А. Ф. БЕРМАНТ, И. Г. АРАМАНОВИЧ

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ДЛЯ ВТУЗОВ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для высших технических учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.2
Б 50
УДК 517.0 (075.8)

Анисим Федорович Бермант, Исаак Генрихович Араманович

Краткий курс математического анализа
для втузов

М., 1967 г., 736 стр с илл.

Редактор *С. А. Широкова*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр* Корректоры *С. Д. Кайсер* и *И. Я. Кришталь*

Печать с матриц. Подписано к печати 18/V 1967 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 46.
Условн. печ. л. 46. Уч.-изд. л. 44,7. Тираж 200 000 экз. Цена книги 1 р. 35 к.
Заказ № 1889.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

$\frac{2\text{-}2\text{-}3}{2\text{-}67}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА II
ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

ГЛАВА III
ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА IV
ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

ГЛАВА V
ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА VIII

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ГЛАВА IX

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ГЛАВА X
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА XI
РЯДЫ

ГЛАВА XII
РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Четвертое издание «Краткого курса математического анализа для втузов» выпускается в значительно переработанном виде. Главная цель переработки заключалась в том, чтобы привести «Курс» в соответствие с программой по высшей математике для инженерно-технических специальностей, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР в 1964 г.

Параграфы и пункты, относящиеся к той части программы, которая может не изучаться во втузах с уменьшенным объемом курса математики (это относится главным образом к специальностям технологического профиля), отмечены звездочками; читатель может выпустить эти пункты без всякого ущерба для понимания остального текста. Звездочками отмечены также относящиеся к этим пунктам вопросы для самопроверки, помещенные в конце каждой главы.

За последние годы в серии «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов» вышел ряд книг (см. перечень литературы), которые могут служить учебными пособиями по изучению дополнительных разделов математики. Именно поэтому в «Курсе» не отражены отдельные пункты общей программы, относящиеся к уравнениям математической физики и функциям комплексного переменного. Специального руководства требует и раздел программы «Методы вычислений и программирование»; из него в «Курс» включены лишь отдельные вопросы (применение дифференциала к теории ошибок, приближенное решение уравнений, численное интегрирование).

Для лучшей фиксации внимания читателя формулировки важнейших определений и теорем даны жирным шрифтом. В книге почти нет материала, выходящего за рамки программы; поэтому мелким шрифтом набраны лишь отдельные замечания.

В «Курсе» разобрано много примеров и задач, относящихся к различным разделам механики и физики. Изучение их безусловно необходимо для овладения методами математического анализа и, что особенно важно для будущих инженеров, методами применения анализа к решению конкретных физических задач.

Книга ставит своей целью не просто сообщить читателю те или иные необходимые ему сведения по математическому анализу. Она предназначена и для того, чтобы развить у читателя логическое и математическое мышление, расширить его математический кругозор. Поэтому большинство положений высказывается с точным перечислением условий, при которых они справедливы. Все места, где даются упрощенные доказательства, по возможности оговариваются. Точно так же отмечаются все теоремы, которые приводятся без доказательств.

Читатель, заинтересованный в более глубоком и детальном изучении курса анализа, должен обратиться к более полным руководствам; некоторые из них приведены в списке литературы.

Включение в «Курс» ряда новых разделов потребовало в некоторых случаях довольно существенной переработки старого текста; при этом большое внимание было уделено упрощению и уточнению формулировок определений и теорем. Писать об этих изменениях вряд ли целесообразно: учащемуся, впервые читающему книгу, они ничего не скажут; преподаватели, рекомендующие этот курс студентам, легко обнаружат их сами[1]).

При изучении математики во втузах порядок прохождения материала часто бывает связан не только внутренней логикой курса, но и сроками прохождения дисциплин, опирающихся на этот курс. Именно в связи с этим перенесен вперед (по сравнению с предыдущими изданиями) параграф о векторной функции скалярного аргумента, так как нужда в нем в курсе теоретической механики возникает очень рано. Главы второй половины книги образуют циклы (VIII и IX, X, XI и XII), которые могут изучаться почти независимо друг от друга. При этом глава X — дифференциальные уравнения — опирается лишь на самые простые сведения о функциях многих переменных.

А. Ф. Бермант, создавший первоначальный вариант этого «Курса», скоропостижно скончался 26 мая 1959 г. До сих пор жива память о нем — талантливом ученом и педагоге, кипучем организаторе, отдавшем очень много сил делу повышения математической культуры в нашей стране. Все изменения и дополнения как в первое, так и в последующие издания внесены мною.

В процессе работы я часто пользовался советами моих товарищей — математиков. Всем им выражаю свою искреннюю признательность.

И. Г. Араманович

---

[1]) Отметим только, что в этом издании в определение функции включается обязательное требование ее однозначности; в связи с этим иначе трактуются вопросы о неявных и обратных функциях.

ВВЕДЕНИЕ

1. «Элементарная» и «высшая» математика. Говоря о курсе математики, изучаемом в высших учебных заведениях, часто называют его «курс высшей математики». Соответственно те разделы математики, которые изучают в школе, обычно объединяются названием «курс элементарной математики». Сразу подчеркнем, что это разделение математики на «высшую» и «элементарную» весьма условно; нельзя указать никаких точных признаков, согласно которым такое разделение можно произвести.

Следует все же отметить, что те разделы математики, которые мы относим к «элементарной», возникли и существуют уже очень давно. Любому школьнику известны имена греческих ученых Пифагора и Евклида, — первый из которых жил за пятьсот, а второй за триста лет до нашей эры. Именно в то время была создана та система элементарной геометрии, которая лишь с небольшими изменениями изучается в школе и сейчас.

Несколько позже оформилась как самостоятельный раздел математики алгебра; ее рождение относят к VIII веку н. э., когда хорезмский ученый Моххамед Аль-Хорезми изложил ее основы в трактате «Альджебр аль-мукабала», из первого слова названия которого и произошло само слово «алгебра». Разумеется, правила арифметических и алгебраических действий, а также способы решения простейших уравнений были известны значительно раньше.

Возникновение тригонометрии, связанное с астрономическими исследованиями, также относится к античной древности. Конечно и алгебра, и тригонометрия претерпели в своем развитии очень большие изменения, прежде чем приняли свой современный вид. Ведь алгебраической символикой начали пользоваться сравнительно «недавно»: основу ее положил французский математик Ф. Виет в книге, вышедшей в 1591 г.

Те же разделы математики, которые объединяются общим названием «высшая математика», развились из учений, возникших в XVII и XVIII веках в связи с прогрессом естествознания и техники. Потребности науки и техники в более углубленном изучении природы привели к учениям о процессах, явлениях, наблюдаемых в окружающем нас мире. Это прежде всего коснулось физических явлений. Для того чтобы изучить их с количественной стороны, стала нужна математика, которая была бы в силах исследовать взаимные изменения различных величин, участвующих в явлении.

Математический анализ — значительный раздел «высшей математики» — как раз и занимается переменными величинами в их взаимозависимости.

Математический анализ основывается на тесной связи алгебраических и геометрических методов, впервые появившейся в аналитической геометрии, созданной знаменитым французским математиком и философом Рене Декартом (1596—1650).

2. Величина. Переменная величина и функциональная зависимость. Основное понятие, с которым мы встречаемся на каждом шагу в любой естественнонаучной или технической области знания, — это понятие «величины». *Под величиной понимают все то, что может быть измерено и выражено числом* (или *числами*).

В конкретных вопросах естественных и технических наук приходится встречаться с величинами разнообразной природы. Примерами величин служат: длина, площадь, объем, вес, температура, скорость, сила и т. п. В математике же не участвуют конкретные величины.

Математические положения и законы формулируют, абстрагируясь от конкретной природы величин, принимая во внимание лишь их численные значения. В соответствии с этим в математике рассматривают *величину вообще, отвлекаясь от физического смысла, который она может иметь.* Именно поэтому математические теории с одинаковым успехом могут быть применены к исследованию любых конкретных величин. В этом, между прочим, выражается та общность, универсальность математических теорий, которую называют также абстрактностью, иногда неправильно понимая под этим оторванность от практики, от действительности. Ф. Энгельс в таких словах подчеркивает эту особенность математики: «...чтобы быть в состоянии исследовать эти формы (*пространственные.* — А. Б.) и отношения (*количественные.* — А. Б.) в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины, разные a и b, x и y, постоянные и переменные величины...» [1]).

---

[1]) Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, Госполитиздат, 1952, стр. 37.

Среди совместно рассматриваемых величин обычно некоторые изменяются, другие же остаются постоянными. Изменение, движение есть первейший признак того, что мы называем *явлением, процессом. Явление, наблюдаемое в природе или технике, и воспринимается нами как изменение одних величин, участвующих в этом явлении, обусловленное изменением других.* Например, наблюдая некоторую массу газа при постоянной температуре, мы отмечаем изменение упругости газа при изменении его объема. Точно так же при рассмотрении падения тела (в пустоте) под воздействием силы тяжести мы отмечаем изменение скорости движения при изменении расстояния тела от точки, из которой началось падение, а также изменение и этого расстояния и скорости движения с течением времени. Вместе с тем ускорение движения остается постоянным и в любой момент времени, и на всем пути падения.

Для изучения явлений необходимо ввести в математику понятие переменной величины.

Переменной называют величину, принимающую различные численные значения; величина, которая сохраняет одно и то же численное значение, называется постоянной.

Как уже было сказано, всякий процесс характеризуется (с количественной стороны) взаимоизменяемостью нескольких переменных величин. Такое представление приводит к важнейшему в математике понятию функциональной зависимости, т. е. связи между переменными величинами.

Установление и описание связи между величинами, участвующими в данном процессе, есть первая и главная задача естественных и технических наук. *Законом процесса именно и называется функциональная зависимость, проявляющаяся в этом процессе и характеризующая его;* говорят еще, что эта зависимость описывает процесс. Так, функциональная зависимость между упругостью (p) и объемом (v) газа, состоящая в том, что при постоянной температуре $p=\frac{k}{v}$ (k — постоянная), выражает закон, которому следуют газы при соответствующих условиях. Словесное выражение функциональной зависимости — упругость газа обратно пропорциональна объему (при постоянной температуре) — есть обычная формулировка указанного закона. Аналогично функциональная зависимость между расстоянием (s), пройденным свободно падающим телом, и временем падения (t), состоящая в том, что $s=\frac{1}{2}gt^2$ (g — ускорение силы тяжести), выражает закон свободного падения.

Важнейшей задачей математического анализа является всестороннее изучение функциональных зависимостей.

3. Математика и действительность. Невозможно дать краткое и исчерпывающее определение математики. Ф. Энгельсу принадлежит суждение о предмете математической науки, которое в силу своей глубины и лаконичности должно считаться наиболее удачным и точным:

«*Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира...*» [1]).

При этом Ф. Энгельс особо подчеркивает опытное происхождение математики: «Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления» [2]).

Благодаря этому математика и оказывает существенную помощь в изучении вещей и процессов, встречающихся как в различных науках о природе, так и в различных науках об обществе, везде, где есть необходимость рассматривать эти вещи и процессы с количественной стороны. Что же касается естествознания и техники, то математика является для них чрезвычайно ценным методом теоретического исследования и практическим орудием. Без тех средств, которые дает элементарная, а затем и высшая математика, невозможен никакой технический расчет, а значит, без математики невозможна и никакая серьезная инженерная и научно-техническая работа. Это есть следствие того, что технические науки опираются на физику, механику, химию и т. д., количественные закономерности которых выражаются с помощью понятия функции и других понятий математического анализа. Еще Галилей говорил, что «законы природы записаны на языке математики».

Ярким подтверждением того, что и математическая наука рождается из объективной реальности, что и ее законы, соотношения правильно отражают в особой, присущей ей абстрактной форме действительные соотношения материального мира, служит возможность научного предвидения с помощью математики, т. е. правильность выводов, получаемых математическим путем, согласие «предсказанного» с реальностью, с тем, что фактически осуществляется в дальнейшем.

В истории науки известно много ярких примеров предвидения. Мы кратко коснемся здесь только некоторых примеров; они очень выразительны по той роли, которую играет в них математика.

Как известно, основателем современного учения о полете тела более тяжелого, чем воздух, является виднейший механик конца XIX и начала XX вв. московский профессор Н. Е. Жуковский.

Он нашел математическим путем такие формулы и предложения, которые легли в основу теории авиации. В частности,

---

[1]) Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, Госполитиздат, 1952, стр. 37.
[2]) Там же.

Н. Е. Жуковский теоретически предсказал возможность «фигур высшего пилотажа». Первая фигура — «мертвая петля» — в скором времени была осуществлена капитаном русской армии П. Н. Нестеровым. Итак, «мертвая петля», прежде чем она появилась «физически», была открыта «математически»!

Французский ученый И. Леверье занимался вопросами движения планет солнечной системы. При этом он исходил из законов классической механики, выраженных в виде известных функциональных зависимостей. Леверье заметил, что некоторые его выводы расходятся с имеющимися наблюдениями; он нашел также, что эти расхождения могут быть устранены, если допустить существование еще одной планеты с определенными массой и траекторией. На основе его предположений новая планета, названная затем Нептуном, действительно была вскоре обнаружена в том месте и в тот момент, которые им были заранее указаны. Так за столом, на листе бумаги, при помощи вычислений был для науки открыт новый мир! Нас теперь не удивляет точнейшее знание будущих астрономических событий. Разумеется, оно возможно именно потому, что употребляемые математические методы верно отражают объективные закономерности.

Резко повысилась роль математики в последнее время, чему во многом способствовало и расширение ее возможностей, связанное с созданием быстродействующих электронно-вычислительных машин. Осуществление космических полетов, посылка ракет к другим планетам и телевизионная связь с ними — все это потребовало необычайно сложных и точных математических расчетов. Математические методы широко вторгаются в науки, еще недавно весьма далекие от математики: в экономику, биологию, медицину. Можно смело сказать, что ни один научно-технический замысел современности не обходится без участия математики.

ГЛАВА I

ФУНКЦИЯ

§ 1. Действительные числа

4. Действительные числа и числовая ось. Интервал. Мы начнем изучение анализа с рассмотрения *действительных чисел*. Напомним некоторые основные определения.

Целые положительные числа 1, 2, 3, ... называются *натуральными*.

Присоединяя к натуральным числам все дробные числа и нуль, а также рассматривая не только положительные числа, но и отрицательные, мы получаем множество[1]) *рациональных чисел*. Любое рациональное число имеет вид $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа.

Каждое рациональное число может быть записано в виде конечной десятичной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Иррациональными числами называются бесконечные непериодические десятичные дроби. Можно доказать, например, что $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\lg 3$, π, $\sin 20°$ и т. д. являются числами иррациональными. Мы будем считать, что действия над иррациональными числами читателю известны.

Все рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел.

Перейдем теперь к геометрическому изображению чисел. Возьмем прямую линию и на ней некоторую точку O, которую примем за начало отсчета длин. Выберем масштаб, т. е. отрезок, принимаемый за единицу длины, и установим направление отсчета.

Определение. **Прямая линия, на которой указаны начало отсчета длин, масштаб и направление отсчета, называется *числовой осью*.**

---

[1]) Под термином *множество* здесь и в дальнейшем понимается некоторая совокупность (конечная или бесконечная) чисел или точек.

Представим себе числовую ось в виде горизонтальной прямой; положительное направление на ней установим слева направо. Будем откладывать от начала отсчета все отрезки, соизмеримые с единицей масштаба; длины таких отрезков, как известно из геометрии, выражаются рациональными числами. В соответствии с выбранным направлением отсчета отрезки, откладываемые вправо от точки O, мы будем считать соответствующими положительным числам, а отрезки, откладываемые влево от нее, — соответствующими отрицательным числам.

Пусть конец отрезка, соответствующего в выбранном масштабе рациональному числу a, попал в точку M прямой. Тогда мы скажем, что точка M изображает число a и что число a есть *координата* точки M. Очевидно, точка O изображает число нуль.

Точки числовой оси, изображающие рациональные числа, называются *рациональными точками.*

Если мы будем изображать рациональные числа вида $\pm\frac{1}{N}$, $\pm\frac{2}{N}$, ... и все больше и больше увеличивать знаменатель N, то точки, соответствующие этим рациональным числам, будут все гуще и гуще покрывать числовую ось.

Более того, покажем, что, как бы близко друг к другу ни лежали две рациональные точки A и B, между ними обязательно лежит еще бесконечно много рациональных точек. Пусть точки A и B имеют рациональные координаты a и b; тогда середина отрезка между ними, назовем ее точкой C, имеет координату $\frac{a+b}{2}$, которая тоже является числом рациональным. В силу этого же соображения точка C_1 — середина отрезка AC — и точка C_2 — середина отрезка CB — также будут рациональными точками. Но так как этот процесс можно продолжать неограниченно, то мы и получим бесконечно много рациональных точек, которые все лежат на отрезке AB.

И все же рациональные точки не исчерпывают всех точек числовой оси; на ней имеются и другие точки. В самом деле, так как диагональ квадрата, стороны которого равны единице, несоизмерима с единицей масштаба, то ее длина не выражается никаким рациональным числом. Поэтому, если отложить от точки O отрезок, равный диагонали такого квадрата, то конец этого отрезка попадет в точку, не являющуюся рациональной. Вообще, концы всех отрезков, выходящих из начала отсчета и несоизмеримых с единицей масштаба (длины их выражаются иррациональными числами), попадут в нерациональные точки; такие точки будем называть *иррациональными.*

Все рациональные и иррациональные точки уже полностью исчерпывают прямую. Важно подчеркнуть, что между множеством всех точек числовой оси и множеством всех действительных чисел имеется взаимно однозначное соответствие. Это значит, что *каждая точка числовой оси изображает какое-нибудь одно число* (рациональное или иррациональное), *и обратно, каждое число* (рациональное или иррациональное) *является координатой какой-нибудь одной точки числовой оси.*

На нашей числовой оси очень наглядно представляются различные соотношения между числами. Так, меньшему числу соответствует точка, лежащая левее точки, изображающей большее число; числу, заключенному между двумя данными числами, соответствует точка, лежащая между точками, изображающими данные числа.

В силу описанного соответствия между числами и точками числовой оси иногда будет удобно не делать различия между ними и под точкой понимать число или под числом — точку.

Определение. ***Интервалом*** **называется множество всех чисел (точек), заключенных между двумя какими-нибудь числами (точками), называемыми концами интервала.**

Интервал с концами $x=a$ и $x=b$, где $a<b$, можно задать неравенствами $a<x<b$; он обозначается еще так: (a, b). Если вместе с множеством точек интервала рассматривать и его концы, то получится *замкнутый интервал*. Замкнутый интервал с концами $x=a$ и $x=b$ задается неравенствами $a\leqslant x\leqslant b$; его обозначают так: $[a, b]$. В противоположность замкнутому интервалу интервал (a, b) называется *открытым* или *незамкнутым*[1]). Если один конец присоединяется к интервалу, а другой — нет, то получается интервал, открытый с одной стороны, или *полуоткрытый* интервал. Полуоткрытый интервал задается неравенствами $a\leqslant x<b$, если присоединен конец $x=a$, и $a<x\leqslant b$, если присоединен конец $x=b$; записывают их соответственно так: $[a, b)$, $(a, b]$. Таким образом, присоединение конца к интервалу всегда обозначается квадратной скобкой, а исключение — круглой.

В тех случаях, где нет нужды различать, причисляются ли концы к рассматриваемому интервалу или нет, мы будем говорить просто об интервале.

Кроме конечных интервалов, часто встречаются бесконечные интервалы, т. е. либо множество всех чисел меньших, чем некоторое число c, либо множество всех чисел бо́льших, чем число c, либо, наконец, множество всех действительных чисел. Эти беско-

---

[1]) В математической литературе замкнутый интервал часто называют отрезком, сохраняя термин «интервал» только для открытого интервала.

нечные интервалы задаются соответственно условными неравенствами $-\infty < x < c$, $c < x < +\infty$ и $-\infty < x < +\infty$. Записывают: $(-\infty,\ c)$, $(c,\ +\infty)$ и $(-\infty,\ +\infty)$.

Если в первых двух случаях точку c причисляют к интервалу, то это записывают в виде $(-\infty,\ c]$ или $[c,\ +\infty)$.

Определение. **Интервал длины $2l$ с центром в точке a называется l-окрестностью точки a.**

Координаты x точек, принадлежащих l-окрестности точки a (рис. 1), удовлетворяют, очевидно, неравенствам

$$a-l < x < a+l.$$

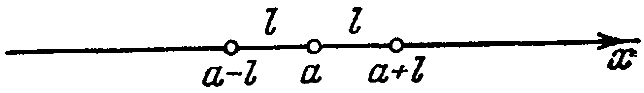

Рис. 1.

Понятие окрестности точки часто используется в дальнейшем. Принадлежность точки x к данному интервалу будем обозначать при помощи *символа включения* $\in$. Так, запись $x \in [a,\ b]$ означает, что точка x является одной из точек замкнутого интервала $[a,\ b]$, т. е. что $a \leqslant x \leqslant b$. Аналогично символическая запись $x \in (a, b)$ означает, что $a < x < b$, и т. д.

5. Абсолютная величина.

Определение. ***Абсолютной величиной* (или *модулем*) $|A|$ числа A называется число, равное самому A, если A положительно или равно нулю, и равное $-A$, если A отрицательно:**

$$|A| = \begin{cases} A, & \text{если } A \geqslant 0, \\ -A, & \text{если } A < 0. \end{cases}$$

Значит, $|A|$ есть всегда неотрицательное число (положительное или нуль). На числовой оси $|A|$ есть длина отрезка от начала отсчета до точки, изображающей число A.

Соотношение

$$|A| \leqslant B, \text{ где } B > 0, \tag{*}$$

равносильно двум таким соотношениям:

$$-B \leqslant A \leqslant B. \tag{**}$$

В самом деле, соотношение (*) означает, что точка A находится от точки нуль на расстоянии, не большем B; а это возможно только тогда, когда эта точка лежит в интервале $[-B,\ B]$, т. е. принадлежит B-окрестности точки нуль, и значит, тогда имеют место соотношения (**); обратное также очевидно.

Установим следующие предложения об абсолютных величинах:

1) *Абсолютная величина суммы не больше суммы абсолютных величин слагаемых*, т. е.

$$|A+B+C+\ldots+D|\leqslant|A|+|B|+|C|+\ldots+|D|. \qquad (***)$$

Возьмем сначала случай двух слагаемых. Непосредственной проверкой легко убедиться, что если A и B имеют одинаковые знаки, то левая и правая части соотношения (***) равны между собой, а если разные знаки, то левая часть меньше правой. Переходя последовательно от двух к трем, от трех к четырем и т. д. слагаемым, легко доказать наше предложение в общем виде. Равенство в соотношении (***) имеет место только в случае, когда все слагаемые имеют один и тот же знак.

2) *Абсолютная величина разности не меньше разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого:*

$$|A-B|\geqslant|A|-|B|.$$

Для доказательства положим $A-B=C$; отсюда $A=B+C$ и по доказанному

$$|A|=|B+C|\leqslant|B|+|C|=|B|+|A-B|,$$

т. е.

$$|A-B|\geqslant|A|-|B|.$$

Что касается произведения и частного, то в силу определения этих действий имеем:

3) *абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей:*

$$|A\cdot B\cdot C\ldots D|=|A|\cdot|B|\cdot|C|\ldots|D|;$$

4) *абсолютная величина частного равна частному от деления абсолютных величин делимого и делителя:*

$$\left|\frac{A}{B}\right|=\frac{|A|}{|B|}.$$

6. О приближенных вычислениях. В технических науках и в практике почти всегда имеют дело с числами, выражающими приближенные значения величин.

Известно, что произведенные подряд измерения одной и той же величины приводят к числам, пусть даже еле заметно, но все же отличающимся друг от друга. Когда говорят, что мера конкретной величины равна данному числу, то просто имеют в виду, что в результате соответствующих измерений получаются числа, настолько мало отличающиеся от данного, что этой разницей можно пренебречь.

Применения математического анализа в естествознании и инженерном деле всегда сопровождаются и заканчиваются вычислениями. Поэтому совершенно необходимо научиться хорошо вычислять! Какой же смысл придается понятию «хорошо вычислять»?

Первый признак хорошо выполненных вычислений состоит в достаточной их точности. Вторым признаком следует считать в известном смысле противоположное качество: вычисления должны производиться в границах целесообразной точности, без избыточной точности. Третьим признаком является быстрота производства действий, экономия в труде и во времени.

Следует всегда производить вычисления в соответствии с этими требованиями.

Дадим сейчас определения основных понятий, относящихся к приближенным вычислениям.

Будем под A понимать точное значение некоторой измеряемой величины, или просто некоторое число.

Определение. **Число a называется *приближенным* значением A *с ошибкой* α, если**

$$A-a=\alpha.$$

Для обозначения приближенного равенства служит символ $\approx$:

$$A\approx a.$$

Число a может быть меньше A, $a<A$, и больше A, $a>A$. В первом случае $\alpha>0$ и a есть приближенное значение A с *недостатком*, во втором случае $\alpha<0$ и a есть приближенное значение A с *избытком*. Чаще всего безразлично, какой именно из этих случаев имеет место.

Ошибка[1]) α, как и точное значение A, обычно неизвестна, но бывает известна та граница ε, за которую заведомо не выходит абсолютная величина ошибки: $|\alpha|$ не превосходит ε, т. е. $|\alpha|\leqslant\varepsilon$.

Определение. **Абсолютная величина ошибки $|\alpha|$ называется *абсолютной ошибкой*. Если абсолютная ошибка $|\alpha|$ приближенного значения a не превосходит положительного числа ε, то число ε называется *предельной абсолютной ошибкой* приближенного значения:**

$$|A-a|\leqslant\varepsilon,$$

или

$$-\varepsilon\leqslant A-a\leqslant\varepsilon.$$

---

[1]) Вместо слова «ошибка» иногда употребляют слово «погрешность».

Число ε определяется не однозначно: всякое число, большее, чем уже известная абсолютная ошибка, может быть также принято в качестве предельной абсолютной ошибки, т. е. числа ε.

Так, например, 3,24 есть приближенное значение числа 3,2447 с абсолютной ошибкой 0,0047 или числа 3,2447... с предельной абсолютной ошибкой 0,005, ибо $0{,}0047\ldots < 0{,}005$. Впрочем, и тогда, когда ошибка известна, часто вместо нее удобнее указать предельную ошибку; так, в данном примере вместо ошибки 0,0047 удобнее указать предельную ошибку 0,005.

Пусть производится какое-либо измерение с помощью простейших измерительных приборов. Тогда легко указать предельную абсолютную ошибку. Если, например, мы измеряем длину при помощи линейки, на которой деления нанесены через один сантиметр (говорят: цена деления равна одному сантиметру), то ясно, что ошибка не превысит 0,5 *см*. Разумеется, речь идет только об ошибке, получающейся при снятии показания с линейки. Вообще считают, что абсолютная ошибка при снятии показания с измерительного прибора не превосходит половины цены деления шкалы прибора.

Обычно для краткости слово «предельная» опускают и под абсолютной ошибкой понимают именно предельную абсолютную ошибку ε.

Приближенное равенство $A \approx a$ тем точнее, чем меньше ε.

Важно заметить, что сама по себе абсолютная ошибка еще ничего не говорит о точности приближения; чтобы судить о точности, нужно обязательно знать, каково само значение A (хотя бы приближенно). Так, например, одна и та же абсолютная ошибка в 0,5 *м* свидетельствует о совершенно неудовлетворительной точности при измерении высоты комнаты, о вполне удовлетворительной точности при измерении границ земельного участка и об исключительной точности при определении, скажем, высоты Эльбруса. Принято оценивать точность приближения по той доле, которую составляет ошибка от измеряемой величины, т. е. по *относительной ошибке*, которая определяется как абсолютная величина отношения ошибки α к точному значению A.

Так как фактически нам бывает известна только предельная абсолютная ошибка ε и приближенное значение a величины A, то вместо относительной ошибки берут предельную относительную ошибку.

Определение. ***Предельной относительной ошибкой*** δ **называется отношение предельной абсолютной ошибки к абсолютной величине приближенного значения** a**:**

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Как и раньше, слово «предельная» обычно опускают, понимая под относительной ошибкой именно предельную. Чем меньше относительная ошибка δ, тем приближение лучше, точнее.

Обычно относительные ошибки даются в процентах (т. е. в частях от 100); они называются тогда процентными ошибками. Чтобы получить процентную ошибку, нужно относительную ошибку умножить на 100.

Говорят: a есть приближенное значение A с относительной ошибкой δ; или, что то же, приближенное равенство $A \approx a$ имеет относительную ошибку δ.

В технических расчетах точность в пределах одного процента обычно бывает достаточной, и лишь в особых случаях она доводится до десятых долей процента.

Вычисления, встречающиеся в математическом анализе, обычно стараются привести к выполнению лишь арифметических действий. Мы будем считать, что читатель знаком с простейшими правилами и приемами приближенных вычислений, относящимися к арифметическим действиям.

§ 2. Первоначальные сведения о функции

7. Определение функции. Возьмем некоторое множество значений величины x, т. е. некоторое множество точек на числовой оси Ox, и обозначим его через D. Если каждому значению x из множества D по какому-нибудь правилу поставлено в соответствие одно определенное значение другой величины y, то говорят, что эта величина y есть *функция* величины x или что величины x и y связаны между собой *функциональной зависимостью*. При этом величина x называется *аргументом* функции y, а множество D — *областью определения* функции y. Значения аргумента x из области D определения функции y мы можем выбирать по нашему усмотрению произвольно; поэтому величина x называется *независимой переменной*. Значение же функции y, когда значение независимой переменной x уже назначено, мы выбрать произвольно не можем; это значение будет строго определенным, именно тем, которое соответствует выбранному значению независимой переменной. Значения функции зависят от значений, принимаемых независимой переменной, и обычно изменяются при ее изменении. Поэтому функцию называют еще *зависимой переменной*.

