МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.929, 517.98

Перез Ортиз Ромео

Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах наследственной механики и теплофизики

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Власов Виктор Валентинович

Москва 2017

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве. На основании локализации спектра и оценок указанных оператор-функций установлена корректная разрешимость начальных задач для упомянутых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра $\theta \in [0,1]$ в весовых пространствах Соболева, определенных на положительной полуоси, а также установлены представления сильных решений таких интегро-дифференциальных уравнений в виде слагаемых, отвечающих точкам спектра, соответствующих оператор-функций.

В диссертации изучается следующая задача для интегро-дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^{2\theta}u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2}$$

где A – самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Вещественное число θ принадлежит отрезку $[0,1]$, а функция $K(t)$ – ядро интегрального оператора. В зарубежной литературе уравнение вида (1) нередко называют уравнением Гуртина–Пипкина.

Интегро-дифференциальные уравнения, рассматриваемые в предлагаемой работе, являются операторными моделями уравнений, возникающих во многих областях механики и физики таких, как теория теплопроводности в средах с памятью [13, 25, 37] (уравнения Гуртина–Пипкина) и теория вязкоупругости [20]. Уравнения такого вида возникают также в кинетической теории газов [26], в теории усреднения в многофазных средах [17, 40], в теории акустики эмульсий [18], в динамике вязкоупругих твердых тел и в задачах управляемости термоупругих систем с памятью [24] (см. главы 18 и 19, соответственно, указанной монографии [24]).

Задача (1)–(2) является задачей для вязкоупругого стержня Кирхгофа в случае, когда $Au = -\Delta u$ и $\theta = 1/2$ (подробнее, см. работы [10, 19, 35] авторов Г. Кирхгофа, А. Аросио, С. Паниззи, Х.Е. Муньос Ривера, М.Г. Насо и Ф.М. Вегни). Задача (1)–(2) представляет собой также изотропную модель вязкоупругости, если полагать $A^2u = -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} u)$ и $\theta = 1$ или $A^2u = -\Delta u$ и $\theta = 1$, где μ и λ являются *параметрами Ламе* упругой среды (подробнее, см. работы [29, 34–36] авторов Х.Е. Муньос Ривера, М.Г. Насо, Е. Вук, Ф.М. Вегни, М. Фабризио и В. Лаззари).

Основная цель предлагаемой работы состоит в исследовании спектра оператор-функций $L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda)A^{2\theta}$ в случае, когда θ принадлежит отрезку $[0, 1]$. Здесь, оператор-функции $L(\lambda)$ являются символами уравнений (1), а $\widehat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа ядра $K(t)$.

Отметим, что в случае $\theta = 1$ спектральный анализ уравнений вида (1) подробно проводился в работах [3–5, 7, 44] В.В. Власова, Д.А. Медведева, Н.А. Раутиан и А.С. Шамаева. Исследование спектральных вопросов для уравнения типа Гуртина–Пипкина при иных предположениях относительно ядра $K(t)$ и при $\theta = 1$ в случае оператора $A = -y''(x)$, $y(0) = y(\pi) = 0$ проводилось также в работе [21] А. Э. Еременко и С.А. Иванова. Наличие параметра $\theta \in [0, 1)$ весьма существенно меняет структуру спектра оператор-функций $L(\lambda)$. При этом появляется ряд новых эффектов по сравнению со случаем $\theta = 1$.

Следует отметить, что при $\theta = 1$ представление решений в виде рядов по экспонентам было получено ранее в работах Н.А. Раутиан [15] и В.В. Власова [46] (см. также монографии [3, 4, гл. 3] указанных авторов). В предлагаемой работе представление решений в виде рядов по экспонентам получено для всех $\theta \in [0, 1]$.

Отметим также, что в работах [5, 6, 44] указанных авторов при $\theta = 1$ была установлена корректная разрешимость задач (1)–(2) в весовом пространстве Соболева на положительной полуоси. В данной работе, на основе спектрального анализа установлена корректная разрешимость задачи (1)–(2) в случае, когда параметр θ принадлежит отрезку $[0, 1]$.

Ряд глубоких результатов о корректной разрешимости вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной, а также результатов о спектре соответствующих оператор-функций получен Н.Д. Копачевским и его учениками. Ограничимся здесь указанием работ [11, 28, 47].

Укажем также работу Л. Пандолфи [38] в которой изучалась задача для уравнения типа Гуртина–Пипкина. Отметим, что в отличие от результатов второй главы в указанных работах разрешимость изучалась в пространствах, непрерывно дифференцируемых функций на конечном интервале по временной переменной t.

Здесь уместно подчеркнуть, что уравнения вида (1) изучались многими авторами (см., например, монографию [24] и приведенную в ней библиографию, работы [34–36] Х.Е. Муньос Ривера и соавторов, работы [15, 44, 46] В.В. Власова и соавторов и работу [29] М. Фабризио и В. Лаззари). Ограничимся здесь указанием работ Ф.М. Вегни [35], М. Фабризио и В. Лаззари [29], Х.Е. Муньос Ривера [34, 36] и соавторов, в которых рассматривался случай $\theta \in [0, 1]$. В указанных работах с помощью энергетических функционалов показано, что решение задачи (1)–(2) либо убывает полиномиально [35, 36] либо экспоненциально [29] когда время t стремится к $+\infty$. Отметим при этом, что в известных нам работах при $\theta \in [0, 1]$, спектральный анализ символов уравнений вида (1) не проводился.

Цель работы. Провести спектральный анализ оператор-функций $L(\lambda)$, являющихся символами уравнений вида (1) в случае, когда $\theta \in [0, 1]$. Получить асимптотику комплексной части спектра, в зависимости от свойств ядра рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений. На основании локализации спектра и оценок указанных оператор-функций получить результаты о корректной разрешимости начальных задач для интегро-дифференциальных уравнений вида (1) в случае, когда параметр θ принадлежит отрезку $[0, 1]$ и установить результаты о представлении сильных решений интегро-дифференциальных уравнений вида (1) в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра указанных оператор-функций $L(\lambda)$ в случае $\theta \in [0, 1]$.

Методы исследования. В работе применяются методы спектральной теории операторов и оператор-функций, методы комплексного анализа, а также методы теории дифференциальных уравнений.

Научная новизна. В диссертации получены новые результаты, которые состоят в следующем:

1) Проведен спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений вида (1): установлена общая структура спектра, получены асимптотики вещественной и комплексной частей спектра указанных оператор-функций $L(\lambda)$ в случае, когда $\theta \in [0, 1]$. Изучена зависимость локализации спектра от свойств ядра интегрального оператора, входящего в изучаемые уравнения.

2) На основе спектрального анализа получены следующие новые результаты:

   - Теоремы о корректной разрешимости начальных задач в пространствах Соболева вектор-функций на положительной полуоси для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (1) по временной переменной в случае, когда $\theta \in [0, 1]$.

- Теоремы о представлении сильных решений в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра оператор-функций $L(\lambda)$, являющихся символами изучаемых уравнений.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по спектральной теории операторных пучков (оператор-функций), теории интегро-дифференциальных уравнений, а также в дальнейших исследованиях ряда математических задач теории управления и задач прикладного характера, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизики.

Апробация работы. Постановки задач и результаты диссертации обсуждались на следующих научных семинарах:

- Научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, под руководством академика В.А. Садовничего, 2016 г.

- Научный семинар «Операторные модели в математической физике» кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ, под руководством профессора А.А. Шкаликова, 2014–2017 гг. (неоднократно).

- Научный семинар «Спектральная теория неограниченных операторов в гильбертовом пространстве» кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, под руководством профессоров В.В. Власова и К.А. Мирзоева, 2016–2017 гг. (неоднократно).

- Научный семинар «Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения» кафедры дифференциальных уравнений и математической физики, РУДН, под руководством профессора А.А. Скубачевского, 2014 г.

- Научный семинар «Асимптотические методы в уравнениях математической физики» кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, под руководством профессоров В.В. Жикова, А.С. Шамаева, Т.А. Шапошниковой и Е.В. Радкевича, 2014 г.

- Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ, под руководством профессоров С.А. Агафонова, Д.В. Георгиевского и М.В. Шамолина, 2015 г.

- Научный семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ, под руководством чл.- корр. РАН, профессора М.И. Зеликина, чл.- корр. РАН, профессора В.Ю. Протасова, и профессоров В.М. Тихомирова и А.В. Фурсикова, 2015 г.

- Научный семинар по дифференциальным уравнениям кафедры математического моделирования института автоматики и вычислительной техники (АВТИ), НИУ «МЭИ», под руководством профессоров А.А. Амосова и Ю.А. Дубинского, 2016–2017 гг. (неоднократно).

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

- Международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А. Самарского в связи с 95-летием со дня его рождения (ВМК МГУ, Москва, 2014 г.).

- Международная конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященная 100-летию Б.М. Левитана (МГУ, Москва, 2014 г.).

- Международная конференция «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (МИАН, Москва, 2015 г.).

- Научная конференция «Тихоновские чтения», посвященная памяти академика А.Н. Тихонова. (ВМК МГУ, Москва, 2015 г.).

- 58-ая научная конференция МФТИ «Управление динамическими системами» (ИПМех РАН, Москва, 2015 г.).

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (ВлГУ, Суздаль, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 печатных работах, список которых приведен в конце диссертации. Из них 4 в журналах из перечня ВАК [48–51], 2 в электронном arXiv [52,53] и 5 в сборниках тезисов [54–58]. Все результаты совместных публикаций [48,50–53], включенные в диссертацию, получены лично Перезом Ортизом Ромео.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых, в общей сложности, на 12 параграфов и снабженных комментариями и замечаниями, а также списка литературы из 58 наименований. Общий объем диссертации составляет 122 страницы.

Обзор содержания диссертации

Введем некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем и приведем формулировки основных результатов диссертации.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Обозначим через $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям a_n: $Ae_n = a_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$.

На положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка (1)–(2).

Предполагается, что скалярная функция $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-\gamma_k t}$$

где $c_k > 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Более того, предполагается, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1. \tag{3}$$

Наряду с этим условием, в ряде случаев будет также использоваться условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty. \tag{4}$$

Условие (3) в рассматриваемом случае означает, что ядро $K(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$ и $\|K\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} < 1$. А условия (3) и (4) означают, что ядро $K(t)$ принадлежит скалярному пространству Соболева $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим оператор-функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda) A^{2\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq 1,$$

являющуюся символом (аналогом характеристического полинома) уравнения (1), где $\widehat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}$ является преобразованием Лапласа функции $K(t)$, I – единичный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Первая глава посвящена спектральному анализу интегро-дифференциального уравнения (1) в предположении, что выполнено условие

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\{\gamma_k(\gamma_{k+1}-\gamma_k)\}=+\infty. \tag{5}$$

Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$\ell_n(\lambda):=(L(\lambda)e_n,e_n)=\lambda^2+a_n^2\left(1-\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda+\gamma_k}\right),\ \ 0\le\theta\le 1. \tag{6}$$

При этом предполагается, что собственные значения оператора A удовлетворяют неравенствам $1\le a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$, при $a_n\to+\infty(n\to+\infty)$, где $Ae_n=a_ne_n$. Таким образом, получаем счетный набор мероморфных функций $\ell_n(\lambda)$, $n\in\mathbb{N}$.

Определение 1. Резольвентным множеством $R(\lambda)$ оператор-функции $L(\lambda)$ будем называть множество всех значений $\lambda\in\mathbb{C}$, для которых оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена. Дополнение множества $R(\lambda)$ в комплексной плоскости, т. е., $\sigma(L)=\{\lambda\in\mathbb{C}\setminus R(\lambda)\}$, будем называть спектром оператор-функции $L(\lambda)$.

В **первой главе** доказаны следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3) *и* $a_1\ge 1$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *содержится в левой полуплоскости.*

Замечание 1. Условие $a_1\ge 1$ существенно для того, чтобы спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежал в левой полуплоскости. Если $a_j<1$, $j=1,\ldots,n$ и выполнено условие (3), то в правой полуплоскости лежит n положительных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3), (4), (5) *и* $a_1\ge 1$. *Тогда, для каждого фиксированного* $n\in\mathbb{N}$, *множество нулей мероморфной функции*

$\ell_n(\lambda)$ представляет собой объединение счетного множества вещественных нулей $\{\lambda_{n,k}(\theta)|k\in\mathbb{N}\}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\cdots-\gamma_k<\lambda_{n,k}(\theta)<\cdots<-\gamma_1<\lambda_{n,1}(\theta)<0, \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty}\lambda_{n,k}(\theta)=-\gamma_k, \qquad (7)$$

а также пары нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, которые, при достаточно больших $n\in\mathbb{N}$, являются невещественными и комплексно-сопряженными $\lambda_n^{+}(\theta)=\overline{\lambda_n^{-}}(\theta)$, асимптотически представимыми в виде

$$\lambda_n^{\pm}(\theta)=-\frac{1}{2}\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}c_k+O\left(\frac{1}{a_n^{4-2\theta}}\right)\pm i\left(a_n+O\left(\frac{1}{a_n^{3-2\theta}}\right)\right),\ a_n\to+\infty. \qquad (8)$$

Замечание 2. В соотношении (8) подчиненные слагаемые, содержащие символы $O\left(\frac{1}{a_n^k}\right)$ выписаны отдельно для вещественной и мнимой части нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta)$.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 2, спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с замыканием множества нулей $\{\lambda_n^{\pm}(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{n,k}(\theta)\}_{n,k=1}^{\infty,\infty}$ мероморфных функций $\ell_n(\lambda)$, т. е. представи́м в виде*

$$\sigma(L)=\overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(\theta)\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\pm}(\theta)\right)}.$$

Распределение точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ на комплексной плоскости, представленное формулой (8) приведено на рисунке 1.

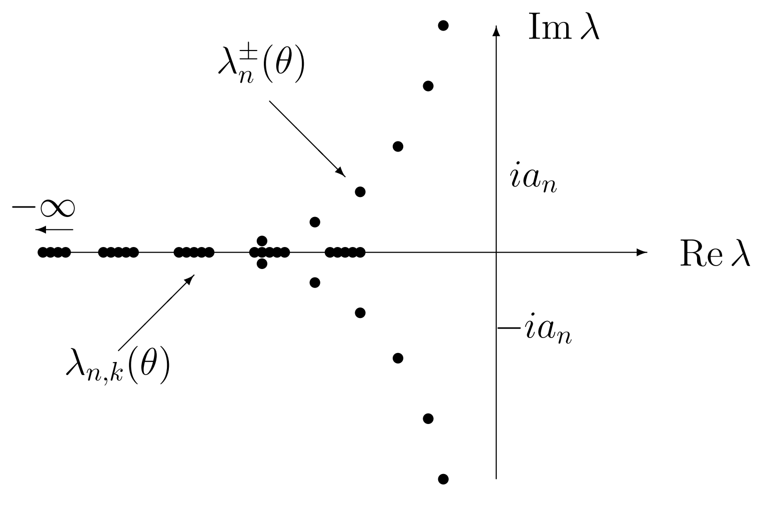

Рис. 1: Структура спектра в случае, когда $K(t)\in W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

При выполнении условий теоремы 2, в случае когда $\theta\in[0,1)$, невещественные части комплексно-сопряженных корней $\lambda_n^{\pm}(\theta)$ асимптотически стремятся к мнимой оси (см. рисунок 1), поскольку их действительные части стремятся к -0, при $n \to +\infty$. В случае $\theta = 1$, невещественные части комплексно-сопряженных корней $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, при $n \to +\infty$, асимптотически стремятся к прямой, параллельной мнимой оси, поскольку их действительные части стремятся к отрицательной константе $-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ (подробнее см. работу [5] и гл. 3 монографий [3, 4]). Таким образом, при $\theta \in [0, 1)$ невещественный спектр оператор-функции $L(\lambda)$ близок к спектру абстрактного волнового уравнения (при $K(t) \equiv 0$).

Рассмотрим случай ядра $K(t)$, принадлежащего пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$, но не принадлежащего пространству Соболева $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Условие 1. *Предположим, что последовательности* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ *имеют следующее представление*

$$c_k = \frac{\mathcal{A}}{k^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\gamma_k = \mathcal{B}k^{\beta} + O(k^{\beta-1}), \qquad k \in \mathbb{N}$$

которые, при $k \to +\infty$, *удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1,$$

где константы $\mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$.

Замечание 3. Если выполнено следующее соотношение

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \approx k^{\beta-1}, \quad k \to +\infty, \tag{9}$$

то при $\beta > 1/2$ справедливо и условие

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty.$$

Замечание 4. Отметим, что, при выполнении **Условия 1**, ядро $K(t)$ будет иметь особенность при $t = 0$, поскольку $K(0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = +\infty$. Следующая теорема представляет асимптотику пары комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$ в случае, когда не выполнено условие (4).

Теорема 3. *Пусть $\beta > 1/2$ и выполнено* **Условие 1**, *а также выполнены условия (3) и (5). Тогда, для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$, множество нулей мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$ представляет собой объединение счетного множества вещественных нулей, удовлетворяющих неравенствам (7), а также пары нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$, которые, при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, являются невещественными и комплексно-сопряженными $\lambda_n^{+}(\theta, r) = \overline{\lambda_n^{-}}(\theta, r)$, асимптотически представимыми, при $a_n \to +\infty$, в следующем виде*

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{\mathcal{A}D_1\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}} \pm i\left(a_n + \frac{\mathcal{A}D_2\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{n_2(\theta,r)}}\right), r \in (0, \tfrac{1}{2}) \wedge \theta \in [\tfrac{1}{2}, 1), \tag{10}$$

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{\mathcal{A}D_1\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}} \pm i\left(a_n + \frac{\mathcal{A}D_2\mathcal{B}^{1-r}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), r \in (\tfrac{1}{2}, 1) \vee \theta \in (0, \tfrac{1}{2}), \tag{11}$$

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n^{2(1-\theta)}} \pm i a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), \qquad r = 1, \tag{12}$$

где $n_1(\theta, r) := r + 2\left(\frac{1}{2} - \theta\right)$, $n_2(\theta, r) := \min\{2(1-\theta), 2r + 3 - 4\theta\}$, *параметр* $r := \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, α *и* β *такие, что* $\alpha \in (0, 1]$, $\alpha + \beta > 1$, $\mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 0$ *и константы* D_1 *и* D_2 *определяются следующим образом*

$$D_1 := \frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)}, \qquad D_2 := -\frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)}.$$

Случай $\theta = 1$ подробно изучался в работе [5], а также в главе 3 монографий [3, 4]. При $\theta = 1$, теорема 3 переходит в теорему 3 из работы [5].

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 3, спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с замыканием множества нулей $\{\lambda_n^{\pm}(\theta, r)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{n,k}(\theta)\}_{n,k=1}^{\infty,\infty}$ мероморфных функций $\ell_n(\lambda)$, т. е. представи́м в виде*

$$\sigma(L) = \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(\theta)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\pm}(\theta, r)\right)}.$$

Распределение точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда *a*) $r = 1, \theta = 1$ и *b*) $r = (0, 1), \theta = 1$ приведено в работах [3–5]. В предлагаемой диссертации приведен анализ распределения точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда $r \in (0, 1)$ и $\theta \in [0, 1)$. При выполнении условий теоремы 3, из асимптотических формул (10)–(12) вытекает, что возможны следующие случаи:

1) при

$$a)\ r = 1 \text{ и } \theta \in [0,1), \qquad b)\ r \in (0,1) \text{ и } \theta = \frac{1}{2}, \theta \in \left(0, \frac{r+1}{2}\right)$$

невещественные части комплексно-сопряженных корней $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$, асимптотически стремятся к мнимой оси (см. рисунок 2), поскольку вещественные части корней $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$, стремятся к -0 при $a_n \to +\infty$.

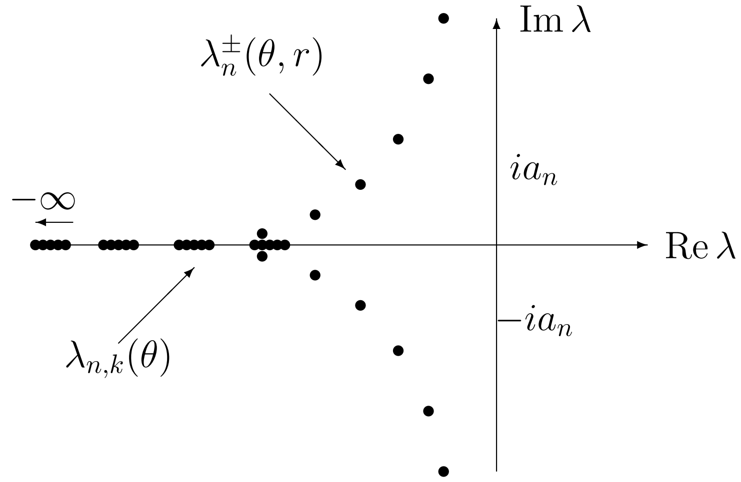

Рис. 2: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

2) Случай $r \in (0,1)$ и $\theta \in (\frac{r+1}{2}, 1)$, относится к рисунку 3, поскольку $\operatorname{Re}\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$ стремятся к $-\infty$ при $a_n \to +\infty$. Действительно, при $r \in (0,1)$ и $\theta \in (\frac{r+1}{2}, 1)$ верна асимптотическая формула:

$$\operatorname{Re}\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{\mathcal{A}D_1}{\beta \mathcal{B}^{1-r}} a_n^{2\left(\theta - \frac{r+1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{2(1-\theta), 2r+3-4\theta\}}}\right).$$

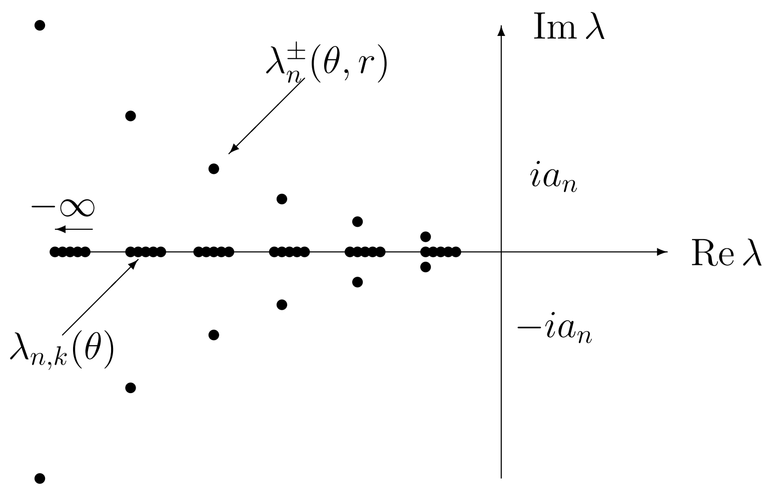

Рис. 3: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

3) При $r \in (0,1)$ и $\theta = \frac{r+1}{2}$, верна следующая асимптотическая формула

$$\operatorname{Re} \lambda_n^{\pm}(r) = -\frac{\mathcal{A}D_1}{\beta \mathcal{B}^{1-r}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1-r}}\right),$$

зависящая только от параметра r.

Отсюда, при $a_n \to +\infty$, вещественные части нулей $\lambda_n^{\pm}(r)$ стремятся к отрицательной постоянной ϑ, где $\vartheta := -\frac{\mathcal{A}D_1}{\beta\mathcal{B}^{1-r}}$. Заметим, что при $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$, спектр изображен на рисунке 4, а если $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, то на рисунке 5.

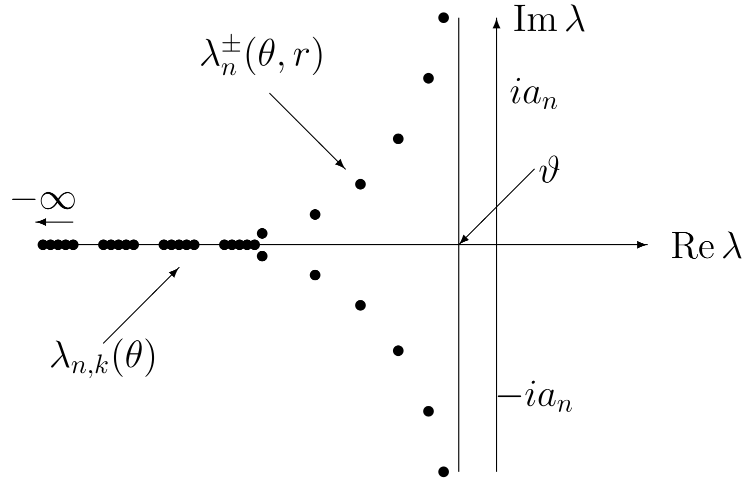

Рис. 4: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

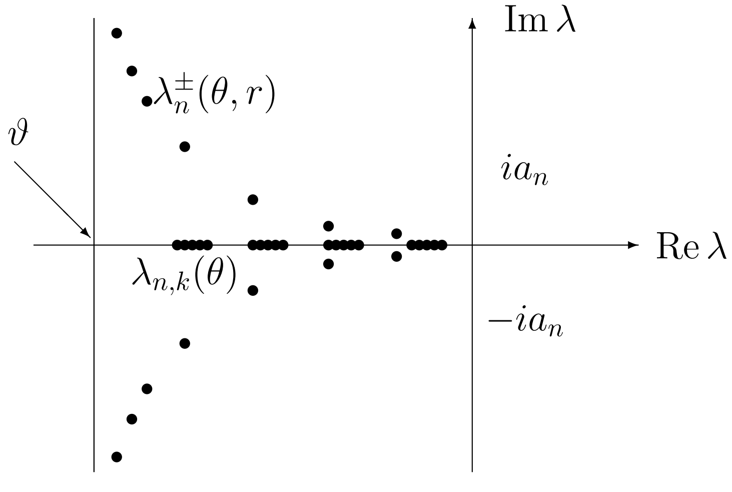

Рис. 5: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Отметим, что случай $\theta \in [0,1)$ существенно отличается от случая $\theta = 1$, поскольку в случае, когда $\theta = 1$, вещественные части нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$, при $n \to$

$+\infty$, стремятся к $-\infty$ (подробнее см. работу [5] В. В. Власова и Н. А. Раутиан). В случае $\theta \in [0,1)$ вещественные части нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$ могут стремиться либо к $-\infty$ (см. рисунок 3) либо к 0 (см. рисунки 2) либо к отрицательной постоянной (см. рисунки 4 и 5). Тем самым, наличие параметра $\theta \in [0,1)$ значительно усложняет структуру невещественного спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Так в случаях 1) и 3) (см. рисунки 2, 4 и 5) структура невещественного спектра оператор-функции $L(\lambda)$ близка к спектру волнового уравнения, а в случае 2) (см. рисунок 3) к спектру абстрактного параболического уравнения.

Вторая глава посвящена вопросам корректной разрешимости задачи (1)–(2) в весовых пространствах Соболева.

Введём некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем.

Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A^{\beta})$ оператора A^{β}, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_{β}, введя на $\mathrm{Dom}(A^{\beta})$ норму $\|\cdot\|_{\beta} = \|A^{\beta}\cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^{β}.

Через $W_{2,\gamma}^{m}(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^{m}(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma t}\left(\|u^{(m)}(t)\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2\right) dt\right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0. \tag{13}$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^{m}(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. монографию [12, гл. I] Ж.П. Лионса и Э. Мадженеса. При $\gamma = 0$ полагаем $W_{2,0}^{m}(\mathbb{R}_+, A^n) \equiv W_2^m(\mathbb{R}_+, A^n)$, при $n = 0$, $m = 2$ полагаем $W_{2,\gamma}^{2}(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv W_{2,\gamma}^{2}(\mathbb{R}_+)$, а при $m = n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^{0}(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H) := \mathcal{L}_{2,\gamma}$, где через $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ обозначено пространство (классов) измеримых вектор-функций f со значениями в пространстве H, для которых

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \equiv \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma t}\|f(t)\|_H^2 dt\right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Определение 2. Вектор-функцию $u(t)$ назовем сильным решением задачи (1)–(2), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^{2}(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geq 0$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальным условиям (2).

Во **второй главе** доказаны следующие результаты:

Теорема 4. *Пусть, для всех $\theta \in [0,1]$ и при некотором $\rho_0 \geq 0$, оператор-функция $A^{2-\theta}f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho_0}(\mathbb{R}_+, H)$. Тогда*

1. *Если выполнены условия (3) и (4), и $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$ для всех θ, принадлежащих $[0,1]$, то найдется такое $\widetilde{\rho} > \rho_0$, что для любого $\gamma > \widetilde{\rho}$, задача (1)–(2) имеет единственное решение $u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$, и для него справедлива следующая оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leq d\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right),$$

   с положительной постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

2. *Если выполнено условие (3), а условие (4) не выполнено (т. е., $K(t)$ не принадлежит $W^1_1(\mathbb{R}_+)$) и $\varphi_0 \in H_{2+\theta}$, $\varphi_1 \in H_{1+\theta}$ для всех θ, принадлежащих $(0,1]$, то найдется такое $\widetilde{\rho} > \rho_0$, что для любого $\gamma > \widetilde{\rho}$ задача (1)–(2) имеет единственное решение $u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leq d\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right),$$

   с положительной постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

В работе [5] В.В. Власова и Н.А. Раутиан, приведено доказательство существования сильного решения $u \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ и была доказана корректная разрешимость задачи (1)–(2) для случая $\theta = 1$. В настоящей работе устанавливается корректная разрешимость задачи (1)–(2) в случае, когда

$\theta \in [0,1]$. Полученные результаты здесь являются обобщениями результатов, приведенных в работе [5]. Оба результата совпадают при $\theta = 1$.

Приведем результат о корректной разрешимости задачи (1)–(2) в пространстве Соболева $W_2^2((0,T), A^2)$, для любого $T > 0$. Пространство $W_2^2((0,T), A^2)$ снабжено нормой

$$\|u\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \equiv \left(\int_0^T \left(\|u^{(2)}(t)\|_H^2 + \|A^2 u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}.$$

Теорема 5. *Пусть, для всех* $\theta \in [0,1]$, *вектор-функция* $A^{2-\theta} f(t)$ *принадлежит пространству* $L_2((0,T), H)$. *Тогда*

1. *Если выполнены условия пункта 1 теоремы 4, то для произвольного* $T > 0$ *задача* (1)–(2) *имеет единственное решение* $u(t)$, *принадлежащее пространству Соболева* $W_2^2((0,T), A^2)$, *и для него справедлива следующая оценка*

$$\|u\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \leq d(T) \left(\|A^{2-\theta} f\|_{L_2((0,T),H)} + \|A^2 \varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H \right),$$

   с положительной постоянной $d(T)$, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

2. *Если выполнены условия пункта 2 теоремы 4, то для произвольного* $T > 0$ *задача* (1)–(2) *имеет единственное решение* $u(t)$, *принадлежащее пространству Соболева* $W_2^2((0,T), A^2)$, *и для него справедлива следующая оценка*

$$\|u\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \leq d(T) \left(\|A^{2-\theta} f\|_{L_2((0,T),H)} + \|A^{2+\theta} \varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H \right),$$

   с положительной постоянной $d(T)$, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда, в случае выполнения условий п.* 1) *теоремы 5, для решения* $u(t)$ *будет справедлива* *оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|A^{3/2}u(t)\|_H+\sup_{t\in[0,T]}\|A^{1/2}u^{(1)}(t)\|_H\le d_1(T)\left(\|A^{2-\theta}f\|_{\mathcal{L}_2}+\|A^2\varphi_0\|_H+\|A\varphi_1\|_H\right),$$

где $\mathcal{L}_2 := L_2((0,T),H)$ *и положительная постоянная* $d_1(T)$, *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

В случае выполнения условий п. 2) *теоремы 5, для решения* $u(t)$ *будет справедлива оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|A^{3/2}u(t)\|_H+\sup_{t\in[0,T]}\|A^{1/2}u^{(1)}(t)\|_H\le d_1(T)\left(\|A^{2-\theta}f\|_{\mathcal{L}_2}+\|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H+\|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right),$$

где $\mathcal{L}_2 := L_2((0,T),H)$ *и положительная постоянная* $d_1(T)$, *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Третья глава диссертации посвящена представлениям решений задачи (1)–(2) в виде сумм слагаемых, отвечающих точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$ и изучению этих представлений в гильбертовом пространстве H.

