$. И так как $F(z) \in [1, 0]$, то $|F(z)| \leqslant 1$ при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, т.е.
$$\ln M_f(r) \leqslant \varepsilon r^\rho + a, \quad r > 0 \tag{75}$$
При $r = r(\varepsilon)$ в (74) имеет место знак равенства. Выразим из этого равенства εr^ρ через $\ln \Phi(r)$ и подставим в (75); получим
$$\ln M(r) \leqslant \frac{1}{\cos(\pi\rho/2)} \ln \Phi(r) + a(\varepsilon)\left(1 - \frac{1}{\cos(\pi\rho/2)}\right), \quad r = r(\varepsilon).$$
Что и требовалось, так как $r(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to \infty$. ■

12.3

Теорема 26 *Пусть ц.ф.* $f(z) \in [\rho, 0]$, $0 < \rho \leqslant 1/2$. *Тогда*
$$\ln m(r_n) > (\cos \pi\rho) \ln M(r_n)$$
для некоторой последовательности $r_n \to \infty$.

□ В силу леммы достаточно доказать теорему 26 для функции $g(z)$, определяемой произведением (69).

Рассмотрим функцию $G(z) = g(z^2)$, аналитическую при $\operatorname{Re} z 0$ и непрерывную при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. С применением леммы заключаем, что в этой полуплоскости $G(z) \in [2\rho, 0]$. Кроме того,
$$|G(iy)| \leqslant \Phi(|y|) = |g(-y^2)|.$$
Для функции Φ выполнены условия теоремы Бъерлинга с заменой ρ на 2ρ. По этой теореме
$$\ln |g(r^2)| = \ln M_G(r) < \frac{1}{\cos \pi\rho} \ln |g(-r^2)|, \quad r = r_n \to \infty,$$
что и требуется (см. (70)). ■

12.4 Случай $\rho \in (0, 1)$

Перейдем к рассмотрению целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$.

Теорема 27 *Пусть ц.ф.* $f(z)$ *имеет порядок* $\rho \in (0, 1)$. *Тогда*
$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln m(r)}{\ln M(r)} \geqslant \cos \pi\rho.$$

□ В доказательстве ограничимся случаем, когда $f(z)$ имеет нормальный тип. Снова доказываем теорему для функции $g(z)$

1) Положим $\theta_1 = -\pi/2$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \pi/2$. По свойству индикатора
$$-h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2}\rho + h(0) \sin \pi\rho - h\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2}\rho \leqslant 0.$$
Так как $h(\pi/2) = h(-\pi/2)$, то отсюда
$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqslant \cos \frac{\pi}{2}\rho \cdot h(0). \tag{76}$$

2) Рассмотрим ρ-тригонометрическую функцию
$$H(\theta) = h(0) \cos \rho\theta.$$
Она интерполирует значения $h(0)$, $h(0)\cos(\pi\rho/2)$, $h(0)\cos \pi\rho$ в точках 0, $\pi/2$, π соответственно. На этом шаге нам надо показать, что
$$h(\pi) \geqslant h(0) \cos \pi\rho. \tag{77}$$

Предположим противное:
$$h(\pi) < h(0)\cos\pi\rho.$$
Тогда в силу свойства подчиненности, ρ-тригонометрическая функция $\widetilde{H}(\theta)$, интерполирующая в точках $0,\ \pi$ значения $h(0),\ h(\pi)$, удовлетворяла бы неравенству $\widetilde{H}()\theta < H(\theta),\ 0 < \theta < \pi$. В силу тригонометрической ρ-выпуклости индикатора, отсюда при $\theta = \pi/2$ мы имели бы $h(\pi/2) < H(\pi/2)$, что противоречит (76).

3) Имеем
$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln m(r)}{\ln M(r)} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{(\ln m(r))r^{-\rho}}{(\ln M(r))r^{-\rho}} \geqslant \frac{1}{h(0)}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln m(r)}{r^{\rho}} = \frac{h(\pi)}{h(0)},$$
и остается применить доказанное свойство (77). ■

В заключение отметим без доказательства следующий общий факт.

Теорема 28 *Для произвольной целой функции*
$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln m(r)}{\ln M(r)} \geqslant -1.$$

13 Программа курса

1. Шкала роста целых функций.
2. Выражение порядка и типа целой функции через ее коэффициенты Тейлора.
3. Формула Пуассона-Йенсена. Формула Йенсена. Показатель сходимости и верхняя плотность нулей целой функции.
4. Целые функции и бесконечные произведения. Теорема Вейерштрасса. Понятие канонического произведения.
5. Теорема Адамара и ее следствия.
6. Рост канонического произведения. Теорема Бореля.
7. Тип целой функции и распределение ее нулей. Теорем Линделефа.
8. Теоремы Фрагмена-Линделефа.
9. Тригонометрические ρ-выпуклые функции и их свойства.
10. Индикатор целой функции и его свойства.
11. Приложения индикатора (теорема Моргана, теоремы единственности)
12. Убывание целой функции. Теоремы Вимана. Теорема Бъерлинга.
13. Преобразование Бореля и его свойства.
14. Теорема Пэли-Винера.
15. Теорема Бернштейна.
16. Формула Карлемана.
17. Теорема Мюнца
18. Полнота систем экспонент в $L^p(-\pi, pi)$ (теоремы Левинсона).

14 Задачи к курсу

1. С помощью степенного ряда построить целую функцию порядка ρ и типа σ $(0 < \rho \leqslant \infty,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant \infty)$.
2. С помощью формулы Стирлинга показать, что функция $1/\Gamma(z)$ имеет максимальный тип при порядке 1.
3. Пусть функция $F(z)$ аналитична при $\operatorname{Im} z > 0$, непрерывна и ограничена при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Тогда
   (a) Если $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$, то $F(z) \xrightarrow{|z|\to\infty} 0,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0$.
   (b) Если $F(x) = O(|x|^{-m}),\ x \to \pm\infty,\ m > 0$, то $|F(z)| = O(z^{-m}),\ |z| \to \infty,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0$.
4. Пусть $h(\theta)$ — тригонометрически ρ-выпуклая функция
   (a) Пусть $h(\theta_1),\ h(\theta_3) \leqslant 0,\ \theta_1 < \theta_3$. Тогда
      i. Если $\theta_3 - \theta_1 < \pi/\rho$, то $h(\theta) \leqslant 0$ на $[\theta_1, \theta_3]$.
      ii. Если $\theta_3 - \theta_1 = \pi/\rho$ и $h(\theta_i) < 0$ хотя бы при одном значении $i = 1,\ 3$, то $h(\theta) \leqslant 0$ на $[\theta_1, \theta_3]$
   (b) Пусть $\theta_3 - \theta_1 = \pi/\rho$ и $h(\theta_i) = O(\theta - \theta_i)^2,\ \theta \to \theta_i,\ i = 1,\ 3$. Тогда $h(\theta) \leqslant 0$ на $[\theta_1, \theta_3]$.
5. Пусть $F(z)$ — ц.ф. экспоненциального типа. Если $|F(x)| = O(e^{-|x|}),\ x \to \pm\infty$, то $F(z) \equiv 0$.

Список литературы

[1] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М: ГИТТЛ, 1956. (приложение IV); вопрос 18.

[2] Левин Б.Я. Целые функции (курс лекций), МГУ, 1981; вопросы 1-11.

[3] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации, §§80-84; вопросы 13-15.

[4] Титчмарш Е.К. Теория функция. М., 1965. стр 139-140; вопросы 16, 17.

[5] Boas R.P. Entire functions. N.Y., 1954; вопрос 12.