Определение. **Величина y называется функцией переменной величины x в области определения D, если каждому значению x из этой области соответствует одно определенное значение величины y.**

Областью определения функции может быть любое множество точек числовой оси, но чаще всего в математическом анализе и в его применениях рассматривают лишь функции, областями определения которых служат области таких двух типов:

1) множество целых неотрицательных точек числовой оси,т. е. точек $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, ... (или некоторая часть этого множества);

2) один или несколько интервалов (конечных или бесконечных) числовой оси.

Говорят, что в первом случае мы имеем *функцию целочисленного аргумента,* а во втором случае — *функцию непрерывного аргумента.* В первом случае аргумент может пробегать ряд чисел: $x=0$, 1, 2, 3, ...; во втором случае аргумент пробегает один или несколько интервалов числовой оси.

Множество значений, принимаемых функцией y, называется *областью значений функции.*

Приведем простейшие примеры функций.

1. Температура τ воздуха в данном месте, измеряемая через каждый час в течение суток, является функцией целочисленного аргумента — времени t, принимающего значения $t=0$, 1, 2, 3, ..., 23. Действительно, каждому из этих значений величины t соответствует вполне определенное значение величины τ, и, значит, она, в согласии с данным определением, является функцией величины t. Здесь область определения функции состоит из 24 «целых» точек. Если измерения производить не через каждый час, а через каждую минуту, то температура будет функцией целочисленного аргумента, принимающего уже $24 \cdot 60 = 1440$ последовательных целых значений.

2. Периметр P правильного многоугольника, вписанного в данную окружность, есть функция целочисленного аргумента — числа n сторон этого многоугольника. Здесь область определения функции является множеством всех целых положительных чисел, начиная с числа $n=3$. Другим примером функции этого же аргумента может служить площадь S указанного правильного многоугольника.

3. Площадь S круга есть функция его радиуса r, который может принимать любое положительное значение. Каждому значению r из интервала $(0, \infty)$ соответствует определенное значение S, определяемое по формуле

$$S=\pi r^2.$$

Областью определения функции служит множество всех положительных чисел, т. е. положительная полуось $0<r<\infty$.

4. Расстояние s, проходимое телом, свободно падающим в пустоте, является функцией времени t падения тела. Каждому значению t соответствует определенное значение s, находимое по

формуле (g — ускорение силы тяжести)

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Областью определения этой функции является интервал $[0, T]$, где T — время падения тела.

Обратим внимание на то, что зависимость расстояния от времени при свободном падении тела в пустоте имеет тот же характер, что и зависимость площади круга от его радиуса, а именно: в обоих случаях функция пропорциональна квадрату независимой переменной. С математической точки зрения только это и важно: в самой математике интересуются тем, как зависит функция от аргумента, и вовсе не интересуются тем, какое конкретное физическое явление описывается данной функциональной зависимостью. В математическом анализе указанные в примерах 3 и 4 функции суть просто частные случаи так называемой квадратичной функции (см. п. **16**).

В определении понятия функции не требуется, чтобы при изменении независимой переменной функция обязательно изменялась. Так, в примере 1 может случиться, что температура τ воздуха в течение некоторого времени t остается постоянной; это не мешает нам считать по-прежнему, что температура является функцией времени. Рассмотрим еще один аналогичный пример.

Функция

$$y = a\cos^2 x + b\sin^2 x,$$

где a и b — постоянные, принимает различные значения в зависимости от величины x, если $a \neq b$. Если же $a = b$, то при всех значениях x функция y является постоянной величиной[1]), равной a.

Не выделяя этого частного случая, мы говорим, что выражение $a\cos^2 x + b\sin^2 x$ при любых значениях постоянных a и b является функцией от x.

8. Способы задания функций. Задать функцию — это значит указать область ее определения и правило, при помощи которого по данному значению независимой переменной находятся соответствующие ему значения функции. Важнейшими способами задания функций в математике являются задания таблицей, формулой и графиком.

[1]) В математике и других дисциплинах постоянную иногда называют константой (const).

I. Табличное задание. При табличном задании просто выписывается ряд значений независимой переменной и соответствующих им значений функции. Этот способ часто употребляется. Хорошо известны таблицы логарифмов, таблицы тригонометрических функций и их логарифмов и др.

Табличный способ задания функций особенно распространен в естествознании и технике. Числовые результаты последовательных наблюдений какого-нибудь процесса обычно группируются в виде таблицы. Например, при изучении зависимости электрического сопротивления r некоторого медного стержня от температуры t была получена следующая таблица:

t	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
r	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

Сопротивление является функцией температуры, и приведенная таблица дает значения этой функции для указанных значений независимой переменной.

Преимуществом табличного задания функций является то, что для каждого значения независимой переменной, помещенного в таблице, можно сразу, без всяких измерений и вычислений, найти соответствующее значение функции.

Недостаток же табличного задания заключается в том, что при нем обычно невозможно задать функцию полностью: найдутся такие значения независимой переменной, которые не помещены в таблице. Например, данная выше таблица не позволяет ответить на вопрос о том, каковы сопротивления стержня при температурах, меньших 19,1° или больших 50,0°. Точно так же по таблице нельзя узнать значения сопротивления, например, при температурах 24,2° и 37,43°, прямо не указанных в числе значений температуры[1]).

Другим недостатком табличного задания, особенно ярко проявляющимся при большом объеме таблицы, является отсутствие наглядности. По таблице весьма трудно выявить характер изменения функции при изменении независимой переменной.

II. Аналитическое задание (задание формулой). Аналитическое задание функции состоит в том, что дается формула, с помощью которой по заданным значениям независимой переменной можно получать соответствующие им значения

[1]) Существуют специальные методы, позволяющие в известных случаях приближенно находить значения функции, соответствующие значениям независимой переменной, не помещенным в таблице.

функции. Например, формулы

$$y = x^2 + 2\lg x \quad \text{или} \quad y = \frac{2+\cos x}{1+\sin x}$$

определяют y как функцию x.

При аналитическом задании функции под областью ее определения (если только нет каких-нибудь дополнительных условий) понимают множество значений x, при которых формула, определяющая функцию, имеет смысл. Это значит, что в результате применения формулы мы получаем для y определенные действительные значения.

Аналитическое задание функции — основной способ задания в математическом анализе.

Преимущества аналитического способа заключаются:

а) в сжатости, компактности задания;

б) в возможности вычислить значение функции для любого значения независимой переменной из области определения (значения многих функций, например $y = \sin x$, $y = \lg x$, мы пока умеем находить только при помощи таблиц);

в) наконец, и это самое главное, в возможности применить к данной функции аппарат математического анализа, ибо он наилучшим образом приспособлен как раз к аналитической форме задания функций.

Если, например, мы хотим исследовать методами математического анализа функциональную зависимость между температурой и электрическим сопротивлением медного стержня, то нам нужна именно формула, связывающая сопротивление и температуру, а не отдельные (пусть даже известные в большом числе) соответственные значения функции и независимой переменной.

Неудобствами аналитического задания функции являются:

а) недостаточная наглядность;

б) необходимость производства вычислений, подчас очень громоздких.

III. Графическое задание. Прежде всего приведем следующее определение.

Определение. ***Графиком*** **функции** (в системе декартовых прямоугольных координат) **называется множество всех точек, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты — соответствующими значениями функции.**

Иными словами, если взять абсциссу, равную некоторому значению независимой переменной, то ордината соответствующей точки графика должна быть равна значению функции, соответствующему данному значению независимой переменной. При этом масштабы на обеих осях координат могут быть как одинаковыми, так и различными.

Графиком функции обычно служит некоторая кривая (в частности, и прямая) **линия**[1]). Так, графиком квадратичной функции $y=x^2$ является парабола, ось которой совпадает с положительной полуосью ординат; графиком функции $y=\frac{1}{x}$ является равнобочная гипербола, для которой оси координат служат асимптотами, и т. д. Графиком постоянной величины служит, очевидно, прямая, параллельная оси абсцисс.

Обратно, если линия на координатной плоскости Oxy такова, что любая прямая, параллельная оси ординат, имеет с ней не более одной общей точки, то эта линия изображает некоторую функцию, именно ту, значения которой равны ординатам точек линии при значениях независимой переменной, равных абсциссам.

Таким образом, понятия **линии** и **функции** тесно связаны. Заданием функции порождается линия — ее график; заданием линии порождается функция — та, для которой эта линия служит графиком. Графическое задание функции состоит в задании графика этой функции.

В физике и технике функции нередко задаются графически, причем иногда график является единственным доступным средством задания функции. Чаще всего это бывает при употреблении самопишущих приборов, автоматически записывающих изменение одной величины в зависимости от изменения другой (например, времени). В результате на ленте прибора получается линия, графически задающая регистрируемую прибором функцию. К таким приборам относятся, например, барограф, вычерчивающий барограмму — график атмосферного давления, и термограф, вычерчивающий термограмму — график температуры как функции времени.

К графику функции, как и к таблице, не может быть непосредственно применен аппарат математического анализа, но график функции наряду с этим недостатком обладает весьма важным преимуществом — **наглядностью**, что делает его чрезвычайно полезным при изучении функции.

9. Символика. Для обозначения того, что величина y есть некоторая функция переменной величины x, употребляется символическая запись

$$y=f(x).$$

Латинская буква f — начальная буква слова functio (функция). Эту запись читают так: «y **есть функция от** x» или короче:

---

[1]) Графиком функции **целочисленного** аргумента служит множество **отдельных** точек на плоскости с целыми абсциссами.

«y есть эф от x». Здесь буква f обозначает закон соответствия между независимой переменной и функцией. Кроме буквы f, в качестве символа функциональной зависимости используют и другие буквы: F, φ, Φ и т. д. Иногда употребляют и такую форму записи: $y=y(x)$. В скобках после символа функциональной зависимости ставится обозначение независимой переменной.

Для хорошо известных и наиболее часто встречающихся функций употребляют специальные символы: $\lg x$, $\sin x$, $\arccos x$ и т. д.

Символ f при аналитическом задании функций указывает совокупность математических действий, которые нужно произвести над x, чтобы получить y, а также порядок этих действий. Например, символ f в равенстве

$$f(x)=\sqrt{x^2+\sin x}$$

обозначает, что по значению x находятся его квадрат и его синус, результаты складываются и из суммы извлекается квадратный корень.

При одновременном рассмотрении двух функций употребляется один и тот же символ, если функциональные зависимости одинаковы, и разные символы, если эти функциональные зависимости разные. Так, площадь круга S зависит от радиуса r так же, как поверхность шара Q — от его диаметра d; поэтому мы можем записать:

$$S=f(r) \quad \text{и} \quad Q=f(d),$$

употребляя в обоих случаях один и тот же символ функции. Но, желая записать, что и длина окружности $l=2\pi r$, и площадь круга $S=\pi r^2$ являются функциями его радиуса r, мы не можем употребить один и тот же символ, а должны взять два различных символа, например:

$$l=f(r) \quad \text{и} \quad S=\varphi(r).$$

Частное значение функции можно найти, если подставить в выражение для функции вместо независимой переменной соответствующее ее значение. Пусть частное значение функции $y=f(x)$ при $x=a$ равно b. Это записывают так:

$$b=f(a).$$

Последнее равенство уже нельзя читать, как прежде: «b есть функция от a», так как здесь и a и b являются постоянными величинами. Его следовало бы читать так: «b равно значению функции f при значении независимой переменной, равном a», но обычно читают коротко: «b равно эф от a», помня, какой смысл вкладывается в эти слова. Часто употребляется и такая запись: $y_{x=a}=b$.

Точка M графика функции $y=f(x)$, соответствующая абсциссе $x=a$, имеет ординату $f(a)$, что записывается так: $M[a, f(a)]$ (рис. 2).

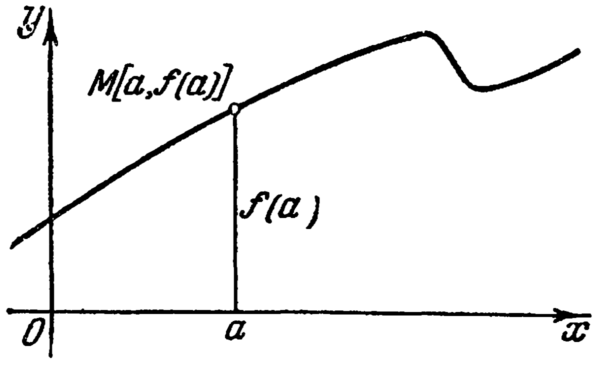

Рис. 2.

10. Основные элементарные функции. Сложная функция.

Определение. ***Основными элементарными функциями*** **называются следующие функции:**

1) *степенная функция:* $y=x^n$, где n — действительное число;

2) *показательная функция:* $y=a^x$, где a — положительное число и $a \neq 1$;

3) *логарифмическая функция:* $y=\log_a x$, где основание логарифмов a — положительное число и $a \neq 1$;

4) *тригонометрические функции:* $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, а также реже встречаемые: $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$, $y=\operatorname{ctg} x$;

5) *обратные тригонометрические функции:* $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, а также $y=\operatorname{arcsec} x$, $y=\operatorname{arccosec} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Эти функции известны из курса средней школы; мы рассмотрим их вкратце в § 3.

Из основных элементарных функций можно строить другие функции при помощи арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и новой операции взятия функции от функции, которую мы сейчас рассмотрим.

Пусть на некотором множестве D значений аргумента x задана функция $u=\varphi(x)$ и G—область значений функции u. Пусть, далее, на множестве G задана функция $y=f(u)$. Тогда каждому значению x из множества D соответствует одно определенное значение u из множества G, которому в свою очередь соответствует одно определенное значение y. Таким образом, в конечном итоге каждому значению x из множества D соответствует одно определенное значение y, т. е. y есть некоторая функция от x; обозначим ее через $y=F(x)$. Выражение для функции $F(x)$ при помощи функций f и φ записывают так:

$$y=F(x)=f[\varphi(x)].$$

Говорят, что $F(x)$ как функция x является *сложной функцией*, составленной из функций f и φ, или функцией f от функции φ[1]).Функция $u=\varphi(x)$ называется при этом *промежуточной переменной.*

Таким образом, аргумент функции может быть независимой переменной, а может быть промежуточной переменной, т. е. сам может являться функцией независимой переменной. В последнем случае и получается сложная функция. Например, функция $y=\sin^2 x$ есть сложная функция x, а именно y есть квадратичная функция аргумента, который есть в свою очередь тригонометрическая функция — синус — независимой переменной x; обозначая промежуточную переменную через u, можем записать: $y=u^2$, $u=\sin x$.

Задание сложной функции называют еще цепным заданием. Цепь функций, с помощью которых строится сложная функция, может состоять не только из двух, но из какого угодно числа звеньев. Чем их больше, тем «сложнее» функция. Часто оказывается полезным умение «расщеплять» заданную сложную функцию на отдельные звенья.

11. Элементарные функции.

I. Функции, построенные из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции, называются *элементарными функциями.*

Например, элементарными будут функции

$$y=\frac{a^2}{a+2b\operatorname{tg}^2 x}+3c\sin^2 x, \qquad y=\frac{2+\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt{x}},$$
$$y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \qquad y=\frac{10^x-1}{x^2},$$
$$y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \text{ и т. п.}$$

Важное значение элементарных функций видно из того, что в математическом анализе, применяемом в основных задачах физики и техники, употребляются чаще всего элементарные функции.

По формуле, определяющей элементарную функцию, важно уметь находить область определения этой функции. Рассмотрим с этой целью несколько примеров.

1. Областью определения функции $y=x^2+2x-5$ служит вся числовая ось.

2. Областью определения функции $y=\frac{1}{x}$ является вся числовая ось, кроме точки $x=0$, в которой формула теряет смысл, ибо

[1]) Термин «сложная функция» указывает только на характерную особенность в аналитической конструкции функции и отнюдь не означает какой-то особой ее сложности в обычном понимании этого слова.

делить на нуль нельзя; таким образом, область определения состоит из двух открытых бесконечных интервалов:

$$-\infty < x < 0 \quad \text{и} \quad 0 < x < +\infty.$$

3. Областью определения функции $y=\sqrt{1-x^2}$ является замкнутый интервал $[-1, +1]$, так как в каждой точке этого интервала, т. е. при каждом x, удовлетворяющем неравенствам $-1 \leqslant x \leqslant 1$, выражение $\sqrt{1-x^2}$ имеет действительное значение, а в точке, лежащей вне интервала $[-1, +1]$, т. е. при $|x|>1$, оно не имеет действительного значения.

4. Областью определения функции $y=\sqrt{x^2-1}$ служат два бесконечных интервала $-\infty < x \leqslant -1$ и $+1 \leqslant x < +\infty$ (в другой записи: $|x| \geqslant 1$), т. е. вся числовая ось, за исключением интервала $(-1, +1)$.

5. Областью определения функции $y=\lg x$ является открытый бесконечный интервал $0 < x < +\infty$.

6. Областью определения функции $y=\frac{2x^2-\lg(x+5)}{\sqrt{8-x^3}}$ служит открытый интервал $(-5, 2)$, так как выражение $\lg(x+5)$ определено при $x>-5$, а выражение $\sqrt{8-x^3}$ при $x \leqslant 2$; точку $x=2$ нужно исключить, так как в этой точке знаменатель дроби обращается в нуль.

Конкретные задачи часто приводят к функциям, определенным в более широкой области, чем допускает существо рассматриваемой задачи. Например, площадь S круга выражается через его радиус r формулой

$$S=\pi r^2.$$

Хотя эта формула имеет смысл при всех значениях r, ясно, что придавать r отрицательные и нулевое значения лишено смысла; областью определения данной функции служит только *положительная полуось* аргумента.

Основной закон теории упругости — *закон Гука*[1] — утверждает, что удлинение стержня прямо пропорционально величине растягивающей силы, т. е. $y=cx$, где y — удлинение, x — растягивающая сила, c — постоянный для данного стержня коэффициент пропорциональности. Эта функция, если исходить только из формулы, определена при всех значениях x, однако хорошо известно, что закон Гука справедлив лишь при небольших удлинениях, что и ограничивает возможность применения приведенной формулы.

Иногда приходится иметь дело с функциями, которые на *разных* интервалах имеют *различные* аналитические выражения. Зададим, например, функцию $y=f(x)$ так:

$$\begin{aligned} f(x)&=0, && \text{если } x<0,\\ f(x)&=2\sqrt{x}, && \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1,\\ f(x)&=1+x, && \text{если } x>1. \end{aligned}$$

[1] Р. Гук (1635—1703) — выдающийся английский физик.

Это — функция, определенная на всей числовой оси; график ее показан на рис. 3.

С примерами неэлементарных функций мы встретимся позднее.

II. Элементарные функции принято разделять на два класса: алгебраические функции и трансцендентные функции.

Определение. **Функция называется *алгебраической*, если ее значения можно получить, производя над независимой переменной конечное число алгебраических действий: сложений, вычитаний, умножений, делений и возведений в степень с рациональным показателем.**

Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*.

Например, алгебраическими являются следующие функции:

$$y = 3x^2 - 5x + 2,$$

$$y = \frac{2x-3}{-x+1}, \qquad y = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+\sqrt[3]{x+2}}.$$

Примеры трансцендентных функций:

$$y = \sin x, \qquad y = x2^x, \qquad y = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+x}.$$

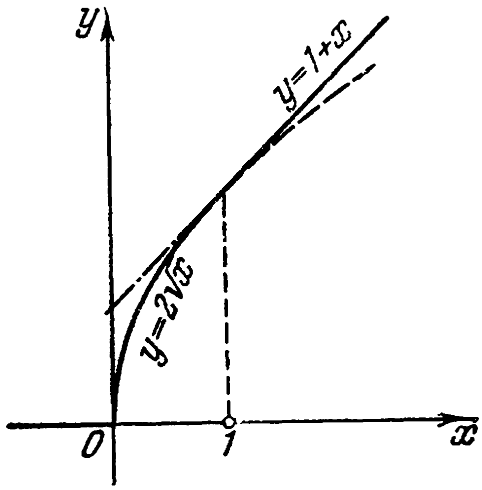

Рис. 3.

Алгебраические функции в свою очередь разделяются на рациональные и иррациональные.

Определение. Алгебраическая функция называется *рациональной*, если среди действий, которые производятся над независимой переменной, отсутствует извлечение корней.

Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной, называется *иррациональной*.

Примеры рациональных функций:

$$y = \frac{\frac{3}{x^2} - 2x + \frac{1}{x} - 5}{x - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - 1}, \qquad y = \frac{x\sqrt{2} - \pi}{\sqrt[3]{2x^2+5}}$$

(подкоренные выражения в последнем примере не содержат независимой переменной).

Функции $y = \sqrt{x+1}$, $y = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+2}$ служат примерами иррациональных функций.

Наиболее простыми рациональными функциями являются *целые* рациональные функции или *многочлены* (при этом одночлен рассматривается как частный случай многочлена). Вот примеры таких функций:

$$y=3x^2-5x+2, \qquad y=\left[\frac{3(x-2)^2+5}{7}-\frac{x}{2}\right]^2$$

(среди производимых действий отсутствует деление на выражение, содержащее независимую переменную).

Всякую рациональную функцию с помощью тождественных преобразований можно представить в виде частного двух многочленов, например:

$$y=\frac{\frac{3}{x^2}-2x+\frac{1}{x}-5}{x-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-1}=\frac{-2x^4-5x^3+x^2+3x}{x^4-x^3+x-2}.$$

Если рациональная функция $R(x)$ записана в виде $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, то она называется *дробно-рациональной*.

12. Неявные функции. Многозначные функции. До сих пор, рассматривая функции, заданные аналитически, мы все время предполагали, что в левой части равенства, определяющего функцию, стоит только y, а в правой — выражение, зависящее от x. Такие функции мы будем называть *явными*. Например, явными будут все функции, приведенные в начале п. **11**.

Но и уравнение, связывающее две переменные, не разрешенное относительно какой-нибудь из них, может определять одну из этих переменных как функцию другой.

Например, в уравнении прямой $2x+3y=6$ ординату y можно рассматривать как функцию абсциссы x, определенную на всей числовой оси. Действительно, каждому значению x соответствует одно значение y, находимое из уравнения прямой. Эта функция задана в неявном виде. Чтобы перейти к ее явному заданию, разрешаем уравнение относительно y и получаем $y=2-\frac{2}{3}x$.

Однако если мы возьмем уравнение окружности

$$x^2+y^2=1,$$

то столкнемся с тем обстоятельством, что каждому значению x, заключенному между -1 и $+1$, соответствует уже не одно, а два значения y (рис. 4). В соответствии с этим мы скажем, что уравнение $x^2+y^2=1$ представляет не одну, а две функции: $y=+\sqrt{1-x^2}$ и $y=-\sqrt{1-x^2}$, каждая из которых определена в интервале $[-1, 1]$; если x лежит вне этого интервала, то уравнение, из которого находится y, не имеет действительных решений.

Можно также сказать, что уравнение $x^2+y^2=1$ определяет y как *многозначную* функцию от x. При этом функции $y=+\sqrt{1-x^2}$ и $y=-\sqrt{1-x^2}$ называют *однозначными ветвями многозначной функции*[1]). С таким расширением толкования функции — именно с введением многозначных функций, рассматриваемых как совокупность их однозначных ветвей, — нам часто придется сталкиваться в дальнейшем.

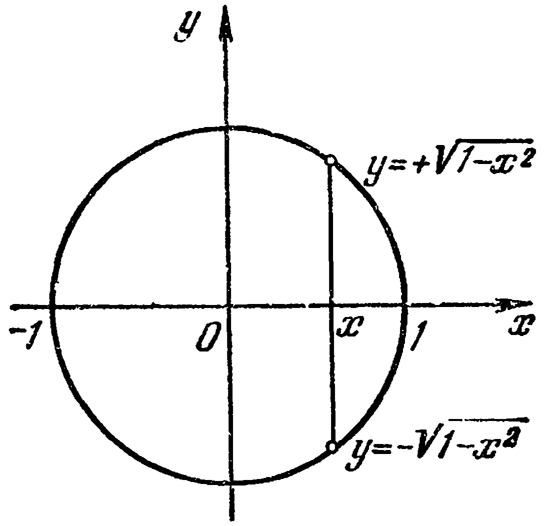

Рис. 4.

Пользуясь этим толкованием, можно сказать, что *неявной функцией y независимой переменной x называется функция, значения которой находятся из уравнения, связывающего x и y и не разрешенного относительно y*. Чтобы перейти к явному заданию функции, нужно разрешить данное уравнение относительно y. Такой переход не всегда легок, а иногда и вовсе невозможен. Так, уравнение

$$y^3-3xy+x^3=0$$

определяет y как функцию x, но выразить эту функцию в явном виде труднее, чем в рассмотренных выше примерах, так как для этого нужно решить уравнение третьей степени. А уравнение

$$y+x2^y=1$$

вообще нельзя решить алгебраически относительно y, т. е. нельзя явно выразить y через x. Разумеется при этом трудно установить область определения функции y и выяснить, какие она имеет однозначные ветви.

Способы численного решения таких уравнений, позволяющие для данного частного значения x находить соответствующие ему значения y, будут рассмотрены в дальнейшем (см. п. **77**).

Не следует думать, что любое уравнение, связывающее x и y, обязательно определит некоторую функцию одной переменной. Например, уравнение $x^2+y^2+1=0$ не может быть удовлетворено

---

[1]) Мы не рассматриваем функций, которые при одних значениях x задаются формулой $y=+\sqrt{1-x^2}$, а при других значениях — формулой $y=-\sqrt{1-x^2}$. График любой такой функции нельзя нарисовать в виде сплошной линии; советуем читателю для примера представить себе график функции: $y=+\sqrt{1-x^2}$ при $x\in[-1, 0]$ и $y=-\sqrt{1-x^2}$ при $x\in[0, 1]$.

никакими действительными значениями x и y (сумма положительных чисел не может быть равна нулю!) и, значит, не определяет никакой функции. К более детальному рассмотрению неявных функций мы еще вернемся впоследствии (в п. **117**).

§ 3. Начало изучения функций. Простейшие функции

13. Основные характеристики поведения функции. Изучить заданную функцию — это значит охарактеризовать ход ее изменения (или, как говорят, ее поведение) при изменении независимой переменной. При этом мы всюду (где специально не оговорено противное) будем предполагать, что *независимая переменная изменяется возрастая, причем, переходя от меньших значений к большим, она проходит через все свои промежуточные значения.*

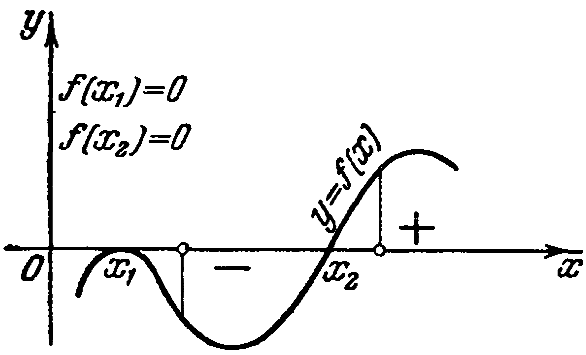

Рис. 5.

Постепенно, по мере расширения средств исследования, мы будем в состоянии давать все более полное описание поведения функции. Теперь же, имея в своем распоряжении лишь средства элементарной математики и аналитической геометрии, мы будем характеризовать поведение функции только по следующим простейшим ее особенностям:

I. *Нули функции и знак функции в данном интервале.* II. *Четность или нечетность.* III. *Периодичность.* IV. *Рост в данном интервале.*

I. Определение. **Значение x, при котором функция обращается в нуль, $f(x)=0$, называется *нулем* функции.**

В интервале положительного знака функции график ее расположен над осью Ox, в интервале отрицательного знака — под осью Ox, в нуле функции график имеет общую точку с осью Ox (рис. 5).

II. Определение. **Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если при изменении знака у любого значения аргумента значение функции не изменяется:**

$$f(-x)=f(x).$$

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если при изменении знака у любого значения аргумента изменяется только знак значения функции, а абсолютная величина этого значения остается без изменения:

$$f(-x)=-f(x).$$

В этом определении предполагается, что функции определены в области, симметричной относительно начала координат.

Примерами четных функций могут служить $y=x^2$, $y=\cos x$, примерами нечетных функций: $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат. (Предоставляем читателю доказать это; см. рис. 6.)

Разумеется, функция может быть ни четной, ни нечетной; например, таковы функции: $y=x+1$, $y=2^x$, $y=2\sin x+3\cos x$ и т. п.

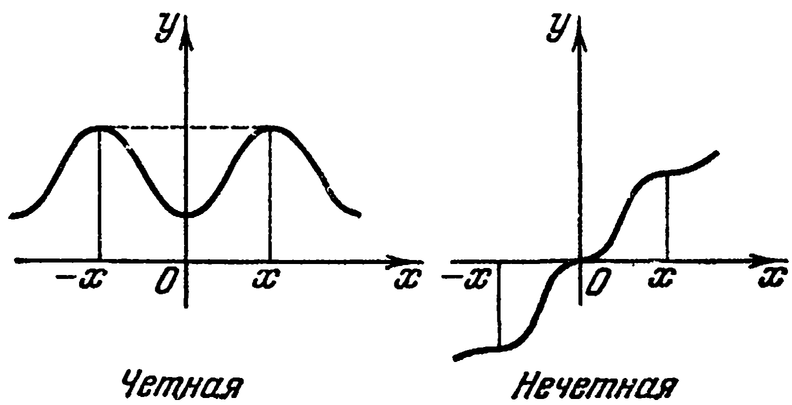

Рис. 6.