В **третьей главе** доказаны следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть выполнены условие* 1) *теоремы 4, условие* (5) *и* $f(t)=0$ *при* $t\in\mathbb{R}_+$. *Предположим, что вектор-функция* $u(t)\in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)$, *для некоторого* $\gamma>0$, *является сильным решением задачи* (1)–(2). *Тогда, для любого* $t\in\mathbb{R}_+$ *решение* $u(t)$ *задачи* (1)–(2) *представимо в виде*

$$u(t)=u_{\mathrm{Re}}(t)+u_{\mathrm{Im}}(t),$$

где ряды

$$u_{\mathrm{Im}}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(\varphi_{1n}+\lambda_n^+\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_n^+t}}{\ell_n'(\lambda_n^+)}+\frac{(\varphi_{1n}+\lambda_n^-\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_n^-t}}{\ell_n'(\lambda_n^-)}\right)e_n, \tag{14}$$

$$u_{\mathrm{Re}}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varphi_{1n}+\lambda_{n,k}\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_{n,k}t}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})}\right)e_n, \tag{15}$$

сходятся по норме гильбертова пространства H, $\varphi_{0n}=(\varphi_0,e_n)$ *и* $\varphi_{1n}=(\varphi_1,e_n)$, $\lambda_{n,k}$ *– действительные нули мероморфной функции* (6), *а* $\lambda_n^\pm$, $\lambda_n^+=\overline{\lambda_n^-}$ *– пара комплексно-сопряженных корней асимптотически представимых в виде* (8).

Теорема 7. *Пусть* $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ *и выполнены условие* 1) *теоремы 4 и условие* (5). *Предположим, что вектор-функция* $f(t)$ *принадлежит пространству* $C([0,T],H)$ *для любого* $T > 0$. *Тогда, для любого* $t \in \mathbb{R}_+$ *решение* $u(t)$ *задачи* (1)–(2), *представимо в виде* $u(t) = w_{\mathrm{Im}}(t) + w_{\mathrm{Re}}(t)$, *где ряды*

$$w_{\mathrm{Im}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{f_n(\tau) \mathrm{e}^{\lambda_n^+(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^+)} d\tau + \int_0^t \frac{f_n(\tau) \mathrm{e}^{\lambda_n^-(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^-)} d\tau \right) e_n, \tag{16}$$

$$w_{\mathrm{Re}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{f_n(\tau) \mathrm{e}^{\lambda_{n,k}(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})} d\tau \right) e_n, \tag{17}$$

сходятся по норме гильбертова пространства H, $\lambda_{n,k}$ *— действительные нули мероморфной функции* (6), *а* $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$ *— пара комплексно-сопряженных корней асимптотически представимых в виде* (8).

Замечание 5. Из асимптотики (8) теоремы 2 и случая 1) анализа распределения невещественных точек спектра $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$ оператор-функции $L(\lambda)$ (см. стр. 15, а также приведенный там рисунок 2) немедленно вытекает, что решение задачи (1)–(2) не может убывать экспоненциально.

Представления (14)–(15) и (16)–(17) получены в результате применения преобразования Лапласа и его обращения для решения задачи (1)–(2), с использованием интегрирования по прямоугольным контурам, разделяющим точки $-\gamma_k$ (конструкция этих контуров приведена в главе 3 монографий [3, 4] В. В. Власова, Н. А. Раутиан и Д. А. Медведева). Существенную роль при этом играют оценки оператор-функции $L(\lambda)$ на указанных контурах.

При $\theta = 1$ теоремы 6 и 7 изложены в работе [15] Н. А. Раутиан, а также в монографиях [3, 4] авторов В. В. Власова, Н. А. Раутиан и Д. А. Медведева.

Глава 1

Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

1 Введение

Основная цель данной главы состоит в исследовании спектра оператор-функции $L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda)A^{2\theta}$, $\theta \in [0, 1]$, являющейся символом уравнения (1). Отметим, что в случае $\theta = 1$ спектральный анализ уравнения (1) подробно проводился в работах [3–5, 44]. Однако наличие параметра $\theta \in [0, 1)$ весьма существенно меняет структуру спектра оператор-функции $L(\lambda)$. При этом появляется ряд новых эффектов по сравнению со случаем $\theta = 1$ (подробнее см. третий параграф, а именно, разделы 3.2, 3.3 и рисунки, приведенные в конце раздела 3.3). Здесь уместно подчеркнуть, что уравнение (1) изучалось многими авторами (см., например, монографию [24] и приведённую в ней библиографию, работы [3–5, 34–36, 44] и приведённую в ней библиографию). Ограничимся здесь указанием работ [34–36], в которых рассматривался случай $\theta \in [0, 1]$.

В разделе 3.1 будет приведено утверждение о распределении точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости. Отсюда естественно возникает вопрос об устойчивости решений абстрактных интегро-дифференциальных уравнений вида (1) в случае $\theta \in [0, 1]$. Заметим однако, что в известных нам работах при $\theta \in [0, 1]$, и, в частности, в работах [34–36] спектральный анализ символа уравнения (1) не проводился. Результаты данной главы, таким образом, являются естественным развитием результатов работ [3–5, 44], в которых проводился спектральный анализ в случае $\theta = 1$.

Глава состоит из четырёх параграфов. В первом параграфе проводится краткое введение в предмет, и упоминаются другие работы в случае $\theta = 0$, $\theta = 1$ и $\theta \in (0, 1)$. Основные результаты по спектральному анализу интегро-дифференциального уравнения вида (1) в случае $\theta \in [0, 1]$ сформулированы во втором параграфе. Там сформулирована теорема о структуре спектра в случае, когда ядро интегрального оператора $K(t)$ принадлежит пространству Соболева $W_1^1(\mathbb{R}_+)$, и в случае, когда это ядро принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$, но не принадлежит $W_1^1(\mathbb{R}_+)$. Доказательство этих результатов изложено в третьем параграфе, а также приведен анализ (см. раздел 3.4) о структуре спектра оператор-функции $L(\lambda)$ на комлексной плоскости в случае, когда ядро $K(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$, но не принадлежит пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$. Четвертый параграф содержит доказательство вспомогательных утверждений и лемм.

2 Формулировки основных результатов о спектре оператор-функций, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений

Рассмотрим оператор-функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda) A^{2\theta}, \qquad 0 \le \theta \le 1, \tag{1.1}$$

являющуюся символом уравнения (1), где

$$\widehat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}$$

является преобразованием Лапласа ядра $K(t)$ интегрального оператора, а оператор I – единичный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Обозначим через $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям a_n, т.е., $Ae_n = a_n e_n, n \in \mathbb{N}$. Собственные значения a_n упорядочены по возрастанию: $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, при этом $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$\ell_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2 \left(1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k} \right), \ 0 \le \theta \le 1. \tag{1.2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее условие

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty. \tag{1.3}$$

Описательно говоря, условие (1.3) означает, что элементы последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, не могут приближаться друг к другу слишком быстро.

2.1 Теорема о локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости

Определение 1. Резольвентным множеством $R(\lambda)$ оператор-функции $L(\lambda)$ будем называть множество всех значений $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена. Дополнение множества $R(\lambda)$ в комплексной плоскости, т. е., $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus R(\lambda)\}$, будем называть спектром оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3) *и* $a_1 \geq 1$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *содержится в левой полуплоскости.*

Замечание 6. Условие $a_1 \geq 1$ существенно для того, чтобы спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежал в левой полуплоскости. Если $a_j < 1$, $j = 1, \ldots, n$ и выполнено условие (3), то в правой полуплоскости лежит n положительных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$.

2.2 Теорема о структуре спектра в случае, когда ядро $K(t)$ принадлежит пространству Соболева $W_1^1(\mathbb{R}_+)$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.3), (2.3), (2.4) *и* $a_1 \geq 1$. *Тогда, для каждого фиксированного* $n \in \mathbb{N}$, *множество нулей мероморфной функции* $\ell_n(\lambda)$ *представляет собой объединение счетного множества вещественных нулей* $\{\lambda_{n,k}(\theta) | n, k \in \mathbb{N}\}$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\cdots - \gamma_k < \lambda_{n,k}(\theta) < \cdots < -\gamma_1 < \lambda_{n,1}(\theta) < 0, \quad \text{и} \quad \lim_{n \to +\infty} \lambda_{n,k}(\theta) = -\gamma_k, \tag{1.4}$$

а также пары нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, *которые, при достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$, *являются невещественными и комплексно-сопряженными* $\lambda_n^{+}(\theta) = \overline{\lambda_n^{-}}(\theta)$, *асимптотически представимыми в виде*

$$\lambda_n^{\pm}(\theta) = -\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k}{a_n^{2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{4-2\theta}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{3-2\theta}}\right)\right), \ a_n \to +\infty. \tag{1.5}$$

Замечание 7. В соотношении (1.5) подчиненные слагаемые, содержащие символы $O\left(\frac{1}{a_n^k}\right)$ выписаны отдельно для вещественной и мнимой части нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta)$.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 2, спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с замыканием множества нулей $\{\lambda_n^{\pm}(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{n,k}(\theta)\}_{n,k=1}^{\infty,\infty}$ мероморфной функций $\ell_n(\lambda)$, т. е. представи́м в виде*

$$\sigma(L) = \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(\theta)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\pm}(\theta)\right)}.$$

При выполнении условий теоремы 2, в случае когда $\theta \in [0,1)$, невещественные части комплексно-сопряженных корней $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, при $n \to +\infty$, асимптотически стремятся к мнимой оси (см. рисунок 1), поскольку, при $n \to +\infty$, их действительные части стремятся к -0. В случае $\theta = 1$, невещественные части комплексно-сопряженных корней $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, при $n \to +\infty$, асимптотически стремятся к прямой, параллельной мнимой оси, поскольку их действительные части стремятся к отрицательной константе $-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ (подробнее см. работу [5] и гл. 3 монографий [3,4]). Таким образом, при $\theta \in [0,1)$ невещественный спектр оператор-функции $L(\lambda)$ близок к спектру абстрактного волнового уравнения (при $K(t) \equiv 0$).

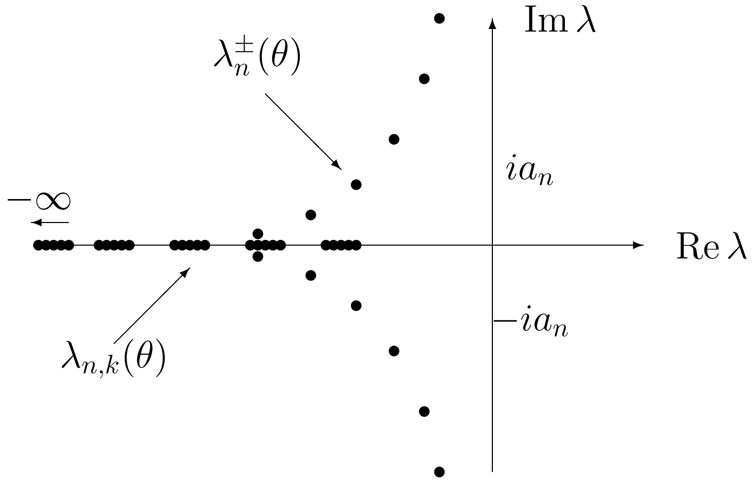

Рис. 1: Структура спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда ядро $K(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Структура вещественного спектра $\sigma_{\mathbb{R}}$ при $\theta \in [0,1)$ также отличается от случая $\theta = 1$, т. к. при $\theta = 1$ вещественные нули $\lambda_{n,k}(\theta)$ стремятся к вещественным нулям x_k функции

$$f(\lambda) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}$$

2.3 Теорема о структуре спектра в случае, когда ядро $K(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$, но не принадлежит пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$

Условие 1. *Предположим, что последовательности* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ *имеют следующее представление*

$$c_k = \frac{\mathcal{A}}{k^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$
$$\gamma_k = \mathcal{B}k^{\beta} + O(k^{\beta-1}), \qquad k \in \mathbb{N}$$

и, при $k \to +\infty$, *они удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1,$$

где константы $\mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$.

Замечание 8. Если выполнено следующее соотношение

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \approx k^{\beta-1}, \quad k \to +\infty, \tag{1.6}$$

то при $\beta > 1/2$ верно и условие

$$\sup_k \{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty.$$

Замечание 9. Отметим, что при выполнении **Условия 1** ядро $K(t)$ будет иметь особенность при $t = 0$, поскольку $K(0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = +\infty$. Таким образом, следующая теорема представляет асимптотику пары комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$ в случае, когда не выполнено условие (2.4).

Теорема 3. *Пусть $\beta > 1/2$ и выполнено* **Условие 1***, а также выполнены условия (1.3) и (2.3). Тогда, для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$, множество нулей мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$ представляет собой объединение счетного множества вещественных нулей, удовлетворяющих неравенствам (1.4), а также пары нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$, которые, при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, являются невещественными и комплексно-сопряженными $\lambda_n^{+}(\theta, r) = \overline{\lambda_n^{-}}(\theta, r)$, асимптотически представимыми, при $a_n \to +\infty$, в следующем виде*

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{\mathcal{A}D_1\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}} \pm i\left(a_n + \frac{\mathcal{A}D_2\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{n_2(\theta,r)}}\right), r \in (0, \tfrac{1}{2}) \wedge \theta \in [\tfrac{1}{2}, 1), \tag{1.7}$$

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{\mathcal{A}D_1\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}} \pm i\left(a_n + \frac{\mathcal{A}D_2\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{n_1(\theta,r)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), r \in [\tfrac{1}{2}, 1) \vee \theta \in (0, \tfrac{1}{2}), \tag{1.8}$$

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n^{2(1-\theta)}} \pm i a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), \qquad r = 1, \tag{1.9}$$

где $n_1(\theta, r) := r + 2\left(\frac{1}{2} - \theta\right)$, $n_2(\theta, r) := \min\{2(1-\theta), 2r + 3 - 4\theta\}$, параметр $r := \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, α и β такие, что $\alpha \in (0, 1]$, $\alpha + \beta > 1$, $\mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 0$ и константы D_1 и D_2 определяются следующим образом

$$D_1 := \frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)}, \qquad D_2 := -\frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)}.$$

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 3, спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с замыканием множества нулей $\{\lambda_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}(\theta, r)$ и $\{\lambda_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty,\infty}(\theta)$ мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$, т. е. престави́м в виде*

$$\sigma(L) = \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(\theta)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\pm}(\theta, r)\right)}.$$

Замечание 10. Случай $\theta = 1$ подробно изучался в работе [5], а также в монографиях [3, 4, гл. 3]. При $\theta = 1$, предлагаемая теорема 3 переходит в теорему 3 из работы [5].

3 Доказательство основных сформулированных утверждений

3.1 Доказательство теорем о локализации спектров оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости

Доказательство теоремы 1. Функция $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a_n^2$, где $\lambda = x + iy$, отображает верхний правый квадрант

$$\phi_{\pi/2} =: \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \arg(\lambda) < \pi/2\}$$

в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$. В свою очередь, функция

$$\psi(\lambda) = a_n^{2\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}$$

отображает угол $\phi_{\pi/2}$ в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Следовательно, уравнение $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda)$, равносильное уравнению $\ell_n(\lambda) = 0$, не имеет решений внутри угла $\phi_{\pi/2}$.

Поскольку функция $\ell_n(\lambda)$ имеет вещественные коэффициенты, то ее невещественные нули являются комплексно-сопряженными нулями. Таким образом, уравнение $\ell_n(\lambda) = 0$ не имеет никаких нулей внутри нижнего правого квадранта:

$$\phi_{-\pi/2} =: \{\lambda \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \arg(\lambda) < 0\}.$$

Ясно также, что при $a_1 \geq 1$ уравнение $\varphi(x) = \psi(x)$ не имеет решений, лежащих на полуоси $(0, +\infty)$ (см. нижеприведенный рисунок **A**).

Следовательно, уравнение $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda)$ не имеет решений для таких λ что $\operatorname{Re}\lambda > 0$. С другой стороны, если $a_1 < 1$ и выполнено условие (2.3), то в правой полуплоскости найдется хотя бы один вещественный нуль мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$ (см. нижеприведенный рисунок **B**). В случае $a_j < 1$, $j =$

$1, 2, \ldots n$, $a_{n+1} > 1$, в правой полуплоскости найдется n вещественных нулей мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$.

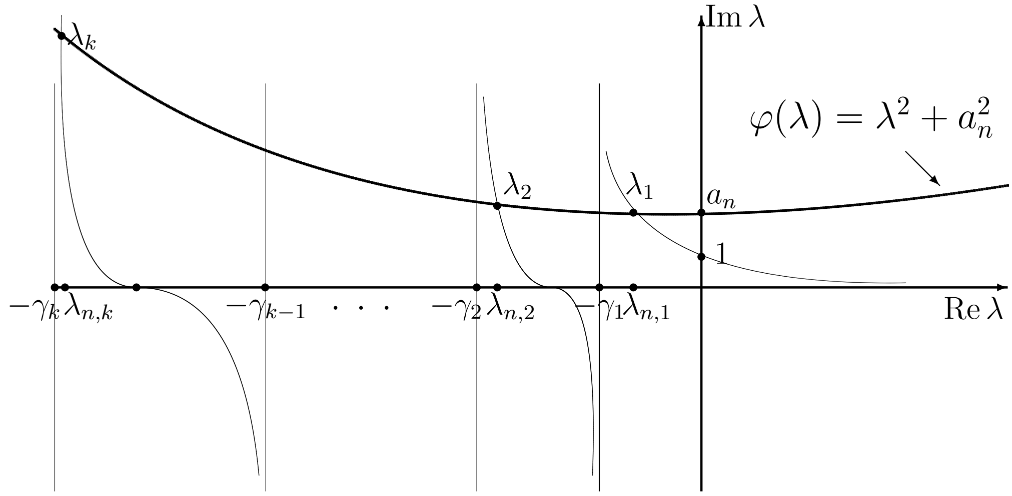

Рис. A: Локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости.

В самом деле из равенства

$$x^2 + a_j^2 = a_j^{2\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{x + \gamma_k},$$

при $x = 0$, следует, что

$$a_j^2 = a_j^{2\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < a_j^{2\theta}, \quad \theta \in [0, 1]$$

тогда и только тогда когда $a_j < 1$. Следовательно, в правой полуплоскости будет n собственных значений оператор-функции $L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda) A^{2\theta}$ и исходная задача (1)–(2) будет являться неустойчивой.

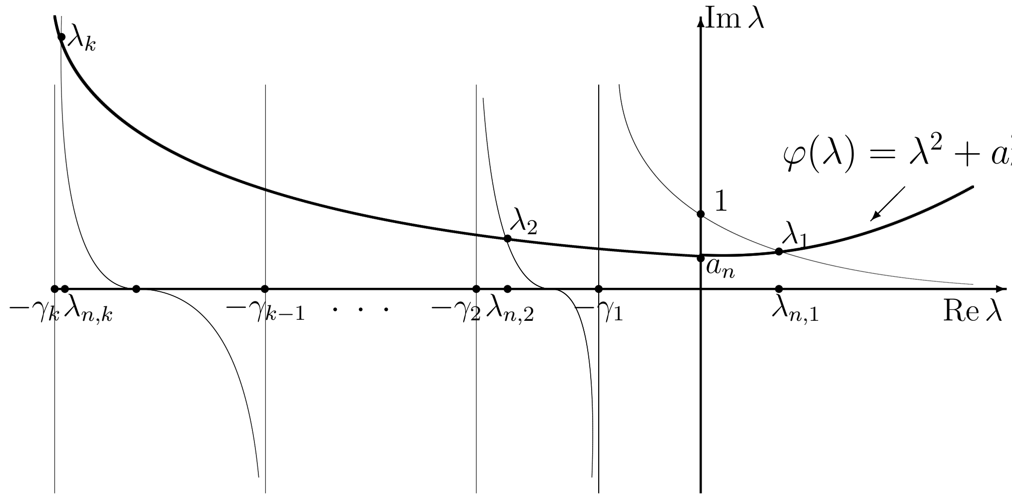

Рис. B: Локализация собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$ в правой полуплоскости.

Отметим также, что на мнимой оси и в начале координата $(0,0)$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ нет точек спектра $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$. Действительно, при $y \neq 0$ и $x = 0$ справедливо следующее соотношение

$$\operatorname{Im} \ell_n(iy) = y \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{y^2 + \gamma_k^2} \right) a_n^{2\theta} \neq 0.$$

При $x = y = 0$ и на основании $a_1 \geq 1$ верно следующее равенство

$$\operatorname{Re} \ell_n(0) = a_n^{2\theta} \left(a_n^{2(1-\theta)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \right) > 0.$$

Теорема 1 доказана.

В дальнейшем мы будем использовать следующие утверждения.

Лемма (Шварц). *Пусть аналитическая функция f отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ в себя. Тогда уравнение $z = f(z)$ имеет не более одного решения, и если такое решение существует, то $f'(w) < 1$. В противном случае f – эллиптическое дробно-линейное преобразование.*

Теорема (Denjoy–Wolff [41, 42]). *Пусть аналитическая функция f отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ в себя и f не является эллиптическим дробно-линейным преобразованием. Тогда существует единственная точка $w \in \mathbb{C}_+ \cup \{\infty\}$ такая, что итерации f^{*n} сходятся равномерно к w на компактных множествах в $\mathbb{C}_+$. Угловой предел $\lim\limits_{z \to w} f(z)$ существует и удовлетворяет уравнению $w = f(w)$. Более того, угловая производная $f'(w)$ существует и удовлетворяет $f'(w) \leq 1$.*

Замечание 11. Угловой предел означает, что точка z принадлежит любому углу $\epsilon < \arg(z - w) < \pi - \epsilon$, где $\epsilon > 0$, если $w \in \mathbb{R}$. Угловая производная определяется как $f'(w) = \lim\limits_{z \to w} (f(z) - f(w))/(z - w)$, если $w \in \mathbb{R}$. Преобразование $f(z)$ называется эллиптическим дробно-линейным преобразованием, если $f(z)$ имеет два неподвижных точек в 0 и ∞ (подробнее см. работу [42, гл. 2]).

Лемма 1. *Мероморфные функции $\ell_n(\lambda)$ имеют не более одного невещественного нуля в открытой верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.*

Доказательство леммы 1. Рассмотрим регулярную ветвь φ квадратного корня, которая отображает нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}_-$ во второй квадрант. Тогда уравнение

$$\frac{\ell_n(\lambda)}{a_n^2} = \frac{\lambda^2}{a_n^2} + 1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k},$$

эквивалентно уравнению

$$\lambda = g(\lambda) := a_n \varphi \left(-1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k} \right),$$

т. е.,

$$\lambda = g(\lambda) := a_n \sqrt{-1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}}.$$

Отметим, что функция $g(\lambda)$ отображает верхнюю плоскость $\mathbb{C}_+$ в себя.

В самом деле

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k} \right) < 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Поэтому по лемме Шварца уравнение $\lambda = g(\lambda)$ имеет не более одного решения в верхней полуплоскости.

3.2 Доказательство теоремы о структуре спектра в случае, когда $K(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$

Доказательство теоремы 2. Доказательству сформулированной теоремы предпошлем ряд вспомогательных лемм о распределении нулей мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$ в случае, когда ядро $K(t)$ представимо в виде суммы конечного числа экспонент. Рассмотрим функцию

$$\ell_{n,N}(\lambda) := \lambda^2 + a_n^2 \left(1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k} \right). \tag{1.10}$$

Этот результат представляет интерес, так как в случае выполнения условий (2.3) и (2.4) асимптотика нулей мероморфной функции ℓ_n может быть получена из асимптотики нулей функции $\ell_{n,N}$ предельным переходом при $N \to +\infty$.

Лемма 2. *Рассмотрим мероморфную функцию* (1.10). *Тогда нули функции* $\ell_{n,N}$ *представляют собой множество действительных нулей* $\{\lambda_{n,k}(\theta, N)|k = 1, \dots, N\}$ *для которых выполнены следующие неравенства*

$$-\gamma_k < \lambda_{n,k}(\theta, N) < x_{n,k}(\theta, N) < -\gamma_{k-1} < \cdots < 0, \tag{1.11}$$

таких, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{n,k}(\theta, N) = -\gamma_k$, *где* $x_{n,k}(\theta, N)$ – *действительные нули функции*

$$f_{n,N}(\lambda) := 1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}, \qquad \theta \in [0, 1],$$

а также, при достаточно больших a_n, *пару комплексно-сопряженных нулей* $\lambda_n^{\pm}(\theta, N)$, $\lambda_n^{+}(\theta, N) = \overline{\lambda_n^{-}}(\theta, N)$, *асимптотически представимых в виде*

$$\lambda_n^{\pm}(\theta, N) = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{N} c_k}{a_n^{2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{4-2\theta}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{3-2\theta}}\right)\right), \theta \in [0, 1]. \tag{1.12}$$

Лемма 3. *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *сходится, тогда существует такое значение* $M > 0$, *что для любого фиксированного* $n > M$, *существует предел*

$$\lim_{N\to+\infty} \lambda_n^{\pm}(\theta, N) = \lambda_n^{\pm}(\theta).$$

Доказательство леммы 2. Покажем, что комплексные нули мероморфной функции $\ell_{n,N}(\lambda)$ асимптотически представимы в виде $\lambda_n^{\pm}(\theta, N) = \tau_n a_n \pm i a_n$, $n \in \mathbb{N}$, при $a_n \to +\infty$, где τ_n ограниченная числовая последовательность. Для этого достаточно показать, что асимптотическое представление $\lambda_n^{+}(\theta, N)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\widehat{K}_N(\lambda_n^{+}(\theta, N))}{a_n^{2(1-\theta)}} = \frac{(\lambda_n^{+}(\theta, N))^2}{a_n^2} + 1,$$

которое равносильно уравнению $\widehat{K}_N(\lambda_n^+(\theta,N)) = a_n^{2(1-\theta)}\tau_n(\tau_n+2i)$. Отсюда следует, что

$$\tau_n = \frac{\widehat{K}_N(\lambda_n^+(\theta,N))}{a_n^{2(1-\theta)}(\tau_n+2i)}. \tag{1.13}$$

Обозначим

$$h_n(\tau) := \frac{\widehat{K}_N(z_n)}{a_n^{2(1-\theta)}(\tau+2i)}, \qquad z_n = \tau a_n + i a_n.$$

Тогда уравнение (1.13) можно переписать в виде $\tau_n = h_n(\tau_n)$. Отсюда получаем, что число τ_n является неподвижной точкой отображения $\tau \to h_n(\tau)$ при $n \to +\infty$. Следовательно, достаточно показать, что при $n \to +\infty$ отображение $\tau \to h_n(\tau)$ является сжимающим. Таким образом, искомое решение τ_n будет найдено как предел последовательности τ_n^k при $k \to +\infty$, где $\tau_n^k = h(\tau_n^{k-1})$, $\tau_n^0 = 0, \tau_n^1 \neq \tau_n$.

Замечание 12. Если на множестве $\varphi_{\pi-\delta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \pi-\delta, \delta > 0\}$ $|z_n\widehat{K}'_N(z_n)| \to 0$ и $|\widehat{K}_N(z_n)| \to 0$ при $|z_n| \to +\infty$, то отображение $\tau \to h_n(\tau)$ является сжимающим при $a_n \to +\infty$. Действительно, это утверждение следует из оценки

$$|h_n'(\tau)| = \left|\frac{\widehat{K}_N(z_n) - \widehat{K}'_N(z_n)(a_n\tau+2ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}(\tau+2i)^2}\right| \leq \frac{|\widehat{K}'_N(z_n)(2z_n)|}{a_n^{2(1-\theta)}} + \frac{|\widehat{K}_N(z_n)|}{a_n^{2(1-\theta)}},$$

при $|\tau_n| < \frac{1}{2}$. Доказательство замечания 12 приведенно в конце этой главы.

Используя разложение в виде многочлена Тейлора по степеням τ_n непосредственно получаем

$$h_n(\tau_n) = -\frac{i}{2}\frac{\widehat{K}_N(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}} + \frac{\tau_n}{4}\frac{\widehat{K}_N(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}} - \frac{i\tau_n a_n}{2}\frac{\widehat{K}'_N(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}} + O(\tau_n^2).$$

Отсюда вытекает, что

$$h_n(\tau_n) = -\frac{i}{2}\frac{\widehat{K}_N(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}}(1+O(\tau_n)),\ n \to +\infty.$$

Таким образом, для ограниченной числовой последовательности τ_n справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\tau_n = -\frac{i}{2}\frac{\widehat{K}_N(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}}(1+O(\tau_n)),\ n\to+\infty. \tag{1.14}$$

Покажем, что

$$\widehat{K}_N(ia_n) = \frac{1}{i}\left[\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^3}\right)\right] + O\left(\frac{1}{a_n^2}\right), a_n\to+\infty.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\widehat{K}_N(ia_n) &= \sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{ia_n+\gamma_k} = \sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{ia_n\left(1+\frac{\gamma_k}{ia_n}\right)} = \frac{1}{ia_n}\sum_{k=1}^{N} c_k\left(1+\frac{\gamma_k}{ia_n}\right)^{-1}\\
&= \frac{1}{ia_n}\sum_{k=1}^{N} c_k\left(1+\frac{\gamma_k}{ia_n}+\left(\frac{\gamma_k}{ia_n}\right)^2+\left(\frac{\gamma_k}{ia_n}\right)^2-O\left(\frac{1}{(ia_n)^3}\right)\right)\\
&= \frac{1}{ia_n}\sum_{k=1}^{N} c_k - \frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{N} c_k\gamma_k - \frac{1}{ia_n^3}\sum_{k=1}^{N} c_k\gamma_k^2 + O\left(\frac{1}{a_n^4}\right)\\
&= \frac{1}{i}\left[\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^3}\right)\right] + O\left(\frac{1}{a_n^2}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда из (1.14) получаем

$$\begin{aligned}
\tau_n &= \left[-\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\left[\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^3}\right)\right] - \frac{i}{a_n^{2(1-\theta)}}O\left(\frac{1}{a_n^2}\right)\right](1+O(\tau_n))\\
&= \left[-\frac{\sum_{k=1}^{N} c_k}{2a_n^{3-2\theta}} + O\left(\frac{1}{a_n^{5-2\theta}}\right) + iO\left(\frac{1}{a_n^{4-2\theta}}\right)\right]\left(1+O\left(\frac{1}{a_n^{3-2\theta}}\right)+iO\left(\frac{1}{a_n^{4-2\theta}}\right)\right)\\
&= -\frac{\sum_{k=1}^{N} c_k}{2a_n^{3-2\theta}} + O\left(\frac{1}{a_n^{5-2\theta}}\right) + iO\left(\frac{1}{a_n^{4-2\theta}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{6-4\theta}}\right) + iO\left(\frac{1}{a_n^{7-4\theta}}\right)\\
&= -\frac{1}{2a_n^{3-2\theta}}\sum_{k=1}^{N} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^{5-2\theta}}\right) + iO\left(\frac{1}{a_n^{4-2\theta}}\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, подставляя найдено τ_n в $\lambda_n^{\pm}(\theta,N) = \tau_n a_n \pm ia_n$, $n\in\mathbb{N}$, при $a_n\to+\infty$, получим следующее асимптотическое представление

$$\lambda_n^{\pm}(\theta,N) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{N} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^{4-2\theta}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{3-2\theta}}\right)\right). \tag{1.15}$$

Графическое построение показывает, что действительные нули $\{\lambda_{n,k}(\theta,N)\}_{k=1}^{N}$ функции $\ell_{n,N}(\lambda)$ удовдетворяют неравенствам

$$-\gamma_k < \lambda_{n,k}(\theta,N) < x_{n,k}(\theta,N) < -\gamma_{k-1}, \qquad k=1,2,\ldots,N,$$

где $x_{n,k}(\theta,N)$ – вещественные нули функции $f_{n,N}$. Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_{n,k}(\theta,N) = -\gamma_k.$$

Будем искать вещественные корни уравнения

$$\lambda^2 + a_n^2 - a_n^{2\theta}\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\lambda+\gamma_k} = 0 \tag{1.16}$$

в виде

$$\lambda_{n,k}(\theta,N) = -\gamma_k + \frac{c_k}{a_n^{2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), \quad a_n\to+\infty. \tag{1.17}$$

Тогда при подстановке указанных корней в уравнении (1.16) получим

$$a_n^{2(1-\theta)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\frac{c_j}{\gamma_j-\gamma_k+\frac{c_k}{a_n^{2(1-\theta)}}+O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right)} = a_n^{2(1-\theta)}\left(1+O\left(\frac{1}{a_n^2}\right)\right). \tag{1.18}$$

Заметим, что, при достаточно больших a_n, второе слагаемое в левой части равенства (1.18) является ограниченной величиной. В самом деле, для любого сколь угодно малого $\delta>0$ найдется такое N, начиная с которого выполнена оценка

$$\left|\frac{c_k}{a_n^{2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right)\right| < \delta, \quad n>N.$$

Нетрудно видеть, что имеет место следующая цепочка неравенств

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\frac{c_j}{\gamma_j-\gamma_k+\frac{c_k}{a_n^{2(1-\theta)}}+O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right)}\right| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\frac{c_j}{|\gamma_j-\gamma_k-\delta|} \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\frac{c_j}{\gamma_j\left|1-\frac{\gamma_k+\delta}{\gamma_j}\right|} \le \eta\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\frac{c_j}{\gamma_j} < \eta,$$

где $\eta = \min\left(\left|1-\frac{\gamma_k+\delta}{\gamma_{k+1}}\right|, \left|1-\frac{\gamma_k+\delta}{\gamma_k}\right|\right)$.