III. Определение. **Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число a, что для любого x справедливо равенство**

$$f(x+a)=f(x). \qquad (*)$$

Если функция периодическая, то имеют место также равенства:

$$f(x+2a)=f(x), \quad f(x+3a)=f(x),$$
$$f(x-a)=f(x), \quad f(x-2a)=f(x)$$

и вообще

$$f(x+ka)=f(x)$$

при любом x и для произвольного целого (положительного или отрицательного) числа k.

Наименьшее положительное число a, при котором условие $(*)$ соблюдается, называется *периодом* функции.

Примером периодической функции может служить функция $y=\sin x$; ее период равен 2π. Если периодическая функция не определена в точке x_0, то она не определена и во всех точках x_0+ka, где a — период. Например, функция $y=\operatorname{tg} x$, период которой равен π, не определена в точках $\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Поведение периодической функции достаточно рассмотреть в любом интервале, длина которого равна периоду функции, например в интервале $0 \leqslant x \leqslant a$, где a — период; в остальных точках оси Ox значения функции получаются простым повторением значений, принимаемых ею в этом интервале. График периодической функции получается путем повторения части графика, соответствующего интервалу оси Ox, равному по длине периоду функции (рис. 7).

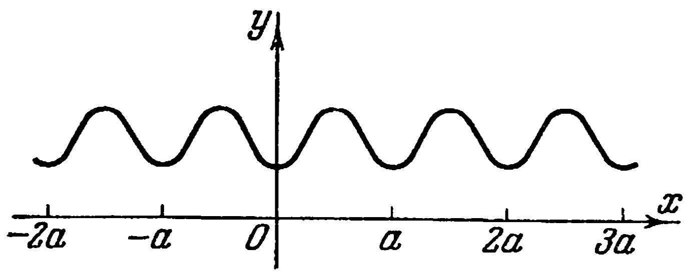

Рис. 7.

IV. Весьма важной особенностью в поведении функции является в о з р а с т а н и е и у б ы в а н и е.

О п р е д е л е н и е. **Функция называется *возрастающей* в интервале, если бóльшим значениям аргумента соответствуют бóльшие значения функции**[1]; **она называется *убывающей,* если бóльшим значениям аргумента соответствуют меньшие значения функции.**

Таким образом, $f(x)$ в о з р а с т а е т в и н т е р в а л е $[a, b]$, если для любых значений x_1, x_2, удовлетворяющих условию $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, и у б ы в а е т, если для любых значений x_1, x_2, удовлетворяющих указанному условию, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

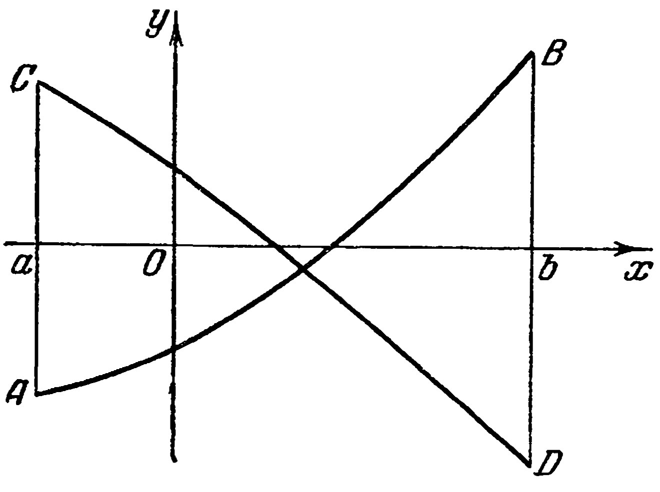

Рис. 8.

Так, например, функция $y = 2^x$ возрастает на всей числовой оси, а функция $y = 2^{-x}$ убывает. Функция $y = x^2$ убывает в интервале $(-\infty, 0]$ и возрастает в интервале $[0, \infty)$.

Если рассматривать график функции слева направо (что соответствует возрастанию аргумента x), то для возрастающей функции график поднимается вверх (линия AB на рис. 8), а для убывающей функции опускается вниз (линия CD на рис. 8).

[1]) Когда говорят об изменении (увеличении, уменьшении) переменной величины, имеют в виду а л г е б р а и ч е с к о е изменение. Если речь идет об изменении а б с о л ю т н о й величины переменной, это особо оговаривается.

Определение. **Интервал независимой переменной, в котором функция возрастает, называется *интервалом возрастания* функции, а интервал, в котором функция убывает,— *интервалом убывания*. Как интервал возрастания, так и интервал убывания называют *интервалами монотонности* функции, а функцию в этом интервале — *монотонной функцией*.**

Обычно, интервал, на котором рассматривается функция, можно разбить на ряд интервалов, в каждом из которых функция монотонна. Так, например, для функции, график которой изображен на рис. 9, интервал $[a, b]$ разбивается на интервалы $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, b]$, в которых функция соответственно убывает, возрастает, убывает, возрастает.

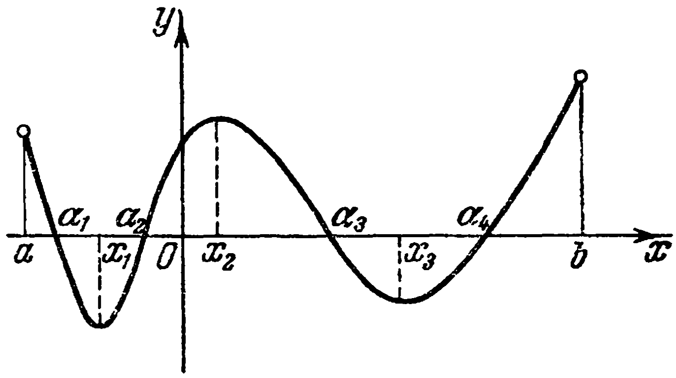

Рис. 9.

Для простейших функций, графики которых нам известны, интервалы монотонности находятся легко; в дальнейшем (п. **59**) будет показано, как можно отыскивать интервалы монотонности функции, график которой нам неизвестен.

Приведем определение еще одной очень важной характеристики поведения функции.

Определение. **Значение функции, большее или меньшее всех других ее значений в некотором интервале, называется *наибольшим* или соответственно *наименьшим* значением функции в этом интервале.**

Находить эти значения для любых функций мы научимся в п. **61**.

Исследование указанных в настоящем пункте особенностей часто позволяет составить довольно ясное представление о поведении функции. Изучение функции следует начинать с отыскания области ее определения. При этом некоторые вопросы исследования могут отпасть сами собой; так, например, если функция определена только для положительных значений аргумента, то ее не нужно исследовать на четность и нечетность, и т. д.

14. Графическое изучение функции. Когда известен график функции, поведение ее может быть выяснено из рассмотрения чертежа. По чертежу мы можем найти и интервалы монотонности функции, и интервалы, где она сохраняет постоянный знак, и нули функции, а также обнаружить, является ли функция четной или нечетной или ни той, ни другой и имеет ли она период. При этом, разумеется, точность ответов ограничена точностью чертежа и тех измерений, которые приходится на нем производить.

Так, например, график функции $y=f(x)$, приведенный на рис. 9, показывает, что функция $f(x)$ в точках α_1, α_2, α_3, α_4 обращается в нуль: $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=f(\alpha_3)=f(\alpha_4)=0$; что в интервалах (α_1, α_2), (α_3, α_4) она отрицательна, а в интервалах $[a, \alpha_1)$, (α_2, α_3) и $(\alpha_4, b]$ положительна; что в интервалах $[x_1, x_2]$ и $[x_3, b]$ функция возрастает, а в интервалах $[a, x_1]$ и $[x_2, x_3]$ убывает; наконец, что наибольшее значение функции во всем интервале $[a, b]$ достигается в точке $x=b$:

$$f(x) \leqslant f(b), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

а наименьшее — в точке $x=x_1$:

$$f(x) \geqslant f(x_1), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Пока мы можем строить график функции, или основываясь на известных нам геометрических свойствах линии, изображающей данную функцию, или, как говорят, «по точкам». Последний хорошо известный способ состоит в том, что, выбрав какие-нибудь n значений аргумента: $x_1, x_2, \ldots x_n$, вычисляют соответствующие им значения функции: $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ и находят n точек на плоскости: $M_1[x_1, f(x_1)]$, $M_2[x_2, f(x_2)], \ldots$, $M_n[x_n, f(x_n)]$, принадлежащих графику функции. Проведя через эти точки на глаз линию, мы получаем приближенное представление о графике функции, тем более точное, чем больше точек M нанесено на координатную плоскость.

Зная график функции $y=f(x)$, легко построить графики функций $y=f(x)+b$, $y=f(x+a)$, $y=Af(x)$ и $y=f(kx)$, где b, a, A и k — заданные числа. Точки графика $y=f(x)+b$ получаются в результате переноса точек графика $y=f(x)$ вдоль прямых, параллельных оси Oy, на отрезок $|b|$ вверх, если $b>0$, и вниз, если $b<0$. Таким образом, весь график сдвигается вверх или вниз.

Если $y=f(x+a)$, то график сдвигается вдоль оси Ox на отрезок a влево при $a>0$ и на отрезок $|a|$ вправо при $a<0$. Это видно из того, что значения функций $y=f(x)$ и $y=f(x+a)$ равны друг другу, когда значение x для первой функции равно x_0, а для второй x_0-a.

Чтобы построить график функции $y=Af(x)$, если $A>0$, надо все ординаты исходного графика увеличить в A раз. Если же $A<0$, то строим график $y=|A|f(x)$ и симметрично отражаем его относительно оси Ox. График функции $y=f(kx)$ строим, уменьшая в $|k|$ раз абсциссы всех точек графика $y=f(x)$. Если $k<0$, то построенный график отражаем относительно оси Oy.

Для построения графика функции $y = Af[k(x+a)] + b$ последовательно строим графики функций $f_1(x) = f(x+a)$, $f_2(x) = f_1(kx)$, $f_3(x) = Af_2(x)$ и $y = f_3(x) + b$ (сдвиг и затем растяжение вдоль оси Ox, растяжение и сдвиг вдоль оси Oy). На рис. 10 по графику $y = \sin x$ показано построение графиков $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$ и $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Зная графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, легко построить чисто геометрически график функции $y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$, где a_1 и a_2 — постоянные. Такое построение достигается умножением ординат графиков каждой из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ на соответствующие постоянные a_1, a_2 и сложением ординат полученных

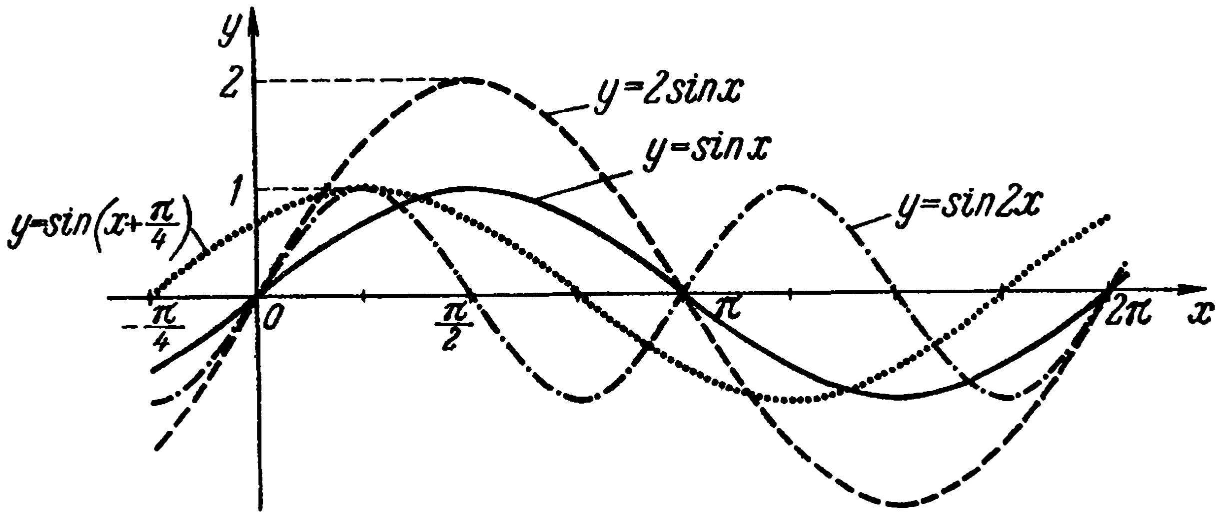

Рис. 10.

линий. Выражение $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ будем называть *линейной комбинацией* данных функций. Можно также образовать линейную комбинацию любого числа функций.

15. Прямая пропорциональная зависимость и линейная функция. Приращение величины. *Прямой пропорциональной зависимостью* называется зависимость, выраженная формулой

$$y = ax,$$

где a — постоянная ($a \neq 0$).

Характерной особенностью этой зависимости является то, что величина y пропорциональна величине x. Это значит, что если x_1 и y_1, x_2 и y_2 — две пары соответственных значений x и y, то $y_2 : y_1 = x_2 : x_1$. Постоянный коэффициент a называется *коэффициентом пропорциональности.*

Если $y = ax$, то $x = \frac{1}{a} y$, и, значит, если y пропорционально x, то и x пропорционально y, но с обратным коэффициентом пропорциональности.

Прямая пропорциональная зависимость есть частный случай зависимости, устанавливаемой *линейной функцией*, т. е. функцией вида

$$y = ax + b,$$

где a, b — постоянные.

При $b = 0$ и $a \neq 0$ отсюда получается прямая пропорциональная зависимость; если же $b \neq 0$, то y уже не будет пропорционально x.

Линейная функция определена на всей оси Ox. Как известно из аналитической геометрии, графиком ее служит прямая линия. Постоянные коэффициенты a и b равны соответственно угловому коэффициенту прямой (т. е. тангенсу угла между прямой и осью Ox) и ее начальной ординате (т. е. ординате точки прямой при $x = 0$). При $b = 0$ график линейной функции (прямой пропорциональной зависимости) есть прямая линия, проходящая через начало координат. Ясно, что при положительном a линейная функция является на всей оси Ox возрастающей функцией, а при отрицательном a — убывающей.

Введем одно простое, но важное понятие, а также обозначение, которые постоянно будут употребляться и в дальнейшем.

Определение. **Пусть некоторая величина u переходит от одного своего (начального) значения u_1 к другому (конечному) значению u_2. Разность конечного и начального значений называется *приращением* величины u; ее обозначают через Δu, т. е.**

$$\Delta u = u_2 - u_1.$$

Приращение Δu может быть как положительным, так и отрицательным; в первом случае переменная величина u при переходе от u_1 к $u_2 = u_1 + \Delta u$ увеличилась, во втором уменьшилась. Если $\Delta u = 0$, то $u_2 = u_1$ и величина u не изменилась.

Подчеркнем, что Δu обозначает не произведение какой-то величины Δ на величину u, а является слитным символом, обозначающим разность между наращенным значением величины и ее начальным значением.

Когда независимая переменная x получает некоторое приращение Δx, то функция $y = f(x)$ также получает приращение: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. На графике приращение функции изображается отрезком прямой, параллельной оси Oy, взятым со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, увеличилась или уменьшилась ордината при переходе абсциссы из начального положения в конечное (на рис. 11 начальное положение абсциссы обозначено через x_1, а конечное через x_2). Для произвольной функции ее приращение зависит не только от приращения аргумента Δx, но и от выбранного значения x; это наглядно видно на рис. 11.

Докажем теперь следующее важное свойство линейной функции.

Прямая теорема. **Приращение линейной функции пропорционально приращению аргумента и не зависит от начального значения аргумента.**

Доказательство. Пусть аргумент получил приращение Δx, перейдя от значения x к значению $x+\Delta x$; тогда функция получит некоторое приращение Δy, перейдя от значения y к значению $y+\Delta y$. Мы имеем

$$y = ax + b$$
$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b.$$

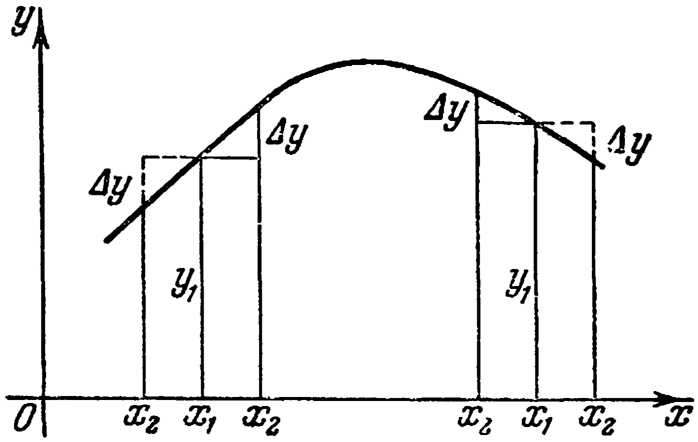

Рис. 11.

Вычитая из второго равенства первое, найдем

$$\Delta y = a\Delta x,$$

что и требовалось доказать.

Это соотношение выводится просто и из геометрических соображений. Из рис. 12 видно, что Δy и Δx являются катетами прямоугольного треугольника ABC, причем $\operatorname{tg}\alpha = a$. Значит,

$$\Delta y = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = a\Delta x.$$

Найденное свойство вполне характеризует линейную функцию; другими словами, нет никаких других функций, кроме линейных, которые обладали бы тем же свойством. Докажем это.

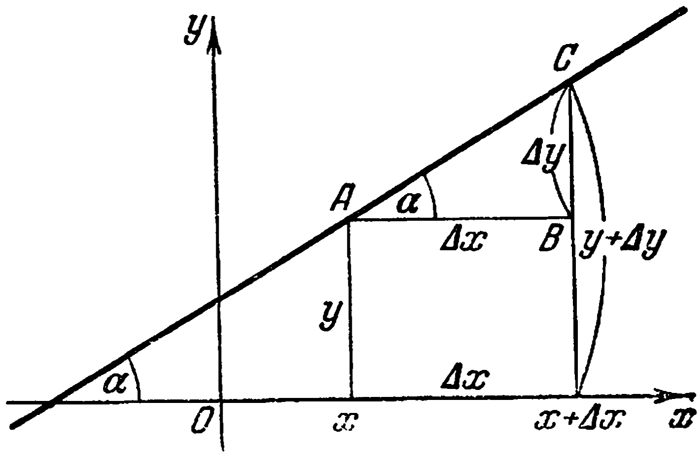

Рис. 12.

Обратная теорема. **Если приращение функции пропорционально приращению аргумента и не зависит от его начального значения, то эта функция — линейная.**

Доказательство. Действительно, допустим, что для какой-нибудь функции $y=f(x)$ приращение Δy для любого x пропорционально приращению независимой переменной Δx:

$$\Delta y = a\Delta x,$$

где a — некоторая постоянная. Пусть при $x=0$ функция $f(x)$ равна b, т. е. $f(0)=b$. Дадим теперь аргументу какое угодно новое значение x; функция получит тогда новое значение $y=f(x)$. Приращение аргумента при этом будет равно $\Delta x = x - 0 = x$, а приращение функции $\Delta y = y - b$. Следовательно, по условию должно быть $y - b = ax$. Отсюда

$$y = ax + b$$

при любом x, что и требовалось доказать.

Линейной функцией описывается всякий равномерный процесс, т. е. такой процесс, в котором двум любым равным приращениям одной величины соответствуют равные между собой приращения другой величины.

Например, движение — равномерное, если в любые равные промежутки времени (t) проходятся равные пути (s); тогда $\Delta s = v\Delta t$, где v — постоянная скорость движения. Отсюда в силу свойства линейной функции имеем: $s = vt + s_0$, где s_0 — путь, пройденный к моменту $t = 0$. Это — так называемое уравнение равномерного движения.

Равномерные процессы — самые простые и вместе с тем чрезвычайно важные.

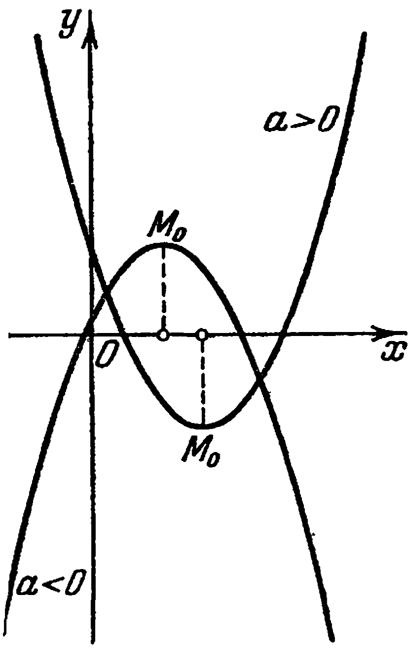

Рис. 13.

16. Квадратичная функция. *Квадратичной функцией* называется функция вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — постоянные ($a \neq 0$).

Квадратичная функция определена на всей числовой оси.

В простейшем случае, когда $b = c = 0$, функция имеет вид $y = ax^2$; ее графиком служит парабола с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с положительной полуосью Oy, когда $a > 0$, и с отрицательной полуосью Oy, когда $a < 0$. В общем случае графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является, как известно из аналитической геометрии, парабола, ось которой параллельна оси Oy, а вершина лежит в точке $M_0\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Ветви параболы направлены вверх или вниз в зависимости от того, будет ли $a > 0$ или $a < 0$ (рис. 13).

Квадратичная функция только один раз меняет характер своего изменения: она или сначала убывает, а затем возрастает, или наоборот. А именно, если $a > 0$, то функция в интервале $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ убывает, достигая при $x = -\frac{b}{2a}$ своего наименьшего значения $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$, а затем в интервале $\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$ возрастает; наибольшего же значения функция нигде не достигает. Наоборот, при $a<0$ функция сначала в интервале $\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)$ возрастает, достигая при $x=-\frac{b}{2a}$ своего наибольшего значения $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$, а затем в интервале $\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$ убывает; в этом случае функция нигде не достигает наименьшего значения.

Например, для квадратичной функции $y=x^2-5x+4$ имеем: $a=1>0$; следовательно, эта функция имеет наименьшее значение. Для его отыскания не нужно строить график функции; приведенные выше формулы показывают, что наименьшее значение получается при $x=-\frac{b}{2a}=2{,}5$ и равно $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-2{,}25$. (Последнее значение можно получить не по готовой формуле, а подставив в выражение функции $x=2{,}5$.)

Задачи отыскания наибольшего и наименьшего значений функции возникают довольно часто в самых разнообразных вопросах.

Рассмотрим два примера.

1) Из всех прямоугольников с данным периметром P найдем прямоугольник, имеющий наибольшую площадь.

Обозначим одну из сторон прямоугольника через x, тогда другая сторона будет равна $\frac{P}{2}-x$. Следовательно, площадь прямоугольника S равна

$$S=x\left(\frac{P}{2}-x\right)=\frac{P}{2}x-x^2,$$

т. е. является квадратичной функцией от x. Так как $a=-1<0$, то функция имеет наибольшее значение; оно достигается при $x=-\frac{b}{2a}=\frac{P}{4}$ и равно

$$\frac{P}{2}\cdot\frac{P}{4}-\left(\frac{P}{4}\right)^2=\frac{P^2}{16}.$$

Но прямоугольник, периметр которого равен P, а одна из сторон имеет длину $\frac{P}{4}$, есть квадрат. Таким образом, из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

2) Найдем, через сколько секунд после выстрела поднимается на наибольшую высоту над уровнем моря снаряд, выпущенный вертикально вверх из зенитного орудия, и какова будет эта наибольшая высота, если пренебречь сопротивлением воздуха; при этом дано, что скорость снаряда при вылете из дула орудия $v_0=500$ *м/сек*, высота орудия над уровнем моря $h_0=200$ *м*.

Пренебрегая сопротивлением воздуха, движение снаряда можно считать равнозамедленным, с ускорением $-g$. Тогда, как известно, высота h снаряда над уровнем моря в момент времени t будет равна

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

Таким образом, h есть квадратичная функция от t, причем здесь $a = -\frac{g}{2} < 0$. Наибольшее значение функции h (т. е. наибольшая высота подъема снаряда) будет при

$$t = -\frac{b}{2a} = \frac{v_0}{g} = \frac{500}{9{,}8} \approx 51 \text{ сек.}$$

Следовательно, через 51 *сек* после выстрела снаряд достигнет наибольшей высоты $h = H$, причем

$$H = 200 + 500 \cdot 51 - \frac{9.8}{2} \cdot 51^2 = 12\,955 \text{м} \approx 13 \text{ км}.$$

Вследствие наличия сопротивления воздуха практически H будет значительно меньше.

17. Обратная пропорциональная зависимость и дробно-линейная функция. *Обратной пропорциональной зависимостью* называется зависимость, выраженная формулой

$$y = \frac{a}{x},$$

где a — постоянная ($a \neq 0$).

Ее характерной особенностью является то, что величина y обратно пропорциональна величине x, т. е. если x_1 и y_1, x_2 и y_2 — две пары соответственных значений x и y, то $y_2 : y_1 = x_1 : x_2$. Постоянный коэффициент a называется *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Если $y = \frac{a}{x}$, то $x = \frac{a}{y}$; значит, если y обратно пропорционально x, то и x обратно пропорционально y, притом с тем же коэффициентом обратной пропорциональности.

Обратная пропорциональная зависимость есть частный случай зависимости, устанавливаемой *дробно-линейной функцией*, т. е. функцией вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{*}$$

где a, b, c, d — постоянные ($c \neq 0$).

При $a = 0$, $d = 0$ отсюда получается обратная пропорциональная зависимость.

Дробно-линейная функция (*) определена на всей оси Ox, за исключением точки $x=-\frac{d}{c}$ $\left(\text{точки } x=0 \text{ для функции } y=\frac{a}{x}\right)$.

Будем предполагать, что $bc-ad\neq 0$, ибо в противном случае функция вырождается в постоянную. В самом деле, пусть $bc=ad$; обозначая отношение $\frac{a}{c}$ через m, получаем: $a=cm$, $b=\frac{ad}{c}=dm$ и, следовательно,

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{cmx+dm}{cx+d}=m\frac{cx+d}{cx+d}=m.$$

С помощью параллельного переноса системы координат доказывается, что графиком дробно-линейной функции служит равнобочная гипербола, асимптоты которой параллельны осям координат. Именно, если параллельно перенести систему координат, взяв новое начало в точке $O'\left(-\frac{d}{c},\ \frac{a}{c}\right)$, то уравнение графика дробно-линейной функции (*) в системе $O'x'y'$ будет иметь вид

$$y'=\frac{a'}{x'},\quad \text{где}\quad a'=\frac{bc-ad}{c^2}$$

(так как по условию $bc-ad\neq 0$, то $a'\neq 0$). Это — уравнение равнобочной гиперболы, асимптотами которой являются новые оси координат, т. е. прямые

$$x=-\frac{d}{c},\qquad y=\frac{a}{c}.$$

Итак, для того чтобы построить график дробно-линейной функции, нужно через точку $\left(-\frac{d}{c},\ \frac{a}{c}\right)$ провести прямые, параллельные осям координат, и, приняв их за асимптоты, вычертить равнобочную гиперболу с осями, равными $2\sqrt{2\,|a'|}$. В каких углах, образованных асимптотами, расположена гипербола, зависит только от знака коэффицинета $a'=\frac{bc-ad}{c^2}$, т. е. от знака выражения $bc-ad$: если $bc-ad>0$, то гипербола расположена в первом и третьем углах, а если $bc-ad<0$, то — во втором и четвертом.

Пусть, например,

$$y=\frac{x+1}{x-1}.$$

Здесь $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=-1$, следовательно, асимптотами гиперболы являются прямые $x=-\frac{d}{c}=1$ и $y=\frac{a}{c}=1$. Далее, $a'=\frac{bc-ad}{c^2}=2$; следовательно, оси гиперболы равны $2\sqrt{2\,|a'|}=4$.

На рис. 14 показан график этой функции; он расположен в первом и третьем углах, образованных асимптотами, так как здесь $bc - ad = 2 > 0$.

В частном случае обратной пропорциональной зависимости $y = \frac{a}{x}$ асимптотами служат сами оси координат.

Ход изменения дробно-линейной функции легко усматривается из графика, а именно:

Дробно-линейная функция (*) *или только возрастает, или только убывает в любом интервале оси* Ox, *не содержащем точки* $x = -\frac{d}{c}$.

Тот или другой характер роста (возрастание или убывание) зависит от знака выражения $bc - ad$. Если $bc - ad > 0$, то функция убывает, если $bc - ad < 0$, то функция возрастает.

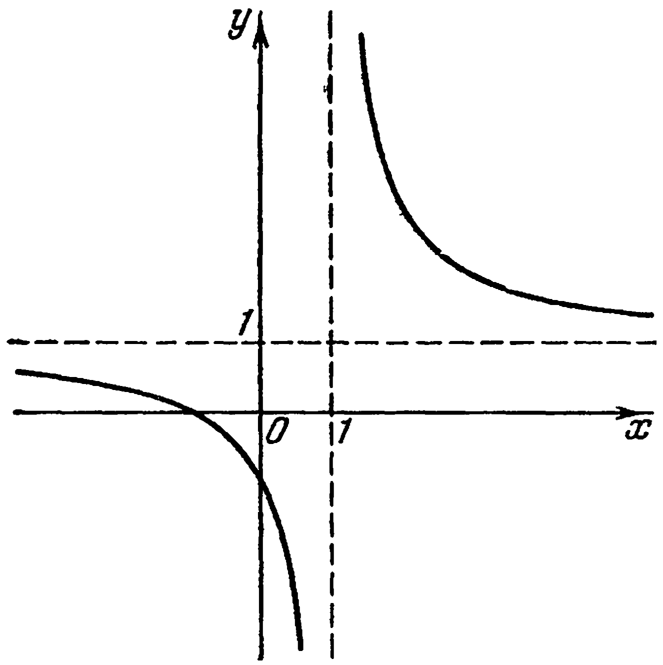

Рис. 14.

Рассмотрим поведение функции $y = \frac{x+1}{x-1}$, график которой изображен на рис. 14. При значениях x, меньших единицы, эта функция остается постоянно меньше единицы и убывает при приближении x к единице; при переходе аргумента x от значений, меньших единицы, к значениям бо́льшим единицы, функция делает бесконечный скачок, переходя от как угодно больших по абсолютной величине отрицательных значений к как угодно большим положительным значениям; при дальнейшем росте x функция продолжает убывать, оставаясь больше единицы и неограниченно приближаясь к ней, когда x неограниченно возрастает.

§ 4. Обратная функция. Степенная, показательная и логарифмическая функции

18. Обратная функция. Пусть задана какая-либо функция $y = f(x)$; D — область ее определения (т. е. множество значений x), а G — область значений функции (т. е. множество соответствующих значений y). Будем говорить, что функция $y = f(x)$ осуществляет *отображение множества* D *в множество* G; из определения функции следует, что каждой точке множества D ставится в соответствие одна-единственная точка множества G. Если при этом каждой точке множества G соответствует опять-таки единственная точка множества D, то говорят, что *отображение* (*соответствие*) *взаимно однозначное*. При таком отображении различным точкам множества D соответствуют различные точки множества G.

Например, функция $y=x^3$ взаимно однозначно отображает всю ось Ox в ось Oy, так как каждому значению x соответствует одно-единственное значение y, и наоборот: каждому y соответствует только один x, равный $\sqrt[3]{y}$.

Функция $y=x^2$ не осуществляет взаимно однозначного соответствия между осью Ox (область определения функции) и интервалом $[0, \infty)$ оси Oy (область значений функции), потому что любому значению $y>0$ соответствует не одно, а два значения x; это $x=+\sqrt{y}$ и $x=-\sqrt{y}$.

Функция $y=\sin x$ отображает всю ось Ox в интервал $[-1, 1]$ оси Oy. Ясно видно, что это отображение не взаимно однозначное: каждому значению y из интервала $[-1, 1]$ соответствует бесчисленное множество значений x.

Если функция $y=f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение множества D в множество G, то, согласно сказанному, каждому значению y из множества G ставится в соответствие одно определенное значение x из множества D. Поэтому можно сказать, что определена функция $x=\varphi(y)$; G является ее областью определения, а D — областью значений. Мы замечаем, что величины x и y как бы поменялись ролями: y стала независимой переменной, а x — функцией. В этом случае функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ называются *взаимно обратными*.

Если отображение множества D в множество G не взаимно однозначно, то некоторым значениям y (а может быть, даже и всем) будет соответствовать несколько различных значений x, и мы опять сталкиваемся с той же трудностью, что и в п. **12** при рассмотрении неявных функций, а именно с тем, что обратная функция оказывается многозначной. Подробнее об этом будет сказано дальше, а сейчас мы научимся по заданной функции находить ей обратную и установим геометрическую связь между графиками взаимно обратных функций.

Пусть величина y дана как явная функция от x:

$$y=f(x). \qquad (*)$$

Это же уравнение определяет x как неявную функцию от y. Чтобы получить ее явное выражение, нужно, если это возможно, разрешить данное уравнение относительно x:

$$x=\varphi(y). \qquad (**)$$

Ясно, что функция $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ и будут взаимно обратными.

Например, если $y=x^3$, то $x=\sqrt[3]{y}$, или если $y=10^x$, то $x=\lg y$ (заметим, что в обоих примерах соответствие между областями значений x и y взаимно однозначно). Легко непосредственно проверить, что функция, обратная линейной, также линейна и что функция, обратная дробно-линейной, также дробно-линейна.

Если функция с самого начала задана в неявном виде, т. е. в виде уравнения, связывающего x и y, то, разрешая данное уравнение сначала относительно y, а затем относительно x, мы получим как раз пару взаимно обратных функций. Например, уравнение $xy+3x-y-1=0$ определяет взаимно обратные функции $y=\frac{3x-1}{-x+1}$ и $x=\frac{y+1}{y+3}$ (обе они—дробно-линейные).

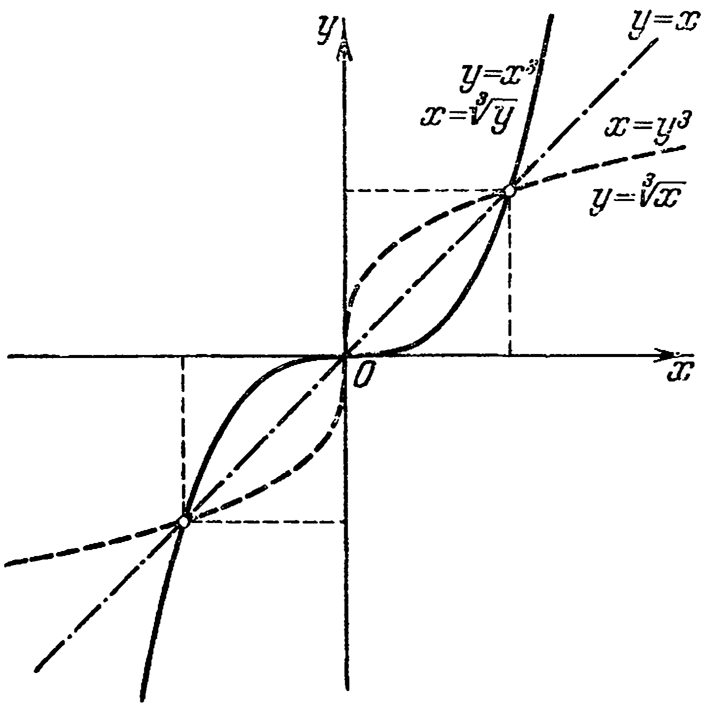

Рис 15.

В одной и той же системе осей Oxy и уравнение (*), и уравнение (**) выражают одну и ту же линию, но для функции f осью аргумента является ось Ox, а для функции φ—ось Oy.

Например, если $y=x^3$, то $x=\sqrt[3]{y}$. Графиком этих зависимостей будет так называемая кубическая парабола (рис. 15).

Если нужно построить графики взаимно обратных функций так, чтобы для обеих функций осью аргумента служила ось Ox, то обозначим аргумент в формуле (**) через x, а функцию—через y, т. е. так же, как в формуле (*); тогда получим

$$y=\varphi(x).$$

В такой записи в обеих взаимно обратных функциях $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ одна и та же буква (x) обозначает независимую переменную и одна и та же буква (y)—функцию. Например, взаимно обратными будут функции $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$, или $y=10^x$ и $y=\lg x$.

Заметим, что последовательное применение взаимно обратных функций к любому значению x оставляет это значение неизменным, например: $\sqrt[3]{x^3}=x$, $(\sqrt[3]{x})^3=x$ или $\lg 10^x=x$, $10^{\lg x}=x$.

Символически это записывается так:

$$\varphi[f(x)]=x, \qquad f[\varphi(x)]=x,$$

т. е. символы взаимно обратных функций как бы уничтожают друг друга.

При этом x должен быть таким, чтобы он находился в области определения первой из применяемых функций. Так, тождество $\lg 10^x = x$ справедливо при всех x, а тождество $10^{\lg x} = x$ — только при $x > 0$.

Если соответствие между областями значений x и y не взаимно однозначно, то указанные равенства не обязаны соблюдаться; например, $\sqrt{x^2}$ имеет два значения: x и $-x$.

Между графиками функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ существует простая связь:

График обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен с графиком данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Действительно, пусть при $x = a$

$$y = f(a) = b.$$

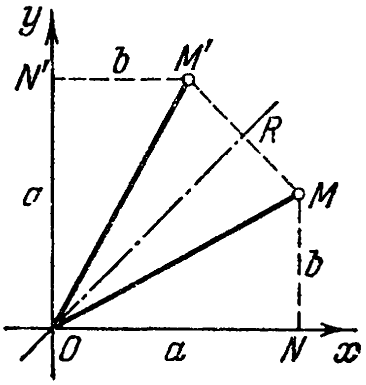

Рис. 16.

Точка $M(a, b)$ принадлежит графику данной функции. Тогда точка M' с координатами (b, a) принадлежит графику обратной функции, так как $a = \varphi(b)$. Имеем (рис. 16): $\triangle ON'M' = \triangle ONM$, вследствие чего $\angle N'OM' = \angle NOM$ и $OM' = OM$. Отсюда следует, во-первых, что биссектриса OR координатного угла будет и биссектрисой угла MOM', и, во-вторых, что $\triangle MOM'$ равнобедренный. Поэтому биссектриса OR действительно является осью симметрии треугольника MOM'. Итак, каждой точке на графике данной функции соответствует точка на графике обратной, расположенная симметрично с первой относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Так как верно и обратное, то наше предложение полностью доказано.

Имея график некоторой функции, можно, следовательно, получить график обратной ей функции с помощью простого перегибания чертежа по биссектрисе первого и третьего координатных углов. Именно так построен на рис. 15 график функции $y = \sqrt[3]{x}$ по графику обратной ей функции $y = x^3$.

Перейдем теперь к выяснению условий, при которых отображение множества значений x в множество значений y будет взаимно однозначным, т. е. условий, при соблюдении которых функция $y = f(x)$ будет иметь однозначную обратную функцию. Тот факт, что значениям x соответствуют единственные значения y, означает, что любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает график функции не более чем в одной точке. Чтобы значениям y соответствовали также единственные значения x, нужно чтобы этим же свойством обладали и прямые, параллельные оси абсцисс. Геометрически ясно, что *это условие будет соблюдаться, если данная функция монотонна; при этом монотонной будет и обратная функция.*

Точное доказательство этого утверждения мы не приводим, ссылаясь лишь на его геометрическую наглядность, вытекающую из установленной связи между графиками взаимно обратных функций. Рекомендуем читателю самостоятельно проверить сделанное утверждение, построив соответствующие чертежи.

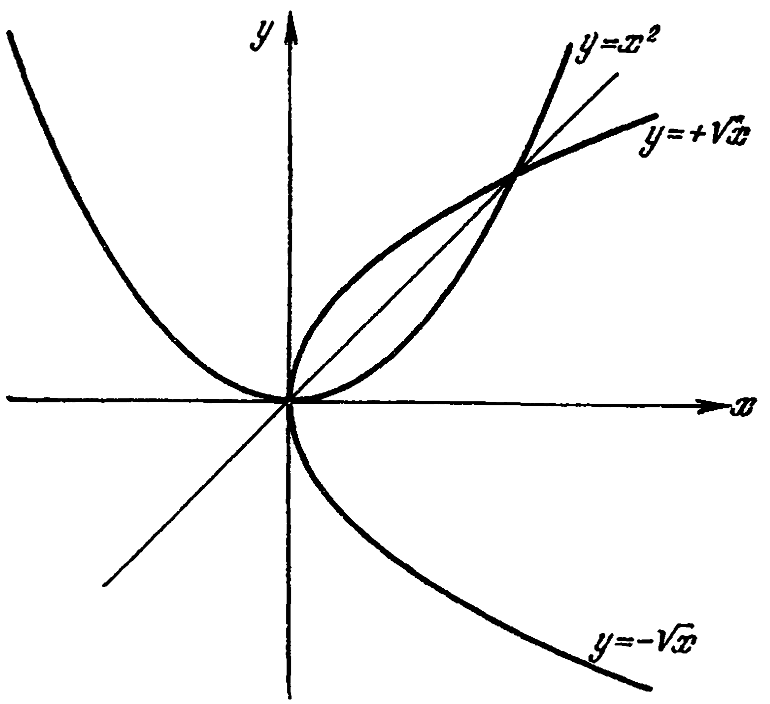

Рис. 17.

Если данная функция не монотонна, то картина будет более сложной. Пусть, например, дана функция $y=x^2$, графиком которой является парабола (рис. 17). Мы разобьем область определения этой функции, т. е. всю числовую ось, на интервалы, в которых функция монотонна: $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$. В каждом из этих интервалов функция $y=x^2$ имеет обратную: в интервале $(-\infty, 0]$ это будет функция $y=-\sqrt{x}$ (или в другой записи $x=-\sqrt{y}$), а в интервале $[0, \infty)$—функция $y=+\sqrt{x}$ (рис. 17). При этом символом $\sqrt{x}$ обозначено арифметическое (положительное) значение корня.

Так же как в п. **12**, можно сказать, что функция, обратная к функции $y=x^2$, многозначна, а функции $y=+\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$—ее однозначные ветви. Заметим кстати, что в дальнейшем для краткости функция $y=+\sqrt{x}$ будет обозначаться просто через $y=\sqrt{x}$.

Всюду в дальнейшем, говоря о взаимно обратных функциях, мы подразумеваем, что в областях их определения они монотонны.

Если данная функция не монотонна, то мы, как в приведенном примере, разбиваем область ее определения на интервалы монотонности и в каждом таком интервале берем соответствующую однозначную ветвь обратной функции. Другие важные примеры мы рассмотрим в п. **22** при изучении обратных тригонометрических функций.

19. Степенная функция. Степенная функция

$$y=x^n$$

при целых и положительных значениях n определена на всей числовой оси. Вид графиков функций $y=x^n$ при различных целых значениях n показан на рис. 18. При четном n эти функции четные, а при нечетном n — нечетные; поэтому можно говорить об их свойствах только для $x \geqslant 0$. Чем больше n, тем ближе к оси абсцисс лежат соответствующие графики в интервале $(0, 1)$ и тем круче они поднимаются вверх при приближении x к единице.

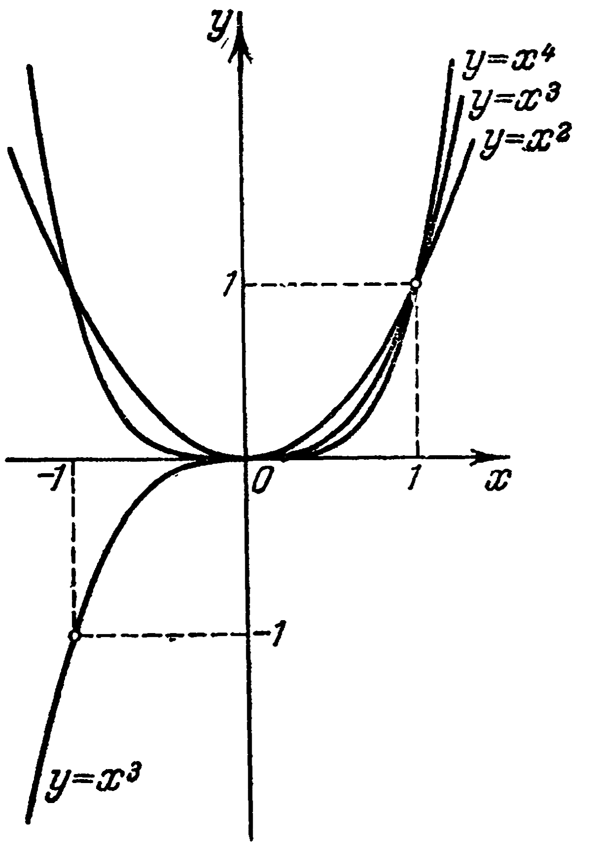

Рис. 18.

Пользуясь результатами п. 18, можно сразу построить графики функций $y=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$, обратных к функциям $y=x^n$. Надо только иметь в виду, что при нечетном n обе функции определены и монотонны на всей числовой оси и графики их подобны графикам на рис. 15 ($n=3$). Если же n — четное, то обратная функция состоит из двух однозначных ветвей: $y=+\sqrt[n]{x}$ и $y=-\sqrt[n]{x}$; область определения каждой ветви — интервал $[0, \infty)$. Графики их аналогичны графикам, изображенным на рис. 17 ($n=2$).

Пусть теперь n — любое положительное число. Если n рациональное число: $n=\frac{p}{q}$, где дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то свойства функции $y=x^n$ зависят от четности или нечетности чисел p и q и указаны в следующей таблице.

<table>
<tr><td>q \ p</td><td>Четное</td><td>Нечетное</td></tr>
<tr><td>Четное</td><td>—</td><td>Функция состоит из двух однозначных ветвей, определенных в интервале $[0, \infty)$; графики их симметричны относительно оси абсцисс</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нечетное</td><td colspan="2">Функция определена на всей числовой оси</td></tr>
<tr><td>Четная</td><td>Нечетная</td></tr>
</table>

При n иррациональном степенная функция рассматривается только при $x \geqslant 0$.

На рис. 19 в первом координатном угле представлены графики функций $y = x^n$ для различных $n > 0$. Все эти функции возрастают в интервале $(0, \infty)$; их графики проходят через точки

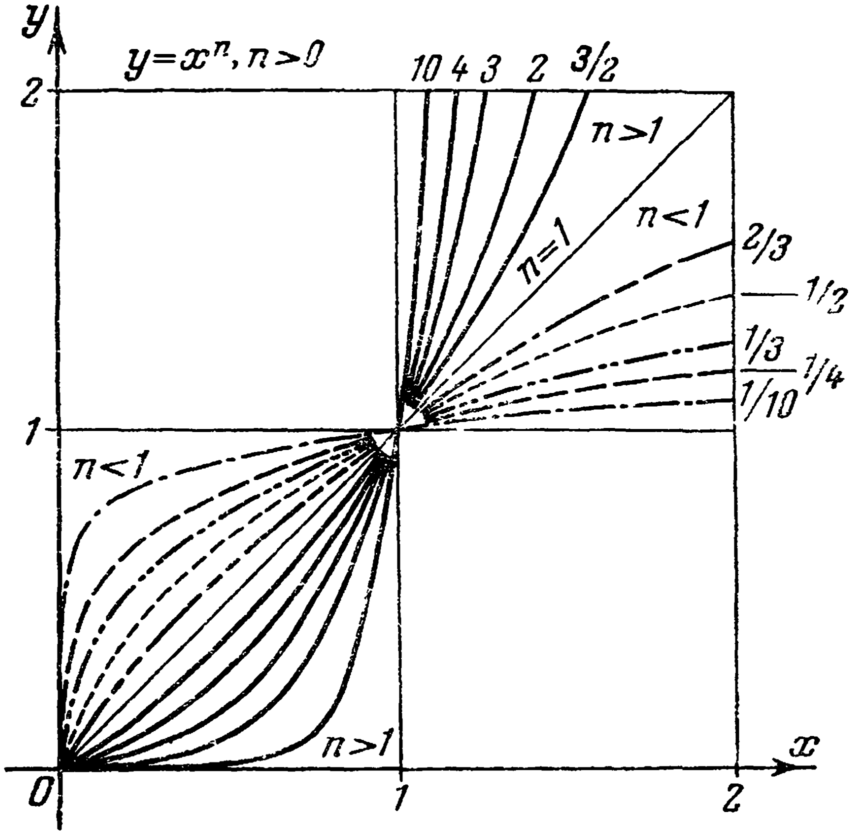

Рис. 19.

(0,0) и (1,1) и разделяются прямой $y = x$ на два класса: обращенные своей выпуклостью вниз ($n > 1$) и обращенные своей выпуклостью вверх ($n < 1$). Пользуясь приведенной таблицей, легко построить полные графики этих функций.

Линии $y = x^n$ при $n > 0$ называются параболами соответствующих порядков. Так, $y = x^2$ (обыкновенная парабола) — парабола второго порядка, $y = x^3$ — парабола третьего порядка, или кубическая парабола. Часто встречающаяся линия $y = x^{3/2}$ (или $y^2 = x^3$) — парабола порядка $^3/_2$ — называется полукубической параболой (рис. 20).

Графики функции $y = x^n$ при $n < 0$ являются линиями существенно другого типа, чем указанные параболы. Пусть $n = -m$, где $m > 0$. На рис. 21 в первом координатном угле представлены графики функций $y = \frac{1}{x^m}$ для различных $m > 0$. Все функции убывают в интервале $(0, \infty)$. Когда x неограниченно возрастает, y убывает, неограниченно приближаясь к нулю, и, наоборот, когда y неограниченно возрастает, x убывает, неограниченно приближаясь к нулю. Отсюда мы заключаем, что при любом $m > 0$ положительные полуоси Ox и Oy являются асимптотами линий $y = \frac{1}{x^m}$. Так же, как и раньше, все линии проходят через точку (1,1).

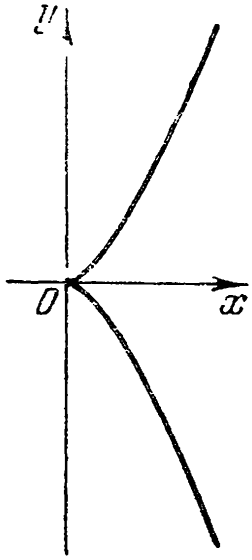

Рис. 20.

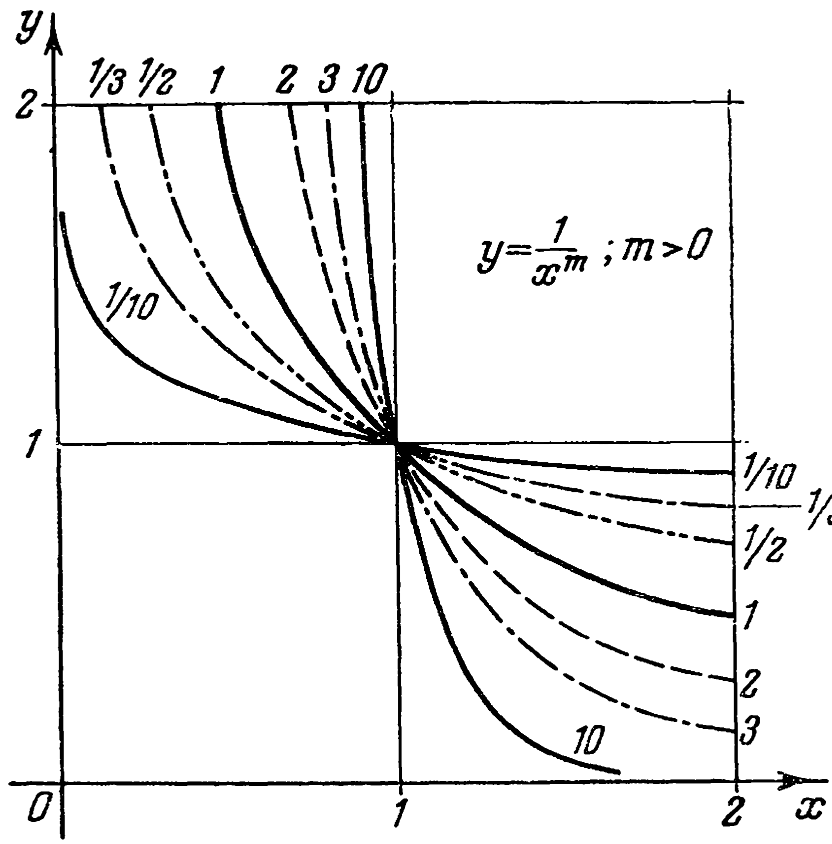

Рис. 21.

Линии $y = \frac{1}{x^m}$, $m > 0$, называются гиперболами соответствующих порядков; при $m = 1$ получается обычная равнобочная гипербола.

В заключение отметим, что линии $y = x^n$ в физике и технике иногда называют политропными кривыми.

20. Показательная и логарифмическая функции.

I. Показательная функция. Показательная функция

$$y = a^x$$

рассматривается только при $a > 0$ и $a \neq 1$[1]).

Эта функция определена на всей оси Ox и всюду положительна: $a^x > 0$ при всяком x; это означает, что когда x — дробное число, мы берем только арифметическое значение корня. Поэтому график показательной функции расположен над осью Ox;

---

[1]) При $a < 0$ область определения функции состоит только из рациональных чисел $x = \frac{p}{q}$, у которых знаменатель q — нечетное число, при $a = 1$ функция при всех x равна 1.

так как $a^0=1$, то он проходит через точку $(0,1)$. Поведение показательной функции существенно зависит от того, будет ли $a>1$ или $a<1$.

Если $a>1$, то с увеличением показателя x увеличивается и y, причем неограниченное возрастание аргумента вызывает неограниченное же возрастание и функции. Если $a<1$, то, наоборот, при неограниченном возрастании аргумента функция убывает и неограниченно приближается к нулю.

График показательной функции с основанием a симметричен относительно оси Oy графику показательной функции с основанием $\frac{1}{a}$. В самом деле, функцию $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ можно записать так: $y=a^{-x}$, откуда видно, что для положительных x она принимает те же значения, что и функция $y=a^x$ для равных им по абсолютной величине отрицательных x, и наоборот. А это и означает, что графики функций

$$y=a^x$$

и

$$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$$

симметричны относительно оси ординат.

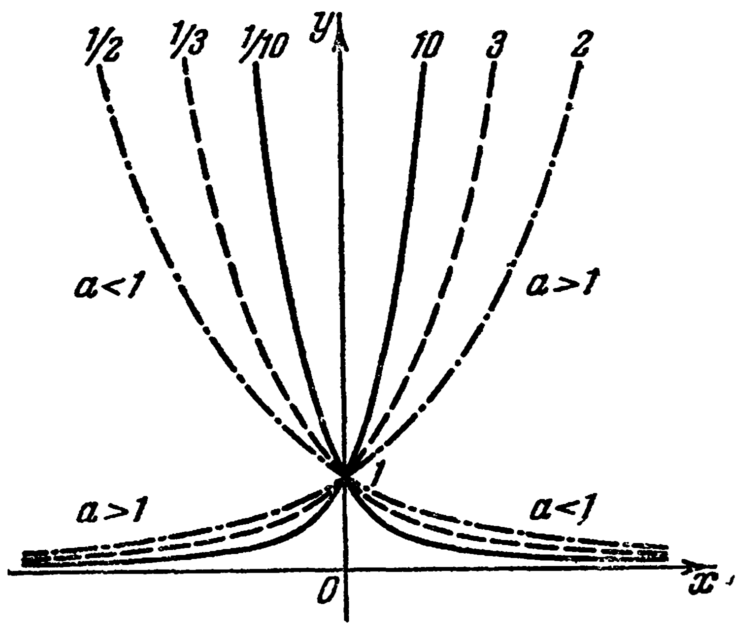

Рис. 22.

На рис. 22 показаны графики показательных функций при $a=2$, 3, 10, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_{10}$. Ось Ox служит асимптотой линий $y=a^x$.

Показательные функции встречаются в самых разнообразных задачах. При этом чаще всего имеют дело с показательной функцией, в основании которой лежит специальное число e, играющее очень важную роль в математике (см. п. **31**); его приближенное значение равно 2,718. Иногда функцию $y=e^x$ называют *экспоненциальной*, а ее график — *экспонентой*.

II. Логарифмическая функция. Логарифмическая функция

$$y=\log_a x$$

обратна показательной функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$. Поэтому легко построить график логарифмической функции. Именно, перегнув рис. 22 по биссектрисе первого и третьего координатных углов, мы и получим графики логарифмических функций при тех же основаниях a (рис. 23).

Опишем, пользуясь этими графиками, поведение логарифмической функции. Прежде всего, мы видим, что логарифмическая функция определена на всей положительной полуоси Ox и не определена для отрицательных и нулевого значений независимой переменной. Все логарифмики проходят через точку (1,0), так как логарифм единицы всегда равен нулю.

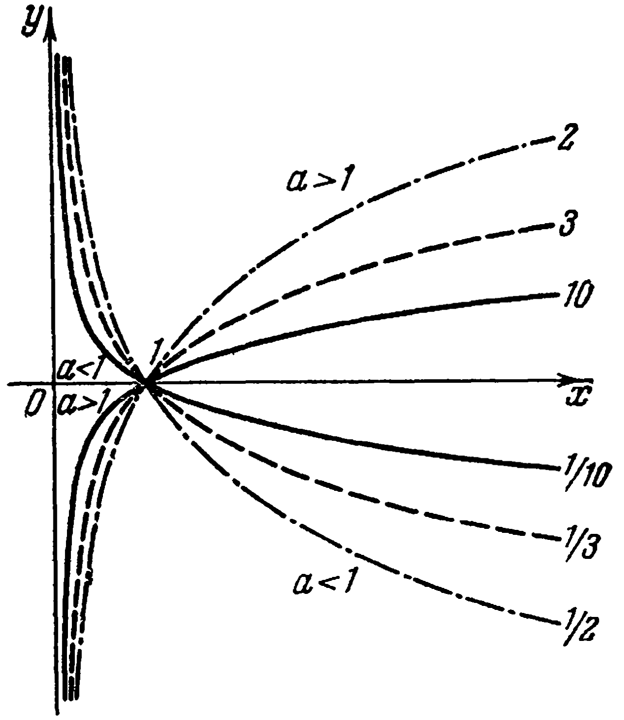

Рис. 23.

Поведение логарифмической функции существенно зависит от того, будет ли $a > 1$ или $a < 1$. В первом случае ($a > 1$) логарифм во всем интервале $(0, \infty)$ — возрастающая функция, притом отрицательная в интервале $(0, 1)$ и положительная в интервале $(1, \infty)$. Во втором случае ($a < 1$) логарифм во всем интервале $(0, \infty)$ — убывающая функция, притом положительная в интервале $(0, 1)$ и отрицательная в интервале $(1, \infty)$.

График логарифмической функции с основанием a симметричен относительно оси Ox с графиком логарифмической функции с основанием $\frac{1}{a}$.

Принимая во внимание, что логарифмическая и показательная функции взаимно обратны, имеем (см. п. **18**)

$$\log_a a^x = x \quad \text{и} \quad a^{\log_a x} = x;$$

первое из этих равенств справедливо при любом x, второе — при $x > 0$.