Откуда следует, при $a_n \to +\infty$, ограниченность второго слагаемого в левой части равенства (1.18), что и доказывает справедливость асимптотического представления (1.17). Таким образом, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{n,k}(\theta, N) = -\gamma_k$, для всех $k = 1, 2, \ldots, N$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{\lambda^2(N)}{a_n^2} + 1 = \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\lambda(N) + \gamma_k}, \tag{1.19}$$

$$1 = \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{x(N) + \gamma_k}, \tag{1.20}$$

зависящих от параметра $N \in \mathbb{N}$ при фиксированном значении a_n, где $x(N), \lambda(N) \in \mathbb{C}$ для любого N. Кроме того, рассмотрим уравнение

$$\frac{\lambda^2}{a_n^2} + 1 = \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}, \tag{1.21}$$

соответсвующее семейству уравнений (1.19).

Обозначим $f(x) := \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{c_k}{x(N)+\gamma_k}$ – правую часть уравнения (1.19) при $x \in \mathbb{R}$, для любого фиксированного значения параметра $N \in \mathbb{N}$. Так как

$$f(x) = -\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{(x(N) + \gamma_k)^2} < 0,$$

то функция $f(x)$ является убывающей на множестве $\mathbb{R}$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\gamma_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Следовательно, уравнение (1.19) имеет N вещественных и два комплексно-сопряженных корней, а уравнение (1.20) имеет N вещественных корней. В свою очередь, уравнение (1.21) имеет бесконечную последовательность вещественных корней.

Обозначим через $\lambda_{n,k}(\theta, N)$ вещественные корни уравнения (1.19), где $k = 1, 2, \ldots, N$, а через $\lambda_n^{\pm}(\theta, N) = \alpha(\theta, N) \pm i\beta(\theta, N)$, $\alpha(\theta, N), \beta(\theta, N) \in \mathbb{R}$ – комплексно-сопряженные корни уравнения (1.19) для любого фиксированного значения параметра $N \in \mathbb{N}$. Аналогичном образом, $x_{n,k}(\theta, N)$, где $k = 1, 2, \ldots, N$ будут вещественные корни уравнения (1.20) для любого фиксированного значения параметра $N \in \mathbb{N}$. В свою очередь, $\lambda_{n,k}(\theta)$, $k = 1,2,\ldots,N$ и $\lambda_n^{\pm}(\theta) = \alpha_0(\theta) \pm i\beta_0(\theta)$, $\alpha_0(\theta), \beta_0(\theta) \in \mathbb{R}$ будут, соответственно, вещественные и комплексно-сопряженные корни уравнения (1.21). Нетрудно видеть, что вещественные корни уравнений (1.19) и (1.20) удовлетворяют следующим неравенствам

$$-\gamma_k < \lambda_{n,k}(\theta, N) < x_{n,k}(\theta, N) < -\gamma_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.22}$$

а вещественные корни уравнения (1.21) удовлетворяют неравенствам

$$-\gamma_k < \lambda_{n,k}(\theta) < -\gamma_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.23}$$

Приведем уравнения (1.19) и (1.20) к общему знаменателю и применим к полученым уравнениям теорему Виета: в уравнении, соответсвующем (1.19), для коэффициентов при степенях $\lambda^{N+2}(N)$, $\lambda^{N+1}(N)$ и свободного члена получим следующие соотношения

$$\sum_{k=1}^{N+2} \lambda_{n,k}(\theta, N) = -\sum_{k=1}^{N} \gamma_k, \qquad \prod_{k=1}^{N+2} \lambda_{n,k}(\theta, N) = (-1)^{N+2} a_n^2 \prod_{k=1}^{N} \gamma_k \left(1 - \frac{S_N}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), \tag{1.24}$$

где $S_N := \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\gamma_k}$. В уравнении, соответсвующем (1.20), для коэффициентов при степенях $x^N(N)$, $x^{N-1}(N)$ и свободного члена получим следующие соотношения

$$\sum_{k=1}^{N} x_{n,k}(\theta, N) = \frac{\sum_{k=1}^{N} c_k}{a_n^{2(1-\theta)}} - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k, \qquad \prod_{k=1}^{N} x_{n,k}(\theta, N) = (-1)^N \prod_{k=1}^{N} \gamma_k \left(1 - \frac{S_N}{a_n^{2(1-\theta)}}\right). \tag{1.25}$$

где $S_N := \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\gamma_k}$. Из (1.24) и (1.25) получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_{n,k}(\theta, N) + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k = -2\alpha(\theta, N), \tag{1.26}$$

$$\prod_{k=1}^{N} \lambda_{n,k}(\theta, N) \left[\alpha^2(\theta, N) + \beta^2(\theta, N)\right] = (-1)^{N+2} a_n^2 \prod_{k=1}^{N} \gamma_k \left(1 - \frac{S_N}{a_n^{2(1-\theta)}}\right) \tag{1.27}$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_{n,k}(\theta, N) + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k = \frac{\sum_{k=1}^{N} c_k}{a_n^{2(1-\theta)}}, \tag{1.28}$$

$$\prod_{k=1}^{N} x_{n,k}(\theta, N) = (-1)^N \prod_{k=1}^{N} \gamma_k \left(1 - \frac{S_N}{a_n^{2(1-\theta)}}\right). \tag{1.29}$$

Из неравенства (1.22) получаем

$$0 < \lambda_{n,k}(\theta, N) + \gamma_k < x_{n,k}(\theta, N) + \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Следовательно, учитывая соотношения (1.26) и (1.28) получаем

$$-2\alpha(\theta, N) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{n,k}(\theta, N) + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k < \sum_{k=1}^{N} x_{n,k}(\theta, N) + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k = \frac{\sum_{k=1}^{N} c_k}{a_n^{2(1-\theta)}}. \tag{1.30}$$

Последовательность сумм $\sum_{k=1}^{N} c_k$ является возрастающей, следовательно, в силу, последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{N} x_{n,k}(\theta, N) + \sum\limits_{k=1}^{N} \gamma_k$ также является возрастающей. Кроме того, в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, справедлива следующая оценка

$$\sum_{k=1}^{N} (x_{n,k}(\theta, N) + \gamma_k) < \frac{\sum_{k=1}^{\infty} c_k}{a_n^{2(1-\theta)}}.$$

Таким образом, последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{N} (x_{n,k}(\theta, N) + \gamma_k)$ является возрастающей и ограниченной сверху и, следовательно, имеет предел при $N \to +\infty$. Следовательно, из неравенств (1.30) получаем, что последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{N} (\lambda_{n,k}(\theta, N) + \gamma_k)$ является возрастающей и ограниченной сверху и, следовательно, имеет предел при $N \to +\infty$.

Обозначая $\psi_k(\theta, N) := \lambda_{n,k}(\theta, N) + \gamma_k$, в силу равенства (1.26), существует предел

$$\lim_{N\to+\infty} \alpha(\theta, N) = -\frac{1}{2} \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} (\lambda_{n,k}(\theta, N) + \gamma_k) = -\frac{1}{2} \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \psi_k(\theta, N) =: \alpha_0(\theta). \tag{1.31}$$

Покажем теперь, что существует предел $\lim\limits_{N\to+\infty} \beta(\theta, N)$. Действительно, из соотношения (1.27) получаем

$$\alpha^2(\theta, N) + \beta^2(\theta, N) = \frac{(-1)^N a_n^2 \prod\limits_{k=1}^{N} \gamma_k}{\prod\limits_{k=1}^{N} \lambda_{n,k}(\theta, N)} \left(1 - \frac{S_N}{a_n^{2(1-\theta)}}\right).$$

Следовательно,

$$\beta^2(\theta, N) = -\alpha^2(\theta, N) + \frac{(-1)^N a_n^2 \prod\limits_{k=1}^{N} \gamma_k}{\prod\limits_{k=1}^{N} (\psi_k(\theta, N) - \gamma_k)} \left(1 - \frac{S_N}{a_n^{2(1-\theta)}}\right). \tag{1.32}$$

Покажем, что при $N \to +\infty$ правая часть равенства (1.32) имеет предел. В самом деле, при $N \to +\infty$ имеем

$$\lim_{N \to +\infty} \left(1 - \frac{S_N}{a_n^{2(1-\theta)}}\right) = \left(1 - \frac{S}{a_n^{2(1-\theta)}}\right),$$

где $S := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k}$. В свою очередь, сомножитель

$$\frac{(-1)^N \prod\limits_{k=1}^{N} \gamma_k}{(-1)^N \prod\limits_{k=1}^{N} (\gamma_k - \psi_k(\theta, N))} = \frac{(-1)^N \prod\limits_{k=1}^{N} \gamma_k}{\prod\limits_{k=1}^{N} \lambda_{n,k}(\theta, N)},$$

где $\psi_k(\theta, N) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, может быть преобразован к виду

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{\psi_k(\theta,N)}{\gamma_k}\right)}. \tag{1.33}$$

Покажем, что величина (1.33) имеет предел при $N \to +\infty$. Нетрудно проверить, что справедливо следующее неравенство

$$-\ln(1 - x) < 2x, \quad x \in [0, 1/2). \tag{1.34}$$

В свою очередь, из того, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_{n,k}(\theta, N) = -\gamma_k$ (см. лемму 2), величина $\frac{\psi_k(\theta,N)}{\gamma_k}$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. Следовательно, найдется такое $M > 0$, что для всех $n > M$ выполнено неравенство

$$0 < \frac{\psi_k(\theta, N)}{\gamma_k} < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, согласно неравенству (1.34) справедлива следующая цепочка неравенств

$$-\ln\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{\psi_k(\theta,N)}{\gamma_k}\right)=-\sum_{k=1}^{N}\ln\left(1-\frac{\psi_k(\theta,N)}{\gamma_k}\right)\leq 2\sum_{k=1}^{N}\frac{\psi_k(\theta,N)}{\gamma_k}\leq 2\sum_{k=1}^{N}\psi_k(\theta,N),\gamma_k\geq 1.$$

Отсюда, из соотношения (1.31) следует существование предела последовательности $-\ln\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{\psi_k(\theta,N)}{\gamma_k}\right)$, а следовательно, и последовательности (1.33).

Таким образом, правая часть равенства (1.32) имеет предел при $N\to+\infty$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{N\to+\infty}\beta(N)=\beta_0(\theta)$. Выделяя в уравнении (1.19) вещественную и мнимую части, получаем следующие соотношения:

$$\frac{\alpha^2(\theta,N)-\beta^2(\theta,N)}{a_n^2}+1=\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k\left(\alpha(\theta,N)+\gamma_k\right)}{(\alpha(\theta,N)+\gamma_k)^2+\beta^2(\theta,N)},\tag{1.35}$$

$$\alpha(\theta,N)=-\frac{a^{2\theta}}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{(\alpha(\theta,N)+\gamma_k)^2+\beta^2(\theta,N)}.\tag{1.36}$$

Переходя к пределу при $N\to+\infty$ в уравнении (1.35) и (1.36) получаем следующие равенства:

$$\frac{\alpha_0^2(\theta)-\beta_0^2(\theta)}{a_n^2}+1=\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k\left(\alpha_0(\theta)+\gamma_k\right)}{(\alpha_0(\theta)+\gamma_k)^2+\beta_0^2(\theta)},$$

$$\alpha_0(\theta)=-\frac{a^{2\theta}}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{(\alpha_0(\theta)+\gamma_k)^2+\beta_0^2(\theta)}.$$

Следовательно, $\lambda_n^{\pm}(\theta)=\alpha_0(\theta)\pm i\beta_0(\theta)$ являются комплексно-сопряженными корнями уравнения (1.21). Таким образом, справедливо искомое равенство

$$\lim_{N\to+\infty}\lambda_n^{\pm}(\theta,N)=\lambda_n^{\pm}(\theta).$$

Лемма 3 доказана.

Покажем теперь, что для каждого фиксированного $n\in\mathbb{N}$ множество нулей функции $\ell_n(\lambda)$ представляет собой объединение счетного множества вещественных нулей $\{\lambda_{n,k}(\theta)|n,k\in\mathbb{N}\}$, удовлетворяющих неравенствам (1.4), и пары комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, где $\lambda_n^{+}(\theta)=\overline{\lambda_n^{-}}(\theta)$.

При фиксированном $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим на комплексной плоскости прямоугольный контур $\Gamma_N = \{\Gamma_x^+ \cup \Gamma_x^- \cup \Gamma_y \cup \overline{\Gamma}_y\}$, где $X_N = \frac{\gamma_N+\gamma_{N+1}}{2}$ и

$$\Gamma_x^{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \pm X_N, |\operatorname{Im}\lambda| \le Y, X_N > 0, Y > 0\},$$
$$\Gamma_y = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\lambda| \le X_N, \operatorname{Im}\lambda = \pm Y, X_N > 0, Y > 0\},$$
$$\overline{\Gamma}_y = \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \Gamma_y\},$$

Введём в рассмотрение функции

$$f_n(\lambda) = 1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda+\gamma_k}, \qquad g_n(\lambda) = \frac{\lambda^2}{a_n^2}, \qquad 0 \le \theta \le 1, \tag{1.37}$$

Аналогично доказательству, приведенному в работе [5], можно показать, что найдутся X_N и Y такие, что для всех $\lambda \in \Gamma_N$, будет верно неравенство

$$|f_n(\lambda)| < |g_n(\lambda)|. \tag{1.38}$$

В самом деле, покажем, что для каждой из сторон контура $\Gamma = \{\Gamma_x^+ \cup \Gamma_x^- \cup \Gamma_y \cup \overline{\Gamma}_y\}$, будет верно неравенство (1.38).

Для каждого λ, принадлежащего вертикальному сегменту Γ_x^-, имеем следующую оценку сверху

$$\begin{aligned}|f_n(\lambda)| &\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{-X_N+iy+\gamma_k}\right|\\ &\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{|-X_N+iy+\gamma_k|}\\ &\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{|-X_N+\gamma_k|} := q(X_N), \qquad 0 \le \theta \le 1.\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\inf_N\left\{\frac{q(X_N)}{X_N^2}\right\} = 0. \tag{1.39}$$

Заметим, что $q(X_N)$ может быть представлено в виде

$$q(X_N) = \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{X_N-\gamma_k} + \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k-X_N}\right) + 1,$$

потому, что при $\delta_N := \gamma_{N+1} - \gamma_N$ имеем

$$\begin{aligned} X_N - \gamma_k &= \frac{1}{2}(\gamma_{N+1} - \gamma_k + (\gamma_N - \gamma_k)) \\ &\geq \frac{1}{2}(\gamma_{N+1} - \gamma_k) \geq \frac{1}{2}\delta_N, \qquad k = 1, \ldots, N \\ \gamma_k - X_N &\geq \frac{1}{2}(\gamma_k - \gamma_N) \geq \frac{1}{2}\delta_N, \qquad k = N+1, N+2, \ldots . \end{aligned}$$

С помощью предыдущих неравенств, можно получить оценку сверху для величины $q(X_N)$. Действительно,

$$\begin{aligned} q(X_N) &\leq \frac{2}{a_n^{2(1-\theta)}} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\gamma_{N+1} - \gamma_k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k - \gamma_N} \right) + 1 \\ &\leq \left(\frac{2}{\delta_N a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \right) + 1 = \left(\frac{2S_1}{\delta_N a_n^{2(1-\theta)}} \right) + 1, \end{aligned}$$

где $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$. Следовательно, верно следующее неравенство

$$\frac{q(X_N)}{X_N^2} \leq \frac{1}{\gamma_N^2} \left(\frac{2S_1}{\delta_N a_n^{2(1-\theta)}} + 1 \right) = \frac{1}{\gamma_N} \left(\frac{2S_1}{\gamma_N(\gamma_{N+1} - \gamma_N) a_n^{2(1-\theta)}} \right) + \frac{1}{\gamma_N^2}. \qquad (1.40)$$

Таким образом, т.к $\gamma_N \to +\infty$ при $N \to +\infty$ и, в предположении, что выполнено условие (1.3) справедливо требуемое равенство,

$$\inf_N \left\{ \frac{q(X_N)}{X_N^2} \right\} = 0.$$

Отсюда следует, что для заданного a_n существует такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $N > N_0$ верно следующее неравенство

$$\frac{1}{a_n^2} > \frac{1}{\gamma_N^2} \left(\frac{2S_1}{\delta_N a_n^{2(1-\theta)}} + 1 \right), \delta_N > 0. \qquad (1.41)$$

Значит, для всех λ, принадлежащих стороне Γ_x^- справедлива следующая цепочка неравенств

$$|f_n(\lambda)| \leq \frac{X_N^2 q(X_N)}{X_N^2} \leq X_N^2 \left(\frac{1}{\gamma_N^2} \left(\frac{2S_1}{\delta_N a_n^{2(1-\theta)}} + 1 \right) \right) \leq \frac{X_N^2}{a_n^2} \leq |g_n(\lambda)|$$

Отсюда следует, что для всех $\lambda \in \Gamma_x^-$ верна искомая оценка (1.38).

Теперь, для каждого λ, принадлежащего вертикальному сегменту Γ_x^+, имеем

$$|f_n(\lambda)| \le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|X_N + iy + \gamma_k|}$$
$$\le 1 + \frac{1}{X_N a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 + \frac{S_1}{X_N a_n^{2(1-\theta)}} < +\infty.$$

Для заданного a_n, выберем такое X_N для которого справедливо неравенство

$$\frac{X_N^2}{a_n^2} > 1 + \frac{S_1}{X_N a_n^{2(1-\theta)}}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$X_N^3 - a_n^2 X_N - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} S_1 > 0.$$

Пусть $X_N > 1$, тогда справедлива следующая цепочка неравенств

$$X_N^3 - a_n^2 X_N - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} S_1 > X_N^3 - a_n^2 X_N - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} S_1 X_N$$
$$= X_N \left(X_N^2 - a_n^2 - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} S_1 \right) > 0.$$

Данные неравенства будут справедливы, если для заданного a_n выбрать X_N строго больше $a_n \sqrt{1 + \frac{S_1}{a_n^{2(1-\theta)}}}$. Таким образом, оценка $|f_n(\lambda)| < |g_n(\lambda)|$ будет выполнена для всех $\lambda \in \Gamma_x^+$, если выбрать $X = X_N > a_n \sqrt{1 + \frac{S_1}{a_n^{2(1-\theta)}}}$.

Рассмотрим теперь горизонтальный сегмент контура Γ_N:

$$\Gamma_y = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \lambda| \le X_N, \operatorname{Im} \lambda = +Y\}.$$

Заметим, что при всех $\lambda \in \Gamma_y$ верно равенство

$$\inf_{\lambda \in \Gamma_y} \left| \frac{\lambda^2}{a_n^2} \right| = \frac{Y^2}{a_n^2}. \tag{1.42}$$

Для всех $\lambda \in \Gamma_y$ имеем

$$|f_n(\lambda)| \le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|x + iY + \gamma_k|}$$
$$\le 1 + \frac{1}{Y a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 + \frac{S_1}{Y a_n^{2(1-\theta)}} < +\infty, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

Для заданного a_n выберем такое Y, для которого справедливо неравенсто

$$\frac{Y^2}{a_n^2} > 1 + \frac{S_1}{Y a_n^{2(1-\theta)}}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$Y^3 - a_n^2 Y - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} S_1 > 0.$$

При условии, что Y строго больше $a_n\sqrt{1+\frac{S_1}{a_n^{2(1-\theta)}}}$, будут выполнены следующие неравенства

$$\begin{aligned} Y^3 - a_n^2 Y - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} S_1 &> Y^3 - a_n^2 Y - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} S_1 Y \\ &= Y\left(Y^2 - a_n^2 - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} S_1\right) > 0 \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (1.38) справедливо для всех λ, принадлежащих горизонтальному сегменту Γ_y.

В случае, когда λ принадлежит горизонтальной стороне $\overline{\Gamma}_y$ контура Γ_N, справедливость неравенства (1.38) сразу вытекает из следующего свойства: $\overline{f_n(\lambda)} = f_n(\overline{\lambda})$ и $\overline{g_n(\lambda)} = g_n(\overline{\lambda})$. Следовательно, поскольку $|f_n(\lambda)| < |g_n(\lambda)|$, для всех $\lambda \in \Gamma_N$, то по теореме Руше и принципу аргумента верно следующее равенство

$$N[g_n(\lambda)] - P[g_n(\lambda)] = N[f_n(\lambda) + g_n(\lambda)] - P[f_n(\lambda) + g_n(\lambda)],$$

где N и P, соответственно, число нулей и полюсов внутри контура Γ_N, причем каждый полюс и нуль считается с учетом его порядка и кратности, соответственно. По определению функции $g_n(\lambda)$, разница между числами ее нулей и полюсов внутри контура Γ_N равна 2. Внутри контура Γ_N, функция $f_n(\lambda)+g_n(\lambda)$ имеет N полюсов: $-\gamma_N, -\gamma_{N-1}, \ldots, -\gamma_1$. Следовательно, $N[f_n(\lambda)+g_n(\lambda)] = N+2$. Легко видеть (графически) (см. также работу [27]) что функция $f_n(\lambda) + g_n(\lambda)$ имеет $N+1$ или N действительных нулей внутри контура Γ_N, которые удовлетворяют неравенствам (1.4), в зависимости от того, что

$\lambda_{N,n}(\theta) < X_N$ или $\lambda_{N,n}(\theta) \geq X_N$. Но если $\lambda_{N,n}(\theta) < X_N$, то $f_n(\lambda) + g_n(\lambda)$ имеет один комплексный нуль внутри контура Γ_N, что невозможно, так как $\overline{(f_n + g_n)}(\lambda) = (f_n + g_n)(\overline{\lambda})$. Следовательно, внутри контура Γ_N существует ровно два комплексных корня $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, где $\lambda_n^{+}(\theta) = \overline{\lambda_n^{-}}(\theta)$.

Замечание 13. Внутри контура Γ_N содержится конечное число m пар комплексно-сопряженных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$, причем $m \geqslant l$, если

$$X_N, Y > \max\left\{X_{N_0(l)}, \sqrt{2}a_l\sqrt{1 + \frac{1}{a_l^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty} c_k}\right\}, \text{ и } m \to +\infty \text{ при } N \to +\infty.$$

Действительно, из асимптотических представлений (1.5) следует, что $|\lambda_n^{\pm}(\theta)| \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Следовательно, контур Γ_N содержит лишь конечное число m пар комплексно-сопряженных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$, причем $m \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Из оценок, полученных при доказательстве неравенства (1.38), следует, что если выбрать

$$X_N, Y > \max\left\{X_{N_0(l)}, \sqrt{2}a_l\sqrt{1 + \frac{1}{a_l^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty} c_k}\right\},$$

то для всех $\lambda \in \Gamma_N$ будет справедлива оценка (1.38). Таким образом, по теореме Руше, внутри контура Γ_N будет содержаться не менее l пар комплексно-сопряженных нулей функций $\ell_n(\lambda)$, $n = 1, \ldots, l$.

3.3 Доказательство теоремы о структуре спектра в случае, когда $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$

Доказательство теоремы 3 . Рассмотрим как и в теореме 2, функцию

$$\frac{\ell_n(\lambda)}{a_n^2} = \frac{\lambda^2}{a_n^2} + \left(1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}\right), \tag{1.43}$$

и покажем, что для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ множество всех её нулей представляет собой объединение счетного множества действительных нулей

$\{\lambda_{n,k}|k \in \mathbb{N}\}$ и пары комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$. Более того, покажем, что последовательности $\{\lambda_{n,k}|k \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяют неравенствам (1.4). Во второй части доказательства мы покажем, что для комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^{\pm}$, справедливы асимптотические представления (1.7)–(1.9). По условию теоремы 3 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится. При этом, используется **условие 1** для заданных последовательностей $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Рассмотрим на комплексной плоскости прямоугольный контур $\Gamma_N = \{\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^*\}$, обходимый против часовой стрелки, где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}^{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \pm X, |\operatorname{Im}\lambda| \le Y, X > 0, Y > 0\} \\
&\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\lambda| \le X, \operatorname{Im}\lambda = \pm Y, X > 0, Y > 0\} \\
&\mathcal{C}^* = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \mathcal{C}\}.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$f_n(\lambda) = 1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}, \qquad g_n(\lambda) = \frac{\lambda^2}{a_n^2}, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

Выберем такие положительные числа X и Y, для которых, при всех $\lambda \in \Gamma_N$, будет выполнено неравенство

$$|f_n(\lambda)| < |g_n(\lambda)|. \tag{1.44}$$

В самом деле, докажем что для каждой из сторон прямоугольника Γ_N справедливо неравенство (1.44). При всех $\lambda \in \mathcal{C}^-$, имеем

$$\begin{aligned}
|f_n(\lambda)| &\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|-X + iy + \gamma_k|} \\
&\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|-X + \gamma_k|} := q(X), \qquad 0 \le \theta \le 1.
\end{aligned}$$

Пусть $X = X_N = \frac{1}{2}(\gamma_{N+1} + \gamma_N)$. Тогда справедливо следующее соотношение

$$\inf_N \left\{ \frac{q(X_N)}{X_N^2} \right\} = 0. \tag{1.45}$$

Действительно, представим $q(X_N)$ в виде

$$q(X_N) = \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{X_N-\gamma_k}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k-X_N}\right)+1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}X_N-\gamma_k &= \frac{1}{2}(\gamma_{N+1}-\gamma_k+\gamma_N-\gamma_k)\\ &\geq \frac{1}{2}(\gamma_{N+1}-\gamma_k), \qquad k=1,\ldots,N\\ \gamma_k-X_N &\geq \frac{1}{2}(\gamma_k-\gamma_N), \qquad k=N+1,N+2,\ldots,\end{aligned}$$

Из предыдущих неравенств следует, что

$$\begin{aligned}q(X_N) &\leq \frac{2}{a_n^{2(1-\theta)}}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\gamma_{N+1}-\gamma_k}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k-\gamma_N}\right)+1\\ &= \frac{2}{a_n^{2(1-\theta)}}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\gamma_k}\left(\frac{\gamma_{N+1}}{\gamma_k}-1\right)^{-1}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\left(1-\frac{\gamma_N}{\gamma_k}\right)^{-1}\right)+1.\end{aligned}$$

По условию теоремы 3, верно неравенство $1/2<\beta$, если

$$\gamma_{k+1}-\gamma_k = B(k+1)^\beta - Bk^\beta + O(k^{\beta-1}) \approx k^{\beta-1},\ \ k\to+\infty.$$

Таким образом, для всех $k=1,\ldots,N$, имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma_{N+1}}{\gamma_k}-1\right)^{-1} &\leq \left(\frac{\gamma_{N+1}}{\gamma_N}-1\right)^{-1} = \frac{\gamma_N}{\gamma_{N+1}-\gamma_N}\\ &\leq d_1N^{1-\beta}\left(BN^\beta+O\left(N^{\beta-1}\right)\right)\\ &= d_1N\left(B+O\left(\frac{1}{N}\right)\right) = d_1NB.\end{aligned}$$

Аналогичным образом, для всех $k=N+1,N+2\ldots$ справедлива следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\gamma_N}{\gamma_k}\right)^{-1} &\leq \left(1-\frac{\gamma_N}{\gamma_{N+1}}\right)^{-1} = \frac{\gamma_{N+1}}{\gamma_{N+1}-\gamma_N}\\ &\leq d_1N^{1-\beta}\left(B(N+1)^\beta+O\left((N+1)^{\beta-1}\right)\right)\\ &= d_1N\left(1+\frac{1}{N}\right)^\beta\left(B+O\left(\frac{1}{N+1}\right)\right)\\ &= d_1BN, \quad N\to+\infty.\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем будем предполагать $d_1 > 0$. Тогда

$$q(X_N) \le \frac{2d_1 NB}{a_n^{2(1-\theta)}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \right) + 1 = \frac{2d_1 NB}{a_n^{2(1-\theta)}} S_2 + 1, \tag{1.46}$$

где $S_2 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k}$ и

$$\begin{aligned} \frac{q(X_N)}{X_N^2} &\le \frac{\frac{2d_1 NB}{a_n^{2(1-\theta)}} S_2 + 1}{\gamma_N^2} = \frac{\frac{2d_1 NB}{a_n^{2(1-\theta)}} S_2 + 1}{(BN^{\beta} + O(N^{\beta-1}))^2} \\ &= \frac{\frac{2d_1 N^{1-2\beta} B^{-1}}{a_n^{2(1-\theta)}} S_2 + O\left(N^{-2\beta}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Поскольку $2\beta > 1$, то соотношение (1.47) стремится к нулю, когда $N \to +\infty$. Значит справедливо требуемое равенство

$$\inf_N \left\{ \frac{q(X_N)}{X_N^2} \right\} = 0.$$

Из соотношения (1.47) следует, что для заданного a_n существует такое N_0, что для всех $N > N_0$, верно следующее неравенство

$$\frac{1}{a_n^2} > \frac{2d_1 N^{1-2\beta} B^{-1}}{a_n^{2(1-\theta)}} S_2 + O(N^{-2\beta}),$$

где $S_2 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k}$. Тогда для всех $\lambda \in \mathcal{C}^-$ и для всех $N > N_0$ имеем

$$|g_n(\lambda)| \ge \frac{X_N^2}{a_n^2} > X_N^2 \left(\frac{2d_1 N^{1-2\beta} B^{-1}}{a_n^{2(1-\theta)}} S_2 + O(N^{-2\beta}) \right) \ge X_N^2 \frac{q(X_N)}{X_N^2} \ge |f_n(\lambda)|.$$

Следовательно, для всех $\lambda \in \mathcal{C}^-$ имеем оценку (1.44).