Пользуясь последним соотношением, всякую степенную функцию $y = x^n$ при $x > 0$ с любым показателем n можно представить в виде сложной функции, составленной из показательной и логарифмической функций:

$$y = x^n = (a^{\log_a x})^n = a^{n \log_a x}.$$

Возьмем логарифмические функции при двух разных основаниях a_1 и a_2, т. е. $y_1 = \log_{a_1} x$ и $y_2 = \log_{a_2} x$. Выражая x из первого равенства через y_1 и подставляя во второе равенство, получим: $y_2=\log_{a_2} a_1^{y_1}=y_1 \log_{a_2} a_1$, или, иначе,

$$\log_{a_1} x=\frac{\log_{a_2} x}{\log_{a_2} a_1}.$$

Полагая $x=a_2$, получим соотношение $\log_{a_1} a_2=\frac{1}{\log_{a_2} a_1}$.

Чтобы перейти от системы логарифмов при одном основании (a_2) к системе при другом основании (a_1), нужно логарифмы чисел в первой системе умножить на постоянное число $\left(\frac{1}{\log_{a_2} a_1}\right)$ — так называемый *модуль перехода* от одной системы логарифмов к другой. Следовательно, *логарифмы чисел при разных основаниях пропорциональны друг другу*, т. е. одна логарифмика переходит в другую посредством увеличения или уменьшения всех ее ординат в одно и то же число раз.

Логарифмы с основанием $a=10$ обозначают через $\lg x$ и называют *десятичными*, а с основанием $a=e$ через $\ln x$ и называют *натуральными* (см. п. **37** II).

§ 5. Тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические и обратные гиперболические функции

21. Тригонометрические функции. Гармонические колебания.

I. Тригонометрические функции. В качестве независимой переменной тригонометрических функций

$$y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=\operatorname{tg} x,$$
$$y=\sec x, \quad y=\operatorname{cosec} x, \quad y=\operatorname{ctg} x$$

в математическом анализе всегда принимается радианная мера дуги или угла. Так, например, значение функции $y=\sin x$ при $x=x_0$ равно синусу угла в x_0 радианов.

Напомним, что *радианной мерой дуги* называется число, равное отношению длины этой дуги к радиусу окружности. Именно при таком способе измерения аргумента делается понятным смысл таких выражений, как $x+\sin x$, $x\cos x$ и т. п. Рекомендуем читателю вычислить с помощью таблиц значения написанных выражений при $x=0,5$, $x=1$ и $x=2$.

Между шестью тригонометрическими функциями: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ — существуют пять простых независимых алгебраических соотношений, выводимых на основании определений этих функций и позволяющих по одной из них находить остальные.

Тригонометрические функции периодичны. Именно, функции $\sin x$ и $\cos x$ (а потому и $\operatorname{cosec} x$ и $\sec x$) имеют период 2π, а функция $\operatorname{tg} x$ (а потому и $\operatorname{ctg} x$) — период π.

Перейдем к известным графическим изображениям тригонометрических функций. Начнем с функции $y = \sin x$. По ее графику видно, что в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ эта функция возрастает от нуля до единицы, а затем в интервале $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ убывает до -1, проходя через нуль в точке $x = \pi$, и, наконец, в интервале $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

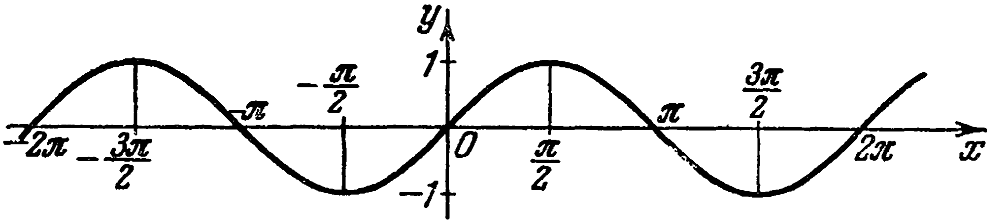

Рис. 24.

снова возрастает до нуля. Так как функция $y = \sin x$ имеет период 2π, то весь ее график (синусоида) получается передвижением вправо и влево интервала $[0, 2\pi]$ вместе с соответствующей ему частью графика на 2π, 4π, 6π, ... (рис. 24). Функция $y = \sin x$ нечетная; это хорошо видно на графике: он симметричен относительно начала координат.

Так как

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

то, согласно п. **14**, графиком функции $y = \cos x$ является рассмотренная выше синусоида, сдвинутая влево по оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 25).

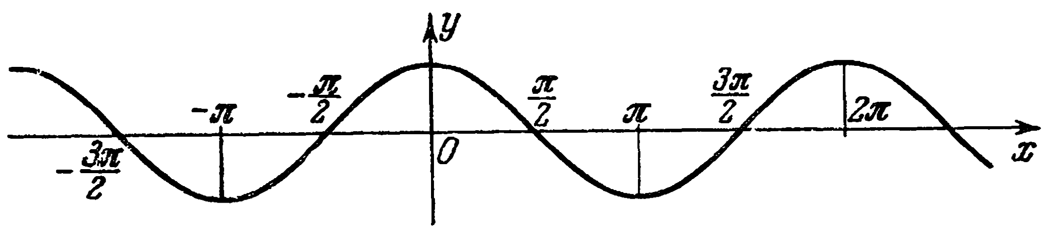

Рис. 25.

В интервале $[0, \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает от 1 до -1, проходя через O в точке $x = \frac{\pi}{2}$, и затем в интервале $[\pi, 2\pi]$ возрастает от -1 до 1, проходя через O в точке $x = \frac{3\pi}{2}$; дальше она изменяется периодически. Функция $y = \cos x$ четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

Функцию $y = \operatorname{tg} x$ рассмотрим на интервале $[0, \pi]$. В точке $x = \frac{\pi}{2}$ она не определена; когда x неограниченно приближается к $\frac{\pi}{2}$

слева (возрастая), y, будучи положительным, неограниченно возрастает, а когда x неограниченно приближается к $\frac{\pi}{2}$ справа (убывая), y неограниченно возрастает по абсолютной величине, оставаясь отрицательным. Так как функция $y=\operatorname{tg} x$ имеет период π, то аналогичная картина наблюдается в окрестности каждой точки $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. На всей оси Ox график функции $y=\operatorname{tg} x$ (тангенсоида) получается из графика в интервале $[0, \pi]$ простым повторением на основании свойства периодичности (рис. 26).

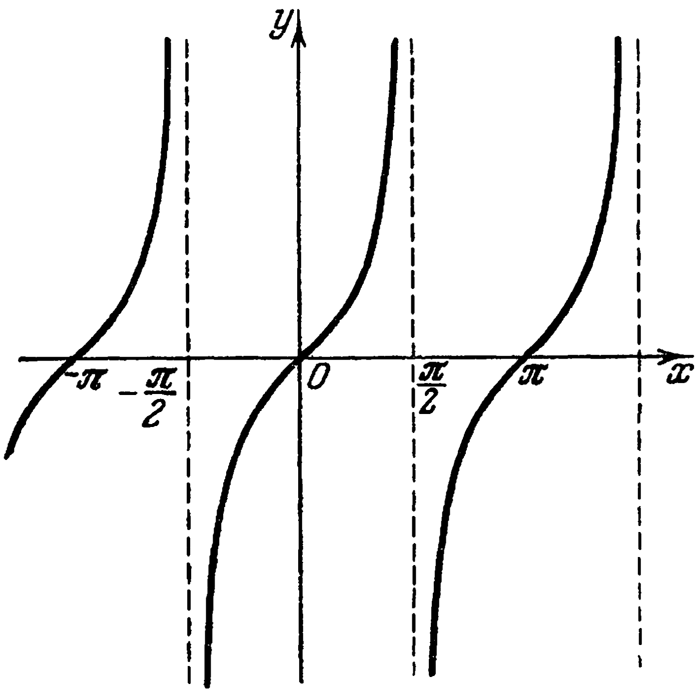

Рис. 26.

В каждом интервале, где функция $y=\operatorname{tg} x$ определена, она возрастает. Так как $y=\operatorname{tg} x$ — функция нечетная, то график симметричен относительно начала координат.

Рекомендуем читателю представить себе графики трех остальных тригонометрических функций ($\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\operatorname{ctg} x$) и затем описать их особенности.

II. Гармонические колебания. Тригонометрические функции имеют важные применения в математике, в естествознании и в технике. Они встречаются там, где приходится иметь дело с периодическими явлениями, т. е. явлениями, повторяющимися в одной и той же последовательности и в одном и том же виде через определенные интервалы аргумента (чаще всего — времени).

Простейшие из таких явлений — гармонические колебания, в которых расстояние s колеблющейся точки от положения равновесия является функцией времени t:

$$s=A\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Эту функцию называют *синусоидальной*. Постоянное число A[1]) называется *амплитудой колебания*. Число A представляет собой то наибольшее значение, которого может достигнуть s (размах

---

[1]) Мы всегда можем считать его положительным, так как если оно отрицательно, то функцию можно записать в виде

$$s=-A\sin(\omega t+\varphi_0+\pi).$$

колебания). Аргумент синуса $\omega t+\varphi_0$ называется *фазой колебания*, а число φ_0, равное значению фазы при $t=0$ — *начальной фазой*. Наконец, $\frac{\omega}{2\pi}$ называется *частотой колебания*.

Происхождение последнего термина делается ясным из связи между ω и периодом T нашей функции (*периодом колебания*). Функция $s=A\sin(\omega t+\varphi_0)$ периодическая; ее период T равен $\frac{2\pi}{\omega}$, так как для увеличения фазы на 2π нужно к независимой переменной t прибавить $\frac{2\pi}{\omega}$. Поэтому $\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{T}$, и значит, число $\frac{\omega}{2\pi}$ показывает, сколько периодов укладывается в единице времени, т. е. сколько раз данное периодическое явление повторяется в течение единицы времени; это число дает, следовательно, частоту явления. Число ω показывает, сколько раз явление повторится за 2π единиц; его называют *круговой частотой*, а иногда и просто *частотой*.

Для того чтобы построить график синусоидальной функции

$$s=A\sin(\omega t+\varphi_0),$$

запишем эту функцию в виде $s=A\sin\omega\left(t+\frac{\varphi_0}{\omega}\right)$ и применим для построения графика этой функции методы, указанные в п. **14**.

Рекомендуем читателю самостоятельно построить график функции

$$s=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right);$$

этот график показан на рис. 27.

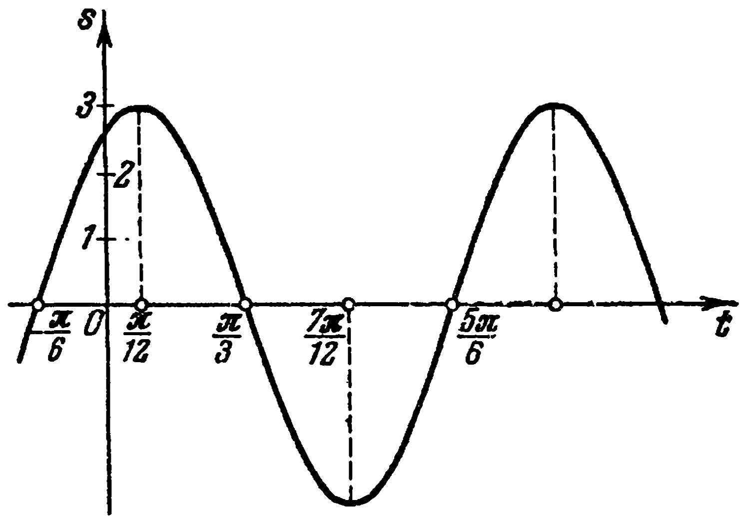

Рис. 27.

Колебания, описываемые уравнением

$$s=A\sin(\omega t+\varphi_0),$$

называются *простыми гармоническими колебаниями*, а их графики — *простыми гармониками*.

Часто встречаются суммы простых гармонических колебаний — функции вида

$$s=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)+\ldots+A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n),$$

где $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ — постоянные.

Колебания, получающиеся в результате сложения нескольких простых гармонических колебаний, называются *сложными гармоническими колебаниями*, а их графики — *сложными гармониками*. Эти графики могут иметь очень сложную форму. На рис. 28 дан график функции

$$s = 2\sin 2t + \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(пунктиром проведены графики слагаемых функций). Эта функция периодическая, с периодом 2π. График ее является сложной

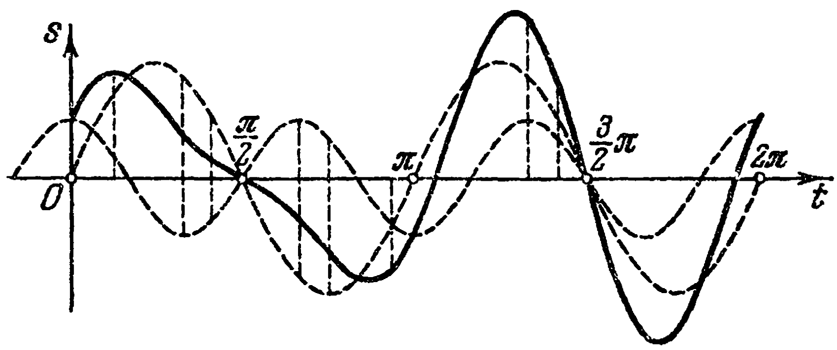

Рис. 28.

гармоникой, получившейся в результате наложения двух простых гармонических колебаний:

$$s = 2\sin 2t \quad \text{и} \quad s = \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right).$$

22. Обратные тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции определяются с помощью результатов п. 18. Начнем с функции, обратной для функции $y = \sin x$. Область определения $\sin x$ — всю числовую ось — разбиваем на интервалы монотонности, которых бесконечно много:

$$\ldots, \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \ldots$$

Выберем в качестве основного интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и функцию, обратную к функции $y = \sin x$ на этом интервале, обозначим через $y = \arcsin x$. Так как область значений функции $y = \sin x$ есть интервал $[-1, 1]$, то этот же интервал есть о б л а с т ь о п р е д е л е н и я функции $y = \arcsin x$; областью ее з н а ч е н и й является интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Значение функции $\arcsin x$ есть радианная мера угла, синус которого равен данному значению независимой переменной x; из всех углов, удовлетворяющих этому условию, выбирается угол, заключенный между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, равенство $y = \arcsin x$ эквивалентно двум следующим:

$$\sin y = \sin(\arcsin x) = x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Строя по обычному правилу график обратной функции, т. е. перегибая рис. 24 по биссектрисе первого и третьего координатных углов, получим жирную линию на рис. 29. Сразу видно, что функция $y = \arcsin x$ возрастающая и нечетная $(\arcsin(-x) = -\arcsin x)$.

Образуя в каждом из указанных выше интервалов монотонности соответствующую обратную функцию, мы получим бесконечно много однозначных ветвей; все они по-прежнему определены в интервале $[-1, 1]$. Графики двух из них, соответствующих интервалам $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, показаны на рис. 29. Рекомендуем читателю проверить, что первая функция равна $-\pi - \arcsin x$, а вторая $\pi - \arcsin x$, и написать выражения еще для двух функций, соответствующих соседним интервалам. Всю совокупность однозначных ветвей обозначают через

$$y = \operatorname{Arcsin} x.$$

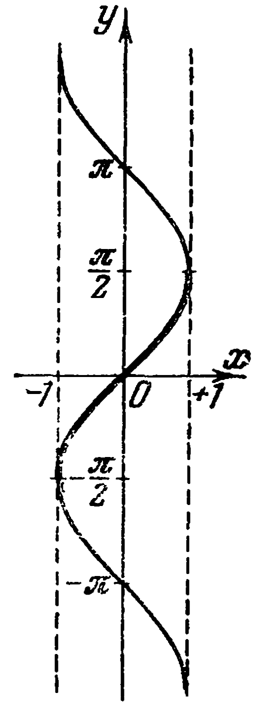

Рис. 29.

Пользуясь уже принятой терминологией, можно сказать, что функция $\operatorname{Arcsin} x$ бесконечнозначна, так как она состоит из бесконечного числа однозначных ветвей. Изображая их все на графике, мы, очевидно, получим ту же синусоиду, что и на рис. 24, только иначе расположенную относительно осей координат (рис. 29).

Обычно приходится иметь дело только с ветвью $y = \arcsin x$; ее называют *главным значением* функции $\operatorname{Arcsin} x$.

Совершенно аналогично определяется функция, обратная к функции $y = \cos x$. Интервалами монотонности $\cos x$ являются интервалы

$$\ldots, [-2\pi, -\pi], [-\pi, 0], [0, \pi], [\pi, 2\pi], \ldots$$

Функцию, обратную к функции $y = \cos x$ в интервале $[0, \pi]$, обозначим через $y = \arccos x$. График ее показан жирной линией на рис. 30. Эта функция определена в интервале $[-1, 1]$ и принимает значения, заключенные между 0 и π:

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Следовательно, равенство $y = \arccos x$ эквивалентно двум равенствам

$$\cos y = \cos(\arccos x) = x, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

Функция $y = \arccos x$ убывающая, так как в интервале $[0, \pi]$ убывает и $\cos x$. Для вычисления ее значений важно отметить равенство

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

которое немедленно вытекает из формулы приведения $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

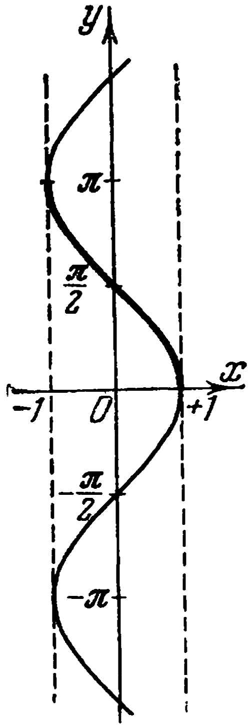

Рис. 30.

Совокупность всех однозначных ветвей обратной функции (их по-прежнему бесконечно много) обозначим через $y = \operatorname{Arccos} x$; графики этих ветвей изображены на рис. 30. Функция $y = \arccos x$ называется *главным значением* $\operatorname{Arccos} x$.

Отметим следующие формулы, проверить которые предоставляем читателю:

$$\sin(\arccos x) = +\sqrt{1 - x^2},$$
$$\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1 - x^2},$$
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Перейдем к функции, обратной для функции $y = \operatorname{tg} x$. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} x$ возрастает и, следовательно, имеет обратную, которую мы обозначим через $y = \operatorname{arctg} x$; графиком ее служит жирная линия на рис. 31. Из свойств функции $\operatorname{tg} x$ следует, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на всей числовой оси и является возрастающей и нечетной. Область ее значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Совокупность остальных однозначных ветвей обозначается через $y = \operatorname{Arctg} x$; графики их как бы «параллельны» графику $\operatorname{arctg} x$ и получаются параллельным переносом этого графика вдоль оси Oy на величину $k\pi$, где k — любое целое число (рис. 31).

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ называется *главным значением* $\operatorname{Arctg} x$. Рекомендуем читателю также исследовать функцию, обратную к $\operatorname{ctg} x$.

Всюду в дальнейшем, если не будет оговорено противоположное, под обратными тригонометрическими функциями мы будем понимать их главные значения.

Так как функции $y=\sin x$ и $y=\arcsin x$ взаимно обратны, то имеем

$$\sin(\arcsin x)=x, \qquad \arcsin(\sin x)=x.$$

Первое из этих равенств имеет место в интервале $[-1, 1]$, так как функция $\arcsin x$ определена только в этом интервале. Второе равенство справедливо в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ибо функция $\arcsin x$ обратна функции $\sin x$ именно в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Если функцию $y=\arcsin(\sin x)$ рассматривать на всей оси Ox, то тогда она уже не всегда будет просто равна аргументу x, как в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Заметим прежде всего, что это — периодическая функция с периодом, равным 2π:
$\arcsin[\sin(x+2\pi)]=\arcsin(\sin x)$.

Поэтому нам достаточно узнать, какова эта функция еще в интервале $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, чтобы знать ее на всей оси Ox. Если $\frac{\pi}{2}<x<$ $<\frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2}<\pi-x<\frac{\pi}{2}$, и мы имеем:

$$\arcsin(\sin x)= \\ =\arcsin[\sin(\pi-x)]=\pi-x,$$

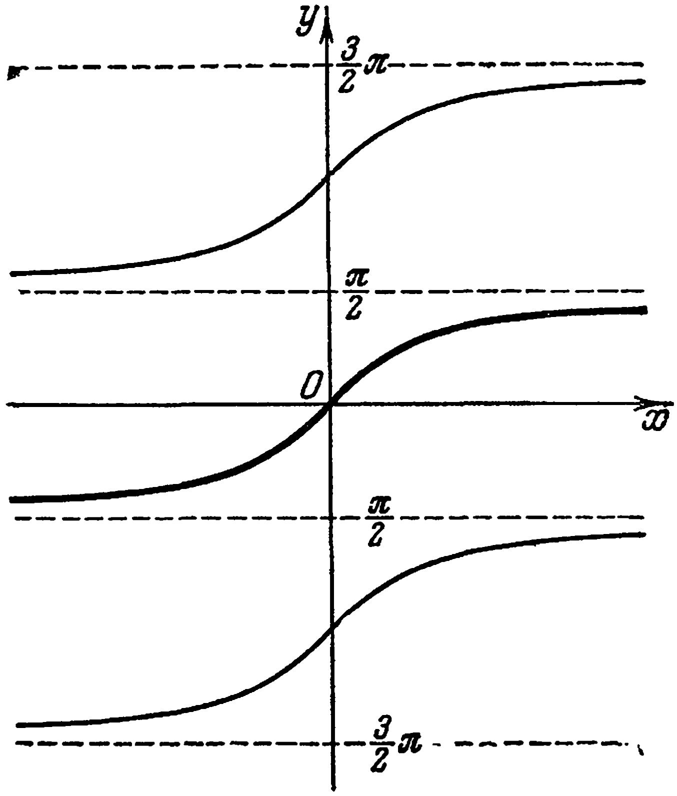

Рис. 31.

т. е. графиком нашей функции в интервале $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ служит отрезок прямой $y=\pi-x$, пересекающейся под прямым углом с прямой $y=x$ в точке

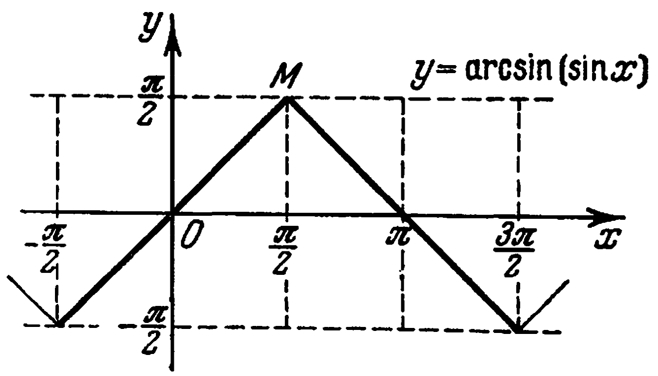

Рис. 32.

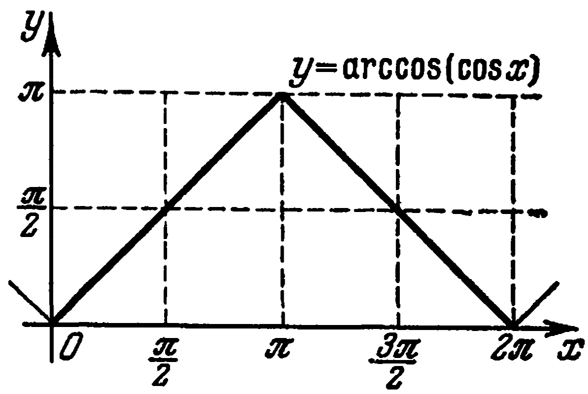

Рис. 33.

$M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y=\arcsin(\sin x)$ в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ изображен на рис. 32; дальше он продолжается периодически.

Рассуждая вполне аналогично, придем к следующим соотношениям:

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{для} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Функция $y = \arccos(\cos x)$ определена на всей оси Ox, имеет период, равный 2π, причем в интервале $[\pi, 2\pi]$ она равна $2\pi - x$; графиком этой функции служит та же линия, что и изображенная на рис. 32, только иначе расположенная относительно осей координат (рис. 33).

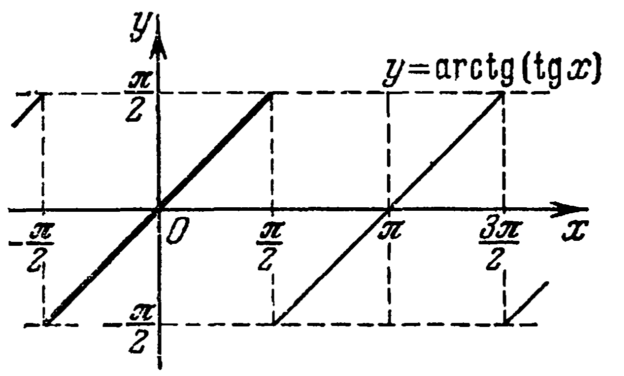

Рис. 34.

Точно так же найдем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{для} \quad -\infty < x < \infty,$$
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{для} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Функция $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ определена на всей оси Ox, кроме точек $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число, и имеет период, равный π; график этой функции, показанный на рис. 34, состоит из отрезков прямых линий, повторяющих через период, равный π, отрезок прямой $y = x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

23. Гиперболические и обратные гиперболические функции. Хотя функции, названные в заголовке пункта, не принадлежат к числу основных элементарных функций, мы все же рассмотрим их здесь, так как они могут быть исследованы самыми простыми средствами. Эти функции понадобятся нам в дальнейшем; кроме того, они встречаются при решении различных прикладных задач (в курсах электротехники, сопротивления материалов и др.).

I. Определение. ***Гиперболическими косинусом*** **($\operatorname{ch} x$),** ***синусом*** **($\operatorname{sh} x$) и** ***тангенсом*** **($\operatorname{th} x$) называются функции, определенные формулами**

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

где $e = 2{,}718\ldots$ (см. п. 31).

Эти функции определены на всей числовой оси. Они связаны рядом соотношений, аналогичных соотношениям между соответствующими тригонометрическими функциями, что и объясняет их названия. В частности, имеют место легко проверяемые формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}.$$

Графики функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ легко построить по графикам функций e^x и e^{-x} (см. п. **20**), используя метод, указанный в конце п. **14.** График функции $y=\operatorname{ch} x$ (и его построение) показан на рис. 35, *а*). Эта функция четная и положительная. Функция $y=\operatorname{sh} x$ нечетная; при $x>0$ она положительна, при

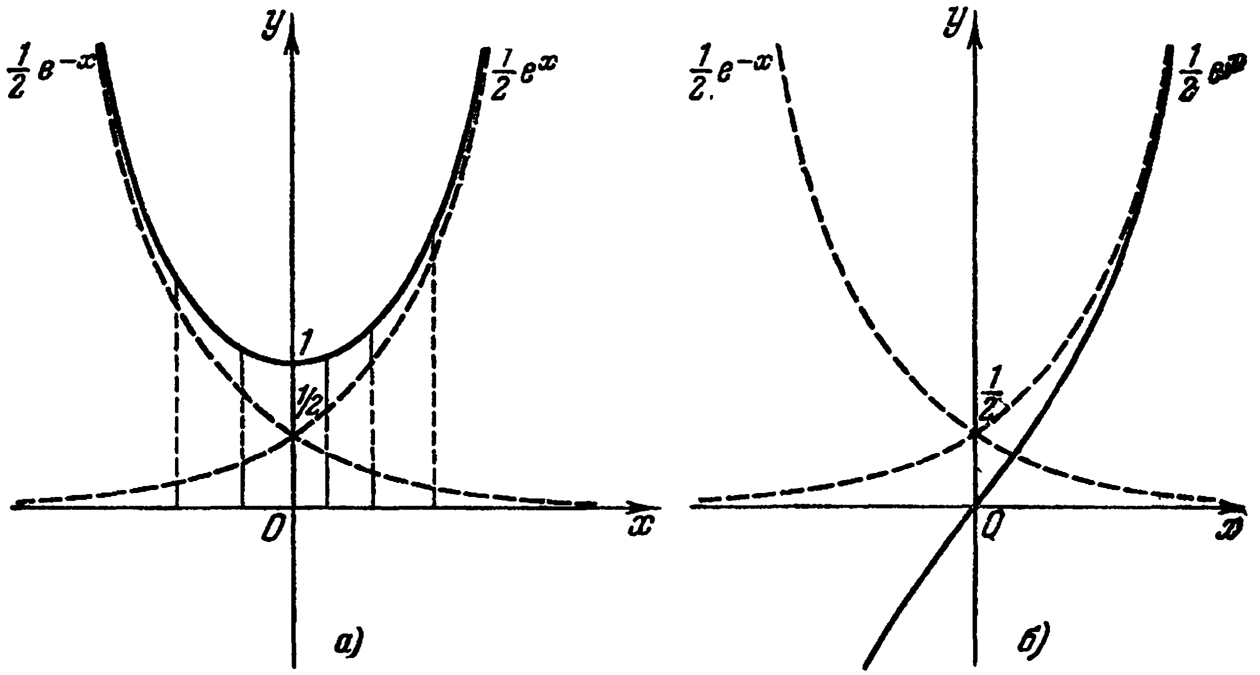

Рис. 35.

$x<0$ отрицательна и при $x=0$ равна нулю. Ее график показан на рис. 35, *б*).

Из графиков, да и прямо из определяющих формул видно, что при больших положительных значениях x слагаемое $e^{-x}/2$ роли не играет, и можно считать, что

$$\operatorname{ch} x \approx \frac{e^x}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} x \approx \frac{e^x}{2}.$$

Уже при $x>4$ абсолютная ошибка этих приближенных равенств меньше чем 0,01, а относительная ошибка меньше чем 0,04%.