Далее, для всех $\lambda \in \mathcal{C}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = +X, |\operatorname{Im} \lambda| \le Y, X > 0, Y > 0\}$ имеем

$$\begin{aligned} |f_n(\lambda)| &\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|X + iy + \gamma_k|} \\ &\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|X + \gamma_k|} \\ &\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} := 1 + \frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}}. \end{aligned}$$

Если выбрать X для которого

$$\frac{X^2}{a_n^2} > 1 + \frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}},$$

то верно следующая цепочка неравенства

$$|g_n(\lambda)| \geq \frac{X^2}{a_n^2} > \left(1 + \frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}}\right) \geq |f_n(\lambda)|.$$

Следовательно, при всех $\lambda \in \mathcal{C}^+$, получаем оценку (1.44).

Рассмотрим теперь горизонтальный сегмент контура Γ_N:

$$\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\lambda| \leq X, \operatorname{Im}\lambda = +Y\}.$$

Отсюда следует, что для всех $\lambda \in \mathcal{C}$ верно следующее равенство

$$\inf_{\lambda \in \mathcal{C}} \left|\frac{\lambda^2}{a_n^2}\right| = \frac{Y^2}{a_n^2}. \tag{1.48}$$

Пусть

$$\mathcal{C}_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq |\operatorname{Re}\lambda| \leq X, \operatorname{Im}\lambda = +Y\},$$
$$\mathcal{C}_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : -X \leq |\operatorname{Re}\lambda| \leq 0, \operatorname{Im}\lambda = +Y\}.$$

Для всех $\lambda \in \mathcal{C}_1$ при $0 \leq \theta \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
|f_n(\lambda)| &\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|x + iY + \gamma_k|} \\
&\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \left|\frac{x + iY}{\gamma_k} + 1\right|^{-1} \\
&\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} := 1 + \frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}}.
\end{aligned}$$

Если взять Y для которого $\frac{Y^2}{a_n^2} > \left(\frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}} + 1\right)$, то получим,

$$|g_n(\lambda)| \geq \frac{Y^2}{a_n^2} > \left(1 + \frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}}\right) \geq |f_n(\lambda)|.$$

Следовательно, при всех $\lambda \in \mathcal{C}_1$, получим неравенство (1.44).

Теперь, для всех $\lambda \in \mathcal{C}_2 \cap [z_1, z_2]$ где $z_1 = -\gamma_{M+1} + iY, z_2 = -\gamma_M + iY$, $1 \le M < N$, $M \in \mathbb{N}$ верны следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
|f_n(\lambda)| &\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|x + iY + \gamma_k|} \\
&\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \left| \frac{x + iY}{\gamma_k} + 1 \right|^{-1} \\
&\le 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \left(\sum_{k=1}^{M-1} + \sum_{k=M+2}^{\infty} \right) \frac{c_k}{\gamma_k} \left| \frac{x}{\gamma_k} + 1 \right|^{-1} + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \frac{c_M + c_{M+1}}{Y}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что при $k = 1, 2, \ldots, M-1$ следующее неравенство имеет место

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{x}{\gamma_k} + 1 \right|^{-1} < \left(\frac{\gamma_M}{\gamma_{M-1}} - 1 \right)^{-1} &= \frac{\gamma_{M-1}}{\gamma_M - \gamma_{M-1}}, \\
&\le d_1 (M-1)^{1-\beta} \left(B(M-1)^{\beta} + O((M-1)^{\beta-1}) \right) \\
&= d_1 (M-1) \left(B + O\left(\frac{1}{M-1} \right) \right) \\
&= d_1 (M-1) B \le d_1 (N-1) B < d_1 N B,
\end{aligned}
$$

а при $k = M+2, M+3, \ldots$ имеет место

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{x}{\gamma_k} + 1 \right|^{-1} < \left(1 - \frac{\gamma_{M+1}}{\gamma_{M+2}} \right)^{-1} &= \frac{\gamma_{M+2}}{\gamma_{M+2} - \gamma_{M+1}}, \\
&\le d_1 (M+1)^{1-\beta} \left(B(M+2)^{\beta} + O((M+2)^{\beta-1}) \right) \\
&= d_1 (M+1) \left(1 + \frac{1}{M+1} \right)^{\beta} \left(B + O\left(\frac{1}{M+2} \right) \right) \\
&= d_1 (M+1) B \le d_1 N B, \quad 1 \le M < N.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что при всех $\lambda \in \mathcal{C}_2$ можно получить оценку сверху функции $f_n(\lambda)$:

$$
\begin{aligned}
|f_n(\lambda)| &\le \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \left(2d_1 \cdot BNS_2 + \frac{c_M + c_{M+1}}{Y} \right) + 1 \\
&\le \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \left(2d_1 \cdot BN \cdot S_2 + \frac{C_{N+1}}{Y} \right) + 1,
\end{aligned}
$$

где $C_{N+1} = \sup\limits_{1\le k\le N+1} c_k$ и $S_2 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k}$. Таким образом, для всех $\lambda \in \mathcal{C}_2$ верно неравенство (1.44) в предположении, что

$$\frac{Y^2}{a_n^2} > \left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\left(2d_1 \cdot BN \cdot S_2 + \frac{C_{N+1}}{Y}\right) + 1\right),$$

которое равносильно неравенству

$$Y^3 - a_n^2 Y\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}(2d_1 \cdot BN \cdot S_2) + 1\right) - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} C_{N+1} > 0.$$

Если взять $Y > a_n\sqrt{\beta_N + \frac{C_{N+1}}{a_n^{2(1-\theta)}}}$, где $\beta_N = \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}(2d_1 \cdot BN \cdot S_2) + 1$, то справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned} Y^3 - \beta_N a_n^2 Y - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} C_{N+1} &> Y^3 - \beta_N a_n^2 Y - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} C_{N+1} Y \\ &= Y\left(Y^2 - \beta_N a_n^2 - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} C_{N+1}\right) > 0. \end{aligned}$$

Значит, для всех $\lambda \in \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, справедливо неравенство (1.44) при

$$Y > a_n \cdot \max\left\{\sqrt{\beta_N + \frac{C_{N+1}}{a_n^{2(1-\theta)}}}, \sqrt{\frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}} + 1}\right\}.$$

где

$$\beta_N = \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}(2d_1 \cdot B \cdot N \cdot S_2) + 1.$$

Тот же самый результат получаем в случае, когда $\lambda \in \mathcal{C}^*$ так как $\overline{f_n(\lambda)} = f_n(\overline{\lambda})$ и $\overline{g_n(\lambda)} = g_n(\overline{\lambda})$. Таким образом, из предыдущих обсуждений, для всех $\lambda \in \Gamma_N$ имеем искомое неравенство (1.44). Таким образом, согласно теореме Руше и принципу аргумента мы имеем

$$N[g_n(\lambda)) - P(g_n(\lambda)] = N[f_n(\lambda) + g_n(\lambda)] - P[f_n(\lambda) + g_n(\lambda)],$$

где N и P, соответственно, число нулей и полюсов внутри контура Γ_N, причем каждый полюс и нуль считается с учетом его порядка и кратности, соответственно. По определению функции $g_n(\lambda)$, разница между числами ее нулей и полюсов внутри контура Γ_N равна 2. Внутри контура Γ_N, функция $f_n(\lambda)+g_n(\lambda)$ имеет N полюсов: $-\gamma_N, -\gamma_{N-1}, \ldots, -\gamma_1$. Следовательно, $N[f_n(\lambda)+g_n(\lambda)] = N+2$. Легко видеть (графически) (см. также работу [27]) что функция $f_n(\lambda) + g_n(\lambda)$ имеет $N+1$ или N действительных нулей внутри контура Γ_N, которые удовлетворяют неравенствам (1.4), в зависимости от того, что $\lambda_{N,n}(\theta) < X_N$ или $\lambda_{N,n}(\theta) \geq X_N$. Но если $\lambda_{N,n}(\theta) < X_N$, то $f_n(\lambda) + g_n(\lambda)$ имеет один комплексный нуль внутри контура Γ_N, что невозможно, так как $\overline{(f_n + g_n)}(\lambda) = (f_n + g_n)(\overline{\lambda})$. Следовательно, внутри контура Γ_N существует ровно два комплексных корня $\lambda_n^{\pm}(\theta)$, где $\lambda_n^{+}(\theta) = \overline{\lambda_n^{-}}(\theta)$.

Замечание 14. Внутри контура Γ_N содержится конечное число m пар комплексно-сопряженных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$, причем $m \geqslant l$, если

$$X_N, Y > \max\left\{X_{N_0(l)}, \sqrt{2}a_n\sqrt{\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}+1}, \sqrt{2}a_n\sqrt{\beta_N+\frac{C_{N+1}}{a_n^{2(1-\theta)}}}\right\}$$

и $m \to +\infty$ при $N \to \infty$.

Действительно, из асимптотических представлений (1.7)–(1.9) следует, что $|\lambda_n^{\pm}(\theta)| \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Следовательно, контур Γ_N содержит лишь конечное число m пар комплексно-сопряженных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$, причем $m \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Из оценок, полученных при доказательстве неравенства (1.44), следует, что если выбрать

$$X_N, Y > \max\left\{X_{N_0(l)}, \sqrt{2}a_n\sqrt{\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}+1}, \sqrt{2}a_n\sqrt{\beta_N+\frac{C_{N+1}}{a_n^{2(1-\theta)}}}\right\},$$

то для всех $\lambda \in \Gamma_N$ будет справедлива оценка (1.44). Таким образом, по теореме Руше, внутри контура Γ_N будет содержаться не менее l пар комплексно-сопряженных нулей функций $\ell_n(\lambda)$, $n = 1, \ldots, l$.

Основная идея доказательства теоремы 3 заключается в замене функции

$\widehat{K}(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda+\gamma_k}$ апроксимирующей функцией, выраженной интегралом

$$h(\lambda) = \int_1^{\infty} \frac{\mathcal{A}}{t^{\alpha}(\lambda + \mathcal{B}t^{\beta})} dt,$$

с последующими оценками функции $h(\lambda)$ в области

$$\varphi_{\pi-\delta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \pi - \delta, \delta > 0\}, \tag{1.49}$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ некоторые положительные константы. Апроксимация функции $\widehat{K}(\lambda)$ функцией $h(\lambda)$ в случае $\theta = 1$ была установлена в работе [5, лемма 3], а также в монографиях [3,4, гл. 3]. В случае $\theta \in [0,1]$, доказательство этого утверждения будет приведено в конце этой главы.

Покажем, что комплексные нули мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$ асимптотически представимы в виде $\lambda_n^{\pm} = \tau_n a_n \pm i a_n$, $n \in \mathbb{N}$, при $n \to +\infty$, где τ_n ограниченная числовая последовательность. Для этого достаточно показать, что асимптотическое представление λ_n^{+} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\widehat{K}(\lambda_n^+)}{a_n^{2(1-\theta)}} = \frac{(\lambda_n^+)^2}{a_n^2} + 1,$$

которое равносильно уравнению $\widehat{K}(\lambda_n^+) = a_n^{2(1-\theta)} \tau_n(\tau_n + 2i)$. Отсюда следует, что

$$\tau_n = \frac{\widehat{K}(\lambda_n^+)}{a_n^{2(1-\theta)}(\tau_n + 2i)}. \tag{1.50}$$

Обозначим

$$h_n(\tau) := \frac{\widehat{K}(\lambda_n^+)}{a_n^{2(1-\theta)}(\tau + 2i)}, \qquad \lambda_n^+ = \tau a_n + i a_n.$$

Тогда уравнение (1.50) можно переписать в виде $\tau_n = h_n(\tau_n)$. Отсюда получаем, что число τ_n является неподвижной точкой отображения $\tau \to h_n(\tau)$ при $n \to +\infty$. Следовательно, достаточно показать, что при $n \to +\infty$ отображение $\tau \to h_n(\tau)$ является сжимающим. Таким образом, искомое решение τ_n будет найдено как предел последовательности τ_n^k при $k \to +\infty$, где $\tau_n^k = h(\tau_n^{k-1})$, $\tau_n^0 = 0, \tau_n^1 \neq \tau_n$.

Отображение $\tau \to h_n(\tau)$ является сжимающим. Действительно, это утверждение следует из оценки

$$|h_n'(\tau)| = \left|\frac{\widehat{K}(\lambda_n^+) - \widehat{K}'(\lambda_n^+)(a_n\tau + 2ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}(\tau+2i)^2}\right| \leq \frac{|\widehat{K}'(\lambda_n^+)(2\lambda_n^+)| + |\widehat{K}(\lambda_n^+)|}{a_n^{2(1-\theta)}},$$

где $|\tau| < \frac{1}{2}$ и из нижеприведенной леммы 4, которая будет доказана в конце этой главы.

Лемма 4. *На множестве* $\varphi_{\pi-\delta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \pi - \delta, \delta > 0\}$, *при* $|\lambda| \to +\infty$, *справедливы следующие соотношения:* $|\lambda\widehat{K}'(\lambda)| \to 0$ *и* $|\widehat{K}(\lambda)| \to 0$.

Используя разложение в виде многочлена Тейлора по степеням τ_n непосредственно получаем

$$h_n(\tau_n) = -\frac{i}{2}\frac{\hat{K}(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}} + \frac{\tau_n}{4}\frac{\hat{K}(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}} - \frac{i\tau_n a_n}{2}\frac{\hat{K}'(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}} + O(\tau_n^2)$$

Отсюда вытекает, что

$$h_n(\tau_n) = -\frac{i}{2}\frac{\hat{K}(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}}(1 + O(\tau_n)), n \to +\infty.$$

Таким образом, для τ_n справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\tau_n = -\frac{i}{2}\frac{\hat{K}(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}}(1 + O(\tau_n)), n \to +\infty. \tag{1.51}$$

Следующая лемма используется для того, чтобы получить асимптотические формулы (1.7)–(1.9).

Лемма 5. *Если* $|\arg\lambda| < \pi - \delta, \delta > 0$, *то*

$$\widehat{K}(\lambda) = \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|\lambda|^r}\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(\mathrm{e}^{i\varphi} + t)} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \qquad \text{если } 0 < r < 1, \tag{1.52}$$

$$\widehat{K}(\lambda) = \frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln\left|\frac{\lambda}{\mathcal{B}} + 1\right|}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \qquad \text{если } r = 1, \tag{1.53}$$

где $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *некоторые положительные константы.*

Доказательство леммы 5 будет приведено в конце этой главы.

Справедливо следующее равенство

$$D = \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(i+t)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\pi r)}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}(1+r)\right). \tag{1.54}$$

Для проверки равенства (1.54) выделим в уравнении (1.54) действительную и мнимую части:

$$\frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(i+t)} = \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{r-1}(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(1+t^2)}.$$

В свою очередь, вычисление интегралов в правой части последнего равенства является давно и хорошо известным (см. например [8, гл. IV]):

$$\frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^{r-1}(1+t^2)} = -\frac{i}{2}\frac{\pi\left(\operatorname*{Res}_{z=i} z^p f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} z^p f(z)\right)}{\mathrm{e}^{\pi i p}\sin(\pi p)} = \frac{i\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{\pi i r}}{\sin(\pi r)}\cos\left(\frac{\pi}{2}r\right),$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(1+t^2)} = -\frac{1}{2}\frac{\pi\left(\operatorname*{Res}_{z=i} z^q f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} z^q f(z)\right)}{\mathrm{e}^{\pi i q}\sin(\pi q)} = -\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{\pi i r}}{\sin(\pi r)}\sin\left(\frac{\pi}{2}r\right),$$

где $p = 1-r$, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ и $q = -r$. Таким образом,

$$D = \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(i+t)} = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}i(r+1)}}{\sin(\pi r)}.$$

Используя лемму 5, и равенство (1.54) получаем следующую асимптотическую формулу для случая $0 < r < 1$:

$$-\frac{i}{2}\hat{K}(ia_n) = -\frac{i}{2}\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|a_n|^r}\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(i+t)} + O\left(\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{\mathcal{A}D\mathcal{B}^{1-r}}{\beta a_n^r} + O\left(\frac{1}{a_n}\right),$$

Таким образом,

$$\tau_n = -\frac{i}{2}\frac{\hat{K}(ia_n)}{a_n^{2(1-\theta)}}[1+O(\tau_n)] = \left(-\frac{\mathcal{A}D\mathcal{B}^{r-1}}{\beta a_n^{r+2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\theta)}}\right)\right)[1+O(\tau_n)].$$

Обозначая $R_1 + R_2 := \left(-\frac{\mathcal{A}D_1}{\beta\mathcal{B}^{1-r}}\right) + \left(-i\frac{\mathcal{A}D_2}{\beta\mathcal{B}^{1-r}}\right)$, где

$$D_1 = \frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)}, \qquad D_2 = -\frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)},$$

имеем

$$\tau_n = \frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\theta)}}\right) + \left(\frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\theta)}}\right)\right) O\left(R\right)$$
$$= \frac{R_1}{a_n^{r+2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\theta)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{2r+4(1-\theta)}}\right) + \frac{R_2}{a_n^{r+2(1-\theta)}},$$

где $R = \frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\theta)}}\right)$. В случае $0 < r < 1$, справедлива следующая формула

$$\tau_n(\theta,r) = \frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{1+2(1-\theta),2r+4(1-\theta)\}}}\right), r \in (0,\tfrac{1}{2}) \text{ и } \theta \in [\tfrac{1}{2},1)\ , \quad (1.55)$$
$$\tau_n(\theta,r) = \frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\theta)}}\right), \qquad r \in [\tfrac{1}{2},1) \text{ или } \theta \in (0,\tfrac{1}{2})\ . \quad (1.56)$$

Вновь используя лемму 5, в случае $r = 1$ имеем

$$-\frac{i}{2}\hat{K}(ia_n) = -\frac{i}{2}\frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln\left|\frac{ia}{\mathcal{B}}+1\right|}{ia_n} + O\left(\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n} + O\left(\frac{1}{a_n}\right).$$

Таким образом, получаем асимптотическую формулу,

$$\tau_n(\theta,r) = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n^{1+2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\theta)}}\right). \quad (1.57)$$

Поскольку $\lambda_n^{\pm}(\theta,r) = \tau_n(\theta,r)a_n \pm ia_n$, то из асимптотических формул (1.55)–(1.57) вытекают искомые асимптотические представления

$$\lambda_n^{\pm}(\theta,r) = -\frac{\mathcal{B}^{r-1}\mathcal{A}D_1}{\beta a_n^{r+2\left(\frac{1}{2}-\theta\right)}} \pm i\left(a_n + \frac{\mathcal{B}^{r-1}\mathcal{A}D_2}{\beta a_n^{r+2\left(\frac{1}{2}-\theta\right)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{n_2(\theta,r)}}\right), r \in (0,\tfrac{1}{2}) \text{ и } \theta \in [\tfrac{1}{2},1)\ ,$$
$$\lambda_n^{\pm}(\theta,r) = -\frac{\mathcal{B}^{r-1}\mathcal{A}D_1}{\beta a_n^{r+2\left(\frac{1}{2}-\theta\right)}} \pm i\left(a_n + \frac{\mathcal{B}^{r-1}\mathcal{A}D_2}{\beta a_n^{r+2\left(\frac{1}{2}-\theta\right)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), r \in [\tfrac{1}{2},1) \text{ или } \theta \in (0,\tfrac{1}{2})\ ,$$
$$\lambda_n^{\pm}(\theta,r) = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n^{2(1-\theta)}} \pm ia_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), \qquad r = 1,$$

где $n_2(\theta,r) = \min\{2(1-\theta), 2r+3-4\theta\}$, $r := \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha+\beta > 1$, константы $\mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 0$ и константы D_1 и D_2 определяются следующим образом:

$$D_1 := \frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)}, \qquad D_2 := -\frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(r+1)\right)}{\sin(\pi r)}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\lambda_n^{\pm}(\theta,r) = -\frac{\mathcal{B}^{r-1}\mathcal{A}D_1}{\beta a_n^{r+2(\frac{1}{2}-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{2(1-\theta),2r+4(\frac{3}{4}-\theta)\}}}\right), \qquad r\in(0,\tfrac{1}{2}) \text{ и } \theta\in[\tfrac{1}{2},1)\ ,$$

$$\operatorname{Re}\lambda_n^{\pm}(\theta,r) = -\frac{\mathcal{A}D_1}{\beta\mathcal{B}^{1-r}a_n^{r+2(\frac{1}{2}-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), \qquad r\in[\tfrac{1}{2},1) \text{ или } \theta\in(0,\tfrac{1}{2})\ ,$$

$$\operatorname{Re}\lambda_n^{\pm}(\theta,r) = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n^{2(1-\theta)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\right), \qquad r=1.$$

3.4 Анализ распределения точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае $K(t)\in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t)\notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$

Будем изучать распределения точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда ядро $K(t)$ интегрального оператора принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$, но не принадлежит пространству Соболева $W_1^1(\mathbb{R}_+)$. Изучение распределения точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда *a*) $r=1,\theta=1$ и *b*) $r=(0,1),\theta=1$ приведено в работах [3–5]. В предлагаемой диссертации приведен анализ распределения точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда $r\in(0,1)$ и $\theta\in[0,1)$. Уместно отметить, что структура комплексного спектра оператор-функции $L(\lambda)$, рассматриваемой в предлагаемой работе, существенно отличается от структуры комплексного спектра оператор-функции $L(\lambda)$ из работ [3, 5]. Действительно, из асимптотических формул (1.7)–(1.9) теоремы 3 вытекает следующий анализ о структуре точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$: случай когда параметр θ принадлежит полуинтервалу $[0,1)$ существенно отличается от случая $\theta=1$, поскольку в случае, когда $\theta=1$ вещественные части нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta,r)$, при $n\to+\infty$, стремятся только к $-\infty$ (подробнее см. работы [3, 5]). В случае $\theta\in[0,1)$ вещественные части нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta,r)$, при $n\to+\infty$, могут стремиться либо к $-\infty$ (см. рисунок 3) либо к 0 (см. рисунок 2) либо к отрицательной постоянной (см. рисунки 4 и 5). При выполнении условий теоремы 3, из асимптотических формул (1.7)–(1.9) вытекает, что возможны следующие случаи:

1. Если a) $r = 1$, $\theta \in [0, 1)$ и b) $r \in (0, 1)$, $\theta \in \left(0, \frac{r+1}{2}\right)$, $\theta = 1/2$, то невещественные собственные значения $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$ асимптотически стремятся к мнимой оси (см. рисунок 2), поскольку

$$\operatorname{Re} \lambda_n^{\pm}(\theta, r) \to -0, \quad \text{при } n \to +\infty. \tag{1.58}$$

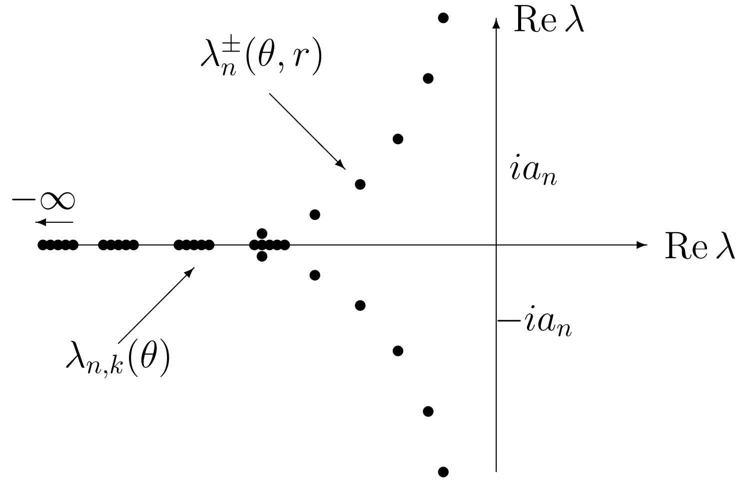

Рис. 2: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

2. При $r \in (0, 1)$ и $\theta \in (\frac{r+1}{2}, 1)$, вещественная часть собственных значений $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$ стремится к $-\infty$ (см. рисунок 3) когда $a_n \to +\infty$, так как

$$\operatorname{Re} \lambda_n^{\pm}(\theta, r) = -\frac{\mathcal{A} D_1}{\beta \mathcal{B}^{1-r}} a_n^{2\left(\theta - \frac{r+1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{2(1-\theta), 2r+3-4\theta\}}}\right). \tag{1.59}$$

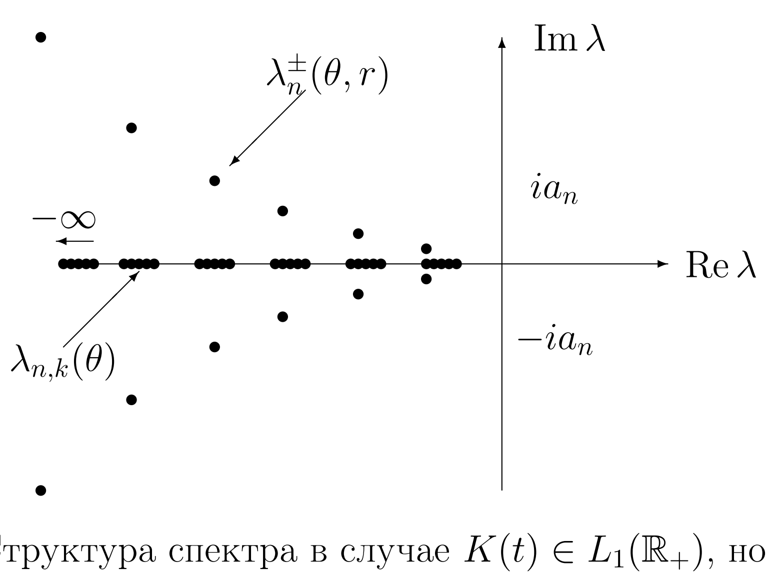

Рис. 3: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

3. При $r \in (0,1)$ и $\theta = \frac{r+1}{2}$, справедлива следующая асимптотика

$$\operatorname{Re} \lambda_n^{\pm}(r) = -\frac{\mathcal{A} D_1}{\beta \mathcal{B}^{1-r}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1-r}}\right), \tag{1.60}$$

которая зависит только от r. Следовательно, при $a_n \to +\infty$, вещественные части нулей $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$ стремятся к отрицательной постоянной ϑ, где $\vartheta := -\frac{\mathcal{A} D_1}{\beta \mathcal{B}^{1-r}}$. Заметим, что при $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$, спектр изображен на рисунке 4, а если $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, то на рисунке 5.

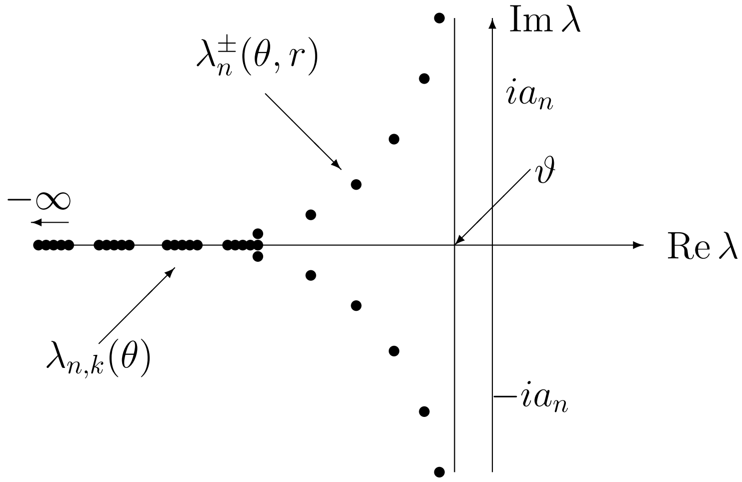

Рис. 4: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

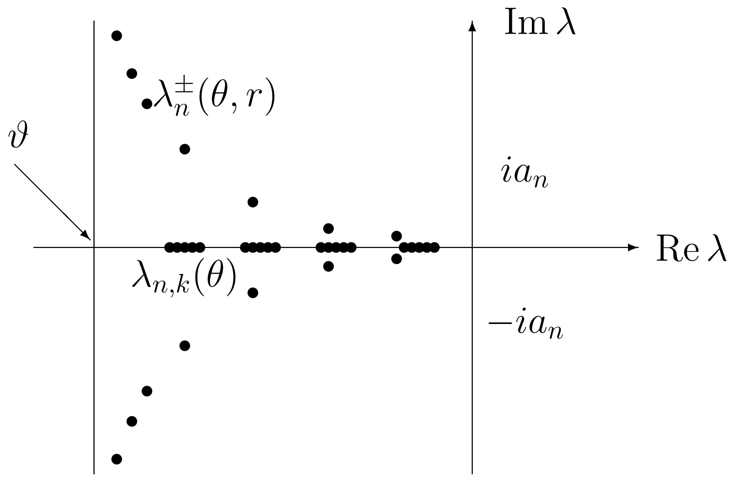

Рис. 5: Структура спектра в случае $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, но $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Тем самым наличие параметра $\theta \in [0,1)$ значительно усложняет структуру невещественного спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Так в случаях 1) и 3) (см. рисунки 2, 4 и 5) структура невещественного спектра оператор-функции $L(\lambda)$

близка к спектру волнового уравнения, а в случае 2) (см. рисунок 3) к спектру абстрактного параболического уравнения.

4 Доказательство вспомогательных утверждений

Предложение 1. *Если* $|\arg\lambda| < \pi - \delta$, *где* $\delta > 0$, *то для* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и* $t \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$|\lambda + t|^2 \approx |\lambda|^2 + |t|^2.$$

Обозначим через $\varphi := \arg\lambda$. Тогда

$$|\lambda + t|^2 = |\lambda|^2 + |t|^2 + 2|\lambda||t|\cos\varphi \leq 2\left(|\lambda|^2 + |t|^2\right).$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} |\lambda + t|^2 &= |\lambda|^2 + |t|^2 + 2|\lambda||t|\cos\varphi \\ &\geq |\lambda|^2 + |t|^2 - 2|\lambda||t|\cos\delta \\ &\geq (1 - \cos\delta)(|\lambda|^2 + |t|^2). \end{aligned}$$

Положим

$$h(\lambda) = \int_1^\infty \frac{\mathcal{A}}{x^\alpha(\lambda + \mathcal{B}x^\beta)} dx.$$

Лемма 6. *Если* $|\arg\lambda| < \pi - \delta$, *где* $\delta > 0$, *то*

$$\left|\widehat{K}(\lambda) - h(\lambda)\right| \leq \frac{\mathrm{const}}{|\lambda|}.$$

Представим последовательности c_k и γ_k в виде

$$c_k = \frac{\mathcal{A}}{k^\alpha} + \varphi(k), \quad \gamma_k = \mathcal{B}k^\beta + \phi(k),$$

где $\mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$ и $\varphi(k) = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right)$, $\phi(k) = O\left(k^{\beta-1}\right)$, при $k \to +\infty$. Оценим модуль разности

$$\left|\widehat{K}(\lambda) - h(\lambda)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{\mathcal{A}}{x^\alpha(\lambda + \mathcal{B}x^\beta)} - \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}\right) dx\right|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \left|\frac{\mathcal{A}}{x^\alpha(\lambda + \mathcal{B}x^\beta)} - \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}\right| dx$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} \left[\left|\frac{\frac{\mathcal{A}}{x^\alpha}}{\lambda + \mathcal{B}x^\beta} - \frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}}{\lambda + \mathcal{B}k^\beta}\right| + \left|\frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha} + \varphi(k)}{\lambda + \mathcal{B}k^\beta + \phi(k)} - \frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}}{\lambda + \mathcal{B}k^\beta}\right|\right] dx. \tag{1.61}$$

Обозначим $r(x) := \frac{1}{x^\alpha(\lambda + \mathcal{B}x^\beta)}$. Оценим первое слагаемое в формуле (1.61). Заметим, вначале, что для всех $x \in [k, k+1]$ верно

$$|r(x) - r(k)| \leq \max_{x \in [k, k+1]} |r^{'}(x)|.$$

С помощью предложения 1 можно получить следующую оценку:

$$|r^{'}(x)| = \left|\frac{\alpha x^{\alpha-1}(\lambda + \mathcal{B}x^\beta) + \beta\mathcal{B}x^{\alpha+\beta-1}}{x^{2\alpha}(\lambda + \mathcal{B}x^\beta)^2}\right| = \left|\frac{\alpha(k+1)^{\alpha-1}\lambda + (\alpha+\beta)\mathcal{B}(k+1)^{\alpha+\beta-1}}{k^{2\alpha}(\lambda + \mathcal{B}k^\beta)^2}\right|$$
$$\leq \frac{(k+1)^{\alpha-1}\alpha|\lambda| + (\alpha+\beta)\mathcal{B}(k+1)^{\alpha+\beta-1}}{k^{2\alpha}\left|\lambda + \mathcal{B}k^\beta\right|^2}$$
$$\lesssim \frac{1}{k^{\alpha+\beta+1}}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\frac{\alpha}{k^\beta} + \frac{(\alpha+\beta)\mathcal{B}\left(1+\frac{1}{k}\right)^\beta}{|\lambda|}}{\frac{1}{k^{2\beta}} + \frac{\mathcal{B}}{|\lambda|^2}}\right) \lesssim \frac{1}{k^{\alpha+\beta+1}}\frac{1}{|\lambda|}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} \left|\frac{\frac{\mathcal{A}}{x^\alpha}}{\lambda + \mathcal{B}x^\beta} - \frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}}{\lambda + \mathcal{B}k^\beta}\right| dx \lesssim \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+\beta+1}}. \tag{1.62}$$

Оценим теперь второе слагаемое в предыдущей формуле (1.61). Применяя предложение 1 получим

$$\left|\frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha} + \varphi(k)}{\lambda + \mathcal{B}k^\beta + \phi(k)} - \frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}}{\lambda + \mathcal{B}k^\beta}\right|^2 = \left|\frac{\varphi(k)\lambda + \mathcal{B}\varphi(k)k^\beta - \frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}\phi(k)}{(\lambda + \mathcal{B}k^\beta + \phi(k))(\lambda + \mathcal{B}k^\beta)}\right|^2$$
$$\lesssim \frac{\frac{1}{k^{2(\alpha+1)}}\left[O\left(\frac{1}{k^{4\beta}}\right)|\lambda|^2 + (\mathcal{B} - \mathcal{A})^2 O\left(\frac{1}{k^{2\beta}}\right)\right]}{\left(\frac{|\lambda|^2}{k^{2\beta}} + \left|\mathcal{B} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right|^2\right)\left(\frac{|\lambda|^2}{k^{2\beta}} + \mathcal{B}^2\right)}.$$

Отсюда и следует

$$\left|\frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}+\varphi(k)}{\lambda+\mathcal{B}k^\beta+\phi(k)}-\frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}}{\lambda+\mathcal{B}k^\beta}\right|^2=\frac{1}{k^{2(\alpha+1)}}\frac{1}{|\lambda|^2}\frac{\left[O\left(\frac{1}{k^{4\beta}}\right)+\frac{(\mathcal{B}-\mathcal{A})^2}{|\lambda|^2}O\left(\frac{1}{k^{2\beta}}\right)\right]}{\left(\frac{1}{k^{2\beta}}+\frac{\left|\mathcal{B}+O\left(\frac{1}{k}\right)\right|^2}{|\lambda|^2}\right)\left(\frac{1}{k^{2\beta}}+\frac{\mathcal{B}^2}{|\lambda|^2}\right)}$$
$$\lesssim\frac{1}{k^{2(\alpha+1)}}\frac{1}{|\lambda|^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\left|\frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}+\varphi(k)}{\lambda+\mathcal{B}k^\beta+\phi(k)}-\frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}}{\lambda+\mathcal{B}k^\beta}\right|dx\lesssim\frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}}.\tag{1.63}$$

Таким образом, из оценок (1.62) и (1.63) получаем искомое неравенство

$$\left|\widehat{K}(\lambda)-h(\lambda)\right|\lesssim\frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+\beta+1}}+\frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}}\le\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|},\tag{1.64}$$

где $0<\alpha\le 1$, $\alpha+\beta>1$. Итак лемма 6 доказана.

Доказательство леммы 5. Пусть $0<r<1$. Сделаем в интеграле $h(\lambda)$ замену переменных $\mathcal{B}x^\beta=|\lambda|t$, тогда

$$h(\lambda)=\int_1^\infty\frac{\mathcal{A}dx}{x^\alpha(\lambda+\mathcal{B}x^\beta)}=\frac{1}{\beta|\lambda|^r}\int_{\frac{\mathcal{B}}{|\lambda|}}^{\infty}\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}dt}{t^r(\mathrm{e}^{i\varphi}+t)}=\frac{1}{\beta|\lambda|^r}\left(\int_{\frac{\mathcal{B}}{|\lambda|}}^{0}\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}dt}{t^r(\mathrm{e}^{i\varphi}+t)}+\int_0^\infty\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}dt}{t^r(\mathrm{e}^{i\varphi}+t)}\right),$$

где $r=\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, $\mathcal{A}>0,\mathcal{B}>0$, $0<\alpha\le 1$, $\alpha+\beta>1$. Посчитаем, отдельно, следующий интеграл

$$\int_{\frac{\mathcal{B}}{|\lambda|}}^{0}\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}dt}{t^r(\mathrm{e}^{i\varphi}+t)}=\mathrm{e}^{-i\varphi}\int_{\frac{\mathcal{B}}{|\lambda|}}^{0}\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}dt}{t^r(1+t\mathrm{e}^{-i\varphi})}=\mathrm{e}^{-i\varphi}\int_{\frac{\mathcal{B}}{|\lambda|}}^{0}\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{t^r}\left[1-\frac{t}{\mathrm{e}^{i\varphi}}+\frac{t^2}{\mathrm{e}^{2i\varphi}}+\cdots\right]dt$$
$$=-\frac{\mathrm{e}^{-i\varphi}\mathcal{B}^{1-r}}{(1-r)|\lambda|^{1-r}}+\frac{\mathrm{e}^{-2i\varphi}\mathcal{B}^{2-r}}{(2-r)|\lambda|^{2-r}}-\frac{\mathrm{e}^{-3i\varphi}\mathcal{B}^{3-r}}{(3-r)|\lambda|^{3-r}}+\cdots$$
$$=-\frac{\mathrm{e}^{-i\varphi}\mathcal{B}^{1-r}}{(1-r)|\lambda|^{1-r}}+O\left(\frac{1}{|\lambda|^{2-r}}\right).$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
h(\lambda) &= \frac{1}{\beta|\lambda|^r}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-i\varphi}\mathcal{B}^{1-r}}{(1-r)|\lambda|^{1-r}} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^{2-r}}\right) + \int\limits_0^\infty \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}dt}{t^r(\mathrm{e}^{i\varphi}+t)}\right) \\
&= \frac{1}{\beta|\lambda|^r}\int\limits_0^\infty \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}dt}{t^r(\mathrm{e}^{i\varphi}+t)} - \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{e}^{-i\varphi}\mathcal{B}^{1-r}}{(1-r)|\lambda|} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \\
&= \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|\lambda|^r}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^r(\mathrm{e}^{i\varphi}+t)} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \qquad (1.65)
\end{aligned}
$$

Пусть теперь $r = 1$. Снова, сделаем в интеграле $h(\lambda)$ замену переменных $\mathcal{B}x^\beta = t$, тогда

$$
h(\lambda) = \int\limits_1^\infty \frac{\mathcal{A}dx}{x^\alpha(\lambda+\mathcal{B}x^\beta)} = \frac{\mathcal{A}}{\beta}\int\limits_{\mathcal{B}}^\infty \frac{dt}{t(\lambda+t)} = \frac{\mathcal{A}}{\beta}\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\mathcal{B}}+1\right)}{\lambda}. \qquad (1.66)
$$

Из леммы (6) и оценок (1.65) и (1.66) получаем доказательство леммы 5.

Следствие 3. *Верно следующее соотношение*

$$
|h(iy)| = \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|y|^r}\left|\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(i+t)}\right| < +\infty, \quad y \in \mathbb{R}.
$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Im} h(iy)| &= \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|y|^r}\left|\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{dt}{t^r(i+t)}\right| = \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|y|^r}\left|\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(t^2+1)}\right| < +\infty, \\
|\operatorname{Re} h(iy)| &= \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|y|^r}\left|\int_0^\infty \operatorname{Re}\frac{dt}{t^r(i+t)}\right| = \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|y|^r}\left|\int_0^\infty \frac{dt}{t^{r-1}(t^2+1)}\right| < +\infty.
\end{aligned}
$$

Доказательство леммы 4. Применяя следствие 3, сразу получаем

$$
\begin{aligned}
|\widehat{K}(\lambda)| &\le \left|\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|\lambda|^r}\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(\mathrm{e}^{i\varphi}+t)}\right| + \left|O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right| \\
&\lesssim \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{\beta|\lambda|^r}\left(\left|\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(t^2+1)}\right| + \left|\int_0^\infty \frac{dt}{t^{r-1}(t^2+1)}\right|\right) + \left|O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $|\widehat{K}(\lambda)| \to 0$ при $\lambda \to +\infty$. Далее, применяя предложение 1 можно получить следующую оценку:

$$
|\lambda\widehat{K}'(\lambda)| \le \sum_{k=1}^\infty \frac{c_k|\lambda|}{|\lambda+\gamma_k|^2} \lesssim \sum_{k=1}^\infty \frac{c_k|\lambda|}{|\lambda|^2+|\gamma_k|^2} = |\lambda|\sum_{k=1}^\infty \frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}+\varphi(k)}{|\lambda|^2+|\mathcal{B}k^\beta+\phi(k)|^2}. \qquad (1.67)
$$

Оценим следующую модуль разности

$$\left|\frac{\left[\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}+\varphi(k)\right]|\lambda|}{|\lambda|^2+(\mathcal{B}k^\beta+\phi(k))^2}-\frac{\frac{\mathcal{A}}{k^\alpha}|\lambda|}{|\lambda|^2+\mathcal{B}^2k^{2\beta}}\right| \le \frac{\varphi(k)\left(|\lambda|^3+|\lambda|\mathcal{B}^2k^{2\beta}\right)+\frac{\mathcal{A}|\lambda|}{k^\alpha}\left(2\mathcal{B}k^\beta\phi(k)+\phi^2(k)\right)}{(|\lambda|^2+(\mathcal{B}k^\beta+\phi(k))^2)(|\lambda|^2+\mathcal{B}^2k^{2\beta})}$$
$$= \frac{O\left(\frac{1}{k^{4\beta}}\right)+\frac{1}{|\lambda|^2}\left[O\left(\frac{1}{k^{2\beta}}\right)+O\left(\frac{1}{k^{2\beta}}\right)+O\left(\frac{1}{k^{2\beta+1}}\right)\right]}{|\lambda|k^{\alpha+1}\left(\frac{1}{k^{2\beta}}+\frac{\left(\mathcal{B}+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2}{|\lambda|^2}\right)\left(\frac{1}{k^{2\beta}}+\frac{\mathcal{B}^2}{|\lambda|^2}\right)}$$
$$\lesssim \frac{1}{|\lambda|k^{\alpha+1}}. \tag{1.68}$$

Следовательно, из оценок (1.67) и (1.68) и используя замену переменых $\mathcal{B}x^\beta = |\lambda|t$ получаем

$$\left|\lambda\widehat{K}'(\lambda)\right| \lesssim \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}|\lambda|}{k^\alpha(|\lambda|^2+\mathcal{B}^2k^{2\beta})}\right|+\frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}}$$
$$\le \frac{\mathcal{A}|\lambda|}{|\lambda|^2+\mathcal{B}^2}+\left|\int_2^\infty\frac{\mathcal{A}|\lambda|dx}{x^\alpha(|\lambda|^2+\mathcal{B}^2x^{2\beta})}\right|+\frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}}$$
$$\lesssim \frac{\mathcal{A}}{|\lambda|}+\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}^{r-1}}{|\lambda|^r}\left|\int_{\frac{\mathcal{B}2^\beta}{|\lambda|}}^\infty\frac{dt}{t^r(1+t^2)}\right|+\frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, $\left|\lambda\widehat{K}'(\lambda)\right|\to 0$ при $|\lambda|\to+\infty$. Лемма 4 доказана.

Глава 2

Корректная разрешимость в весовом пространстве Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ и в пространстве Соболева $W^2_2\big((0,T), A^2\big)$

1 Введение

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^{2\theta}u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2.2}$$

где A – самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный.

Вектор-функции φ_0, φ_1 и $f(t)$ будут описаны позже. Вещественное число θ принадлежит отрезку $[0,1]$, а функция $K(t)$ – ядро интегрального оператора.

Отметим, что уравнение вида (2.1) возникает в различных областях механики и физики, такие как передача тепла с конечной скоростью распространения [25], теория вязкоупругих сред [20], кинетическая теория газов [26], и тепловые модели с памятью [43]. В зарубежной литературе уравнение вида (2.1) нередко называют уравнением Гуртина–Пипкина.

В теории теплопроводности и теории вязкоупругости сред ядро сверки $K(t)$ определяется в результате эксперимента. Свойство модели теплопроводности с памятью, было исследовано, например, в работе [38], где в качестве ядра сверки $K(t)$ рассматривается как гладкая функция. В [37], были изучены решения задач оптимального управления с компактным носителем с помощью распределенного управляющего воздействия, ограниченного по абсолютной величине.

В теории вязкоупругости ядро $K(t)$ также определяется в результате эксперимента. Полученные кривые, таким образом, часто аппроксимируются конечной суммой экспонент в виде:

$$K(t) \approx \sum_{k=1}^{N} c_k \exp(-\gamma_k t).$$

Уравнения, аналогичные по структурам и свойствам уравнению Гуртина–Пипкина также возникают в кинетической теории газов. В этой теории уравнения сплошной среды выводится из законов попарного взаимодействия молекул. Из уравнения Больцмана можно вывести ряд уравнений для моментов. Здесь, моменты являются усреднениями функции распределения молекул по координатам и скоростям, по переменным скорости с определенными весами. В частности, обычные компоненты системы Навье–Стокса такие как скорость, давление, плотность могут быть представлены как моменты в ряде моментных уравнений.

Задача (2.1)–(2.2) является задачей для вязкоупругого стержня Кирхгофа в случае, когда $Au = -\Delta u$ и $\theta = 1/2$ (подробнее, см. работы [10, 19, 35] авторов Г. Кирхгофа, А. Аросио, С. Паниззи, Муньос Ривера, М.Г. Насо, и Ф.М. Вегни). Задача (2.1)–(2.2) представляет собой также изотропную модель вязкоупругости, если полагать $A^2u = -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} u)$ и $\theta = 1$ или $A^2u = -\frac{1}{\varrho}\Delta u$, $\varrho > 0$ и $\theta = 1$, где μ и λ являются *параметрами Ламе* упругой среды (подробнее, см. работы [29,34–36] авторов М. Фабризио, В. Лаззари, Х.Е. Муньос Ривера, М.Г. Насо, Е. Вук и Ф.М. Вегни).

В работах [5, 6, 44] В.В. Власова и соавторов изучена задача (2.1)–(2.2) в случае $\theta = 1$. Установлена корректная разрешимость начально-краевых задач в весовом пространстве Соболева на положительной полуоси и приведены спектральные свойства оператор-функции $L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda)A^{2\theta}$ в случае, когда параметр $\theta = 1$, где $\widehat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа функции $K(t)$. Обобщение вышеупомянутых результатов было получено в недавней работе [45].

Ряд глубоких результатов о корректной разрешимости вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной, а также результатов о спектре, соответствующих оператор-функций получен Н.Д. Копачевским и его учениками. Ограничимся здесь указанием работ [11, 28, 47].

Укажем также работу Л. Пандолфи [38] в которой изучалась задача для уравнения типа Гуртина–Пипкина. Отметим, что в отличие от результатов второй главы в указанных работах разрешимость изучалась в пространствах, непрерывно дифференцируемых функций на конечном интервале по временной переменной t.

Глава состоит из четырёх параграфов. В первом параграфе излагается краткое введение в предмет, и описываются в особенности применения уравнения типа Гуртина–Пипкина. Основные результаты по корректной разрешимости для случая $\theta \in [0, 1]$ сформулированы в третьем параграфе. Доказательство этих результатов приведено в четвертом параграфе.

2 Постановка задач

Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β. Обозначим через $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям a_n: $Ae_n = a_n e_n, n \in \mathbb{N}$. Собственные значения a_n упорядочены по возрастанию: $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, при этом $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

На положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка (2.1)–(2.2).

Предполагается, что вектор-функция $A^{2-\theta} f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho_0}(\mathbb{R}_+, H)$ при некотором $\rho_0 \geq 0$, и что скалярная функция $K(t)$ (ядро интегрального оператора) допускает представление

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-\gamma_k t},$$

где $c_k > 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Более того, предполагается, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1. \tag{2.3}$$

Наряду с этим условием, в ряде случаев будет также использоваться условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty. \tag{2.4}$$

Приведем несколько определений и обозначений, которые будут использоваться в дальнейшем. Через $W_{2,\gamma}^m(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|^2_{W_{2,\gamma}^m(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t} \left(\|u^{(m)}(t)\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2 \right) dt, \quad \gamma \geq 0. \tag{2.5}$$

Подробнее о пространствах $W^m_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. монографию [12, гл. I]. При $\gamma = 0$ полагаем $W^m_{2,0}(\mathbb{R}_+, A^n) \equiv W^m_2(\mathbb{R}_+, A^n)$, при $n = 0$, $m = 2$ полагаем $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, а при $m = n = 0$ полагаем $W^0_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H) := \mathcal{L}_{2,\gamma}$, где через $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ обозначено пространство (классов) измеримых вектор-функций f со значениями в пространстве H, для которых

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \equiv \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}\|f(t)\|^2_H dt\right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Условие (2.3) в рассматриваемом случае означает, что ядро $K(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$ и $\|K\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} < 1$. А условия (2.3) и (2.4) означают, что ядро $K(t)$ принадлежит скалярному пространству Соболева $W^1_1(\mathbb{R}_+)$.

Определение 2. Вектор-функцию $u(t)$ назовем сильным решением задачи (2.1)–(2.2), если она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geq 0$, удовлетворяет уравнению (2.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальным условиям (2.2).

3 Формулировка основных результатов

3.1 Теорема о корректной разрешимости в весовом пространстве Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$

В работе [5, теорема 1] приведено доказательство существования сильного решения $u(t)$, принадлежащего пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ и была доказана корректная разрешимость задач (2.1)–(2.2) для случая $\theta = 1$. В этой главе устанавливается корректная разрешимость задачи (2.1)–(2.2) в случае $\theta \in [0, 1]$. Полученные результаты здесь являются обобщениями результатов, приведенных в работе [5, теорема 1]. Отметим, что оба результата совпадают при $\theta = 1$.

Теорема 4. *Пусть, для всех $\theta \in [0,1]$ и при некотором $\rho_0 \geq 0$, оператор-функция $A^{2-\theta}f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho_0}(\mathbb{R}_+, H)$. Тогда*

1. *Если выполнены условия* (2.3) *и* (2.4), *и $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$ для всех $\theta \in [0,1]$ то найдется такое $\widetilde{\rho} > \rho_0$, что для любого $\gamma > \widetilde{\rho}$, задача* (2.1)–(2.2) *имеет единственное решение $u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leq d\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right), \tag{2.6}$$

   с положительной постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

2. *Если выполнено условие* (2.3), *а условие* (2.4) *не выполнено* (*т. е., ядро $K(t) \notin W^1_1(\mathbb{R}_+)$*) *и $\varphi_0 \in H_{2+\theta}$, $\varphi_1 \in H_{1+\theta}$ для всех $\theta \in (0,1]$ то найдется такое $\widetilde{\rho} > \rho_0$, что для любого $\gamma > \widetilde{\rho}$ задача* (2.1)–(2.2) *имеет единственное решение $u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leq d\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right), \tag{2.7}$$

   с положительной постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

3.2 Теорема о корректной разрешимости в пространстве Соболева $W^2_2((0,T), A^2)$

Приведем результат о корректной разрешимости задачи (2.1)–(2.2) в пространстве Соболева $W^2_2((0,T), A^2)$, для любого $T > 0$. Пространство $W^2_2((0,T), A^2)$ снабжено нормой

$$\|u\|_{W^2_2((0,T),A^2)} \equiv \left(\int_0^T \left(\|u^{(2)}(t)\|^2_H + \|A^2u(t)\|^2_H\right) dt\right)^{1/2}.$$

Теорема 5. *Пусть, для всех $\theta \in [0,1]$ вектор-функция $A^{2-\theta}f(t)$ принадлежит пространству $L_2((0,T),H)$. Тогда*

1. *Если выполнены условия пункта 1 теоремы 4, то для любого $T > 0$ задача (2.1)–(2.2) имеет единственное решение $u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W_2^2((0,T),A^2)$, и для него справедлива следующая оценка*
$$\|u\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \leq d_T \left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_2((0,T),H)} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right), \qquad (2.8)$$
с положительной постоянной d_T, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

2. *Если выполнены условия пункта 2 теоремы 4, то для любого $T > 0$ задача (2.1)–(2.2) имеет единственное решение $u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W_2^2((0,T),A^2)$, и для него справедлива следующая оценка*
$$\|u\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \leq d_T \left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_2((0,T),H)} + \|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right), \quad (2.9)$$
с положительной постоянной d_T, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда, в случае выполнения условий п.* 1) *теоремы 5, для решения $u(t)$ будет справедлива оценка*
$$\sup_{t\in[0,T]} \|A^{3/2}u(t)\|_H + \sup_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}u^{(1)}(t)\|_H \leq d_1(T)\left(\|A^{2-\theta}f\|_{\mathcal{L}_2} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right),$$
где $\mathcal{L}_2 := L_2((0,T),H)$ и положительная постоянная $d_1(T)$, не зависит от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

В случае выполения условий п. 2) *теоремы 5, для решения $u(t)$ будет справедлива оценка*
$$\sup_{t\in[0,T]} \|A^{3/2}u(t)\|_H + \sup_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}u^{(1)}(t)\|_H \leq d_1(T)\left(\|A^{2-\theta}f\|_{\mathcal{L}_2} + \|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right),$$
где $\mathcal{L}_2 := L_2((0,T),H)$ и положительная постоянная $d_1(T)$, не зависит от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Следствие из теоремы 5 немедленно вытекает из теоремы о следах (см. монографию [12, гл. I]).

4 Доказательство теоремы о корректной разрешимости в пространствах Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ и $W^2_2((0,T), A^2)$

В случае однородного (нулевого) начального условия $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ используется схема доказательства корректной разрешимости задачи Коши для уравнений гиперболического типа, основанная на применении преобразования Лапласа.

Для удобства напомним известные факты, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 3. Назовем пространством Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\hat{f}(\lambda)$ со значениями в сепарабельном гильбертобом пространстве H, аналитических в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re}\lambda > \gamma \geq 0\}$, для которых

$$\|\hat{f}\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} = \left(\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{f}(x+iy)\|^2_H dy\right)^{1/2} < +\infty, \ \ (\lambda = x+iy).$$

Сформулируем известную теорему Пэли–Винера для пространств Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$.

Теорема (Пэли–Винера).

1. *Пространство $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ совпадает с классом вектор-функций (преобразований Лапласа) представимых в виде*

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)dt, \tag{2.10}$$

где $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > \gamma \geq 0$.

2. *Для любой вектор-функции $\hat{f}(\lambda)$, принадлежащей пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$, существует и единственно представление* (2.10),

где вектор-функция $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *причем справедлива формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma + iy) \mathrm{e}^{(\gamma+iy)t}\, dy,\ t \in \mathbb{R}_+,\ \gamma \geq 0.$$

3. *Для вектор-функции* $\hat{f}(\lambda)$, *принадлежащей пространству Харди* $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H) := \mathcal{H}_2$, *и функции* $f(t)$, *принадлежащей пространству* $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H) := \mathcal{L}_{2,\gamma}$, *связанных соотношением* (2.10), *справедливо равенство*

$$\|\hat{f}(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_2} \equiv \sup_{\operatorname{Re}>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(x+iy)\|^2_H dy = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma t} \|f(t)\|^2_H dt \equiv \|f(t)\|^2_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}.$$

Замечание 15. Указанная теорема широко известна для числовых (скалярных) функций (см., например, [9, гл. VI, ч. 4], теоремы 1, 2). Однако без труда она обобщается на вектор-функции со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Начнем с доказательства теоремы 4 в случае однородных начальных условий $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Прежде всего, заметим, что преобразование Лапласа $\hat{u}(\lambda)$ любого сильного решения $u(t)$ уравнения (2.1) с начальными условиями (2.2) имеет вид

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda), \tag{2.11}$$

где оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (2.1) и $L(\lambda)$ представима в виде

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \widehat{K}(\lambda) A^{2\theta} := \lambda^2 I + A^2 - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k} \right) A^{2\theta}. \tag{2.12}$$

Здесь, оператор I является тождественным оператором в гильбертовом пространстве H.

Если мы установим, что вектор-функция в правой части равенства (2.11) такова, что $A^2\hat{u}(\lambda)$ и $\lambda^2\hat{u}(\lambda)$ оба принадлежат пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda >$

$\gamma, H)$ при некотором $\gamma > \rho_0 \geq 0$, то по теореме Пэли–Винера, получим, что вектор-функции $A^2 u(t)$ и $d^2 u(t)/dt^2$ оба принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, и, следовательно, получим, что вектор-функция $u(t)$ будет принадлежать пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$. Таким образом, будет установлена разрешимость задачи (2.1)–(2.2) в пространстве $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$.

Рассмотрим проекцию $\hat{u}_n(\lambda)$ оператор-функции $\hat{u}(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$\hat{u}_n(\lambda) = \ell_n^{-1}(\lambda)(\hat{f}(\lambda), e_n), \tag{2.13}$$

где

$$\ell_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2 - a_n^{2\theta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k} \right).$$

Заметим, что сужение вектор-функции $A^2 \hat{u}(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n имеет вид

$$\big(A^2 \hat{u}(\lambda), e_n\big) = \frac{a_n^{\theta} \hat{g}_n(\lambda)}{\ell_n(\lambda)}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \tag{2.14}$$

где $\hat{g}_n(\lambda)$ – n-й координат оператор-функции $\hat{g}(\lambda) = A^{2-\theta} \hat{f}(\lambda)$. По условию теоремы 4, вектор-функция $g(t) = A^{2-\theta} f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho_0}(\mathbb{R}_+, H)$. Следовательно, преобразование Лапласа $\hat{g}(\lambda)$ функции $g(t)$ принадлежит пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \rho_0, H)$.

Таким образом, для доказательства принадлежности вектор-функции $A^2 \hat{u}(\lambda)$ пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$, $\gamma > \rho_0$, достаточно установить равномерную по $\lambda(\operatorname{Re}\lambda > \gamma)$, $n \in \mathbb{N}$, следующую оценку:

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda > \gamma \\ n \in \mathbb{N}}} \left| \frac{a_n^{\theta}}{\ell_n(\lambda)} \right| \leq \text{const}, \quad \text{для всех } \theta \in [0, 1]. \tag{2.15}$$

Для получения оценки (2.15), рассмотрим функцию $\mathfrak{m}_n(\lambda) = \frac{\ell_n(\lambda)}{a_n^2}$ и оценим ее снизу. Вычисляя вещественную и мнимую часть функции $\mathfrak{m}_n(\lambda)$, получим

$$\operatorname{Re}\mathfrak{m}_n(\lambda) = \frac{x^2-y^2}{a_n^2} + 1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(x+\gamma_k)}{(x+\gamma_k)^2+y^2}\right), \ \lambda = x+iy,$$

$$\operatorname{Im}\mathfrak{m}_n(\lambda) = \frac{2xy}{a_n^2} + \frac{y}{a_n^{2(1-\theta)}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(x+\gamma_k)^2+y^2}\right).$$

Вначале оценим снизу $|\operatorname{Im}\mathfrak{m}_n(\lambda)|$ при $|y| > x$, где $x > \gamma \geq \rho_1 \geq 0$:

$$|\operatorname{Im}\mathfrak{m}_n(\lambda)| > \frac{2x|y|}{a_n^2} + \frac{1}{|y|a_n^{2(1-\theta)}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\left(1+\frac{\gamma_k}{|y|}\right)^2+1}\right) > \frac{2\gamma y^2 + k_0(\gamma)a_n^{2\theta}}{|y|a_n^2},$$

где $k_0(\gamma) = \frac{c_1}{\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2+1}$. Отсюда, следует, что для $|y| > x$ при $x > \gamma \geq \rho_1 \geq 0$ получим

$$\frac{1}{|\ell_n(\lambda)|} \leq \frac{1}{a_n^2|\operatorname{Im}\mathfrak{m}_n(\lambda)|} < \frac{|y|}{2\gamma y^2 + k_0(\gamma)a_n^{2\theta}} < \frac{1}{a_n^{\theta}\sqrt{2\gamma\cdot k_0(\gamma)}}. \tag{2.16}$$

Затем оценим снизу $|\operatorname{Re}\mathfrak{m}_n(\lambda)|$ при $|y| < x$, где $x > \gamma > \rho_1 \geq 0$. При фиксированном ϵ найдется $N = N(\epsilon)$, для которого

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{c_k}{x+\gamma_k} < \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k} < \frac{\epsilon}{2}, \quad x > 0. \tag{2.17}$$

В свою очередь, для конечной суммы $\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{c_k}{x+\gamma_k}$ найдется $\rho^* > 0$ такое, что для $x > \rho^* > 0$, верно следующее неравенство

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{x+\gamma_k} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.18}$$

Таким образом, из соотношений (2.17) и (2.18) получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{x+\gamma_k} < \epsilon, \quad x > \rho^* > 0. \tag{2.19}$$

Нам известно, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что a_n стремится к плюс бесконечности при $n \to +\infty$ и собственные значения a_n расположены в порядке возрастания. Таким образом, мы можем выбрать достаточно малое $\epsilon > 0$

такое, что $\epsilon < \frac{a_1^{2(1-\theta)}}{2}$. Следовательно, при $x > \rho^* > 0$ справедливо следующее неравенство

$$\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(x+\gamma_k)}{(x+\gamma_k)^2+y^2} < \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{x+\gamma_k} < \frac{1}{a_1^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{x+\gamma_k} < \frac{1}{2}. \quad (2.20)$$

Отсюда следует, что

$$|\operatorname{Re}\mathfrak{m}_n(\lambda)| > \left|1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{x+\gamma_k}\right| > \left|1 - \frac{1}{a_1^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{x+\gamma_k}\right| > \frac{1}{2}.$$

Поэтому, при $|y| < x$, где $x > \widetilde{\rho} = \max(\rho_0, \rho_1, \rho^*) > 0$, имеем

$$\frac{1}{|\ell_n(\lambda)|} \le \frac{1}{a_n^2\,|\operatorname{Re}\mathfrak{m}_n(\lambda)|} < \frac{1}{a_n^2\left|1 - \frac{1}{a_1^{2(1-\theta)}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{x+\gamma_k}\right|} < \frac{2}{a_n^2}. \quad (2.21)$$

Из предыдущих оценок (2.16) и (2.21) получим сразу следующие неравенства

$$\left|\frac{a_n^{\theta}}{\ell_n(\lambda)}\right| < \frac{1}{\sqrt{2\gamma\cdot k_0(\gamma)}}, \quad |y| > x > \gamma > \rho_1 \ge 0,$$
$$\left|\frac{a_n^{\theta}}{\ell_n(\lambda)}\right| < \frac{2}{a_n^{2-\theta}} < \frac{2}{a_1^{2-\theta}}, \quad |y| < x, \quad x > \widetilde{\rho} > 0.$$

Таким образом, при $\gamma > \max\{\rho_1, \widetilde{\rho}\}$ получим искомую оценку

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda>\gamma\\ n\in\mathbb{N}}}\left|\frac{a_n^{\theta}}{\ell_n(\lambda)}\right| < \frac{2}{\min\left(\sqrt{2\gamma\cdot k_0(\gamma)}, a_1^{2-\theta}\right)}, \quad \text{для всех } \theta\in[0,1]. \quad (2.22)$$

Замечание 16. Из оценки (2.22) непосредственно следует

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma}\left\|A^{\theta}L^{-1}(\lambda)\right\| \le \mathrm{const}\,. \quad (2.23)$$

Пространство Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ является инвариантной относительно умножения функций вида $\frac{a_n^{\theta}}{\ell_n(\lambda)}$, так как эти функции в силу (2.22) являются аналитическими и ограниченными. Следовательно, принадлежность вектор-функции $\hat{g}(\lambda) = A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)$ пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ влечет за собой принадлежность вектор-функции $A^2\hat{u}(\lambda)$ пространству $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$.