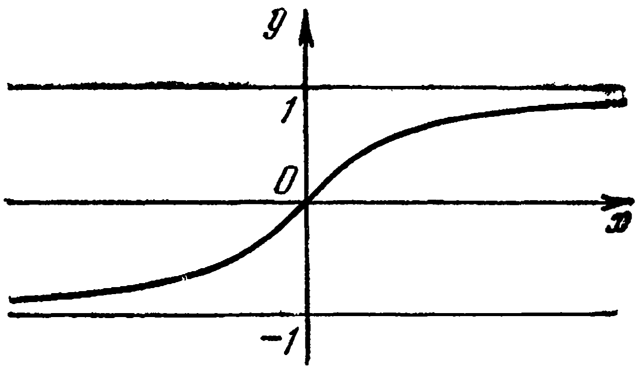

Рис. 36.

Отсюда ясно, что $\operatorname{th} x$ при больших положительных значениях x приближается к единице, оставаясь все время меньше единицы. Так как функция $y=\operatorname{th} x$ нечетная и при $x=0$ равна нулю, то уже можно схематически построить ее график (рис. 36). (По форме он очень похож на график $\operatorname{arctg} x$ (рис. 31); надо только помнить, что его асимптотами являются прямые $y=\pm 1$, а не прямые $y=\pm\frac{\pi}{2}$, как для $\operatorname{arctg} x$.)

II. Обратные гиперболические функции. Функции, обратные к соответствующим гиперболическим функциям, обозначаются через

$$y = \operatorname{Arch} x, \quad y = \operatorname{Arsh} x, \quad y = \operatorname{Arth} x$$

(читается: ареа-косинус гиперболический, ареа-синус гиперболический, ареа-тангенс гиперболический).

Функция $\operatorname{sh} x$ определена и возрастает в интервале $(-\infty, \infty)$; область ее значений совпадает со всей осью Oy (рис. 35, *б*). Поэтому функция $y = \operatorname{Arsh} x$ также определена на всей числовой оси и возрастает. Ее можно выразить при помощи логарифмической функции. Для этого запишем равенство $y = \operatorname{Arsh} x$ в виде

$$x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

и разрешим полученное уравнение сначала относительно e^y, а затем и относительно y. После простых преобразований получаем $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$, откуда $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Второе решение квадратного уравнения $x - \sqrt{x^2+1}$ мы отбрасываем, так как оно при всех значениях x отрицательно и не может равняться положительной величине e^y. Вспоминая определение натуральных логарифмов (п. **20**, II), окончательно получаем

$$y = \operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \qquad (*)$$

Функция $\operatorname{ch} x$ убывает в интервале $(-\infty, 0]$ и возрастает в интервале $[0, \infty)$; область ее значений — интервал $[1, \infty)$. Следовательно, функция $y = \operatorname{Arch} x$ состоит из двух однозначных ветвей, определенных при $x \geqslant 1$. Проводя такие же выкладки, как при выводе формулы (*), получим два выражения:

$$(\operatorname{Arch} x)_1 = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right), \quad (\operatorname{Arch} x)_2 = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Первая функция обратна к функции $y = \operatorname{ch} x$ в интервале $(-\infty, 0]$, а вторая — в интервале $[0, \infty)$. Легко заметить, что

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}},$$

т. е. что $\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$. Разумеется, так и должно быть в силу четности функции $y = \operatorname{ch} x$.

Функция $y = \operatorname{Arth} x$ определена в интервале $(-1, 1)$ — это область значений функции $\operatorname{th} x$ — и, как нетрудно проверить, равна

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

В заключение порекомендуем читателю построить графики всех обратных гиперболических функций.

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие числа образуют множество действительных чисел?
2. Что называется числовой осью?
3. Что называется интервалом?
4. Определить понятие окрестности точки.
5. Что называется абсолютной величиной числа?
6. Сформулировать основные предложения об абсолютных величинах.
7. Что называется абсолютной ошибкой и предельной абсолютной ошибкой?
8. Что называется относительной ошибкой и предельной относительной ошибкой?
9. Что называется функцией одной независимой переменной? областью определения функции? областью значений функции?
10. Привести примеры функций целочисленного аргумента.
11. Что называется графиком функции в системе декартовых координат?
12. Что значит задать функцию? Определить табличное, аналитическое и графическое задания функции. Описать особенности, достоинства и недостатки каждого из этих способов.
13. Указать возможные способы обозначения функции.
14. Что такое частное значение функций? Как оно записывается?
15. Перечислить основные элементарные функции.
16. Какая функция называется сложной? Привести примеры сложных функций.
17. Какая функция называется элементарной?
18. Дать определения алгебраической, рациональной, иррациональной и трансцендентной функций.
19. Какая функция называется неявной? Привести примеры неявных функций.
20. Что называется нулем функции?
21. Какая функция называется четной? нечетной?
22. Какая функция называется периодической? Что такое период функции?
23. Какая функция называется возрастающей (убывающей) в интервале?
24. Что называется интервалом монотонности функции?
25. Что называется наибольшим (наименьшим) значением функции в интервале?
26. Описать построение графика функции $y=a_1 f(a_2x+a_3)+a_4$, где a_1, a_2, a_3, a_4 — постоянные, если известен способ построения графика функции $y=f(x)$.
27. Определить линейную функцию, начертить ее график, сформулировать и доказать ее основное свойство.
28. Определить квадратичную функцию, начертить ее график и описать ее поведение.
29. Определить дробно-линейную функцию, начертить ее график и описать ее поведение.
30. Какие функции называются взаимно обратными? Как построить график обратной функции по графику данной функции в системе декартовых координат?
31. Как определяются однозначные ветви функции, обратной для немонотонной функции?
32. Начертить графики степенных функций при различных показателях степени и описать поведение этих функций.
33. Начертить графики показательных функций при различных основаниях и описать поведение этих функций.

34. Начертить графики логарифмических функций при различных основаниях и описать поведение этих функций.

35. Начертить графики тригонометрических функций и описать поведение этих функций.

36. Что называется простым гармоническим колебанием, амплитудой, фазой, начальной фазой, периодом, частотой, круговой частотой колебания?

37. Как построить простую гармонику?

38. Что называется сложным гармоническим колебанием? Как построить сложную гармонику?

39. Начертить графики обратных тригонометрических функций и описать поведение этих функций.

40. Определить гиперболические функции, начертить их графики и описать поведение этих функций.

41. Описать свойства обратных гиперболических функций и начертить их графики.

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 1. Предел функции. Бесконечные величины

24. Предел функции непрерывного аргумента. Рассмотрим функцию $y=f(x)$ непрерывного аргумента x (см. п. 7) и введем важнейшее в математике понятие предела функции; это понятие играет фундаментальную роль во всем математическом анализе.

Пусть независимая переменная x неограниченно приближается к числу x_0. Это означает, что мы придаем x значения, сколь угодно приближающиеся к x_0, но не равные x_0. Запишем это так: $x \to x_0$, и будем говорить, что x стремится к x_0. Может оказаться при этом, что соответствующие значения $f(x)$ неограниченно приближаются к некоторому числу A. Тогда говорят, что число A есть предел функции $y=f(x)$ при $x \to x_0$ или что функция $y=f(x)$ стремится к числу A при $x \to x_0$.

Определение. **Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от числа x_0, соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A.**

Если A есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то это записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A.$$

Символ lim составляется из первых трех букв латинского слова limes (французского limite), означающего «предел».

Точка x_0, к которой стремится независимая переменная x, называется ее *предельной точкой*.

Следует обратить внимание на то, что в этом определении не требуется, чтобы функция была задана и в предельной точке; нужно только, чтобы функция была определена в какой-нибудь окрестности предельной точки, но не обязательно в самой точке. Так, например, функция $y=\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x=0$, но, как это будет доказано в п. **30**, она стремится к 1 при x, стремящемся к нулю. Отыскание предела функции, определенной в некоторой окрестности точки x_0, но не в ней самой, и будет составлять одну из важнейших задач теории пределов.

Как же проверить вычислениями, что число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$? Это делается так: задаем положительное как угодно малое число ε; если для него можно всегда подобрать такое положительное число δ, что для всех x (не равных x_0), удовлетворяющих неравенству

$$|x - x_0| < \delta$$

(т. е. для x, принадлежащих δ-окрестности точки x_0), будет справедливо также и неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

то число A действительно есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$. Мы увидим в дальнейшем, что подобную проверку, очень громоздкую и затруднительную в конкретных случаях, с которыми нам предстоит встречаться, не будет нужды производить, так как мы укажем простые правила для отыскания пределов в этих случаях.

В качестве примера возьмем функцию $y = 3x - 1$ и докажем, что она имеет при $x \to 1$ предел, равный 2. Зададим положительное число ε. Для того чтобы имело место неравенство

$$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon$$

или, что то же, неравенство

$$3|x - 1| < \varepsilon,$$

нужно, чтобы было выполнено неравенство

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, для всех x, отличающихся от 1 меньше чем на $\frac{\varepsilon}{3}$, наша функция будет отличаться от 2 меньше чем на ε, где ε — произвольное положительное число, и следовательно, функция $y = 3x - 1$ в самом деле стремится к 2 при $x \to 1$. В этом примере можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Наличие у функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ предела, равного A, геометрически иллюстрируется следующим образом (рис. 37): восставим к оси Ox в точке x_0 и к оси Oy в точке A перпендикуляры, продолжив их до пересечения в точке M, и произвольно зададим положительное число ε; тогда найдется такая δ-окрестность точки $x = x_0$, что часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая этой окрестности, будет содержаться в полосе, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$.

Должно быть ясно, что если при $x \to x_0$ функция имеет предел, то только один, ибо значения функции для значений x, приближающихся к x_0, должны быть как угодно близки к какому-то постоянному числу и, следовательно, не могут быть одновременно близки к д в у м р а з н ы м постоянным числам.

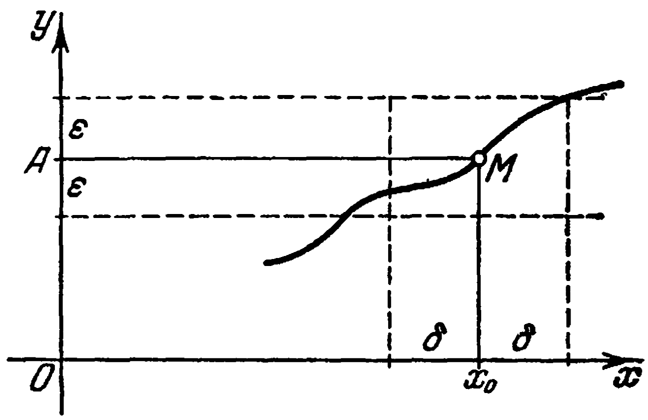

Рис. 37.

Приближаясь к своему пределу, функция может оставаться больше его или меньше его, а может становиться, по мере приближения аргумента к предельной точке, то больше его, то меньше, т. е. колеблясь около своего предела; при этом она может принимать и значения, равные пределу. Примеры этого мы встретим дальше.

Рассматривая постоянную величину A как функцию, следует считать, что она имеет предел, равный ей самой:

$$\lim_{x \to x_0} A = A.$$

Действительно, разность $A - A$ равна нулю и, значит, меньше любого наперед заданного положительного числа.

Функция $y = x$ при $x \to x_0$ имеет, как легко видеть, предел, равный x_0, какова бы ни была точка x_0:

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

В самом деле, неравенство

$$|x - x_0| < \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число, будет справедливо для всех x, принадлежащих ε-окрестности точки x_0, и значит, в данном случае можно взять просто $\delta = \varepsilon$.

Определение предела функции само по себе не дает еще способов его о т ы с к а н и я; ниже мы выведем некоторые правила, при помощи которых и будем отыскивать пределы функций.

Приведем теперь пример функции, не имеющей предела. Функция (п. 22)

$$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$$

при $x \to \frac{\pi}{2}$ не стремится ни к какому числу. Действительно, для значений x в достаточно малой окрестности точки $\frac{\pi}{2}$ и м е н ь ш и х $\frac{\pi}{2}$ значения функции будут как угодно близки к $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 34), а для значений x в той же окрестности, но больших $\frac{\pi}{2}$, значения функции будут как угодно близки к $-\frac{\pi}{2}$, и следовательно, нет такого числа, к которому значения функции были бы как угодно близки для всех значений x в окрестности точки $\frac{\pi}{2}$.

25. Бесконечно большой аргумент. Пусть независимая переменная x функции $y=f(x)$ неограниченно возрастает. Это означает, что мы придаем x любые значения, бо́льшие всякого наперед заданного положительного числа. Коротко говорят, что x стремится к положительной бесконечности, и записывают: $x \to +\infty$. Если x неограниченно убывает, т. е. становится меньше всякого наперед заданного отрицательного числа, то говорят, что

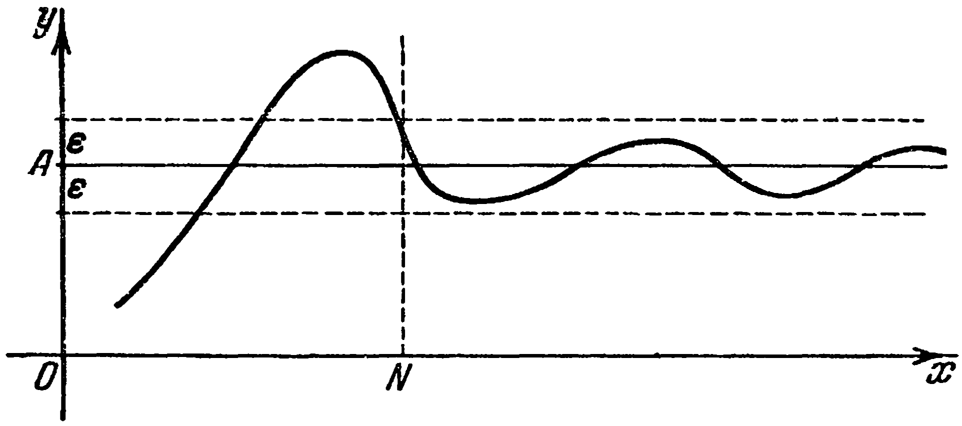

Рис. 38.

x стремится к отрицательной бесконечности, и записывают так: $x \to -\infty$. Аргумент функции, изменяющийся указанным образом, называется *бесконечно большим аргументом*.

Изучая функцию $f(x)$ при бесконечно большом аргументе, мы предполагаем, разумеется, что она определена при всех рассматриваемых значениях x.

Может оказаться, что при бесконечно большом аргументе соответствующие значения $f(x)$ неограниченно приближаются к некоторому числу A. Тогда говорят, что число A есть предел функции $y=f(x)$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ или что функция $y=f(x)$ стремится к числу A при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Рассмотрим сначала детально случай, когда $x \to +\infty$.

Определение. **Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ при $x \to +\infty$, если для всех достаточно больших значений x соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A.**

Если A есть предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, то это записывают так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} A.$$

Наличие у функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ предела, равного A, геометрически иллюстрируется следующим образом (рис. 38): восставим к оси Oy в точке A перпендикуляр и произвольно зададим положительное число ε; тогда найдется такое число N, что часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая значениям x, бóльшим этого числа, будет содержаться в полосе, ограниченной прямыми

$$y = A - \varepsilon, \quad y = A + \varepsilon.$$

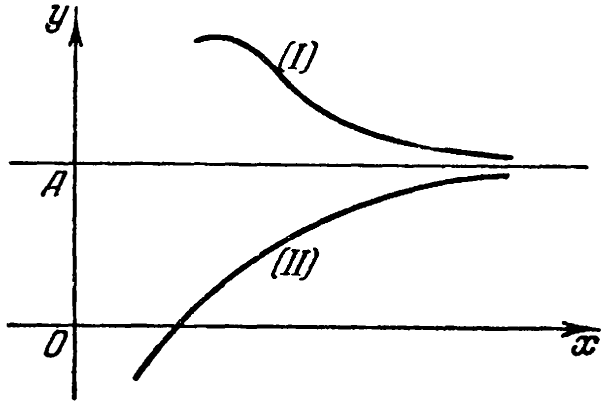

Рис. 39.

Легко привести геометрические примеры функций, которые приближаются к своему пределу, убывая (рис. 39, *I*), возрастая (рис. 39, *II*) и колеблясь (рис. 38). В последнем случае график может любое число раз пересекать прямую $y = A$, т. е. функция может любое число раз принимать значение, равное пределу.

Имея в виду геометрическую иллюстрацию предела функции при $x \to +\infty$, часто говорят, что *кривая* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ *имеет прямую* $y = A$ *своей асимптотой*.

Определение и геометрический смысл предела функции при $x \to -\infty$ совершенно аналогичны только что рассмотренным, и мы рекомендуем читателю сформулировать их самостоятельно.

Иногда бывает, что и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ функция $f(x)$ стремится к одному и тому же пределу A.

Это значит, что для *всех значений* x, *достаточно больших по абсолютной величине, соответствующие значения* $f(x)$ *как угодно мало отличаются от числа* A.

Записывают это так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} A.$$

Геометрическая иллюстрация этого случая заключается в том, что график функции $y = f(x)$ будет находиться в полосе, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, если только точки x будут достаточно удалены от точки $x = 0$ (рис. 40). Иначе говоря, прямая $y = A$ будет являться асимптотой графика функции $y = f(x)$ и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Проверить вычислениями, что число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), можно так: задаем положительное как угодно малое число ε; если для него всегда существует такое положительное число N, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$x > N \qquad (x < -N),$$

будет справедливо также и неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \tag{*}$$

то число A есть действительно предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

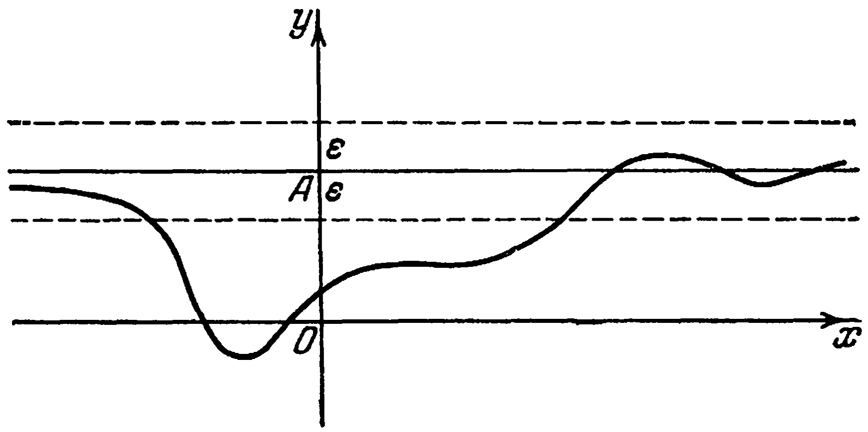

Рис. 40.

Если же неравенство (*) выполняется для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x| > N,$$

то это будет означать, что x может стремиться к бесконечности произвольным образом, т. е. что число A является пределом функции и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, короче, — при $x \to \infty$.

Примеры. 1) Функция

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

стремится к 1, если x произвольным образом стремится к ∞, т. е.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1.$$

Из рис. 14 ясно видно, что при неограниченном увеличении абсциссы соответствующая точка равнобочной гиперболы $y = \frac{x+1}{x-1}$ действительно неограниченно приближается к прямой $y = 1$. Убедимся теперь и с помощью вычислений в справедливости этого заключения. Зададим $\varepsilon > 0$. Для того чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{x+1}{x-1}-1\right|=\frac{2}{|x-1|}<\varepsilon,$$

т. е.

$$|x-1|>\frac{2}{\varepsilon},$$

достаточно иметь

$$|x|-1>\frac{2}{\varepsilon},$$

ибо $|x-1|\geqslant|x|-1$. Значит, для **всякого** x, удовлетворяющего неравенству

$$|x|>\frac{2}{\varepsilon}+1,$$

функция $\frac{x+1}{x-1}$ будет отличаться от 1 не больше чем на ε, а это и доказывает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$; здесь в качестве указанного выше числа N можно взять $\frac{2}{\varepsilon}+1$.

2) Функция $y=\operatorname{arctg} x$ имеет различные пределы при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. Из рис. 31 ясно, что

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}.$$

26. Последовательности и их пределы. Рассмотрим теперь функции целочисленного аргумента. Такой аргумент часто обозначают буквой n, а значения функции — какой-нибудь буквой, нижним индексом которой берется соответствующее значение целочисленного аргумента. Так, если $y=f(n)$ есть функция целочисленного аргумента n, то записывают: $y_n=f(n)$. Значения

$$y_1=f(1),\quad y_2=f(2),\quad \ldots,\quad y_n=f(n),\quad \ldots,$$

принимаемые функцией целочисленного аргумента, образуют, как говорят, *последовательность*.

Определение. ***Последовательностью* называется множество чисел, перенумерованных с помощью целых чисел и расположенных в порядке возрастания номеров.**

Если дана последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$, то тем самым каждому целому неотрицательному значению n поставлено в соответствие значение $y_n=f(n)$. Например, члены геометрической прогрессии $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ являются последовательными значениями функции $f(n)=\frac{1}{2^n}$.

Может случиться, что с увеличением n значения $y_n = f(n)$ неограниченно приближаются к некоторому числу A. Тогда говорят, что число A есть предел функции $f(n)$ целочисленного аргумента n или последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ при $n \to \infty$, и записывают:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

Определение. **Число A называется *пределом функции* $y = f(n)$ целочисленного аргумента n или последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, если для всех достаточно больших целых значений n соответствующие значения y_n как угодно мало отличаются от числа A.**

Мы видим, что понятие предела функции целочисленного аргумента можно считать частным случаем понятия предела функции бесконечно большого аргумента, стремящегося к положительной бесконечности, когда этот аргумент принимает только целые значения. Значит, число A есть предел последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, если для всякого положительного числа ε можно указать такое положительное число N, что при всех $n > N$ справедливы неравенства

$$|y_n - A| < \varepsilon.$$

Примеры. 1) Последовательность

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

имеет предел, равный 1. Действительно, для того чтобы модуль разности

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

был меньше заранее данного положительного числа ε, нужно только выполнение неравенства $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Таким образом, по заданному числу ε всегда можно указать такое $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, что при всех $n > N$ указанный модуль разности будет меньше ε, а это и означает, что 1 есть предел рассматриваемой последовательности.

2) Рассмотрим последовательность

$$\sin\frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2}, \quad \frac{1}{3}\sin\frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right], \ldots$$

Функция $y_n = \frac{1}{n}\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$ стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $|y_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ для всех n, удовлетворяющих условию $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Разность

$$y_n - 0 = \frac{1}{n} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

будет положительной или отрицательной в зависимости от того, нечетно или четно n. Значения y_n, неограниченно приближаясь к нулю, становятся попеременно то больше нуля, то меньше нуля. Переменная стремится к своему пределу, колеблясь вокруг него.

3) В элементарной геометрии доказывается, что периметр правильного вписанного в данную окружность n-угольника, как функция целочисленного аргумента n, имеет предел, который и принимается в качестве длины окружности. Аналогично и площадь этого n-угольника имеет предел, который и принимается за площадь круга.

4) Укажем примеры последовательностей, не имеющих предела.

а) Последовательность

$$\sin\frac{\pi}{2},\quad \sin\frac{2\pi}{2},\quad \sin\frac{3\pi}{2},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi}{2},\ \ldots$$

не имеет предела, так как $y_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ последовательно принимает значения 1, 0, —1, 0 и затем опять те же значения в том же порядке и т. д. Нет числа, к которому y_n неограниченно приближалось бы.

б) Функция $y_n = 2n + 1$, значения которой при $n = 1, 2, 3, \ldots$ составляют последовательность целых нечетных чисел $1, 3, 5, \ldots$, не стремится к пределу, так как значения y_n при $n \to \infty$ неограниченно увеличиваются.

27. Бесконечно большие величины. Ограниченные функции. В дальнейшем для сокращения письма мы будем приводить определения только для случая, когда x стремится к конечному пределу x_0. Необходимые изменения формулировок при стремлении x к бесконечности предоставляем сделать читателю.

I. Бесконечно большие величины. Рассмотрим случаи такого «предельного поведения» функции $y = f(x)$, когда она при $x \to x_0$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. В этих случаях говорят, что функция $f(x)$ является при $x \to x_0$ бесконечно большой величиной.

Определение. **Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения функции $f(x)$ по абсолютной величине превосходят любое наперед заданное сколь угодно большое положительное число.**

Если функция $f(x)$ — бесконечно большая величина при $x \to x_0$, то это записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Наше определение бесконечно большой величины указывает, что, как только аргумент x достаточно близко подойдет к x_0, абсолютная величина функции $f(x)$ станет как угодно большой. Как же проверить вычислениями, что функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является бесконечно большой величиной? Это делается так: задаем положительное как угодно большое число M; если для него можно подобрать такое положительное число δ, что для всех x, не равных x_0, удовлетворяющих неравенству

$$|x - x_0| < \delta,$$

будет справедливо также и неравенство

$$|f(x)| > M,$$

то функция $f(x)$ будет действительно бесконечно большой величиной при $x \to x_0$. В случае $x \to \infty$ то же самое будет, если для числа M можно подобрать такое положительное число N, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет справедливо также и неравенство

$$|f(x)| > M.$$

Тот факт, что функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ является бесконечно большой величиной, геометрически иллюстрируется следующим образом (рис. 41, *а*): произвольно зададим положительное число M;

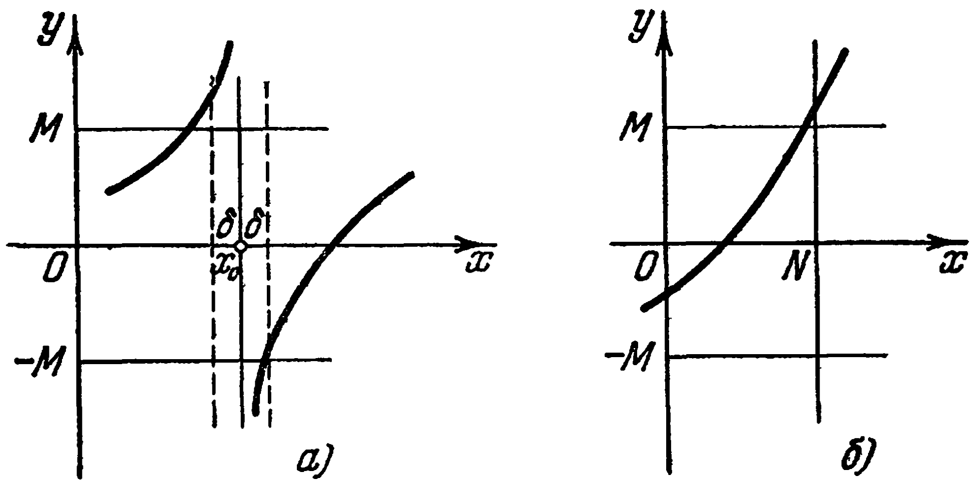

Рис. 41.

тогда найдется такая δ-окрестность точки $x = x_0$, что часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая этой δ-окрестности, будет находиться вне полосы, ограниченной прямыми $y = -M$, $y = M$. Случай, когда $x \to +\infty$, показан на рис. 41, *б*.

Функция $y=f(x)$, являющаяся при $x \to x_0$ бесконечно большой величиной, не имеет предела в обычном смысле. Желая, однако, отобразить ту закономерность в ее предельном поведении, которая заключается в неограниченном возрастании $|f(x)|$, говорят, что функция $f(x)$ стремится к бесконечности или имеет своим пределом бесконечность.

Допустим, что бесконечно большая величина $y=f(x)$ в некоторой окрестности точки $x=x_0$ принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения. Эту особенность в предельном поведении функции $f(x)$ выражают так:

Функция $f(x)$ стремится к положительной или соответственно к отрицательной бесконечности.

Записывают это следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Условность этих выражений и записей необходимо всегда иметь в виду и помнить, что бесконечность (∞) не есть число, поэтому и говорить о каких-нибудь действиях над ∞ лишено всякого смысла.

Нельзя смешивать постоянное очень большое число с бесконечно большой величиной.

Примеры. 1) Функция $y=\frac{1}{x}$ при $x \to 0$ является бесконечно большой величиной. Действительно, для справедливости неравенства

$$\frac{1}{|x|} > M,$$

где M — любое положительное число, нужно только, чтобы выполнялось неравенство

$$|x| < \frac{1}{M},$$

т. е. чтобы значения x принадлежали $\frac{1}{M}$-окрестности точки $x=0$ $\left(\text{в данном примере } \delta = \frac{1}{M}\right)$. Итак,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Если $x \to 0$ и x принимает только отрицательные значения, то $y=\frac{1}{x}$ стремится к $-\infty$, а если только положительные, то $y= \frac{1}{x}$ стремится к $+\infty$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Отмеченный сейчас характер предельного поведения функции $y=\frac{1}{x}$ можно отчетливо увидеть по ее графику — известной равнобочной гиперболе.

2) Функция $y=\frac{x+1}{x-1}$ — бесконечно большая величина при $x \longrightarrow 1$, при этом она стремится к $-\infty$, если x остается меньше 1, и стремится к $+\infty$, если x остается больше 1 (см. рис. 14).

3) Функция $y=\frac{1}{x^2}$ при $x \longrightarrow 0$ имеет пределом $+\infty$ при любом предельном изменении аргумента x, стремящегося к нулю.

4) Функция $y=a^x$, как легко убедиться, является положительной бесконечно большой величиной при $x \longrightarrow +\infty$, если $a>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$. При $a<1$ имеем $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ (см. рис. 22).

II. Ограниченные функции.

Определение. **Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* в данном интервале, если существует такое положительное число M, что при всех значениях x, принадлежащих этому интервалу, выполняется соотношение $|f(x)| \leqslant M$. В противном случае функция называется *неограниченной*.**

График ограниченной функции целиком лежит между прямыми $y=-M$ и $y=M$. Иногда бывает удобнее говорить, что функция ограничена, если ее значения заключены между какими-либо двумя числами A и B:

$$A \leqslant f(x) \leqslant B.$$

В этом случае ее график лежит между прямыми $y=A$ и $y=B$.

Например, функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ ограничены на всей оси Ox, а функция $y=a^x$ не ограничена на оси Ox. Следует подчеркнуть, что, говоря об ограниченности функции, необходимо указывать интервал, в котором она рассматривается. Так, функция $y=\frac{1}{x}$ ограничена в интервале $(1, \infty)$ и не ограничена в интервале $(0, 1)$; функция $y=\operatorname{tg} x$ ограничена в интервале $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ и не ограничена в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В связи со сказанным введем следующее определение.

Определение. **Функция называется *ограниченной* при $x \longrightarrow x_0$, если в некоторой окрестности точки x_0 эта функция ограничена.**

Разумеется, всякая постоянная величина является ограниченной. Точно так же и всякая функция $y=f(x)$, имеющая при $x \longrightarrow x_0$ предел, является ограниченной при $x \longrightarrow x_0$. В самом деле, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

то в некоторой окрестности точки x_0 значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A.

Величина, бесконечно большая при $x \to x_0$, является, конечно, неограниченной функцией при $x \to x_0$.

Заметим, что обратное заключение уже не обязательно справедливо, а именно не всякая неограниченная функция является бесконечно большой величиной. Например, функция $y = x \sin x$ принимает сколь угодно большие значения $\left(y_{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \text{где } k \text{ — любое целое число}\right)$ и, следовательно, не является ограниченной при $x \to \infty$, в то же время она обращается в нуль при сколь угодно больших значениях x ($y_{x=k\pi} = 0$) и, значит, не может стремиться к бесконечности. Ведь последнее означает, что при всех достаточно больших x значения y по абсолютной величине сколь угодно велики и, разумеется, не могут равняться нулю. Рекомендуем читателю выяснить геометрический смысл сделанного замечания, построив схематический график функции $y = x \sin x$.

28. Бесконечно малые величины.

Определение. **Функция, стремящаяся к нулю при $x \to x_0$, называется *бесконечно малой величиной* при $x \to x_0$.**

Говорят также, что эта функция есть бесконечно малая величина в окрестности точки x_0.

Примерами бесконечно малых величин могут служить функции:

$$y = x^2 \text{ при } x \to 0,\quad y = x - 1 \text{ при } x \to 1,\quad y = \frac{1}{x} \text{ при } x \to \infty,$$
$$y = 2^x \text{ при } x \to -\infty.$$

Нельзя смешивать постоянное очень малое число с бесконечно малой величиной. *Единственным числом, которое рассматривается в качестве бесконечно малой величины, служит нуль* (в силу того, что предел постоянной равен ей самой).

Бесконечно малая величина есть, разумеется, величина ограниченная.

Бесконечно большие и бесконечно малые величины играют очень важную роль в математическом анализе. Между ними существует простая связь, хотя первые из них представляют собой функции, не имеющие предела, а вторые—функции, имеющие предел.

Теорема. **Если функция $f(x)$ — бесконечно большая величина, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая величина; если $\varphi(x)$ — бесконечно малая величина, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно большая величина.**

Доказательство. Пусть $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$; нам нужно убедиться в том, что $\frac{1}{f(x)} \to 0$.

Зададим произвольное малое число $\varepsilon > 0$ и возьмем число $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Так как $f(x)$—бесконечно большая величина, то для всех x, достаточно близких к x_0, будет

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Но тогда

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Аналогично доказывается и вторая часть теоремы; нужно только считать, что в некоторой окрестности точки x_0 функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ определена, т. е. что $\varphi(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$.

Важными для дальнейшего являются следующие теоремы.

Прямая теорема. **Если функция имеет предел, то ее можно представить как сумму постоянной, равной ее пределу, и бесконечно малой величины.**

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда, если ε — произвольное малое положительное число, то $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x, достаточно близких к x_0, а это и означает, в соответствии с определением, что $f(x) - A$ есть бесконечно малая величина. Следовательно,

$$f(x) - A = \alpha(x), \quad \text{или} \quad f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $x \to x_0$. Разумеется, $\alpha(x)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, т. е. функция $f(x)$ может быть как больше, так и меньше своего предела A.

Обратная теорема. **Если функцию можно представить как сумму постоянной и бесконечно малой величины, то постоянное слагаемое есть предел функции.**

Доказательство. Из равенства $f(x) = A + \alpha(x)$, где A — постоянная, а $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ — бесконечно малая величина, следует, что если ε — произвольное малое положительное число, то

$$|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$$

для всех x, достаточно близких к x_0. Но это и означает, что $f(x)$ имеет своим пределом число A, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

что и требовалось доказать.

29. Правила предельного перехода. Выведем сейчас простейшие правила предельного перехода, т. е. правила, по которым можно находить пределы функций. Сначала мы будем рассматривать теоремы для бесконечно малых величин, а затем в качестве следствий — теоремы для функций, стремящихся к пределам, не обязательно равным нулю. Эти теоремы и будут давать нам правила предельного перехода в случаях, когда функция является результатом арифметических действий над функциями, пределы которых заранее известны.

Краткости ради будем обозначать здесь функции, имеющие пределы, через u, v, w, α, β и т. п. и писать $\lim u$, $\lim v$ и т. п., не указывая, при каком именно изменении независимой переменной x рассматривается предел. При этом, однако, говоря о нескольких функциях, мы будем предполагать, что они стремятся к своим пределам при одном и том же изменении независимой переменной (т. е. при стремлении аргумента к одной и той же предельной точке или к ∞). Как и раньше, все доказательства будут проводиться в предположении, что $x \to x_0$. Необходимые изменения для случая $x \to \infty$ предоставляем сделать читателю.

Теорема 1. **Сумма двух, трех и вообще конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.**

Доказательство. Возьмем две бесконечно малые величины α и β и докажем, что их сумма ω:

$$\omega = \alpha + \beta$$

также бесконечно малая величина.

Зададим любое положительное число ε. Существует такая окрестность предельной точки, что для всех ее точек (кроме, быть может, самой предельной) будем иметь[1])

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей

$$|\omega| = |\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|,$$

то в указанной окрестности будет

$$|\omega| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и доказывает, что ω — бесконечно малая величина в окрестности нашей предельной точки. Ясно, что доказательство полностью сохраняется, если вместо суммы бесконечно малых величин рассматривать их разность.

---

[1]) Если окрестности, в которых $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$, не совпадают, то оба эти неравенства будут выполняться в наименьшей из них.

Пусть теперь дана сумма ω трех бесконечно малых слагаемых α, β, γ:

$$\omega=\alpha+\beta+\gamma.$$

Мы можем считать, что имеем сумму двух слагаемых $(\alpha+\beta)+\gamma$, причем по доказанному $(\alpha+\beta)$ — величина бесконечно малая; на основании того же соображения сумма двух бесконечно малых $(\alpha+\beta)$ и γ также является бесконечно малой величиной и т. д. Таким образом, последовательно теорема может быть доказана для суммы любого постоянного числа слагаемых.

Специально сделанная оговорка о конечности числа слагаемых имеет существенное значение. Дело в том, что в анализе приходится рассматривать особые суммы, в которых изменяются и сами слагаемые, и их число. К таким суммам теорема не относится.

Если, например, допустить, что число слагаемых неограниченно возрастает по мере стремления к нулю каждого из них, то утверждение теоремы может оказаться неверным. Пусть

$$\alpha=\frac{1}{n^2}, \quad \beta=\frac{2}{n^2}, \ \ldots, \ \eta=\frac{n}{n^2};$$

при $n\to\infty$ каждая из этих величин стремится к нулю, но вместе с тем растет и их число. Сумма

$$\omega=\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

при $n\to\infty$ — вовсе не бесконечно малая величина, а величина, стремящаяся к $\frac{1}{2}$.

Из теоремы I непосредственно следует

Теорема I′. **Предел суммы конечного числа слагаемых равен сумме пределов этих слагаемых.**

Доказательство. Пусть даны определенное число k слагаемых $u, v, \ldots, t$, стремящихся соответственно к пределам $a, b, \ldots, d$, и их сумма w:

$$w=u+v+\ldots+t.$$

Докажем, что

$$\lim w=\lim(u+v+\ldots+t)=\lim u+\lim v+\ldots+\lim t=$$
$$=a+b+\ldots+d.$$

Имеем (см. прямую теорему в п. 28)

$$u=a+\alpha, \quad v=b+\beta, \ \ldots, \ t=d+\tau,$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \tau$ — бесконечно малые величины. Следовательно,

$$w=(a+b+\ldots+d)+(\alpha+\beta+\ldots+\tau),$$

где $\omega = \alpha + \beta + \ldots + \tau$, как сумма k бесконечно малых слагаемых, в силу теоремы I является бесконечно малой величиной. Так как w равна сумме бесконечно малой величины ω и постоянной $a + b + \ldots + d$, то последняя и является пределом для w (см. обратную теорему п. 28).

Теорема II. **Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая величина.**

Доказательство. Пусть α—бесконечно малая величина, а u—функция, ограниченная в некоторой окрестности предельной точки: $|u| \leqslant M$. Докажем, что $\lim (u\alpha) = 0$.

Зададим произвольно малое положительное число ε. Значения α в некоторой окрестности предельной точки удовлетворяют неравенству $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$; следовательно,

$$|u\alpha| = |u|\,|\alpha| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

откуда и вытекает справедливость теоремы.

В частности,

$$\lim (c\alpha) = 0,$$

если c — постоянная, а $\alpha \to 0$.

Так как бесконечно малая величина—ограниченная, то произведение двух бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.

Утверждение теоремы может стать неверным, если u не есть ограниченная функция $\left(\text{пример: } x^2 \cdot \frac{1}{x} \to \infty \text{ при } x \to \infty\right)$.

Из теорем I и II следует

Теорема II′. **Предел произведения конечного числа множителей равен произведению пределов этих множителей.**

Доказательство. Сохраняя обозначения теоремы I′, мы докажем, что

$$\lim w = \lim (uv \ldots t) = \lim u \lim v \ldots \lim t = ab \ldots d.$$

Возьмем сначала произведение двух множителей: u и v. Имеем

$$u = a + \alpha, \quad v = b + \beta$$

и, значит,

$$w = uv = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + (a\beta + b\alpha + \alpha\beta).$$

Величина, заключенная в скобки, вследствие теорем II и I бесконечно мала, и потому

$$\lim w = ab.$$

Пусть дано три множителя: u, v, t. Тогда

$$\lim w = \lim (uvt) = \lim [(uv)\,t] = \lim (uv) \lim t = \lim u \lim v \lim t.$$

Теорему легко последовательно распространить на любое конечное число множителей.

Из этой теоремы, в частности, следует, что:

1) *постоянный множитель можно выносить за символ предела*:

$$\lim cu = c \lim u,$$

так как предел постоянной величины равен самой этой величине, и

2) *предел целой положительной степени функции равен той же степени предела этой функции*:

$$\lim u^n = \lim (u \cdot u \ldots u) = \lim u \lim u \ldots \lim u = (\lim u)^n.$$

Теорема III. **Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.**

Доказательство. Пусть α — бесконечно малая величина, а u — функция, предел которой отличен от нуля: $\lim u = A \neq 0$. Теорема утверждает, что $\frac{\alpha}{u} \to 0$.

Для доказательства убедимся в том, что $\frac{1}{u}$ — ограниченная функция. Пусть, например, $A > 0$. Значения функции u приближаются к числу A и в некоторой окрестности предельной точки будут больше, например, чем $\frac{A}{2}$, т. е. $u > \frac{A}{2}$; тогда

$$0 < \frac{1}{u} < \frac{2}{A}.$$

Это и означает, что функция $\frac{1}{u}$ ограничена в окрестности предельной точки.

Аналогично проводится доказательство и для случая $A < 0$. (Рекомендуем читателю в качестве упражнения провести его самостоятельно.)

В силу того, что частное $\frac{\alpha}{u}$ можно рассматривать как произведение ограниченной функции $\frac{1}{u}$ на бесконечно малую α, по теореме II

$$\lim \frac{\alpha}{u} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема III′. **Предел частного равен частному от деления пределов, если только предел знаменателя не равен нулю.**

Доказательство. Пусть $\lim u = a$ и $\lim v = b \neq 0$. Тогда $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, где α и β — бесконечно малые величины.

Покажем, что

$$\lim w = \lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} = \frac{a}{b}.$$

Действительно,

$$w = \frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha - a\beta}{b\,(b+\beta)},$$

но дробь $\dfrac{b\alpha - a\beta}{b\,(b+\beta)}$ в силу теоремы III является бесконечно малой величиной: числитель ее на основании предыдущих теорем бесконечно мал, а предел знаменателя, равный b^2, по условию отличен от нуля. Значит, $\lim w = \dfrac{a}{b}$.

Если $b = 0$, то теорема теряет смысл.

Приведем пример, иллюстрирующий изложенные правила:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 3} = \frac{\lim\,(3x^3 - 2x^2 + x + 1)}{\lim\,(x^2 - 5x + 3)} =$$

$$= \frac{3\,(\lim x)^3 - 2\,(\lim x)^2 + \lim x + 1}{(\lim x)^2 - 5\,(\lim x) + 3} = \frac{3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 + 1}{2^2 - 5 \cdot 2 + 3} = -6\frac{1}{3}.$$

В этом примере мы искали предел **рациональной** функции при условии, что аргумент стремится к конечному значению (не обращающему, однако, знаменатель дроби в нуль). Оказалось, как легко заметить, что для того, чтобы найти такой предел, достаточно в выражение функции подставить вместо независимой переменной ее предельное значение[1].

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда теоремы о пределах неприменимы. Особенно часто это бывает при отыскании предела отношения $\dfrac{u}{v}$, когда предел знаменателя равен нулю. При этом, если предел числителя не равен нулю, то отношение $\dfrac{v}{u}$ является величиной бесконечно малой (см. теорему III), а отношение $\dfrac{u}{v}$ является величиной бесконечно большой и $\lim \dfrac{u}{v} = \infty$. *Если же и числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, то для отыскания предела необходимы дополнительные преобразования или специальные рассмотрения.*

Точно так же дополнительного исследования требуют и случаи, когда функция не определена в предельной точке и когда аргумент x стремится к бесконечности. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие эти случаи.

---

[1] Далее, в § 2, мы увидим, что этот простой способ отыскания предела относится **ко всякой элементарной функции**, если только предельная точка принадлежит области определения функции.

Примеры. 1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$.

При $x \to 3$ знаменатель стремится к нулю, но к нулю стремится и числитель. Но так как $x^2-9=(x-3)(x+3)$, то $\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{x+3}$ для всех значений x, отличных от $x=3$. Поэтому, в соответствии с определением предела, получаем

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}.$$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

Эта функция стремится к ∞, так как знаменатель дроби при $x \to 1$ есть бесконечно малая величина, а числитель при этом к нулю не стремится. Действительно, $\lim\limits_{x \to 1}(x^2-5x+4)=0$, а $\lim\limits_{x \to 1}(2x-3)=-1$; поэтому в силу теоремы III

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-5x+4}{2x-3} = 0,$$

а так как величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая, то

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4} = \infty.$$

3) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1}$.

Здесь и знаменатель и числитель — бесконечно малые величины. Имеем

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1}$. Деля числитель и знаменатель на x, будем иметь

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1+\lim\frac{1}{x}}{1-\lim\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

5) Если $x \to \infty$, то дробно-рациональная функция стремится либо к нулю, либо к бесконечности, либо к конечному числу, отличному от нуля, в зависимости от того, будет ли степень числителя меньше степени знаменателя, больше ее или равна ей.

В самом деле, в рациональной дроби

$$y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$$

разделим числитель и знаменатель на x^n:

$$y=\frac{a_0x^{m-n}+a_1x^{m-1-n}+\ldots+a_mx^{-n}}{b_0+b_1x^{-1}+\ldots+b_nx^{-n}};$$

при $x\to\infty$ знаменатель стремится к b_0, а числитель — к нулю, если $m<n$, к ∞, если $m>n$, и к a_0, если $m=n$. Ясно, что предел будет один и тот же при произвольном стремлении x к ∞.

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} y=0, \quad \text{если} \quad m<n,$$

$$\lim_{x\to\infty} y=\infty, \quad \text{если} \quad m>n,$$

$$\lim_{x\to\infty} y=\frac{a_0}{b_0}, \quad \text{если} \quad m=n.$$

30. Один признак существования предела функции. Первый замечательный предел. Существуют различные признаки существования предела функции, которые приходится применять тогда, когда непосредственно отыскать предел бывает затруднительно. Приведем в виде теоремы один употребительный признак.

Теорема. **Если значения функции $f(x)$ заключены между соответствующими значениями функций $F(x)$ и $\Phi(x)$, стремящихся при $x\to x_0$ к одному и тому же пределу A, то $f(x)$ при $x\to x_0$ также имеет предел, равный числу A.**

Доказательство. Пусть

$$F(x)\leqslant f(x)\leqslant \Phi(x)$$

и

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0} \Phi(x)=A.$$

Докажем, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Возьмем произвольную ε-окрестность числа A. По условию существует такая δ-окрестность точки x_0, что соответствующие значения $F(x)$ и $\Phi(x)$ принадлежат ε-окрестности числа A. Но тогда в силу заданных неравенств значения $f(x)$, соответствующие точкам указанной δ-окрестности точки x_0, также будут находиться в ε-окрестности числа A. Так как ε — произвольно, то это и означает, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

что и требовалось доказать.

Рекомендуем читателю рассмотреть геометрический смысл доказанной теоремы.

Применим теперь доказанный признак к выводу важного предельного соотношения

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

о котором мы уже упоминали в п. **24**. Этот предел часто называется *первым замечательным пределом.*

Теорема. **Функция $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$ имеет предел, равный 1:**

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

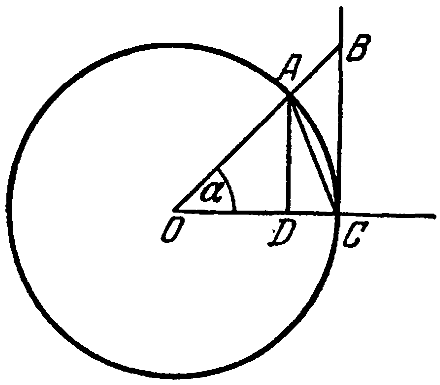

Рис. 42.

Доказательство. Будем исходить из геометрического определения синуса. Возьмем окружность радиуса 1 и предположим, что угол α, выраженный в радианах, заключен в границах $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\Big($Так как $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ является четной функцией, то достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha > 0.\Big)$ Из рис. 42 видно, что

площадь $\triangle\, OAC <$ площади сектора $OAC <$ площади $\triangle\, OBC$.

Так как указанные площади соответственно равны $\frac{1}{2}\sin \alpha$, $\frac{1}{2}\alpha$ и $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, то, следовательно,

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha.$$

Деля все члены неравенства на $\sin \alpha$, получим

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

или

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1. \qquad (*)$$

Из геометрического определения косинуса ясно, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \cos \alpha = 1.$$

Отсюда на основании признака существования предела заключаем, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

С помощью найденного предела вычисляются многие другие пределы.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$

31. Один признак существования предела последовательности. Второй замечательный предел. Рассмотрим функцию целочисленного аргумента n

$$y_n=f(n)$$

или последовательность

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$$

Назовем эту последовательность *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что для всех n

$$y_n<M.$$

Аналогично последовательность называется *ограниченной снизу*, если существует такое число m, что для всех n

$$y_n>m.$$

Если последовательность ограничена и сверху, и снизу, то она называется *ограниченной*.

Предположим, что последовательность $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$ монотонная, т. е. ее члены либо только возрастают, либо только убывают.

Укажем, в виде теоремы, один простой признак существования предела такой последовательности.

Теорема. **Если последовательность $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$ возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел.**

Пусть дана возрастающая последовательность

$$y_1<y_2<\ldots<y_n<\ldots$$

Поскольку она ограничена сверху, существует такое число M, что $y_n<M$ при любом n. В теореме утверждается, что при этом последовательность имеет предел — обозначим его через A, — который, разумеется, не превосходит числа M, т. е. $A\leqslant M$. Действительно, раз точка $y_n=f(n)$, двигаясь в одном направлении — вверх

по оси Oy, — не переходит границы интервала $[0, M]$, то она должна неограниченно приближаться[1]) к некоторой точке $y=A$; ясно, что $A \leqslant M$.

Если последовательность $y_n = f(n)$ монотонная, но неограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$; точка y_n, двигаясь вверх по оси Oy, выходит из любой окрестности точки $y=0$.

Аналогично обстоит дело и в случае убывающей последовательности

$$y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots$$

Если эта последовательность ограничена снизу: $y_n > m$ для любого n, то она имеет предел A, не меньший числа m, т. е. $A \geqslant m$. Если же она не ограничена, то функция $f(n)$ стремится к $-\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = -\infty.$$

Для немонотонной последовательности возможны не два, а три случая:

1) последовательность имеет предел;

2) последовательность стремится к бесконечности;

3) последовательность не имеет предела ни конечного, ни бесконечного (например, последовательность $y_n = (-1)^n$); в этом случае она называется колеблющейся.

Благодаря высказанному простому признаку можно иногда убедиться в наличии предела, хотя сам по себе признак и не указывает, чему равен этот предел.

Применим признак к доказательству существования важного предела, который часто называется *вторым замечательным пределом*. Сформулируем его в виде теоремы:

Теорема. **Функция**

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

имеет предел при $n \to \infty$.

Доказательство. По формуле Ньютона имеем

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

[1]) Строгое доказательство этого предложения мы опускаем.

С увеличением n каждое слагаемое (кроме первых двух), стоящее на фиксированном k месте, увеличивается. Действительно,

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

становится больше с ростом n. Кроме того, при возрастании n добавляются новые положительные слагаемые. Следовательно, y_n — возрастающая функция n. Но она ограничена; в самом деле, заменив во всех членах правильные дроби, стоящие в скобках, единицами, получим

$$y_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Мы еще больше увеличим правую часть, если произведем такие замены:

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{2\cdot 3} \quad \text{на} \quad \frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2},$$

$$\frac{1}{4!}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} \quad \text{на} \quad \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{2\cdot 3\ldots n} \quad \text{на} \quad \frac{1}{2\cdot 2\ldots 2}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$y_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}};$$

тем более, дописав в правой части члены прогрессии $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots$, получим

$$y_n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right).$$

Так как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, заключенной в скобках, равна 2, то

$$y_n < 3.$$

Итак, данная возрастающая последовательность ограничена сверху, а значит, на основании изложенного в этом пункте признака имеет предел, который, очевидно, заключен между 2 и 3. Этот предел называется числом e[1]).

---

[1]) Это обозначение, как и обозначение отношения длины окружности к диаметру через π, введено Л. Эйлером.

Л. Эйлер (1707—1783) — великий математик, физик и астроном. Ему принадлежат важнейшие работы по математическому анализу, небесной механике, теории кораблестроения и другим разделам науки. Долгие годы живя в России, он оказал большое влияние на развитие отечественной математики.

Определение. **Числом e называется предел**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e иррациональное и поэтому не может быть точно выражено какой-нибудь конечной дробью. Приближенно оно равно

$$e\approx 2{,}718.$$

Число e играет очень важную роль в математическом анализе.

Оказывается, что функция

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

имеет предел не только тогда, когда ее аргумент принимает целочисленные значения $x=n$, но и при непрерывном его изменении и стремлении к $+\infty$ или к $-\infty$; при этом пределом служит то же самое число e. Итак,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Чтобы не загромождать изложения, мы опускаем доказательство этого предложения.

Отметим, что сформулированный в настоящем пункте признак существования предела последовательности без всякого изменения переносится и на функции непрерывного аргумента: *если функция $f(x)$ возрастает и при $x\to+\infty$ остается ограниченной* (см. п. **27**, II), *то она имеет предел.* Предоставляем читателю подобрать примеры, показывающие, что если отказаться хотя бы от одного из условий (возрастания или ограниченности), то функция может предела и не иметь.

Аналогичный признак имеет место для убывающей функции, а также для случая $x\to-\infty$.

§ 2. Непрерывные функции

32. Непрерывность функции. Напомним прежде всего, что приращением функции $y=f(x)$ в данной точке x_0 называется разность

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

где Δx — приращение аргумента (рис. 43). Введем теперь следующее определение.

Определение. **Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0*, если эта функция определена в какой-нибудь**

окрестности точки x_0 и если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

т. е. если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Например, функция $y = x^3$ непрерывна в любой точке x_0. Так как

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3,$$

то ясно видно, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$, а это и означает что функция непрерывна. (Рекомендуем читателю самостоятельно доказать непрерывность в любой точке x_0 функций $\sin x$ и $\cos x$.)

Описательно можно сказать, что функция непрерывна, если она изменяется постепенно, т. е. если малые изменения аргумента влекут за собой малые же изменения функции. Эта особенность выражает общую характерную черту многих явлений и процессов. Так, мы считаем, например, что стержень при нагревании удлиняется непрерывно, что рост организма происходит непрерывно, что температура воздуха изменяется непрерывно и т. п.

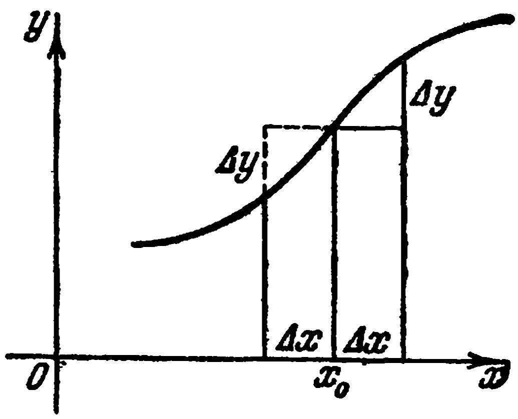

Рис. 43.

Пользуясь выражением для Δy, можно записать также, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

или, иначе,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Если обозначить $x_0 + \Delta x$ через x, то x при $\Delta x \to 0$ будет стремиться к x_0 и последнее равенство можно переписать так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Таким образом, можно сказать:

Функция $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, если она определена в какой-нибудь окрестности этой точки и если предел функции при стремлении независимой переменной x к x_0 существует и равен значению функции при $x = x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (*)$$

Заметим, что *если значение функции $f(x)$ в точке x_0, в которой она непрерывна, отлично от нуля, $f(x_0) \neq 0$, то значения функции*

$f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеют тот же знак, что и $f(x_0)$. Действительно, вследствие непрерывности существует окрестность точки x_0, в которой значения $f(x)$ настолько мало отличаются от своего предела, т. е. от $f(x_0)$, что они остаются положительными, если $f(x_0) > 0$, и остаются отрицательными, если $f(x_0) < 0$.

Определение. **Функция называется непрерывной в интервале, если она непрерывна в каждой его точке.**

Для концов интервала определения непрерывности функции в точке надо несколько изменить. Именно, для левого конца интервала приращению Δx следует придавать только положительные значения, а для правого — только отрицательные.

Геометрически непрерывность функции $y=f(x)$ в интервале означает, что ординаты ее графика, соответствующие двум точкам оси Ox, как угодно мало отличаются друг от друга, если расстояние между этими точками достаточно мало. Поэтому график непрерывной функции представляет собой сплошную линию без разрывов; такую линию можно вычертить, двигаясь в одном направлении, скажем слева направо, не отрывая карандаша от графика, так сказать, «одним росчерком».

Собственно говоря, во всем предыдущем изложении, в частности при описании свойств и графиков основных элементарных функций в гл. I, мы уже предполагали, что эти функции непрерывны. Мы опустим аналитическое доказательство этого факта и будем считать, что **все основные элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены.** В п. **34** это общее положение будет распространено на все элементарные функции.

33. Точки разрыва функции. Если рассматривать график функции $y=\frac{1}{x}$ в окрестности точки $x=0$, то ясно видно, что он как бы «разрывается» на отдельные кривые. То же самое можно сказать о графике функции $y=\operatorname{tg} x$ в окрестностях точек $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (см. п. **21**, рис. 26). Говорят, что во всех указанных точках соответствующие функции становятся *разрывными*.

Определение. **Если в какой-либо точке x_0 функция не является непрерывной, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции, а сама функция — *разрывной* в этой точке.**

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0; в самой же точке x_0 функция может быть как определена, так и не определена.

Наиболее характерными и часто встречающимися точками разрыва являются точки бесконечного разрыва, т. е. такие, в окрестности которых функция является неограниченной; например, точка $x=0$ для функции $y=\frac{1}{x}$, точки $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ для функции $y=\operatorname{tg} x$, точка $x=0$ для функции $y=\lg x$ (в последнем примере функция $y=\lg x$ определена только с одной стороны от точки разрыва $x=0$).

Важный класс точек разрыва образуют точки разрыва первого рода. Для их определения введем понятие левого и правого пределов функции.

Пусть x стремится к x_0, оставаясь все время слева от x_0, т. е. будучи меньше x_0. Если при этом условии значения функции $f(x)$ стремятся к пределу, то он называется *левым пределом* функции $f(x)$ в точке x_0; аналогично определяется и *правый предел*. Левый и правый пределы обозначаются соответственно так: $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$. Значит,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0-0), \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0+0).$$

Ясно, что если функция имеет предел при произвольном стремлении x к x_0, то существуют ее левый и правый пределы и они равны между собой. Обратное тоже справедливо: если левый и правый пределы существуют и равны между собой, то функция имеет тот же предел при произвольном стремлении x к x_0.

Определение. ***Точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$ называется такая точка x_0, в которой функция имеет левый и правый пределы, не равные между собой.** Геометрическая иллюстрация точки разрыва первого рода ясна из рис. 44.