Установим теперь оценку нормы вектор-функции $A^2u(t)$ в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$. Из (2.11) следует

$$A^2\hat{u}(\lambda) = A^2L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda) = A^{\theta}L^{-1}(\lambda)A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda), \tag{2.24}$$

которое можно представить в виде

$$A^2\hat{u}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{\theta}}{\ell_k(\lambda)} \cdot a_k^{2-\theta}\hat{f}_k(\lambda)e_k.$$

Согласно условию теоремы 4, вектор-функция $A^{2-\theta}f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho_0}(\mathbb{R}_+, H)$. Таким образом, по теореме Пэли–Винера, вектор-функция $A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \rho_0, H)$ и верно следующее равенство

$$\|A^{2-\theta}f\|_{L_{2,\rho_0}(\mathbb{R}_+,H)} = \|A^{2-\theta}\hat{f}\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\rho_0,H)}.$$

В силу неравенства (2.22) и теоремы Пэли–Винера, при $\gamma > \widetilde{\rho}$, справедливы следующие соотношения:

$$\|A^2u(t)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \|A^2\hat{u}(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} = \|A^{\theta}L^{-1}(\lambda)A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)}.$$

Последний член этого уравнения можно оценивать сверху следующим образом:

$$\begin{aligned}
\|A^{\theta}L^{-1}A^{2-\theta}\hat{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} &= \sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_k^{\theta}}{\ell_k(\lambda)} \cdot a_k^{2-\theta}\hat{f}_k(\lambda) \right|^2 \right) dy \\
&\leq \sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda>\gamma \\ k\in\mathbb{N}}} \left| \frac{a_k^{\theta}}{\ell_k(\lambda)} \right|^2 \cdot \sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k^{2-\theta}\hat{f}_k(\lambda) \right|^2 \right) dy \\
&\leq \sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda>\gamma \\ k\in\mathbb{N}}} \left| \frac{a_k^{\theta}}{\ell_k(\lambda)} \right|^2 \|A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} \\
&\leq d_1^2\|A^{2-\theta}f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)},
\end{aligned} \tag{2.25}$$

где

$$d_1 = \sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda>\gamma \\ k\in\mathbb{N}}} \left| \frac{a_k^{\theta}}{\ell_k(\lambda)} \right|.$$

Отсюда, следует принадлежность вектор-функции $A^2u(t)$ пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma > \widetilde{\rho}$, и верно следующее неравенство

$$\|A^2 u\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leq d_1 \left(\|A^{2-\theta} f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \right), \tag{2.26}$$

с постоянной $d_1 > 0$, не зависящей от вектор-функции f.

Покажем, что вектор-функция $\lambda^2 \hat{u}(\lambda)$ также принадлежит пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$. Напомним, что функция $\widehat{K}(\lambda)$ представляется в виде

$$\widehat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}.$$

Заметим, что при $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$ тождественный оператор I можно писать следующим образом

$$I = \lambda^2 L^{-1}(\lambda) + \left(I - \widehat{K}(\lambda) A^{-2(1-\theta)} \right) A^2 L^{-1}(\lambda).$$

Отсюда, при $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$ получаем

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \lambda^2 L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda) + \left(I - \widehat{K}(\lambda) A^{-2(1-\theta)} \right) A^2 L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda) \\ &= \lambda^2 \hat{u}(\lambda) + \left(I - \widehat{K}(\lambda) A^{-2(1-\theta)} \right) A^{\theta} L^{-1}(\lambda) A^{2-\theta} \hat{f}(\lambda). \end{aligned} \tag{2.27}$$

В предыдущих равенствах (2.27), предполагается, что вектор-функция $A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ и что $\sup\limits_{\operatorname{Re}\lambda > \gamma} \left\| A^{\theta} L^{-1}(\lambda) \right\| \leq \text{const}$. Таким образом, из (2.27) вытекает следующее соотношение

$$\lambda^2 \hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) - \left(I - \widehat{K}(\lambda) A^{-2(1-\theta)} \right) A^{\theta} L^{-1}(\lambda) A^{2-\theta} \hat{f}(\lambda). \tag{2.28}$$

Следовательно, для функции $\lambda^2 \hat{u}_n(\lambda)$ справедливо следующее представление

$$\lambda^2 \hat{u}_n(\lambda) = \hat{f}_n(\lambda) - \left(1 - \frac{\widehat{K}(\lambda)}{a_n^{2(1-\theta)}} \right) \frac{a_n^{\theta}}{\ell_n(\lambda)} \hat{g}_n(\lambda), \tag{2.29}$$

где $\hat{g}_n(\lambda) = a_n^{2-\theta} \hat{f}_n(\lambda)$. В силу сделанных предположений относительно последовательностей $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, функция $\widehat{K}(\lambda)$ аналитична и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Из неравенства (2.20) при $x > \widetilde{\rho}$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left|1 - \frac{\widehat{K}(\lambda)}{a_n^{2(1-\theta)}}\right| < \frac{3}{2}. \tag{2.30}$$

Из предположения принадлежность вектор-функция $A^{2-\theta}f(t)$ пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, следует, что ее преобразование Лапласа $A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$. Отсюда получаем, что

$$\|A^{2-\theta}\hat{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} = \sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\|A^{2-\theta}\hat{f}(x+iy)\|^2_H dy < +\infty, \;\; \lambda = x+iy.$$

Следовательно, верна следующая оценка снизу

$$\begin{aligned}\|A^{2-\theta}\hat{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} &= \sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda>\gamma\\ n\in\mathbb{N}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^{2-\theta}\hat{f}_n(x+iy)|^2\right)dy\\ &> \sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda>\gamma\\ n\in\mathbb{N}}} a_1^{2(2-\theta)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\hat{f}_n(x+iy)|^2\right)dy,\end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda>\gamma\\ n\in\mathbb{N}}} a_1^{2(2-\theta)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\hat{f}_n(x+iy)|^2\right)dy &= a_1^{2(2-\theta)}\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{f}(x+iy)\|^2_H dy\\ &= a_1^{2(2-\theta)}\|\hat{f}(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|A^{2-\theta}\hat{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} > a_1^{2(2-\theta)}\|\hat{f}(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)}. \tag{2.31}$$

По той причине, что вектор-функция $\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $H_2(\operatorname{Re}\lambda = x > \gamma, H)$ и $f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ и учитывая соотношения (2.22) и (2.31) справедлива следующая оценка:

$$\sup_{\substack{x>\gamma\\ n\in\mathbb{N}}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda^2\hat{u}_n(\lambda)|^2 dy < \sup_{\substack{x>\gamma\\ n\in\mathbb{N}}}\left(\frac{1}{a_1^{2(2-\theta)}} + 4\left|\frac{a_n^{\theta}}{\ell_n(\lambda)}\right|^2\right)\cdot\sup_{\substack{x>\gamma\\ n\in\mathbb{N}}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{g}_n(\lambda)|^2 dy < +\infty.$$

где $\hat{g}_n(\lambda) = a_n^{2-\theta}\hat{f}_n(\lambda)$. Таким образом, функция $\lambda^2\hat{u}_n(\lambda)$ действительно принадлежит пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, \mathbb{C})$. Следовательно, по теореме Пэли–Винера функция $\frac{d^2}{dt^2}u_n(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

По отношению (2.22) и теореме Пэли–Винера имеем

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} &= \|\lambda^2\hat{u}(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} \\
&= \|\hat{f}(\lambda) - \left(1 - \widehat{K}(\lambda)A^{-2(1-\theta)}\right)A^\theta L^{-1}(\lambda)A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_2} \\
&< \frac{1}{a_1^{2(2-\theta)}}\|A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_2} + 4\|A^\theta L^{-1}(\lambda)A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_2} \\
&\le \frac{1}{a_1^{2(2-\theta)}}\|A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_2} + 4\sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda>\gamma \\ k\in\mathbb{N}}}\left|\frac{a_k^\theta}{\ell_k(\lambda)}\right|^2\|A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} &\le \left(\frac{1}{a_1^{2-\theta}} + 2\sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda>\gamma \\ k\in\mathbb{N}}}\left|\frac{a_k^\theta}{\ell_k(\lambda)}\right|\right)^2\|A^{2-\theta}\hat{f}(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_2} \\
&\le d_2^2\|A^{2-\theta}f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}, \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

где $\mathcal{H}_2 := H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ и $d_2 = \left(\frac{1}{a_1^{2-\theta}} + 2d_1\right)$. Таким образом, вектор-функция $\frac{d^2}{dt^2}u(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ и верно неравенство

$$\left\|\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \le d_2\|A^{2-\theta}f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \qquad (2.33)$$

Следовательно, согласно оценкам (2.26) и (2.33), мы приходим к искомому неравенству

$$\|u(t)\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \le d\|A^{2-\theta}f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}, \qquad (2.34)$$

с постоянной $d > 0$, не зависящей от вектор-функции f. Следовательно, доказано что уравнение (2.1) имеет решение $u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$.

Теперь покажем, что полученное решение $u(t)$ удовлетворяет начальным условиям $u(+0) = 0$, $u^{(1)}(+0) = 0$.

Лемма 7. *Если функция* $\varphi(\lambda)$ *принадлежит пространству* $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, \mathbb{C})$, *то для любого* $\eta > \gamma$ *найдется такая последовательность* $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, *что* $\lim\limits_{k\to+\infty} \eta_k = +\infty$ *и справедливы следующие равенства:*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma}^{\eta} |\varphi(x \pm i\eta_k)|^2 dx = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma}^{\eta} |\varphi(x \pm i\eta_k)| dx = 0.$$

Действительно, для любого $\eta > \gamma$ и $\eta_k > 0$ имеем

$$\int\limits_{-\eta_k}^{\eta_k} \left(\int\limits_{\gamma}^{\eta} |\varphi(x \pm i\eta_k)| dx \right)^2 dy \le \int_{-\eta_k}^{\eta_k} \left(\int_{\gamma}^{\eta} 1 dx \cdot \int_{\gamma}^{\eta} |\varphi(x \pm i\eta_k)|^2 dx \right) dy$$

$$= (\eta - \gamma) \int_{\gamma}^{\eta} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x \pm i\eta_k)|^2 dy \right) dx$$

$$\le (\eta - \gamma) \int\limits_{\gamma}^{\eta} \left(\sup_{\operatorname{Re}\lambda > \gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x \pm i\eta_k)|^2 dy \right) dx < +\infty.$$

Следовательно, для любого $\eta > \gamma$ существует последовательность $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что η_k стремится к $+\infty$, когда $k \to +\infty$ и

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma}^{\eta} |\varphi(x \pm i\eta_k)|^2 dx = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma}^{\eta} |\varphi(x \pm i\eta_k)| dx = 0.$$

Из предыдущих рассуждений получаем принадлежность вектор-функции $u(t)$ пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$. Откуда следует принадлежность вектор-функции $\hat{u}(\lambda)$ пространству $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ и $\hat{u}_n(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, \mathbb{C})$. Докажем, кроме того, что функция $\lambda\hat{u}_n(\lambda)$ принадлежит пространству Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, \mathbb{C})$. Действительно, поскольку $\lambda^2\hat{u}_n(\lambda)$ принадлежит $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, \mathbb{C})$, то

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda > \gamma \\ n \in \mathbb{N}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(x+iy)\hat{u}_n(x+iy)|^2 dy = \sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda > \gamma \\ n \in \mathbb{N}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|(x+iy)^2\hat{u}_n(x+iy)|^2}{x^2+y^2} dy$$

$$< \frac{1}{\gamma} \sup_{\substack{\operatorname{Re}\lambda > \gamma \\ n \in \mathbb{N}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(x+iy)^2\hat{u}_n(x+iy)|^2 dy < +\infty.$$

Далее, по теореме Пэли–Винера (формула обращения), мы имеем

$$u_n(+0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta_k \to +\infty} \int\limits_{-\eta_k}^{\eta_k} \hat{u}_n(x+iy)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \lim_{\eta_k \to +\infty} \int\limits_{\gamma - i\eta_k}^{\gamma + i\eta_k} \hat{u}_n(\lambda)d\lambda,$$

$$u_n^{(1)}(+0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta_k \to +\infty} \int\limits_{-\eta_k}^{\eta_k} (x+iy)\hat{u}_n(x+iy)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \lim_{\eta_k \to +\infty} \int\limits_{\gamma - i\eta_k}^{\gamma + i\eta_k} \lambda\hat{u}_n(\lambda)d\lambda.$$

Поскольку функции $\lambda\hat{u}_n(\lambda)$ и $\hat{u}_n(\lambda)$ являются аналитичными функциями в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \gamma \geq 0$, то по теореме Коши, для любого $\eta > \gamma$, справедливы следующие равенства

$$\int\limits_{\gamma - i\eta_k}^{\gamma + i\eta_k} \hat{u}_n(\lambda)d\lambda = \left(\int\limits_{\gamma - i\eta_k}^{\eta - i\eta_k} - \int\limits_{\gamma + i\eta_k}^{\eta + i\eta_k} + \int\limits_{\eta - i\eta_k}^{\eta + i\eta_k} \right) \hat{u}_n(\lambda)d\lambda$$
$$= \int\limits_{\gamma}^{\eta} \hat{u}_n(x - i\eta_k)dx - \int\limits_{\gamma}^{\eta} \hat{u}_n(x + i\eta_k)dx + i \int\limits_{-\eta_k}^{\eta_k} \hat{u}_n(\eta + iy)dy,$$

и

$$\int\limits_{\gamma - i\eta_k}^{\gamma + i\eta_k} \lambda\hat{u}_n(\lambda)d\lambda = \left(\int\limits_{\gamma - i\eta_k}^{\eta - i\eta_k} - \int\limits_{\gamma + i\eta_k}^{\eta + i\eta_k} + \int\limits_{\eta - i\eta_k}^{\eta + i\eta_k} \right) \lambda\hat{u}_n(\lambda)d\lambda$$
$$= \int\limits_{\gamma}^{\eta} (x - i\eta_k)\hat{u}_n(x - i\eta_k)dx - \int\limits_{\gamma}^{\eta} (x + i\eta_k)\hat{u}_n(x + i\eta_k)dx +$$
$$+ i \int\limits_{-\eta_k}^{\eta_k} (\eta + iy)\hat{u}_n(\eta + iy)dy.$$

Согласно лемме 7 и на основе, что функция $\lambda^2\hat{u}_n(\lambda)$ принадлежит пространству $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, \mathbb{C})$ верны равенства

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\gamma}^{\eta} |\hat{u}_n(x \pm i\eta_k)|^2 dx = 0,$$
$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\gamma}^{\eta} |(x \pm i\eta_k)\hat{u}_n(x \pm i\eta_k)|^2 dx = 0.$$

Таким образом, при $\eta > \gamma$, можно найти следующие оценки сверху для функций $u_n(+0)$ и $u_n^{(1)}(+0)$:

$$\begin{aligned}|u_n(+0)| &\le \kappa \lim_{\eta_k\to+\infty}\int_{-\eta_k}^{\eta_k}|\hat{u}_n(\eta+iy)|dy = \kappa\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{(\eta+iy)^2\hat{u}_n(\eta+iy)}{(\eta+iy)^2}\right|dy\\ &\le \kappa\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|(\eta+iy)^2\hat{u}_n(\eta+iy)|^2dy\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(\eta^2+y^2)^2}\right)^{1/2}\\ &\lesssim \frac{1}{\eta^{3/2}},\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}|u_n^{(1)}(+0)| &\le \kappa \lim_{\eta_k\to+\infty}\int\limits_{-\eta_k}^{\eta_k}|(\eta+iy)\hat{u}_n(\eta+iy)|dy = \kappa\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{(\eta+iy)^2\hat{u}_n(\eta+iy)}{\eta+iy}\right|dy\\ &\le \kappa\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|(\eta+iy)^2\hat{u}_n(\eta+iy)|^2dy\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\eta^2+y^2}\right)^{1/2}\\ &\lesssim \frac{1}{\eta^{1/2}}.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Здесь, $\kappa := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Из предыдущих неравенств (2.35) и (2.36) непосредственно следует, что $u(+0) = 0$ и $u^{(1)}(+0) = 0$ при $\eta \to +\infty$.

Покажем, теперь, что полученное решение $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1). По теореме Пэли–Винера, имеем

$$u(t) = \kappa\lim_{\eta\to\infty}\int\limits_{-\eta}^{\eta}L^{-1}(\gamma+iy)\hat{f}(\gamma+iy)\mathrm{e}^{(\gamma+iy)t}dy = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\lim_{\eta\to\infty}\int\limits_{\gamma-i\eta}^{\gamma+i\eta}L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}d\lambda,$$

где $\lambda = \gamma + iy$. Следовательно, отсюда получаем следующие соотношения

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\lim_{\eta\to+\infty}\int_{\gamma-i\eta}^{\gamma+i\eta}\lambda^2L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}d\lambda, \tag{2.37}$$

$$A^2u(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\lim_{\eta\to+\infty}\int_{\gamma-i\eta}^{\gamma+i\eta}A^2L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}d\lambda, \tag{2.38}$$

$$\int\limits_0^t K(t-s)A^{2\theta}u(s)ds = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{\gamma-i\eta}^{\gamma+i\eta}\widehat{K}(\lambda)A^{2\theta}L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}d\lambda. \tag{2.39}$$

Из соотношений (2.37)–(2.39) вытекает, что вектор-функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1).

Перейдем к доказательству теоремы 4 в случае неоднородных начальных условий. Для этого в задаче (2.1)–(2.2) положим

$$u(t) := \cos(At)\varphi_0 + A^{-1}\sin(At)\varphi_1 + \omega(t).$$

Тогда для функции $\omega(t)$ получим следующую задачу:

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega(t)+A^2\omega(t) - \int_0^t K(t-s)A^{2\theta}\omega(s)ds = f_1(t),\ \ t \in \mathbb{R}_+,$$
$$\omega(+0) = \omega^{(1)}(+0) = 0,$$

где $f_1(t) = f(t) + h(t)$ и

$$h(t) = \int_0^t K(t-s)A^{2\theta}\left(\cos(As)\varphi_0 + A^{-1}\sin(As)\varphi_1\right)ds, \tag{2.40}$$

$$A^{2-\theta}h(t) = \int_0^t K(t-s)\left(A^{2+\theta}\cos(As)\varphi_0 + A^{1+\theta}\sin(As)\varphi_1\right)ds. \tag{2.41}$$

Покажем, что вектор-функция $f_1(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 4 с нулевыми начальными условиями. Действительно,

$$\|A^{2-\theta}f_1(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leq \|A^{2-\theta}f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^{2-\theta}h(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}.$$

Теперь остается оценить норму $\|A^{2-\theta}h(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}$.

1. Предположим, что выполнено условие (2.4). Непосредственным интегрированием получаем

$$\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)}\cos(As)ds = B^{-1}\left\{\gamma_k\left(\cos(At) - \mathrm{e}^{-\gamma_k t}I\right) + A\sin(At)\right\}, \tag{2.42}$$

$$\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)}\sin(As)ds = B^{-1}\left\{A\left(\mathrm{e}^{-\gamma_k t}I - \cos(At)\right) + \gamma_k\sin(At)\right\}, \tag{2.43}$$

где $B = A^2 + \gamma_k^2 I$. Далее нам понадобится следующее замечание:

Замечание 17. Справедливо неравенство

$$\|\left(A^2 + \gamma_k^2 I\right)^{-1}\|_H^2 \lesssim \gamma_k^{-2}\|A^{-1}\|_H^2. \tag{2.44}$$

Действительно, заметим, что для любого вектора v, принадлежащего гильбертову пространству H, такого, что $\|v\|_H = 1$, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\| \left(A^2+\gamma_k^2 I\right)^{-1} v\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|v_n|^2}{\left(a_n^2+\gamma_k^2\right)^2} \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|v_n|^2}{(a_n\gamma_k)^2} = \|\gamma_k^{-1}A^{-1}v\|_H^2,$$

где $v_n = (v, e_n)$. Отсюда в силу самосопряженности оператора A и положительности γ_k вытекает справедливость неравенства (2.44). Норму вектор-функции $A^{2-\theta}h(t) =: J(t)$ в пространстве $\mathcal{L}_{2,\gamma}$ пишем в виде

$$\|J(t)\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)} \left\{ A^{2+\theta}\psi_1(s)\varphi_0 + A^{1+\theta}\psi_2(s)\varphi_1(s) \right\} ds \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}.$$

Используя выражения (2.40)–(2.41), (2.42), (2.43) и в соответствии с известными неравенствами $\|\cos(At)\|_H \leq 1$, $\|\sin(At)\|_H \leq 1$, предыдущую норму можно оценивать следующим образом

$$\begin{aligned}
\|J(t)\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} s_k A^{2+\theta}\left(-\gamma_k\delta_k + A\sin(At)\right)\varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} s_k A^{1+\theta}\left(A\delta_k + \gamma_k\sin(At)\right)\varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\
&\leq \left\| \cos(At) \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}\gamma_k A^{2+\theta}\varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}\mathrm{e}^{-\gamma_k t}\gamma_k A^{2+\theta}\varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\
&+ \left\| \sin(At) \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1} A^{3+\theta}\varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}\mathrm{e}^{-\gamma_k t} A^{2+\theta}\varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\
&+ \left\| \cos(At) \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1} A^{2+\theta}\varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\| \sin(At) \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}\gamma_k A^{1+\theta}\varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}\gamma_k A^{2+\theta}\varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}\mathrm{e}^{-\gamma_k t}\gamma_k A^{2+\theta}\varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\
&+ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1} A^{3+\theta}\varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}\mathrm{e}^{-\gamma_k t} A^{2+\theta}\varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\
&+ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1} A^{2+\theta}\varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}\gamma_k A^{1+\theta}\varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}
\end{aligned}$$

где $\delta_k = \mathrm{e}^{-\gamma_k t}I - \cos(At)$, $s_k = c_k(A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}$ и $\mathcal{L}_{2,\gamma} := L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$. Из последнего равенства, при выполнении условия (2.44), сразу вытекает неравенство

$$\|J(t)\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \lesssim \left\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k A^{1+\theta}\varphi_0\right\|_H + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1} A^{3+\theta}\varphi_0\right\|_H + \\ + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k (A^2+\gamma_k^2 I)^{-1} A^{2+\theta}\varphi_1\right\|_H + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k A^{\theta}\varphi_1\right\|_H .$$

Откуда, при выполнении условия $(A^2+\gamma_k^2 I)^{-1} \leq \operatorname{const} A^{-2}$ получаем

$$\|A^{2-\theta}h(t)\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\|A^{1+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{\theta}\varphi_1\|_H\right). \tag{2.45}$$

Таким образом, из (2.34) и последней оценки (2.45), получаем

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} &\leq d\|A^{2-\theta} f_1\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \\ &\leq d\left(\|A^{2-\theta} f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^{1+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{\theta}\varphi_1\|_H\right), \end{aligned} \tag{2.46}$$

с положительной постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1. Оценка сверху нормы вектор-функции $v(t)$

$$\|v(t)\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} := \|\cos(At)\varphi_0\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} + \|A^{-1}\sin(At)\varphi_1\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)}$$

непосредственно следует из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \|\cos(At)\varphi_0\|^2_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma t}\left(\|A^2\cos(At)\varphi_0\|^2_H + \|A^2\cos(At)\varphi_0\|^2_H\right) dt \\ &\leq 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma t}\left(\|A^2\varphi_0\|^2_H\right) dt = \frac{1}{\gamma}\|A^2\varphi_0\|^2_H, \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\sin(At)\varphi_1\|^2_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma t}\left(\|A\sin(At)\varphi_1\|^2_H + \|A\sin(At)\varphi_1\|^2_H\right) dt \\ &\leq 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma t}\left(\|A\varphi_1\|^2_H\right) dt = \frac{1}{\gamma}\|A\varphi_1\|^2_H. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Это значит, что $\varphi_0 \in \operatorname{Dom}(A^2) = H_2$ и $\varphi_1 \in \operatorname{Dom}(A) = H_1$. Наконец, из соотношений (2.46) и (2.47)–(2.48), для всех θ, принадлежащих отрезку $[0,1]$

получаем первую искомую оценку теоремы 4

$$\|u(t)\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \le d\left(\|A^{2-\theta}f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right),$$

с положительной постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

2. Предположим, что условие (2.4) не выполнено (т. е., случай когда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится), но выполнено условие $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}$. Тогда оценка функции $A^{2-\theta}h$ приведена в следующей лемме

Лемма 8. *При сделанных предположениях о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}$ справедливо неравенство*

$$\|A^{2-\theta}h\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \le \mathrm{const}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\right)\left(\|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right). \tag{2.49}$$

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедится в том, что справедлива следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
\|A^{2-\theta}h\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} &\le \left\|\sum_{k=1}^{\infty} s_k A^{2+\theta}\left(-\gamma_k\delta_k + A\sin(At)\right)\varphi_0\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} s_k A^{1+\theta}\left(A\delta_k + \gamma_k\sin(At)\right)\varphi_1\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}\\
&\le \left\|\cos(At)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\gamma_k^2[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{2+\theta}\varphi_0\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\frac{\gamma_k^2}{\mathrm{e}^{\gamma_k t}}[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{2+\theta}\varphi_0\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}\\
&+ \left\|\sin(At)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\gamma_k A[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{2+\theta}\varphi_0\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\frac{\gamma_k}{\mathrm{e}^{\gamma_k t}}[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{2+\theta}\varphi_1\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}\\
&+ \left\|\cos(At)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\gamma_k[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{2+\theta}\varphi_1\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\|\sin(At)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\gamma_k^2[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{1+\theta}\varphi_1\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}\\
&\le \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\gamma_k^2[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{2+\theta}\varphi_0\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\frac{\gamma_k^2}{\mathrm{e}^{\gamma_k t}}[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{2+\theta}\varphi_0\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}\\
&+ \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\gamma_k A[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{2+\theta}\varphi_0\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\frac{\gamma_k}{\mathrm{e}^{\gamma_k t}}A[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{1+\theta}\varphi_1\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}\\
&+ \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\gamma_k A[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{1+\theta}\varphi_1\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} + \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\gamma_k^2[A^2+\gamma_k^2 I]^{-1}A^{1+\theta}\varphi_1\right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

где $\delta_k = \mathrm{e}^{-\gamma_k t}I - \cos(At)$, $s_k = c_k(A^2+\gamma_k^2 I)^{-1}$ и $\mathcal{L}_{2,\gamma} := L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$.

Для доказательства леммы 8 нам потребуется следующее легко проверяемое предложение

Предложение 2. *При сделанных предположениях относительно оператора* A *и последовательности* $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\gamma_k \to +\infty (k \to +\infty)$ *справедливы следующие неравенства*

$$\|\gamma_k^2 (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1}\| < 1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.51}$$

$$\|\gamma_k A (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1}\| \le \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.52}$$

Неравенства (2.51) и (2.52) вытекают из неравенств

$$\frac{\gamma_k^2}{\gamma_k^2 + a_n^2} < 1, \quad n, k \in \mathbb{N},$$
$$\frac{\gamma_k a_n}{\gamma_k^2 + a_n^2} \le \frac{1}{2}, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

а также из представления оператора A:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cdot, e_n) e_n,$$

где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора A: $Ae_n = a_n e_n$.

Используя сформулированное предложение 2, а также сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k}$, непосредственной проверкой, оценивая каждое из шести слагаемых в (2.50), можно убедится в том, что справедлива оценка (2.49).

Оценим, первое из шести слагаемых в правой части неравенств (2.50):

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \gamma_k^2 (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1} A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \le \sup_k \|\gamma_k^2 (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1}\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}$$
$$< \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \right) \left\| A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_H .$$

Второе слагаемое в правой части неравенств (2.50) оценивается следующим образом:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \gamma_k^2 B^{-1} \mathrm{e}^{-\gamma_k t} A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \le \sup_k \|\gamma_k^2 (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1}\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \mathrm{e}^{-\gamma_k t} A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}$$
$$< \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \right) \left\| \mathrm{e}^{-\gamma_1 t} A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}}$$

где $B = A^2 + \gamma_k^2 I$. Следовательно,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \gamma_k^2 \left(A^2 + \gamma_k^2 I\right)^{-1} \mathrm{e}^{-\gamma_k t} A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} < \frac{1}{\sqrt{2\gamma + \gamma_1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \right) \left\| A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_H .$$

Остальные слагаемые в правой части неравенств (2.50) оцениваются аналогичным образом. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \gamma_k A (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1} A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} &\le \sup_k \| \gamma_k A (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1} \| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\ &< \frac{1}{2\sqrt{2\gamma}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \right) \left\| A^{2+\theta} \varphi_0 \right\|_H . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \gamma_k A (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1} \mathrm{e}^{-\gamma_k t} A^{1+\theta} \varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} &\le \sup_k \| \gamma_k A (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1} \| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \mathrm{e}^{-\gamma_1 t} A^{1+\theta} \varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\ &\le \frac{1}{2\sqrt{2\gamma + \gamma_1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \right) \left\| A^{1+\theta} \varphi_1 \right\|_H . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \gamma_k A (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1} A^{1+\theta} \varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} &\le \sup_k \| \gamma_k A (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1} \| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} A^{1+\theta} \varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\ &\le \frac{1}{2\sqrt{2\gamma}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \right) \left\| A^{1+\theta} \varphi_1 \right\|_H . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \gamma_k^2 (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1} A^{1+\theta} \varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} &\le \sup_k \| \gamma_k^2 (A^2 + \gamma_k^2 I)^{-1} \| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} A^{1+\theta} \varphi_1 \right\|_{\mathcal{L}_{2,\gamma}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \right) \left\| A^{1+\theta} \varphi_1 \right\| . \end{aligned}$$

Таким образом, объединяя оценки из шести слагаемых неравенств (2.50), действительно получаем искомое неравенство (2.49).

Таким образом, для всех θ, принадлежащих полуинтервалу $(0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, H)} &\le d \|A^{2-\theta} f_1\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \\ &\le d \left(\|A^{2-\theta} f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A^{2+\theta} \varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta} \varphi_1\|_H \right) . \end{aligned}$$

Отсюда получаем вторую оценку теоремы 4

$$\|u(t)\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leq d\left(\|A^{2-\theta}f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right),$$

с положительной постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0 и φ_1.

Доказательство теоремы 5. Проведем доказательство сформулированной теоремы вначале для нулевых начальных условий $u(+0) = \varphi_0 = 0$, $u^{(1)}(+0) = \varphi_1 = 0$. Продолжим функцию $f(t)$, заданную на отрезке $[0,T]$, нулем на полуось $(T,+\infty)$ и продолжение обозначим через $\widetilde{f}(t)$:

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{если } t \in [0,T], \\ 0 & \text{если } t > T. \end{cases}$$

Тогда функция $\widetilde{f}(t)$ будет удовлетворять условиям теоремы 4, причем вектор-функция $A^{2-\theta}\widetilde{f}(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)$, $\gamma > 0$, и справедливо неравенство

$$\left\|A^{2-\theta}\widetilde{f}(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leq \left\|A^{2-\theta}f(t)\right\|_{L_2((0,T),H)}. \tag{2.53}$$

Далее согласно теореме 4 для функции $\widetilde{f}(t)$ существует единственное решение $u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)$, для $\gamma > \tilde{\rho} > 0$, и удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leq d_0\left\|A^{2-\theta}\widetilde{f}(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}, \gamma > 0. \tag{2.54}$$

Нетрудно видеть, что справедлива следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}\left(\|u^{(2)}(t)\|^2_H + \|A^2u(t)\|^2_H\right)dt \\ &\geq \int_0^T \mathrm{e}^{-2\gamma t}\left(\|u^{(2)}(t)\|^2_H + \|A^2u(t)\|^2_H\right)dt \\ &\geq \mathrm{e}^{-2\gamma T}\int_0^T \left(\|u^{(2)}(t)\|^2_H + \|A^2u(t)\|^2_H\right)dt \\ &= \mathrm{e}^{-2\gamma T}\|u\|^2_{W^2_2((0,T),A^2)}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Объединяя неравенства (2.53), (2.54) и (2.55) приходим к искомому неравенству

$$\|u\|_{W_2^2((0,T),A^2)} = \left(\int_0^T \left(\|u^{(2)}(t)\|_H^2 + \|A^2u(t)\|_H^2\right) dt\right)^{1/2}$$
$$\leq d_0 e^{\gamma T} \|A^{2-\theta} f\|_{L_2((0,T),H)}. \tag{2.56}$$

Рассмотрим случай ненулевых начальных условий φ_0 и φ_1. Как и при доказательстве теоремы 4 будем искать решение задачи (2.1)–(2.2) в виде

$$u(t) = \cos(At)\varphi_0 + A^{-1}\sin(At)\varphi_1 + \omega(t). \tag{2.57}$$

Тогда для функции $\omega(t)$ получим следующую задачу:

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega(t) + A^2\omega(t) - \int_0^t K(t-s)A^{2\theta}\omega(s)ds = f_1(t), \tag{2.58}$$
$$\omega(+0) = \omega^{(1)}(+0) = 0, \tag{2.59}$$

где $f_1(t) = f(t) + h(t)$ и

$$h(t) = \int_0^t K(t-s)A^{2\theta}\left(\cos(As)\varphi_0 + A^{-1}\sin(As)\varphi_1\right) ds,$$
$$A^{2-\theta}h(t) = \int_0^t K(t-s)\left(A^{2+\theta}\cos(As)\varphi_0 + A^{1+\theta}\sin(As)\varphi_1\right) ds.$$

Доказательство проведем вначале при выполнении условия 1) теоремы 4, т. е., в случае сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$. В силу линейности уравнения (2.58) его решение $\omega(t)$ представимо в виде

$$\omega(t) = \omega_1(t) + \omega_2(t), \tag{2.60}$$

где $\omega_1(t)$ – решение задачи, отвечающее правой части $h(t)$, а $\omega_2(t)$ – решение задачи, отвечающее правой части $f(t)$. Оценка функции $\omega_2(t) = u(t)$ уже получена в (2.56).

Оценим теперь, функцию $\omega_1(t)$. Заметим, что при доказательстве теоремы 4 в случае выполнения условия 1) было установлено неравенство

$$\|A^{2-\theta}h\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \lesssim \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right)\left(\|A^{1+\theta}\varphi_0\| + \|A^{\theta}\varphi_1\|\right). \tag{2.61}$$

Из которого согласно доказательству теоремы 4 следует неравенство

$$\|\omega_1\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \le d_1\|A^{2-\theta}h\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \le d_2\left(\|A^{1+\theta}\varphi_0\| + \|A^{\theta}\varphi_1\|\right), \tag{2.62}$$

с постоянными d_1 и d_2, не зависящими от векторов φ_0 и φ_1. В свою очередь, по доказанному ранее (см. неравенство (2.55)) для функции $\omega_1(t)$ выполнено неравенство

$$\|\omega_1\|_{W^2_2((0,T),A^2)} \le \mathrm{e}^{\gamma T}\|\omega_1\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)}. \tag{2.63}$$

Откуда из оценок (2.62) и (2.63) получим искомое неравенство

$$\|\omega_1\|_{W^2_2((0,T),A^2)} \le d_1(T)\left(\|A^{1+\theta}\varphi_0\| + \|A^{\theta}\varphi_1\|\right) \tag{2.64}$$

и следовательно, из представления (2.60) и неравенств (2.56), при $u(t) = \omega_2(t)$, (2.64) получаем оценку

$$\|\omega_1\|_{W^2_2((0,T),A^2)} \le d_2(T)\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_2((0,T),H)} + \|A^{1+\theta}\varphi_0\| + \|A^{\theta}\varphi_1\|\right). \tag{2.65}$$

Для завершения доказательства приведем оценку вектор-функции

$$v(t) = \cos(At)\varphi_0 + A^{-1}\sin(At)\varphi_1$$

в пространстве Соболева $W^2_2((0,T),A^2)$.

В соответствии с известными неравенствами $\|\cos(At)\|_H \le 1$, $\|\sin(At)\|_H \le 1$ для $\varphi_0 \in H_2 = \mathrm{Dom}(A^2)$ и $\varphi_1 \in H_1 = \mathrm{Dom}(A)$ получаем следующие неравенства

$$\begin{aligned}\|\cos(At)\varphi_0\|^2_{W^2_2((0,T),A^2)} &= \int\limits_0^T \left(\|A^2\cos(At)\varphi_0\|^2_H + \|A^2\cos(At)\varphi_0\|^2_H\right)dt \\ &\le 2\int\limits_0^T \|A^2\varphi_0\|^2_H dt = 2T\|A^2\varphi_0\|^2_H, \end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\sin(At)\varphi_1\|^2_{W^2_2((0,T),A^2)} &= \int\limits_0^T \left(\|A\sin(At)\varphi_1\|^2_H + \|A\sin(At)\varphi_1\|^2_H\right)dt \\ &\le 2\int\limits_0^T \|A\varphi_1\|^2_H dt = 2T\|A\varphi_1\|^2_H. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Из неравенств (2.66) и (2.67) вытекает следуюшая оценка

$$\|v\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \leq \sqrt{2T}\left(\|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right). \tag{2.68}$$

На основании неравенств (2.65), (2.68) и представления (2.57) получим искомую оценку

$$\|u(t)\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \leq D(T)\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_2((0,T),H)} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right),$$

с положительной постоянной $D(T)$, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Рассмотрим теперь случай, когда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится, т. е., условие (2.4) не выполнено, но выполнено условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k} < 1$.

Повторяя рассуждения пункта 1) теоремы 5, мы получим оценку функции $\omega_2(t)$, а именно,

$$\|\omega_2\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \leq d_0 \mathrm{e}^{\gamma T}\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_2((0,T),H)}\right), \tag{2.69}$$

Для вектор-функции $v(t)$ справедлива оценка (2.68). В свою очередь, на основании оценки

$$\begin{aligned}\|A^{2-\theta}h(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} &= \left\|\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)}\left\{A^{2+\theta}\cos(As)\varphi_0 + A^{1+\theta}\sin(As)\varphi_1\right\}ds\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \\ &\leq \mathrm{const}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\right)\left(\|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right),\end{aligned} \tag{2.70}$$

которая доказана в лемме 8, проводя рассуждения, аналогичные пункту 1) теоремы 5, получим оценку

$$\|\omega_1\|_{W_2^2((0,T),H)} \leq d_1(T)\left(\|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right). \tag{2.71}$$

Отсюда на основании оценок (2.68), (2.69) и (2.71) получим искомую оценку

$$\|u\|_{W_2^2((0,T),A^2)} \leq d(T)\left(\|A^{2-\theta}f\|_{L_2((0,T),H)} + \|A^{2+\theta}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\theta}\varphi_1\|_H\right),$$

с положительной постоянной $d(T)$, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0 и φ_1.

Глава 3

Представление решений интегро-дифференциальных уравнений

1 Введение

В предлагаемой главе получены представления решений интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра $\theta \in [0,1]$ в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Следует отметить, что при $\theta = 1$ представления решений в виде рядов по экспонентам были получены ранее в работах [15, 46] (см. также монографии [3, 4, гл. 3]).

Эта глава состоит из пяти параграфов. В первом вводном параграфе упоминаются результаты, полученные ранее. Второй параграф посвящен формулировкам результатов о представлении решений задач (1)–(2) в случае, когда параметр θ принадлежит отрезку $[0,1]$. В третьем параграфе предоставлены доказательства о представлении решений в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений в случае неоднородных начальных условий и нулевой правой части. В четвертом параграфе предоставлены доказательства результатов о представлении решений в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра в случае однородных начальных условий и ненулевой правой части. Пятый параграф посвящен комментариям и заключениям.

На протяжении всей работы выражение вида $a \lesssim b$ подразумевает неравенство $a \leq Cb$, выполненное с некоторой положительной константой C, а выражение вида $a \approx b$ означает $a \lesssim b \lesssim a$.

2 Формулировки основных результатов

В этом параграфе приводятся формулировки основных теорем, касающихся представления решения интегро-дифференциальных уравнений вида (1) в случае однородных и неоднородных начальных условий.

2.1 Результаты о представлении сильных решений интегро-дифференциальных уравнений

Теорема 6. *Пусть выполнены условие* 1) *теоремы 4, условие* (5) *и* $f(t) = 0$ *при* $t \in \mathbb{R}_+$. *Предположим, что вектор-функция* $u(t) \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$, *для некоторого* $\gamma > 0$, *является сильным решением задачи* (1)–(2). *Тогда, для любого* $t \in \mathbb{R}_+$ *решение* $u(t)$ *задачи* (1)–(2) *представимо в виде* $u(t) = u_{\mathrm{Re}}(t) + u_{\mathrm{Im}}(t)$ *где ряды*

$$u_{\mathrm{Im}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^+ \varphi_{0n}) \mathrm{e}^{\lambda_n^+ t}}{\ell_n'(\lambda_n^+)} + \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^- \varphi_{0n}) \mathrm{e}^{\lambda_n^- t}}{\ell_n'(\lambda_n^-)} \right) e_n, \tag{3.1}$$

$$u_{\mathrm{Re}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{n,k} \varphi_{0n}) \mathrm{e}^{\lambda_{n,k} t}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})} \right) e_n, \tag{3.2}$$

сходятся по норме гильбертова пространства H, $\varphi_{0n} = (\varphi_0, e_n)$ *и* $\varphi_{1n} = (\varphi_1, e_n)$, $\lambda_{n,k}$ – *действительные нули мероморфной функции* (1.2), *а* $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^+ =$

$\overline{\lambda_n^-}$ — *пара комплексно-сопряженных корней асимптотически представимых в виде* (1.5).

Теорема 7. *Пусть* $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ *и выполнены условие* 1) *теоремы 4 и условие* (5). *Предположим, что вектор-функция* $f(t)$ *принадлежит пространству* $C([0,T],H)$ *для любого* $T > 0$. *Тогда, для любого* $t \in \mathbb{R}_+$ *решение* $u(t)$ *задачи* (1)–(2) *представимо в виде* $u(t) = w_{\mathrm{Im}}(t) + w_{\mathrm{Re}}(t)$, *где ряды*

$$w_{\mathrm{Im}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_n^+(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^+)} d\tau + \int_0^t \frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_n^-(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^-)} d\tau \right) e_n, \tag{3.3}$$

$$w_{\mathrm{Re}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_{n,k}(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})} d\tau \right) e_n, \tag{3.4}$$

сходятся по норме гильбертова пространства H, $\lambda_{n,k}$ — *действительные нули мероморфной функции* (1.2), *а* $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$ — *пара комплексно-сопряженных корней асимптотически представимых в виде* (1.5).

Замечание 18. Из асимптотики (8) теоремы 2 и случая 1) анализа распределения невещественных точек спектра $\lambda_n^{\pm}(\theta, r)$ оператор-функции $L(\lambda)$ (см. стр. 15, а также приведенный там рисунок 2) немедленно вытекает, что решение задачи (1)–(2) не может убывать экспоненциально.

Замечание 19. Представления (3.1)–(3.2) и (3.3)–(3.4) получены в результате применения преобразования Лапласа и его обращения для решения задачи (1)–(2), с использованием интегрирования по прямоугольным контурам, разделяющим точки $-\gamma_k$ (конструкция этих контуров приведена в работах [3,4, гл. 3]). Существенную роль при этом играют оценки оператор-функции $L(\lambda)$ на указанных контурах.

Утверждение замечания 18 вытекает из следующего известного результата: если функция $u(t)$ экспоненциально убывает, т. е., $|u(t)| \le C\mathrm{e}^{-\alpha t}$, $C > 0$, то её преобразование Лапласа $\hat{u}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение из правой полуплоскости в полуплоскость $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda > -\alpha\}$.

Замечание 20. При $\theta = 1$ теоремы 6 и 7 изложены в работе [15], а также в монографиях [3, 4, гл. 3].

3 Доказательство результатов о представлении решений в случае неоднородных начальных условий и нулевой правой части

Доказательство теоремы 6. На комплексной плоскости рассмотрим следующий контур $\Gamma_{\gamma,R_N} := \{\Gamma_\gamma \cup \Gamma_{-R_N} \cup \Gamma_{iR_N} \cup \Gamma_{-iR_N}\}$, $\gamma > 0$, проходимый против часовой стрелки (см. рисунок **C**, приведенный в конце этой главы), где

$$\Gamma_\gamma = \{x + iy \in \mathbb{C} : x = \gamma, -R_N \leq y \leq R_N\},$$
$$\Gamma_{-R_N} = \{x + iy \in \mathbb{C} : x = -R_N, -R_N \leq y \leq R_N\},$$
$$\Gamma_{iR_N} = \{x + iy \in \mathbb{C} : -R_N \leq x \leq \gamma, y = R_N\},$$
$$\Gamma_{-iR_N} = \{x + iy \in \mathbb{C} : -R_N \leq x \leq \gamma, y = -R_N\}.$$

Обозначим $C_{R_N} := \{\Gamma_{-R_N} \cup \Gamma_{iR_N} \cup \Gamma_{-iR_N}\}$. Тогда $\Gamma_{\gamma,R_N} := \{\Gamma_\gamma \cup C_{R_N}\}$, $\gamma > 0$.

По условию теоремы 6, задача (1)–(2) имеет единственное решение $u(t)$ в пространстве Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$, для некоторого $\gamma \geq 0$. Заметим, что преобразование Лапласа сильного решения $u(t)$ уравнения (1) с начальными условиями (2) можно представить в виде

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)(\varphi_1 + \lambda\varphi_0),$$

где оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1). Следовательно, сужение вектор-функции $\hat{u}(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n имеет вид

$$\hat{u}_n(\lambda) = (\hat{u}(\lambda)e_n, e_n) = \frac{\varphi_{1n} + \lambda\varphi_{0n}}{\ell_n(\lambda)},$$

где φ_{0n} и φ_{1n} – n-й координаты, соответственно, векторов φ_0 и φ_1.

Отсюда, по формуле обращения преобразования Лапласа, для любого $\gamma > 0$ и для всех $t \in \mathbb{R}_+$, получаем

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R_N \to +\infty} \int\limits_{-R_N}^{R_N} \hat{u}_n(\gamma + iy) \mathrm{e}^{(\gamma+iy)t} dy \right) e_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{R_N \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-R_N}^{R_N} \left(\frac{\varphi_{1n} + (\gamma + iy)\varphi_{0n}}{\ell_n(\gamma + iy)} \right) \mathrm{e}^{(\gamma+iy)t} dy \right) e_n$$

Отсюда и следует, что

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{R_N \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int\limits_{\gamma - iR_N}^{\gamma + iR_N} \left(\frac{\varphi_{1n} + \lambda\varphi_{0n}}{\ell_n(\lambda)} \right) \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda \right) e_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \lim_{R_N \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \left(\int\limits_{\gamma - iR_N}^{\gamma + iR_N} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\varphi_{1n} + \lambda\varphi_{0n}}{\ell_n(\lambda)} e_n \right) \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda \right).$$

Замечание 21. На прямой $\operatorname{Re}\lambda = \gamma > 0$ нет точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$, так как спектры лежат в левой полуплоскости.

При фиксированном R_N, справедливо представление

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int\limits_{\gamma - iR_N}^{\gamma + iR_N} \psi_m(\lambda) \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int\limits_{\Gamma_{\gamma, R_N}} \psi_m(\lambda) \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda - \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int\limits_{C_{R_N}} \psi_m(\lambda) \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda, \quad (3.5)$$

где $\psi_m(\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{m} \left(\frac{\varphi_{1n} + \lambda\varphi_{0n}}{\ell_n(\lambda)} \right) e_n$. Введем следующие обозначения

$$P_{N(m)}(t) := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int_{\gamma - iR_N}^{\gamma + iR_N} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\varphi_{1n} + \lambda\varphi_{0n}}{\ell_n(\lambda)} \right) \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda \right) e_n,$$

$$Q_{N(m)}(t) := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int\limits_{C_{R_N}} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\varphi_{1n} + \lambda\varphi_{0n}}{\ell_n(\lambda)} \right) \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda \right) e_n, \quad (3.6)$$

где $C_{R_N} := \{\Gamma_{-R_N} \cup \Gamma_{iR_N} \cup \Gamma_{-iR_N}\}$ и $N = N(m)$. Таким образом, для всех $t \in \mathbb{R}$, и $N = N(m)$ имеем

$$u(t) = \lim_{m \to +\infty} \left(P_{N(m)}(t) - Q_{N(m)}(t) \right) \quad (3.7)$$

Из замечаний 13 и 14 следует, что внутри контура Γ_{γ,R_N} содержится конечное число m пар комплексно-сопряженных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$, причем $N = N(m)$ и $m \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Применяя теорему Коши о вычетах, при достаточно большом $N = N(m)(R_N > a_m)$, получаем представление

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int\limits_{\Gamma_{\gamma,R_N}} \psi_m(\lambda) \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda = \sum_{n=1}^{m} \left(u_n^+(t) + u_n^-(t)\right) e_n + \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{N(m)} u_{n,k}(t) e_n, \tag{3.8}$$

где

$$u_n^+(t) = \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^+ \varphi_{0n}) \mathrm{e}^{\lambda_n^+ t}}{\ell_n'(\lambda_n^+)}, \qquad u_n^-(t) = \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^- \varphi_{0n}) \mathrm{e}^{\lambda_n^- t}}{\ell_n'(\lambda_n^-)},$$
$$u_{n,k}(t) = \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{n,k} \varphi_{0n}) \mathrm{e}^{\lambda_{n,k} t}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})}$$

и $\lambda_{n,k}$ – вещественные нули мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$, удовлетворяющие неравенствам (1.4), а $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$, – комплексно-сопряженные нули мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$, представимы в виде (1.5) и (1.7)–(1.9). Следовательно, из соотношения (3.5), (3.7) и (3.8) получаем следующее представление

$$u(t) = \lim_{m \to +\infty} \left(P_{N(m)}(t) - Q_{N(m)}(t)\right) = u_{\mathrm{Im}}(t) + u_{\mathrm{Re}}(t) - \lim_{m \to +\infty} Q_{N(m)}(t), \tag{3.9}$$

где

$$u_{\mathrm{Im}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^+ \varphi_{0n}) \mathrm{e}^{\lambda_n^+ t}}{\ell_n'(\lambda_n^+)} e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^- \varphi_{0n}) \mathrm{e}^{\lambda_n^- t}}{\ell_n'(\lambda_n^-)} e_n, \tag{3.10}$$

$$u_{\mathrm{Re}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{n,k} \varphi_{0n}) \mathrm{e}^{\lambda_{n,k} t}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})} \right) e_n. \tag{3.11}$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{m \to +\infty} \|Q_{N(m)}(t)\|_H = 0, \quad N = N(m). \tag{3.12}$$

Доказательству этого соотношения предпошлем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 9. *Пусть выполнено условие* (1.3). *Тогда для всех* λ, *принадлежащих* $C_{R_N} = \{\Gamma_{iR_N} \cup \Gamma_{-R_N} \cup \Gamma_{-iR_N}\}$, *справедливы следующие оценки:*

$$\left|\ell_n^{-1}(\lambda)\right| \lesssim R_N^{-2}, \quad \left|\lambda \ell_n^{-1}(\lambda)\right| \lesssim R_N^{-1}$$

Доказательство леммы 9. Напомним, что

$$\ell_n(\lambda) := \lambda^2 + a_n^2 \left(1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}\right) = a_n^2 \left(\frac{\lambda^2}{a_n^2} + 1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}\right). \tag{3.13}$$

Введём в рассмотрение функции

$$f_n(\lambda) = 1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}, \qquad g_n(\lambda) = \frac{\lambda^2}{a_n^2}, \qquad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{3.14}$$

1) Рассмотрим случай когда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится.

Для каждого $\lambda \in \Gamma_{-R_N} = \{x + iy \in \mathbb{C} : x = -R_N, -R_N \leq y \leq R_N\}$ справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} |f_n(\lambda)| &\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{-R_N + iy + \gamma_k}\right| \\ &\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|-R_N + iy + \gamma_k|} \\ &\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|-R_N + \gamma_k|} := q(R_N), \qquad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 2, можно получить оценку

$$q(R_N) \leq \left(\frac{2S_1}{(\gamma_{N+1} - \gamma_N) a_n^{2(1-\theta)}}\right) + 1,$$

где $S_1 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$. Следовательно, верно следующее неравенство

$$\frac{q(R_N)}{R_N^2} \leq \frac{1}{\gamma_N^2} \left(\frac{2S_1}{(\gamma_{N+1} - \gamma_N) a_n^{2(1-\theta)}} + 1\right), \tag{3.16}$$

Таким образом, т.к. $\gamma_N \to +\infty$ при $N \to +\infty$ и, в предположении, что выполнено условие (1.3), справедливо равенство,

$$\inf_N \left\{\frac{q(R_N)}{R_N^2}\right\} = 0.$$

Отсюда следует, что для заданного a_n существует такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $N > N_0$ верно следующее неравенство

$$\frac{1}{2a_n^2} > \frac{1}{\gamma_N^2}\left(\frac{2S_1}{\delta_N a_n^{2(1-\theta)}} + 1\right) \tag{3.17}$$

Значит, для всех λ, принадлежащих стороне Γ_{-R_N}, справедлива следующая цепочка неравенств

$$||g_n(\lambda)| - |f_n(\lambda)|| \geq \frac{R_N^2}{a_n^2} - R_N^2\left(\frac{1}{\gamma_N^2}\left(\frac{2S_1}{\delta_N a_n^{2(1-\theta)}} + 1\right)\right) \geq \frac{R_N^2}{a_n^2} - \frac{R_N^2}{2a_n^2} = \frac{R_N^2}{2a_n^2}.$$

Отсюда получаем искомую оценку

$$|\ell_n(\lambda)| \geq ||g_n(\lambda)| - |f_n(\lambda)||\, a_n^2 \geq \frac{R_N^2}{2}.$$

Кроме того, $|\lambda| = \sqrt{R_N^2 + y^2} \leq \sqrt{2}R_N$. Следовательно,

$$|\lambda \ell_n(\lambda)| \geq \frac{R_N}{2\sqrt{2}}.$$

Теперь, для каждого $\lambda \in \Gamma_{\pm iR_N} = \{x + iy \in \mathbb{C} : -R_N \leq x \leq \gamma, y = \pm R_N\}$, имеем

$$\begin{aligned}|f_n(\lambda)| &\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{|x \pm iR_N + \gamma_k|}\\ &\leq 1 + \frac{1}{R_N a_n^{2(1-\theta)}}\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 + \frac{S_1}{R_N a_n^{2(1-\theta)}} < +\infty, \qquad 0 \leq \theta \leq 1.\end{aligned}$$

Для заданного a_n выберем такое R_N для которого справедливо неравенсто

$$\frac{R_N^2}{a_n^2} - 1 - \frac{S_1}{R_N a_n^{2(1-\theta)}} \geq \frac{R_N^2}{2a_n^2}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$R_N^3 - a_n^2 R_N - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}}S_1 - \frac{R_N^3}{2} > 0.$$

Пусть $R_N > 1$, тогда справедлива следующая цепочка неравенств

$$\frac{R_N^3}{2} - a_n^2 R_N - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}}S_1 > \frac{R_N^3}{2} - a_n^2 R_N - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}}S_1 R_N > 0$$

Данные неравенства будут справедливы, если для заданного a_n выбрать $R_N > \sqrt{2}a_n\sqrt{1+\frac{S_1}{a_n^{2(1-\theta)}}}$. Тогда для всех $\lambda \in \Gamma_{\pm iR_N}$ будет спреведлива оценка

$$|\ell_n(\lambda)| \geq ||g_n(\lambda)| - |f_n(\lambda)||a_n^2 \geq \frac{R_N^2}{2}.$$

Кроме того, $|\lambda| = \sqrt{x^2+R_N^2} \leq \sqrt{2}R_N$. Следовательно,

$$|\lambda\ell_n(\lambda)| \geq \frac{R_N}{2\sqrt{2}}.$$

2) Рассмторим случай когда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится и выполнены условия

$$c_k = \frac{\mathcal{A}}{k^\alpha} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\gamma_k = \mathcal{B}k^\beta + O(k^{\beta-1}), \qquad k \in \mathbb{N}$$

которые, при $k \to +\infty$, удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1$, где константы $\mathcal{A} > 0$ и $\mathcal{B} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$.

Для каждого $\lambda \in \Gamma_{-R_N} = \{x + iy \in \mathbb{C} : x = -R_N, -R_N \leq y \leq R_N\}$ справедлива следующая оценка (3.15). Рассуждая аналогично доказательтву теоремы 3, можно получить оценку

$$q(R_N) \leq \frac{2d_1NB}{a_n^{2(1-\theta)}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}\right) + 1 = \frac{2d_1NB}{a_n^{2(1-\theta)}}S_2 + 1, \tag{3.18}$$

где $S_2 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k}$ и

$$\begin{aligned}\frac{q(R_N)}{R_N^2} &\leq \frac{\frac{2d_1NB}{a_n^{2(1-\theta)}}S_2+1}{\gamma_N^2} = \frac{\frac{2d_1NB}{a_n^{2(1-\theta)}}S_2+1}{(BN^\beta + O(N^{\beta-1}))^2} \\ &= \frac{\frac{2d_1N^{1-2\beta}B^{-1}}{a_n^{2(1-\theta)}}S_2 + O\left(N^{-2\beta}\right)}{1+O\left(\frac{1}{N}\right)+O\left(\frac{1}{N^2}\right)} = \frac{2d_1N^{1-2\beta}B^{-1}}{a_n^{2(1-\theta)}}S_2 + O\left(N^{-2\beta}\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Поскольку $2\beta > 1$, то соотношение (3.19) стремится к нулю, когда N стремится к плюс бесконечности. Значит справедливо требуемое равенство

$$\inf_N\left\{\frac{q(R_N)}{R_N^2}\right\} = 0.$$

Из соотношения (3.19) следует, что для заданного a_n существует такое N_0, что для всех $N > N_0$, верно следующее неравенство

$$\frac{1}{2a_n^2} > \frac{2d_1 N^{1-2\beta} B^{-1}}{a_n^{2(1-\theta)}} S_2 + O(N^{-2\beta}),$$

где $S_2 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k}$. Тогда для всех $\lambda \in \Gamma_{-R_N}$ и для всех $N > N_0$ имеем

$$||g_n(\lambda)| - |f_n(\lambda)|| \geq \frac{R_N^2}{a_n^2} - R_N^2 \left(\frac{2d_1 N^{1-2\beta} B^{-1}}{a_n^{2(1-\theta)}} S_2 + O(N^{-2\beta}) \right) \geq \frac{R_N^2}{a_n^2} - \frac{R_N^2}{2a_n^2} \geq \frac{R_N^2}{2a_n^2}.$$

Отсюда получаем искомую оценку

$$|\ell_n(\lambda)| \geq ||g_n(\lambda)| - |f_n(\lambda)||a_n^2 \geq \frac{R_N^2}{2}.$$

Кроме того, $|\lambda| = \sqrt{R_N^2 + y^2} \leq \sqrt{2} R_N$. Следовательно,

$$|\lambda \ell_n(\lambda)| \geq \frac{R_N}{2\sqrt{2}}.$$

Далее, для всех $\lambda \in \Gamma_{\pm iR_N} = \{\lambda = x + iy \in \mathbb{C} : -R_N \leq x \leq \gamma, y = \pm R_N\}$, верно следующее равенство

$$\inf_{\lambda \in \Gamma_{\pm iR_N}} \left| \frac{\lambda^2}{a_n^2} \right| = \frac{R_N^2}{a_n^2}. \tag{3.20}$$

Пусть

$$\mathcal{C}_1 = \{\lambda \in \Gamma_{\pm iR_N} : 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \gamma, \operatorname{Im} \lambda = \pm R_N\},$$
$$\mathcal{C}_2 = \{\lambda \in \Gamma_{\pm iR_N} : -R_N \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \operatorname{Im} \lambda = \pm R_N\}.$$

Для всех $\lambda \in \mathcal{C}_1$ при $0 \leq \theta \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} |f_n(\lambda)| &\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|x \pm iR_N + \gamma_k|} \\ &\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} \left| \frac{x \pm iR_N}{\gamma_k} + 1 \right|^{-1} \\ &\leq 1 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} := 1 + \frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}}. \end{aligned}$$

Если взять R_N для которого

$$\frac{R_N^2}{2a_n^2} > \frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}} + 1,$$

то получим, что для всех $R_N > \sqrt{2} a_n \sqrt{\frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}} + 1}$, при всех $\lambda \in \mathcal{C}_1$ справедлива оценка

$$|\ell_n(\lambda)| \geq ||g_n(\lambda)| - |f_n(\lambda)||a_n^2 \geq \frac{R_N^2}{2}.$$

Рассуждая аналогично доказательтву теоремы 3, для всех $\lambda \in \mathcal{C}_2$ можно получить оценку сверху функции $f_n(\lambda)$:

$$\begin{aligned}|f_n(\lambda)| &\leq \frac{2}{a_n^{2(1-\theta)}} d_1 \cdot BNS_2 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \frac{c_M + c_{M+1}}{R_N} + 1 \\ &\leq \frac{2}{a_n^{2(1-\theta)}} d_1 \cdot BN \cdot S_2 + \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \frac{C_{N+1}}{R_N} + 1,\end{aligned}$$

где $C_{N+1} = \sup\limits_{1 \leq k \leq N+1} c_k$ и $S_2 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k}$. Таким образом, для всех $\lambda \in \mathcal{C}_2$ верно неравенство

$$||g_n(\lambda)| - |f_n(\lambda)|| \geq \frac{R_N^2}{2a_n^2},$$

в предположении, что

$$\frac{R_N^2}{a_n^2} > \left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} \left(2d_1 \cdot BN \cdot S_2 + \frac{C_{N+1}}{R_N} \right) + 1 \right),$$

которое равносильно неравенству

$$R_N^3 - a_n^2 R_N \left(\frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} (2d_1 \cdot BN \cdot S_2) + 1 \right) - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} C_{N+1} > 0.$$

Если взять $R_N > a_n \sqrt{\beta_N + \frac{C_{N+1}}{a_n^{2(1-\theta)}}}$, где $\beta_N = \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}} (2d_1 \cdot BN \cdot S_2) + 1$, то при $R_N > 1$ справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned}R_N^3 - \beta_N a_n^2 R_N - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} C_{N+1} &> R_N^3 - \beta_N a_n^2 R_N - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} C_{N+1} R_N \\ &= R_N \left(R_N^2 - \beta_N a_n^2 - \frac{a_n^2}{a_n^{2(1-\theta)}} C_{N+1} \right) > 0.\end{aligned}$$

Значит, для всех $\lambda \in \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ при

$$R_N > a_n\sqrt{2} \cdot \max\left\{\sqrt{\beta_N + \frac{C_{N+1}}{a_n^{2(1-\theta)}}}, \sqrt{\frac{S_2}{a_n^{2(1-\theta)}} + 1}\right\}.$$

где $\beta_N = \frac{1}{a_n^{2(1-\theta)}}(2d_1 \cdot B \cdot N \cdot S_2) + 1$ справедлива оценка

$$||g_n(\lambda)| - |f_n(\lambda)|| \geq \frac{R_N^2}{2a_n^2},$$

Кроме того, $|\lambda| = \sqrt{x^2 + R_N^2} \leq \sqrt{2}R_N$. Следовательно,

$$|\ell_n(\lambda)| \geq \frac{R_N^2}{2}, \quad |\lambda \ell_n(\lambda)| \geq \frac{R_N}{2\sqrt{2}}.$$

Предложение 3. *Для некоторого $\mu > 0$ для любых $t > 0$ и $p = 0, 1$ для $\lambda \in C_{R_N}$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{R_N^{2-p}} \int\limits_{-R_N \pm iR_N}^{-\mu \ln R_N \pm iR_N} \mathrm{e}^{t \operatorname{Re} \lambda} d|\lambda| \leqslant \frac{1}{R_N^{2-p}} \left(R_N - \mu \ln R_N\right) \mathrm{e}^{-t\mu \ln R_N} \lesssim \frac{1}{R_N^{1-p}} \mathrm{e}^{-t\mu \ln R_N}$$

$$\frac{1}{R_N^{2-p}} \int\limits_{-\mu \ln R_N \pm iR_N}^{\gamma \pm iR_N} \mathrm{e}^{t \operatorname{Re} \lambda} d|\lambda| \leqslant \frac{1}{R_N^{2-p}} \left(\gamma + \mu \ln R_N\right) \mathrm{e}^{t\gamma},$$

$$\frac{1}{R_N^{2-p}} \int\limits_{-R_N - iR_N}^{-R_N + iR_N} \mathrm{e}^{t \operatorname{Re} \lambda} d|\lambda| \leq \frac{1}{R_N^{2-p}} \int\limits_{-R_N}^{R_N} \mathrm{e}^{t \operatorname{Re}(-R_N + iy)} dy = \frac{2}{R_N^{1-p}} e^{-tR_N}.$$

Далее, при $t > 0$, на основании предложения 3, имеем следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\left| \int\limits_{C_{R_N}} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda \varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda t}}{\ell_n(\lambda)} d\lambda \right| &\leqslant \frac{\Psi_n}{R_N^2} \left(\int\limits_{\gamma - iR_N}^{-R_N - iR_N} + \int\limits_{-R_N - iR_N}^{-R_N + iR_N} + \int\limits_{-R_N + iR_N}^{\gamma + iR_N} \right) \mathrm{e}^{t \operatorname{Re} \lambda} d|\lambda| \\ &\leqslant \Psi_n \left(\frac{\mathrm{e}^{-t\mu \ln R_N}}{R_N} + \frac{(\gamma + \mu \ln R_N)\, \mathrm{e}^{t\gamma}}{R_N^2} + \frac{2\mathrm{e}^{-tR_N}}{R_N} \right) \\ &\lesssim \Psi_n \frac{\ln R_N}{R_N^2} \mathrm{e}^{t\gamma}\end{aligned}$$

где $\Psi_n = |\varphi_{1n}| + R_N|\varphi_{0n}|$. Таким образом, при $t > 0$, получаем

$$\|Q_{N(m)}(t)\|_H^2 = \left\| \sum_{k=1}^{m} \left(\int\limits_{C_{R_N}} \frac{\varphi_{1n} + \lambda\varphi_{0n}}{l_n(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda \right) e_n \right\|_H^2 = \sum_{k=1}^{m} \left| \int\limits_{C_{R_N}} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda\varphi_{0n})}{l_n(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda \right|^2$$
$$\lesssim \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(|\varphi_{1n}|^2 + R_N^2|\varphi_{0n}|^2\right)\ln^2 R_N}{R_N^4} \mathrm{e}^{2t\gamma}$$
$$= \mathrm{e}^{2\gamma t}\left(\frac{\|\varphi_1\|_H^2}{R_N^4} + \frac{\|\varphi_0\|_H^2}{R_N^2}\right)\ln^2 R_N \to 0, \quad N \to +\infty,$$

Следовательно, для всех $t \in \mathbb{R}_+$, получаем

$$\lim_{m\to+\infty} \|Q_{N(m)}(t)\|_H = \lim_{m\to+\infty} \|u(t) - P_{N(m)}(t)\|_H = 0.$$

Отсюда и следует равенство (3.12).

Таким образом, для решения $u(t)$ задачи (1)–(2) получаем следующее представление $u(t) = u_{\mathrm{Im}}(t) + u_{\mathrm{Re}}(t)$, где

$$u_{\mathrm{Im}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^+\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_n^+ t}}{\ell_n'(\lambda_n^+)} e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^-\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_n^- t}}{\ell_n'(\lambda_n^-)} e_n,$$
$$u_{\mathrm{Re}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{n,k}\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_{n,k} t}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})} \right) e_n.$$

Теорема 6 доказана.

4 Доказательство результатов о представлении решений в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра $L(\lambda)$ в случае однородных начальных условий и ненулевой правой части

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим задачу (1)–(2) при условии, что начальные условия $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Из условия теоремы 7 и интегральной формулы Дюгамеля (см. [2, гл. 6]), следует, что единственное сильное решение

$u(t)$, принадлежащее пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$, $\gamma > 0$, можно представить в виде

$$u(t) = \int_0^t v(t,\tau)d\tau,$$

где вектор-функция $v(t,\tau)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{d^2v(t,\tau)}{dt^2} + A^2v(t,\tau) - \int_\tau^t K(t-s)A^{2\theta}v(s,\tau)ds = 0, \; t > \tau, \tag{3.21}$$

$$v(\tau,\tau) = 0, \quad v_t^{(1)}(\tau,\tau) = f(\tau), \tag{3.22}$$

и $v(t,\tau) = 0$ при $t < \tau$. Действительно,

$$A^2u(t) = \int_0^t A^2v(t,\tau)d\tau.$$

Продифференцируем решение $u(t)$ по переменной t, и учитывая условие (3.22), имеем:

$$u_t(t) = v(t,t) + \int_0^t v_t(t,\tau)d\tau = \int_0^t v_t(t,\tau)d\tau,$$
$$u_{tt}(t) = v_t(t,t) + \int_0^t v_{tt}(t,\tau)d\tau = f(t) + \int_0^t v_{tt}(t,\tau)d\tau.$$

Кроме того, справедливо следующее соотношение

$$\int_0^t \left(K(t-s)A^{2\theta}\left(\int_0^s v(s,\tau)d\tau\right)\right)ds = \int_0^t \left(\int_\tau^t K(t-s)A^{2\theta}v(s,\tau)ds\right)d\tau.$$

Заметим, что преобразование Лапласа по переменной t сильного решения задачи (3.21)–(3.22) имеет вид

$$\hat{v}(\lambda,\tau) = L^{-1}(\lambda)f(\tau)\exp(-\lambda\tau),$$

где оператор-функция $L(\lambda) = \lambda^2I + A^2 - \widehat{K}(\lambda)A^{2\theta}$ является символом уравнения (1). Следовательно, сужение вектор-функции $\hat{v}(\lambda,\tau)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n имеет вид

$$\hat{v}_n(\lambda,\tau) = (\hat{v}(\lambda,\tau)e_n, e_n) = \frac{f_n(\tau)\exp(-\lambda\tau)}{\ell_n(\lambda)}.$$

Аналогично рассуждению из доказательства теоремы 6 по формуле обращения преобразования Лапласа, для любого $\gamma > 0$ и для всех $t > \tau > 0$ можно получить следующее представление для решения $v(t,\tau)$ задачи (3.21)–(3.22):

$$v(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\tau)e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \lim_{R_N\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\gamma-iR_N}^{\gamma+iR_N} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{f_n(\tau)}{\ell_n(\lambda)}e_n\right) \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}d\lambda.$$

Введем в рассмотрение контур $\Gamma_{\gamma,R_N} := \{\Gamma_\gamma \cup \Gamma_{-R_N} \cup \Gamma_{iR_N} \cup \Gamma_{-iR_N}\}$, $N \in \mathbb{N}$, проходимый против часовой стрелки (см. рисунок **C**, приведенный в конце этой главы), где

$$\Gamma_\gamma = \{x+iy \in \mathbb{C} : x = \gamma, -R_N \le y \le R_N\},$$
$$\Gamma_{-R_N} = \{x+iy \in \mathbb{C} : x = -R_N, -R_N \le y \le R_N\},$$
$$\Gamma_{iR_N} = \{x+iy \in \mathbb{C} : -R_N \le x \le \gamma, y = R_N\},$$
$$\Gamma_{-iR_N} = \{x+iy \in \mathbb{C} : -R_N \le x \le \gamma, y = -R_N\}.$$

Тогда, при фиксированном R_N, справедливо представление

$$\int\limits_{\gamma-iR_N}^{\gamma+iR_N} h_m(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}d\lambda = \int\limits_{\Gamma_{\gamma,R_N}} h_m(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}d\lambda - \int\limits_{C_{R_N}} h_m(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}d\lambda$$

где $h_m(\lambda) = \left(\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{f_n(\tau)}{\ell_n(\lambda)}e_n\right)$ и $C_{R_N} = \Gamma_{iR_N} \cup \Gamma_{-R_N} \cup \Gamma_{-iR_N}$. Введем следующие обозначения

$$P_{N(m)}(t,\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \int\limits_{\gamma-iR_N}^{\gamma+iR_N} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{f_n(\tau)}{\ell_n(\lambda)}e_n\right) \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}d\lambda$$
$$Q_{N(m)}(t,\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \int\limits_{C_{R_N}} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{f_n(\tau)}{\ell_n(\lambda)}e_n\right) \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}d\lambda, \qquad (3.23)$$

Из замечаний 13 и 14 следует, что внутри контура Γ_{γ,R_N} содержится конечное число m пар комплексно-сопряженных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$, причем $N = N(m)$ и $m \to +\infty$ при $N \to +\infty$.

Применяя теорему Коши о вычетах, при достаточно большом $N = N(m)$ получаем представление

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int\limits_{\Gamma_{\gamma,R_N}}\sum_{n=1}^{m}\frac{f_n(\tau)}{\ell_n(\lambda)}e_n\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}d\lambda=\lim_{m\to\infty}\left(v_{\mathrm{Im},m}(t,\tau)+v_{\mathrm{Re},m}(t,\tau)\right), \tag{3.24}$$

где

$$v_{\mathrm{Im},m}(t,\tau):=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_n^+(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^+)}+\frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_n^-(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^-)}\right)e_n,$$
$$v_{\mathrm{Re},m}(t,\tau):=\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{N(m)}\frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_{n,k}(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})}\right)e_n,$$

и $N = N(m), m \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n,k}$ – вещественные нули мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$, удовлетворяющие неравенствам (1.4), а $\lambda_n^{\pm}$, где $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$, – комплексно-сопряженные нули мероморфной функции $\ell_n(\lambda)$, представимы в виде (1.5), (1.7), (1.8) и (1.9). Следовательно, верно следующее представление

$$v(t,\tau)=v_{\mathrm{Im}}(t,\tau)+v_{\mathrm{Re}}(t,\tau)=\lim_{m\to+\infty}\left(P_{N(m)}(t,\tau)-Q_{N(m)}(t,\tau)\right), \tag{3.25}$$

где

$$v_{\mathrm{Im}}(t,\tau):=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_n^+(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^+)}+\frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_n^-(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^-)}\right)e_n,$$
$$v_{\mathrm{Re}}(t,\tau):=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_{n,k}(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})}\right)e_n.$$

Покажем теперь, что для любого $T > 0$ такого, что $T \geq t \geq \tau \geq 0$

$$\lim_{m\to+\infty}\|Q_{N(m)}(t,\tau)\|_H=0,\quad N=N(m).$$

При $0 \leqslant \tau \leqslant t$, имеем

$$\left|\int\limits_{C_{R_N}}\frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}}{l_n(\lambda)}d\lambda\right|\leqslant\frac{|f_n(\tau)|}{R_N^2}\left(\int\limits_{\gamma-iR_N}^{-R_N-iR_N}+\int\limits_{-R_N-iR_N}^{-R_N+iR_N}+\int\limits_{-R_N+iR_N}^{\gamma+iR_N}\right)\mathrm{e}^{(t-\tau)\operatorname{Re}\lambda}d|\lambda|\leqslant$$
$$\leqslant|f_n(\tau)|\left(\frac{1}{R_N}\mathrm{e}^{-(t-\tau)\mu\ln R_N}+\frac{1}{R_N^2}\left(\gamma+\mu\ln R_N\right)\mathrm{e}^{(t-\tau)\gamma}+\frac{2}{R_N}\mathrm{e}^{-(t-\tau)R_N}\right)\lesssim$$
$$\lesssim\frac{\ln R_N}{R_N^2}|f_n(\tau)|\mathrm{e}^{(t-\tau)\gamma}$$

По условию теоремы 7, вектор-функция $f(t) \in C([0,T],H)$ для любого $T>0$, следовательно, для всех $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, имеем

$$\|Q_{N(m)}(t,\tau)\|_H^2 = \left\| \sum_{k=1}^{m} \left(\int\limits_{C_{R_N}} \frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}}{l_n(\lambda)} d\lambda \right) e_n \right\|_H^2 = \sum_{k=1}^{m} \left| \int\limits_{C_{R_N}} \frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}}{l_n(\lambda)} d\lambda \right|^2 \lesssim$$

$$\lesssim \left(\frac{\ln R_N}{R_N^2}\right)^2 \sum_{k=1}^{m} |f_n(\tau)|^2 \mathrm{e}^{2(t-\tau)\gamma} \leqslant \left(\frac{\ln R_N}{R_N^2}\right)^2 \|f(\tau)\|_H^2 \mathrm{e}^{2(t-\tau)\gamma} \to 0, \quad N \to +\infty,$$

Таким образом, для всех $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, получаем

$$\lim_{m\to+\infty} \|Q_{N(m)}(t,\tau)\|_H = \lim_{m\to+\infty} \|v(t,\tau) - P_{N(m)}(t,\tau)\|_H = 0,$$

т.е.

$$v(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_n^+(t-\tau)} e_n}{l_n'(\lambda_n^+)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_n^-(t-\tau)} e_n}{l_n'(\lambda_n^-)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_n(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_{k,n}(t-\tau)}}{l_n'(\lambda_{k,n})} \right) e_n. \qquad (3.26)$$

Кроме того, при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, имеем

$$\sup_{\tau\in[0,t]} \left\|Q_{N(m)}(t,\tau)\right\|_H \lesssim \frac{\ln R_N}{R_N^2} \sup_{\tau\in[0,t]} \|f(\tau)\|_H \mathrm{e}^{T\gamma} \to 0, \quad N \to +\infty,$$

тогда

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{\tau\in[0,t]} \|Q_{N(m)}(t,\tau)\|_H = \lim_{m\to+\infty} \sup_{\tau\in[0,t]} \|v(t,\tau) - P_{N(m)}(t,\tau)\|_H = 0,$$

т.е. ряд (3.26) сходится в гильбертовом пространстве H равномерно по $\tau \in [0,t]$.

Теперь, интегрируя равенство (3.26) по переменной $\tau \in (0,t)$, получаем следующее представление для решения $u(t)$ задачи (1)–(2) с нулевыми начальными условиями $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$:

$$u(t) = w_{\mathrm{Im}}(t) + w_{\mathrm{Re}}(t),$$

где

$$w_{\mathrm{Im}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{f_n(\tau) \mathrm{e}^{\lambda_n^+(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^+)} + \int_0^t \frac{f_n(\tau) \mathrm{e}^{\lambda_n^-(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_n^-)} d\tau \right) e_n, \tag{3.27}$$

$$w_{\mathrm{Re}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{f_n(\tau) \mathrm{e}^{\lambda_{n,k}(t-\tau)}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})} d\tau \right) e_n, \tag{3.28}$$

Теорема 7 доказана.

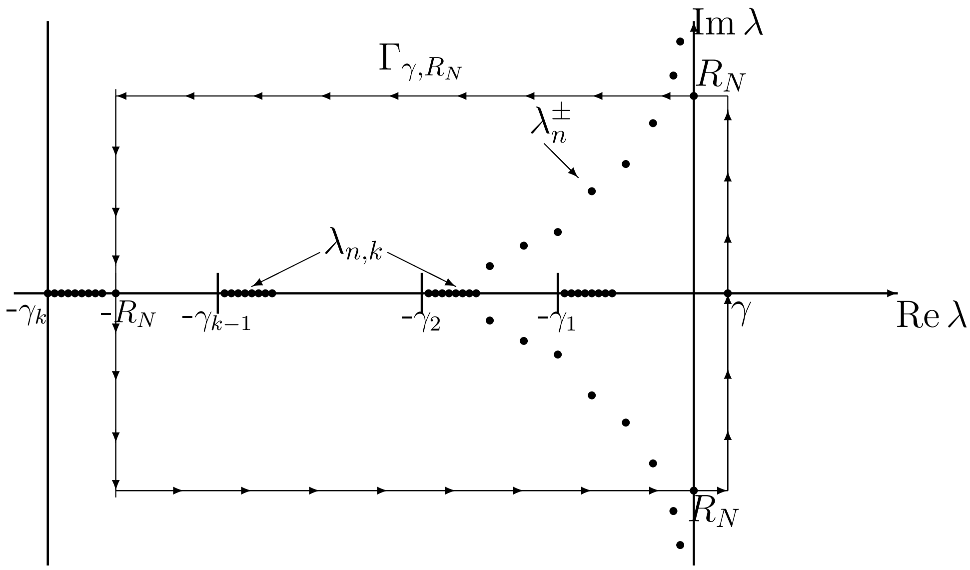

Рис. C: Контур Γ_{γ,R_N} проходит против часовой стрелки.

5 Заключение и комментарий

В первом главе диссертации (см. параграф 3.1) приведено утверждение о распределении точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости. Отсюда естественно возникает вопрос об устойчивости решений абстрактных интегро-дифференциальных уравнений вида (1) в случае $\theta \in [0,1]$. В этом направлении имеется много работ, например [29, 34–36], где исследуются асимптотическое поведение решений задач вида (1)–(2) в случае, когда θ принадлежит $[0,1]$. В последние годы появилось немало работ, посвященных исследованию асимптотического поведения решений для систем с памятью, при различных $\theta \in [0,1]$ (см. [29, 34–36] и приведенные там ссылки). В работе [35] Муньос Ривера и соавторов доказано, с помощью энергетических функционалов, что решение системы (1)–(2) при $\theta \in (0,1)$ убывает полиномиально когда время $t \to +\infty$, если ядро $K(t)$ экспоненциально убывает. Было доказано ими также, что рассеяние, определяемое *эффектом памяти*, не является достаточно сильным, чтобы произвести экспоненциальную устойчивость системы (1)–(2) в случае, когда $\theta \in (0,1)$. Фабрицио и Лаззари в работе [29], в предположении экспоненциального убывания ядра $K(t)$ и $\theta = 1$ получили экспоненциальное убывание решения системы (1)–(2). В работе [36] Муньос Ривера и соавторов, при $\theta = 0$, было получено экспоненциальное убывание решения интегро-дифференциальных уравнений вида (1). В работе [34], в случае $\theta = 1$, Муньос Ривера и Мария Насо доказали, что решение задачи (1)–(2) экспоненциально убывает, если ядро $K(t)$ также экспоненциально убывает. С другой стороны, если ядро $K(t)$ полиномиально убывает, то соответствующее решение системы (1)–(2) также полиномиально убывает с той же скоростью. В предлагаемой диссертации, на основе спектрального анализа, из асимптотики (8) теоремы 2 (при $\theta \in [0,1)$) и первого случая теоремы 3 (при $\theta \in [0,1)$) (см. также рисунки 1 и 2, приведенные в первой главе диссертации) решение задачи (1)–(2) не может убывать экспоненциально.

Заметим однако, что в известных нам работах при $\theta \in [0,1]$, и, в частности, в работах [34–36] спектральный анализ символа уравнения (1) не проводился. Результаты данной диссертации, таким образом, являются естественным развитием результатов работ [3–5, 44], в которых проводился спектральный анализ в случае $\theta = 1$.

Заключение

В диссертации установлена общая структура спектра оператор-функций $L(\lambda)$, являющихся символами интегро-дифференциальных уравнений вида (1), получены асимптотики вещественной и комплексной частей спектра указанных оператор-функций $L(\lambda)$ в случае, когда $\theta \in [0,1]$. Изучена зависимость локализации спектра от свойств ядра интегрального оператора, входящего в изучаемые уравнения. На основе спектрального анализа получены следующие новые результаты:

1. Теоремы о корректной разрешимости начальных задач в пространствах Соболева вектор-функций на положительной полуоси для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (1) по временной переменной в случае, когда $\theta \in [0, 1]$.

2. Теоремы о представлении сильных решений в виде суммы слагаемых, отвечающих точкам спектра оператор-функций $L(\lambda)$, являющихся символами изучаемых уравнений.

На наш взгляд перспективными направлениями для дальнейших исследований по тематике диссертации являются:

1. Распространение, полученных в первой главе результатов, о локализации и структуре спектров соответствующих оператор-функций на случай более общих ядер интегральных операторов в уравнении (1) с целью расширения круга исследования задач, возникающих в приложениях, приводящих к задачам вида (1)–(2).

2. Использование результатов, полученных в первой главе, о локализации и структуре спектров оператор-функций, являющихся символами изучаемых уравнений для исследования спектров и резольвент генераторов полугрупп сдвигов вдоль траекторий решений изучаемых уравнений вида (1)–(2), а также исследование геометрических свойств экспоненциальных решений (полнота, минимальность, базисность) с использованием результатов из обстоятельного обзора [16].

3. Получение результатов о корректной разрешимости задачи вида (1)–(2) в различных функциональных пространствах и при разном понимании решений (сильное решение, обобщенное решение, слабое решение и т. д.).

4. Дальнейшее исследование разложений решений уравнения (1) в ряды, полученных в третьей главе, с целью изучения их сходимости в различных функциональных пространствах и, на этой основе получение более полной и детальной информации об асимптотическом поведении решений уравнений вида (1).

Благодарности. Автор глубоко благодарен своему научному руководителю профессору Виктору Валентиновичу Власову за постановку задач, постоянное внимание к работе, за многочисленные обсуждения и ценные рекомендации, а также доценту Надежде Александровне Раутиан за полезные замечания и предложения.

Автор выражает глубокую благодарность участникам семинара под руководством профессора А. А. Шкаликова за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта Мексиканского центра экономических и социальных исследований (CEMEES).

Литература

[1] Агранович М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. *МЦНМО*, 2013.

[2] Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. Линейные уравнения математической физики, 1964.

[3] Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А., Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. *Современные проблемы математики и механики*, том VIII, вып. 1, издательство МГУ, 2011, 308 С.

[4] Власов В.В., Раутиан Н.А., Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений, издательство МАКС Пресс, Москва, 2016, 488 С.

[5] Власов, В. В., Раутиан Н. А., Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений. *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2011, том 28, 75–113.

[6] Власов В. В., Ву Дж., Кабирова Г. Р., Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последействием. *СМФН*, 2010, том 35, 44–59.

[7] Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С., Исследование операторных

моделей, возникающих в задачах наследственной механики. *СМФН*, 2012, том 45, 43–61.

[8] Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Учеб. пособие, 4–е изд., испр– М. Физматлит, 2002.

[9] Иосида К. Функциональный анализ. МИР. 1967.

[10] Кирхгоф Г. П. Механика. Лекции по математической физике. Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1962.

[11] Копачевский Н. Д. Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций.- Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.

[12] Лионс Ж.П., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. МИР. 1971.

[13] Лыков А. В. Проблема тепло и массообмена. Минск, *Наука и техника*, 1976.

[14] Михлин С. Г. Спектр пучка операторов теории упругости, *Успехи Математических Наук (УМН)*, 1973, том 28, выпуск 3 (171), 43–82.

[15] Раутиан Н. А. О структуре и свойствах решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике. *Матем. заметки.* 2011, том 90, No. 3, 470–473.

[16] Шкаликов А. А. Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром. *Успехи математичесих наук*, 2016, том 71, вып. 5 (431), 113–174.

[17] Шамаев А. С., Шумилова В. В. Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью. *Изв. РАН. МЖГ*, 2011, No. 2, 92–103.

[18] Шамаев А. С., Гавриков А. А. Некоторые вопросы акустики эмульсий. *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2011, том 28, 114–146.

[19] Arosio A., Panizzi S. On the well-posedness of the Kirchhoff string, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1996, Vol. 348, 305–330.

[20] Dafermos, C. M. Asymptotic stability in viscoelasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1970, Vol. 37, 297–308.

[21] Eremento A., Ivanov S. Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 2011, Vol. 43, No. 5, 2296–2306.

[22] Fabrizio M., Morro A. Mathematical problems in linear viscoelasticity, *SIAM studies in applied mathematics*, 1992.

[23] Fabrizio M., Goirgi C., Pata V. A new approach to equations with memory, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2009.

[24] Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M. Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. 2012.

[25] Gurtin M. E., Pipkin A. C. A General theory of heat conduction with finite wave speeds. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, Vol. 31, No. 2, 113–126.

[26] Guyer, R. A., Krumhansl, J. A. Solution of the linearized phonon Boltzmann equation. *Phys. Rev.* 1966, Vol. 148, 766–778.

[27] Ivanov S. A., Sheronova T. L. Spectrum of the heat equation with memory. Arxiv.org/abs/0912.1818v1

[28] Kopachevsky N. D., Syomkina E. V. Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative, *Eurasian Math. J.*, 2013, Vol. 4, No. 4, 64–87.

[29] Fabrizio M., Lazzari B. On the existence and the asymptotic stability of solutions for linearly viscoelastic solids. *Arch. Ration. Mech. Anal.*. Springer-Verlag, 116, 139–152, 1991.

[30] Miller R. K. Volterra integral equations in a Banach space. *Funkcial. Ekvac.*, 1975, No. 8, 163–193.

[31] Miller R. K. An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory. *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, No. 66, 313–332.

[32] Miller R. K., Wheeler R. L. Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces. *Funkcial. Ekvac.*, 1978, No. 21, 279–305.

[33] Miller R. K., Desch W. Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space, *Journal of Differential Equations*, 1987, No. 70, 366–389.

[34] Muñoz Rivera J. E., Grazia Naso M. On the Decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation. *Asymptotic Analysis*, 2006, Vol. 49, 189–204.

[35] Muñoz Rivera J. E., Grazia Naso M., Vegni F. M. Asymptotic behavior of the energy for a class of a weakly dissipative second-order systems with memory. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, Vol. 286, 692–704.

[36] Muñoz Rivera J. E., Grazia Naso M., Vuk E. Asymptotic behavior of the energy for electromagnetic systems with memory. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2004, Vol. 27, 819–841.

[37] Pandolfi L., Ivanov S. Heat equations with memory: lack of controllability to the rest. *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, Vol. 355, 1–11.

[38] Pandolfi L. The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach.*Applied Mathematics and Optimization*, 2005, Vol. 52, 143–165.

[39] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer–Verlag, New York inc., 1983.

[40] Sanchez-Palencia E. Nonhomogeneous Media and Vibration Theory. Lecture Notes in physics, 1980.

[41] Shapiro J. H. Composition operators and classical function theory. New York: Springer, 1993.

[42] Shapiro J. H., Bourdon P. S. Cyclic phenomena for composition operators. *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 125, No. 596, 1997.

[43] Vegni F. M. Dissipativity of a conserved phase-field system with memory. *Discrete and continuous dynamical systems*, 2003, Vol. 9, 949–968.

[44] Vlasov V. V., Rautian N. A., Shamaev A. S. Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics. *J. Math. Sci.*, 2013, Vol. 190, No. 1, 34–65.

[45] Vlasov V. V., Rautian N. A. Spectral analysis of hyperbolic Volterra integrodifferential equations, *Doklady mathematics*, 2015, Vol. 92, No. 2, 590–593.

[46] Vlasov V. V., Rautian N. A. Spectral analysis and representations of solutions of abstract integro-differential equations in Hilbert space. *Operator Theory: Advances and Applications*, 2014, Vol. 236, 517–535.

[47] Zakora D. A., Abstract linear Volterra second-order integro-differential equations. *Eurasian Math. J.*, 2016, Vol. 7, No. 2, 75–91.

Работы автора по теме диссертации:

[48] Перез Ортиз Р., Власов В. В. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике. *Матем. заметки* 2015, том 98, No. 4, 630–634.

[49] Перез Ортиз Р. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра. *Труды МФТИ*, 2015, том 7, No. 2, 27–38.

[50] Перез Ортиз Р., Раутиан Н. А. Представление решений интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра. *Дифференциальные Уравнения*, 2017, том 53, No. 1, 140–144.

[51] Perez Ortiz R., Vlasov V. V. Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2016, No. 31, 1–17.

[52] Perez Ortiz R., Vlasov V. V. Spectra of the Gurtin-Pipkin type equations with the kernel, depending on the parameter//arXiv:1403.4382 [27 pp.].

[53] Perez Ortiz R., Vlasov V. V. Correct solvability of hyperbolic Volterra equations with kernels depending on the parameter//arXiv:1412.1067 [18 pp.].

Все результаты совместных публикаций [48, 50–53], включенные в диссертацию, получены лично Перезом Ортизом Ромео.

Тезисы конференций:

[54] Перез Ортиз Р., Власов В. В. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве//международная конференция Современные проблемы вычислительной математики и математической физики, посвященная памяти

академика А. А. Самарского в связи с 95-летием со дня его рождения.–г. Москва, ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова: 2014, С. 129–130.

[55] Перез Ортиз Р., Власов В. В., Раутиан Н. А. Исследование интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах теплопроводности с памятью и вязкоупругости//международная конференция Спектральная теория и дифференциальные уравнения, посвященная 100-летию Б. М. Левитана.–г. Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова: 2014, С. 67.

[56] Перез Ортиз Р. Представление решений одного класса интегро-дифференциалных уравнений с операторными коэффициентами//международная конференция Функциональные пространства и теория приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского. –г. Москва, МИАН: 2015, С. 197–198.

[57] Перез Ортиз Р., Власов В. В. Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра//научная конференция Тихоновские чтения, посвященная памяти академика А. Н. Тихонова.–г. Москва, ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова: 2015, С. 91.

[58] Перез Ортиз Р. Представление решений вольтерровых уравнений с ядрами зависящими от параметра//международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.–г. Суздаль, ВлГУ: 2016, С. 158–159.