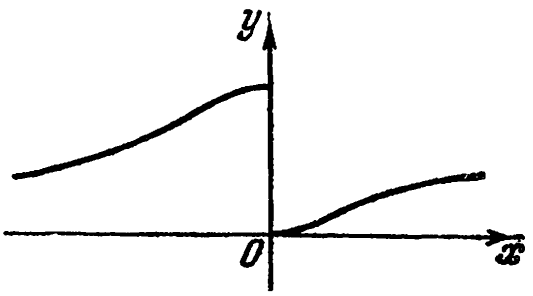

Рис. 44.

Все остальные точки разрыва называются *точками разрыва второго рода.*

Примером точки разрыва первого рода служит точка $x=\frac{\pi}{2}$ для функции $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ (см. рис. 34). Рассмотрим еще функцию $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Эта функция не определена в точке $x=0$. Если $x\to 0$, оставаясь отрицательным, то $\frac{1}{x}\to-\infty$ и $y\to-\frac{\pi}{2}$ (см. п. 22). Если же $x\to 0$, будучи положительным, то $\frac{1}{x}\to+\infty$ и $y\to\frac{\pi}{2}$. Таким образом, точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода для функции $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. График этой функции схематично изображен на рис. 45.

Не следует думать, что точки разрыва второго рода обязательно являются точками бесконечного разрыва. Существуют ограниченные функции, которые при приближении аргумента к точке разрыва не имеют ни левого, ни правого пределов. Примером служит функция $y=\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$, в чем можно убедиться, построив схематически ее график, придавая x значения $\frac{1}{k\pi}$ и $\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$. В дальнейшем нам такие точки разрыва встречаться не будут. Мы также не рассматриваем случаи, когда один из двух пределов существует, а другой нет.

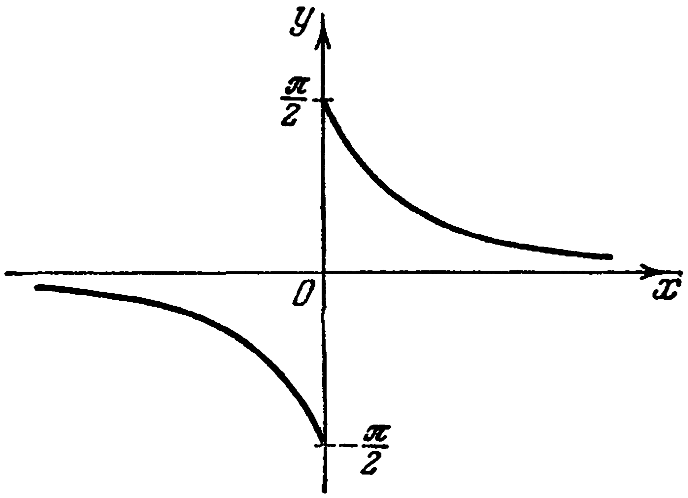

Рис. 45.

Если в точке x_0 левый и правый пределы функции $f(x)$ равны между собой и равны значению $f(x_0)$, то функция в этой точке непрерывна. Если функция $f(x)$ в точке x_0 не определена, но ее левый и правый пределы существуют и равны между собой, то часто просто полагают $f(x_0)$ равной этому общему пределу; при этом условии функция становится непрерывной в точке x_0. Так, например, функция $y=\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ не определена. Но так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, то можно рассмотреть функцию, определенную так:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}, \qquad \text{если} \qquad x\neq 0,$$

$$f(0)=1.$$

Эта «доопределенная» функция уже будет непрерывной.

34. Действия над непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций. Докажем сейчас, что если над непрерывными функциями произвести конечное число арифметических действий или операций взятия функции от функции, то в результате получится, как правило, также непрерывная функция. Все доказательства совершенно однотипны; в каждом случае мы покажем, что предел соответствующей функции будет равен ее значению в предельной точке, а это и означает непрерывность функции.

Теорема I. **Сумма конечного числа функций, непрерывных в некоторой точке, является функцией, непрерывной в той же точке.**

Доказательство. Пусть дано определенное число функций $u, v, \ldots, t$, непрерывных в точке $x = x_0$. Требуется доказать, что их сумма $w = u + v + \ldots + t$ будет функцией, непрерывной в точке $x = x_0$. Так как слагаемые функции непрерывны, то

$$\lim_{x \to x_0} u = u_0, \quad \lim_{x \to x_0} v = v_0, \quad \ldots, \quad \lim_{x \to x_0} t = t_0,$$

где $u_0, v_0, \ldots, t_0$ — значения соответственно функций $u, v, \ldots$ $\ldots, t$ в точке $x = x_0$. В силу теоремы о пределе суммы (п. **29**) имеем

$$\lim_{x \to x_0} w = \lim_{x \to x_0} (u + v + \ldots + t) = \lim_{x \to x_0} u + \lim_{x \to x_0} v + \ldots + \lim_{x \to x_0} t = \\ = u_0 + v_0 + \ldots + t_0 = w_0,$$

где w_0 — значение функции w при $x = x_0$. Итак, $\lim\limits_{x \to x_0} w = w_0$, что и требовалось доказать.

Теорема II. **Произведение конечного числа функций, непрерывных в некоторой точке, является функцией, непрерывной в той же точке.**

Доказательство. Сохраняя обозначения теоремы I при условии, что $w = u \cdot v \ldots t$, имеем в силу теоремы о пределе произведения (п. **29**)

$$\lim_{x \to x_0} w = \lim_{x \to x_0} (u \cdot v \ldots t) = \lim_{x \to x_0} u \cdot \lim_{x \to x_0} v \ldots \lim_{x \to x_0} t = u_0 v_0 \ldots t_0 = w_0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема III. **Частное двух функций, непрерывных в некоторой точке, является функцией, непрерывной в той же точке, если только знаменатель не обращается в ней в нуль.**

Доказательство. Если $w = \dfrac{u}{v}$, то по-прежнему в силу теоремы о пределе частного (п. **29**) при условии, что $\lim\limits_{x \to x_0} v = v_0 \neq 0$, имеем

$$\lim_{x \to x_0} w = \lim_{x \to x_0} \frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u}{\lim\limits_{x \to x_0} v} = \frac{u_0}{v_0} = w_0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема IV. **Сложная функция, составленная из конечного числа непрерывных функций, непрерывна.**

Доказательство. Достаточно доказать эту теорему для случая цепи функций из двух звеньев, потому что тогда последовательно можно ее распространить на случай цепи из любого конечного числа звеньев.

Пусть $y=f(z)$, а $z=\varphi(x)$, так что

$$y=f[\varphi(x)]=F(x),$$

причем $\varphi(x)$ непрерывна при $x=x_0$, а $f(z)$ непрерывна при $z=z_0$, где $z_0=\varphi(x_0)$. Утверждение теоремы состоит в том, что y, как функция x, т. е. функция $F(x)$, непрерывна при $x=x_0$.

Действительно, пусть $x\to x_0$. Из непрерывности функции $z=\varphi(x)$ следует, что при этом $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=z_0$, т. е. что $z\to z_0$. Так как $f(z)$ непрерывна в точке z_0, то $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$. Но ведь $z=\varphi(x)$ и с учетом только что сказанного последнему равенству можно придать вид

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)],$$

или в другой записи

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=F(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Приведем еще без доказательства следующую теорему.

Теорема V. **Функция, обратная к монотонной и непрерывной функции, непрерывна.**

Так как мы уже отмечали, что все основные элементарные функции непрерывны в интервалах их определения (п. 32), то в силу изложенных четырех теорем можно утверждать, что и *любая элементарная функция непрерывна в тех интервалах, где она определена.*

Точками разрыва элементарной функции могут быть только те значения независимой переменной, при которых какие-нибудь из составляющих функцию элементов делаются неопределенными или при которых обращаются в нуль знаменатели участвующих в выражении функции дробей. Так, например, функция $y=\frac{x}{x^2-4}$ разрывна при $x=\pm 2$ и непрерывна во всех остальных точках, а функция $y=x^2\operatorname{tg}x$ разрывна при $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Отметим, что предельное равенство $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, выражающее непрерывность функции при $x=x_0$, можно переписать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Значит, *символ предела и символ непрерывной функции можно переставлять между собой.*

Отсюда следует простое, практически удобное п р а в и л о п р е д е л ь н о г о п е р е х о д а:

Для того чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения функции, нужно в выражение функции вместо аргумента подставить его предельное значение.

Это правило очень важное, поскольку в применениях анализа употребляются преимущественно элементарные функции.

Случаи, когда аргумент стремится к бесконечности или к какому-нибудь значению, не принадлежащему области определения функции, требуют всегда специального рассмотрения.

П р и м е р ы. 1) $y=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} y$. Так как в точке $x=0$ заданная функция непрерывна (многочлен в знаменателе не обращается в нуль), то

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{0^3+3\cdot 0^2-0-3}{0^2+0-6}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}.$$

Найдем $\lim\limits_{x\to -3} y$. При $x=-3$ и знаменатель и числитель обращаются в нуль; но $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, а $x^3+3x^2-x-3=(x+3)(x^2-1)$. Сократив дробь на $(x+3)$, получим

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{(-3)^2-1}{-3-2}=-\frac{8}{5}.$$

Имеем также

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\infty,\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^3-x-3}{x^2+x-6}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\infty.$$

2) $y=\dfrac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}$. Найдем $\lim\limits_{x\to 1} y$. При $x=1$ заданная функция непрерывная и, значит, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}=\dfrac{1^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot 1}=-3\sqrt{2}$. Предел этой функции при $x\to 2$ нельзя найти по общему правилу, так как при $x=2$ знаменатель обращается в нуль; но в точке $x=2$ в нуль обращается и числитель. Поступим следующим образом. Положим: $x-2=z$, т. е. $x=z+2$; тогда z при $x\to 2$ будет стремиться к 0. Имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}=\lim_{z\to 0}\frac{z(z+4)}{\cos\frac{\pi}{4}(z+2)}=\lim_{z\to 0}\frac{z(z+4)}{-\sin\frac{\pi}{4}z}.$$

Далее находим

$$\lim_{z\to 0}\frac{z(z+4)}{-\sin\frac{\pi}{4}z}=-\frac{4}{\pi}\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\pi}{4}z}{\sin\frac{\pi}{4}z}\lim_{z\to 0}(z+4)=-\frac{16}{\pi}.$$

35. Свойства непрерывных функций. Непрерывность функции в замкнутом интервале обусловливает наличие у этой функции ряда важных свойств общего характера. Укажем (без доказательства) два из этих свойств.

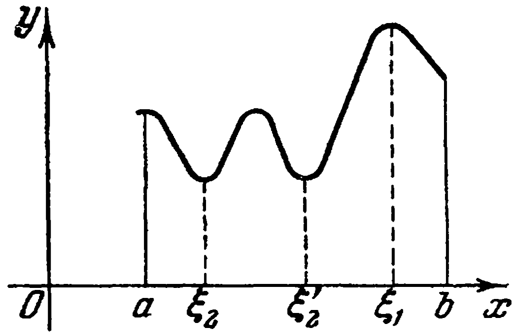

Рис. 46.

Теорема I. **Функция, непрерывная в *замкнутом* интервале, хотя бы в одной точке интервала принимает наибольшее значение и хотя бы в одной — наименьшее.**

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в интервале $[a, b]$ (рис. 46). Теорема утверждает существование хотя бы одной такой точки $\xi_1\in[a, b]$ [1]), и хотя бы одной такой точки $\xi_2\in[a, b]$, что значения функции в этих точках являются соответственно наибольшим и наименьшим ее значениями во всем интервале $[a, b]$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\leqslant f(\xi_1), \\ f(x)\geqslant f(\xi_2) \end{array}\right\}\quad \text{для всех } x\in[a, b].$$

Разумеется, таких точек может быть и несколько; так на рис. 46 показано, что функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в двух точках (они обозначены буквами ξ_2 и ξ_2').

Это утверждение может стать неверным, если не предполагать замкнутости интервала. В самом деле, например, функция $y=x$ непрерывна в любом открытом интервале (a, b), но не достигает в нем ни наибольшего, ни наименьшего значений: она достигает этих значений как раз на концах интервала, но концы из интервала исключены. Точно так же теорема перестает быть верной для разрывных функций. Читатель подумает над примером функции (заданной хотя бы графически), определенной и разрывной в замкнутом интервале, не удовлетворяющей теореме I.

Теорема II. **Функция, непрерывная в *замкнутом* интервале и принимающая на концах этого интервала значения разных знаков, хотя бы один раз обращается в нуль внутри интервала.**

Допустим, что функция $y=f(x)$ непрерывна в интервале $[a, b]$ и что $f(a)<0$, а $f(b)>0$ (рис. 47). Теорема утверждает существование хотя бы одной такой точки $\xi\in(a, b)$, что $f(\xi)=0$. Геометрически это означает тот очевидный факт, что непрерывная

[1]) Символ $\xi_1\in[a, b]$ означает (см. п. 4), что $a\leqslant\xi_1\leqslant b$.

линия — график непрерывной функции, — соединяя точку A, лежащую под осью Ox, с точкой B, лежащей над осью Ox, обязательно пересечет ось Ox хотя бы в одной точке. Разрывные функции этим свойством могут не обладать.

Теорему II можно формулировать в более общем виде:

Функция, непрерывная в замкнутом интервале, принимает внутри интервала хотя бы один раз любое значение, заключенное между ее значениями на концах интервала.

Пусть $f(a)=m$, $f(b)=M$, и пусть, например, $m<M$ (предположение, что $m>M$, не вызовет никаких существенных изменений в рассуждении). Возьмем какое-нибудь число μ, заключенное между m и M: $m<\mu<M$. Теорема утверждает существование хотя бы одной такой точки $\xi\in(a, b)$, что $f(\xi)=\mu$. Это предложение немедленно сводится к теореме II. В самом деле, возьмем вспомогательную функцию

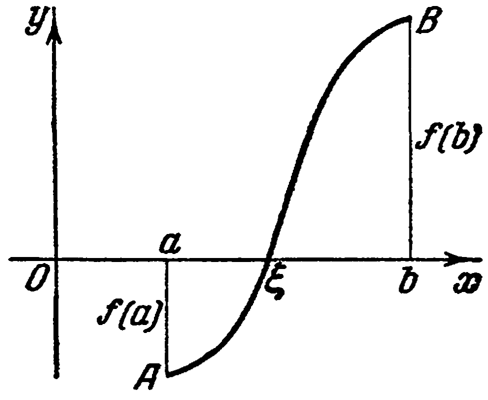

Рис. 47.

$$\varphi(x)=f(x)-\mu;$$

на концах интервала она принимает значения разных знаков: $\varphi(a)=f(a)-\mu=m-\mu<0$ и $\varphi(b)=f(b)-\mu=M-\mu>0$. Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале $[a, b]$, то в силу теоремы II она обращается в нуль при некотором $\xi\in(a, b)$. Таким образом,

$$\varphi(\xi)=f(\xi)-\mu=0,$$

откуда $f(\xi)=\mu$.

Геометрически это предложение означает, что любая прямая $y=\mu$, параллельная оси Ox и проходящая между начальной и конечной точками непрерывной линии, пересечет ее хотя бы один раз. Абсцисса точки пересечения и будет тем значением $x=\xi$, при котором $f(\xi)=\mu$ (на рис. 48 таких точек три). Это предложение показывает, что

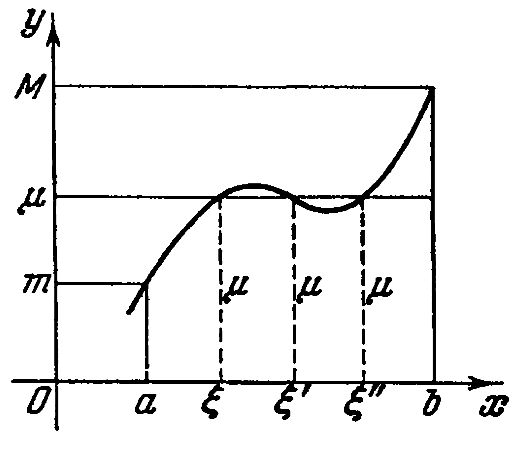

Рис. 48.

Непрерывная функция, переходя от одного своего значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения; в частности,

Непрерывная в интервале функция принимает в этом интервале хотя бы один раз любое значение, заключенное между ее наименьшим и наибольшим значениями. Геометрически ясно, что если функция в данном интервале монотонна и, скажем, для определенности, возрастает, то свое наименьшее значение она принимает на левом конце интервала, а наибольшее — на правом; при этом любое промежуточное значение функция принимает в точности один раз.

§ 3. Сравнение бесконечно малых величин

36. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые величины.

I. Порядок бесконечно малой величины. Для того чтобы сравнить между собой две бесконечно малые величины, берут предел их отношения.

В дальнейшем под α и β мы будем понимать бесконечно малые величины при одном и том же предельном изменении их общего аргумента.

Определение. **Сравнить две бесконечно малые величины α и β — это значит найти предел их отношения.**

При отыскании предела отношения бесконечно малых величин могут возникать разные случаи.

а) Пусть $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$. Тогда α называется *бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем* β. Можно сказать, что здесь α стремится к нулю «быстрее», чем β, т. е. что при значениях аргумента, достаточно близких к предельному, величина $|\alpha|$ будет «значительно» меньше величины $|\beta|$.

Пример. Пусть $\alpha = x^2$, $\beta = x$ $(x \to 0)$, тогда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Следовательно, α — бесконечно малая более высокого порядка, чем β.

Если α — бесконечно малая более высокого порядка, чем β, то говорят также, что β — *бесконечно малая более низкого порядка, чем* α. При этом

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty.$$

б) Пусть теперь предел отношения α и β равен некоторому числу, отличному от нуля, т. е.

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0.$$

В этом случае α и β называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Пример. Если $\alpha=\sin 5x$, $\beta=x\ (x\to 0)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5 \qquad (\text{см. п. } \mathbf{30}).$$

Следовательно, α и β одного порядка малости.

С нулем, рассматриваемым как бесконечно малая величина, не сравнивают никакую другую бесконечно малую величину, так как на нуль делить нельзя. Мы также не сравниваем две бесконечно малые величины α и β, если их отношение не имеет предела (конечного или бесконечного).

II. Эквивалентность бесконечно малых величин.

Определение. **Если α и β — бесконечно малые величины одного порядка, причем**

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1,$$

то они называются *эквивалентными* или *равносильными*. В этом случае также $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$.

Эквивалентность бесконечно малых α и β обозначается так: $\alpha\sim\beta$.

Важным примером эквивалентных бесконечно малых величин являются $\sin x$ и x при $x\to 0$.

Существует простой признак эквивалентности двух бесконечно малых величин.

Теорема. **Для того чтобы бесконечно малые величины α и β были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем α и чем β.**

Доказательство. Положим: $\alpha-\beta=\gamma$. Необходимость признака вытекает из того, что

$$\lim\frac{\gamma}{\beta}=\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=\lim\frac{\alpha}{\beta}-1=0,$$

ибо по условию $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$. Точно так же убеждаемся, что $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=0$. Докажем достаточность признака. Пусть известно, что $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=0$, т. е. $\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0$. Имеем

$$\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0,$$

откуда следует, что $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$ или $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$. Эти предельные равенства также легко получаются и в случае, если известно, что $\lim\frac{\gamma}{\beta}=0$.

Пример. При $n \to \infty$ бесконечно малая $\alpha_n = \frac{n+1}{n^2}$ эквивалентна бесконечно малой $\beta_n = \frac{1}{n}$, так как они отличаются друг от друга на бесконечно малую более высокого порядка: $\alpha_n - \beta_n = \frac{1}{n^2}$. Их отношение стремится к единице:

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{n+1}{n} \to 1.$$

Во многих вопросах можно без всякой ошибки просто заменять бесконечно малые им эквивалентными. Например, справедливо такое предложение:

Предел отношения бесконечно малых не изменится, если заменить их эквивалентными бесконечно малыми.

В самом деле, пусть $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$. Тогда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\beta'} \frac{\beta'}{\beta}\right) = \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \lim \frac{\alpha'}{\beta'} \lim \frac{\beta'}{\beta} = 1 \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot 1 = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Следовательно, отыскивая предел отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ бесконечно малых величин α и β, можно отбрасывать и в числителе и в знаменателе бесконечно малые слагаемые более высоких порядков, ибо по доказанному выше это равносильно замене бесконечно малых величин α и β эквивалентными величинами.

37. Примеры отношений бесконечно малых величин. Натуральные логарифмы.

I. При отыскании пределов функции особое значение имеет отыскание пределов отношений двух бесконечно малых величин. Рассмотрим несколько важных примеров.

1) $A = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}$. Как видно, здесь требуется найти предел отношения двух бесконечно малых величин.

Умножим числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{1+x}+1$; получим

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+1)}.$$

Последняя функция непрерывна при $x = 0$, и значит,

$$A = \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{1+0}+1)} = 1.$$

Следовательно, бесконечно малые величины $\sqrt{1+x}-1$ и $\frac{1}{2}x$ эквивалентны:

$$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x.$$

Поэтому при достаточно малых x можно считать, что

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x.$$

Это дает возможность вычислять значения функции $y=\sqrt{1+x}$ для различных малых значений x.

После простых преобразований с помощью этой формулы можно приближенно вычислять и другие корни, например:

$$\sqrt{627}=\sqrt{625+2}=\sqrt{625}\sqrt{1+\frac{2}{625}} \approx 25\left(1+\frac{2}{2\cdot 625}\right)=25{,}040.$$

Этот результат — хорошей точности, так как $\sqrt{627}$ с тремя верными знаками равен именно 25,040.

Таким же образом легко показать, что вообще $\sqrt{a^2+b}$ можно полагать приближенно равным $a+\frac{b}{2a}$, если b мало сравнительно с a^2.

2) $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Выше (п. **30**) уже было доказано, что $A=1$. Таким образом, бесконечно малые величины $\sin x$ и x эквивалентны:

$$\sin x \sim x.$$

Из свойств эквивалентных бесконечно малых следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}=0$. Поэтому при достаточно малых x замена $\sin x$ на x приводит к очень малой относительной ошибке. Это дает возможность вычислять значения функции $y=\sin x$ для малых значений x с очень большой точностью. Так, например, мы находим

$$\sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01728,$$

т. е. приближенно

$$\sin 1^\circ = 0{,}01728.$$

Абсолютная ошибка этого равенства оказывается равной 0,00001.

3) $A=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}$. Ясно, что мы имеем здесь предел отношения двух бесконечно малых величин. С помощью простых

преобразований находим

$$A=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $1-\cos\alpha$ при $\alpha\to 0$ есть бесконечно малая величина того же порядка, что и α^2.

4) $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$. В этом примере требуется найти также предел отношения двух бесконечно малых величин, ибо $\log_a(1+x)$ при $x=0$ равен $\log_a 1=0$.

Выполним следующие преобразования:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Так как логарифмическая функция непрерывная, то можно переставить символы этой функции и предела при условии, конечно, что предел аргумента существует:

$$A=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right];$$

но предел в квадратных скобках действительно существует и равен числу e, в чем можно убедиться, если положить $x=\frac{1}{z}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e$$

(см. п. **34**).

Итак,

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$$

Полученный результат показывает, что при $x\to 0$ функции $\log_a(1+x)$ и x суть бесконечно малые величины одного порядка.

5) $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$. Здесь дан снова предел отношения двух бесконечно малых величин, ибо в силу непрерывности показательной функции $a^x\to 1$ при $x\to 0$.

Положим

$$a^x-1=z;$$

тогда при $x\to 0$ и $z\to 0$. Логарифмируя обе части равенства $a^x=1+z$ по основанию a, найдем

$$x=\log_a(1+z)$$

и, значит,

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+z)}{z}},$$

что на основании примера 4 дает

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a.$$

Таким образом, бесконечно малая при $x\to 0$ величина a^x-1 одного порядка малости с x.

II. Натуральные логарифмы. Из последних двух примеров отчетливо видно, что за основание a логарифмической функции очень удобно взять число e. В самом деле, при $a=e$ результаты сильно упростятся и в обоих примерах (4 и 5) будут равны единице.

Следовательно, при $x\to 0$ бесконечно малые величины $\log_e(1+x)$ и e^x-1 эквивалентны x. При достаточно малых значениях x и $\log_e(1+x)$, и e^x-1 можно заменять через x со сколь угодно малой относительной ошибкой:

$$\log_e(1+x)\approx x,\qquad e^x-1\approx x.$$

Несомненно, это должно сильно способствовать упрощению вычислений, и действительно, в анализе оказывается наиболее удобным принимать за основание логарифмической функции число e. Логарифмы по основанию e обозначают посредством символа $\ln$ и называют *натуральными*. Мы с ними уже имели дело в п. **23**.

В новых обозначениях имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

Так как логарифмы чисел при двух разных основаниях пропорциональны друг другу (п. **20**), то переход от натуральной системы логарифмов к десятичной и обратно не представляет никакого труда.

Натуральные и десятичные логарифмы связаны между собой формулами

$$\lg x=M\ln x \quad \text{и} \quad \ln x=\frac{1}{M}\lg x,$$

где

$$M=\lg e=\frac{1}{\ln 10}\approx 0{,}434294\qquad \left(\frac{1}{M}\approx 2{,}302585\right).$$

Число M называется модулем перехода от натуральных логарифмов к десятичным. В практических расчетах всегда пользуются десятичными логарифмами, которые, не имея никаких теоретических преимуществ перед любыми другими, удобнее в вычислениях.

В этой книге мы везде употребляем натуральную систему логарифмов.

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое предел функции $y=f(x)$ при $x \longrightarrow x_0$? Дать определение с помощью неравенств. Привести геометрическую иллюстрацию.

2. Дать пример функции $y=f(x)$, имеющей предел при $x \longrightarrow x_0$; не имеющей предела при $x \longrightarrow x_0$.

3. Что такое предел функции $y=f(x)$ при $x \longrightarrow +\infty$? при $x \longrightarrow -\infty$? Дать определение с помощью неравенств. Привести геометрическую иллюстрацию.

4. Дать пример функции $y=f(x)$, имеющей предел при $x \longrightarrow +\infty$, $x \longrightarrow -\infty$; не имеющей предела при $x \longrightarrow +\infty$, $x \longrightarrow -\infty$.

5. Определить предел последовательности (функции целочисленного аргумента). Привести примеры последовательностей, имеющих и не имеющих пределы.

6. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \longrightarrow x_0$, при $x \longrightarrow \pm\infty$? Дать определения с помощью неравенств. Привести геометрические иллюстрации.

7. Что означают записи:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty?$$

Дать словесные разъяснения и определения с помощью неравенств. Привести геометрические иллюстрации.

8. Дать примеры функций, являющихся бесконечно большими величинами при различных предельных поведениях аргумента.

9. Какая функция называется ограниченной в интервале? при $x \longrightarrow x_0$? при $x \longrightarrow \pm\infty$?

10. Привести пример неограниченной, но не бесконечно большой величины.

11. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \longrightarrow x_0$, при $x \longrightarrow \pm\infty$? Дать определения с помощью неравенств. Привести геометрические иллюстрации.

12. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами? Доказать соответствующую теорему.

13. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной? Доказать соответствующие прямую и обратную теоремы.

14. Сформулировать и доказать правила предельного перехода в случае арифметических действий.

15. Сформулировать и доказать признак существования предела функции, заключенной между двумя функциями, имеющими один и тот же предел.

16. Вывести первый замечательный предел.

17. Сформулировать и разъяснить признак существования предела монотонной последовательности.

18. Вывести второй замечательный предел.

19. Дать определение непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x_0 и иллюстрировать его геометрически.

20. Что называется точкой разрыва функции?

21. Привести примеры разрывных функций различного характера.

22. В чем состоит правило предельного перехода для непрерывной функции?

23. Сформулировать и доказать теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.

24. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.

25. Что можно сказать об интервале непрерывности элементарной функции? Какие точки могут являться точками разрыва такой функции?

26. Сформулировать свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале. Дать геометрическую иллюстрацию этих свойств.

27. Что значит сравнить две бесконечно малые величины? В каком случае одна из них будет более высокого порядка, чем другая?

28. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Привести необходимый и достаточный признак эквивалентности.

29. Привести примеры эквивалентных бесконечно малых величин.

30. Чему равны $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$?

31. Какая система логарифмов называется натуральной? Как перейти от натуральной системы к десятичной и обратно? Чему равен модуль перехода M?

ГЛАВА III

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Производная

38. Некоторые задачи физики. Рассмотрим простые физические явления: прямолинейное движение и линейное распределение массы. Для изучения их вводят соответственно скорость движения и плотность.

Разберем каждое из указанных явлений и связанные с ними понятия в отдельности.

I. Скорость прямолинейного движения. Пусть тело совершает прямолинейное движение и нам известно расстояние s, проходимое телом за каждое данное время t, т. е. нам известно расстояние s как функция времени t:

$$s = F(t).$$

Уравнение $s = F(t)$ называется *уравнением движения,* а определяемая им линия в системе осей Ots — *графиком движения.*

Рассмотрим движение тела в течение интервала времени Δt от некоторого момента t до момента $t + \Delta t$. За время t тело прошло путь $s = F(t)$, а за время $t + \Delta t$ — путь $s + \Delta s = F(t + \Delta t)$. Значит, за Δt единиц времени оно прошло путь

$$\Delta s = F(t + \Delta t) - F(t).$$

Если движение равномерное, то s есть линейная функция t:

$$s = v_0 t + s_0$$

(п. 15). В этом случае $\Delta s = v_0 \Delta t$, и отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ $(= v_0)$ показывает, сколько единиц пути s приходится на единицу времени t; при этом оно остается постоянным, не зависящим ни от того, какой момент времени t берется, ни от того, какое взято приращение времени Δt. Это постоянное отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называют *скоростью равномерного движения*[1]).

Но если движение неравномерное, то отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ зависит и от t, и от Δt. Оно называется средней скоростью движения в интервале времени от t до $t+\Delta t$ и обозначается через $v_{\text{ср}}$:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

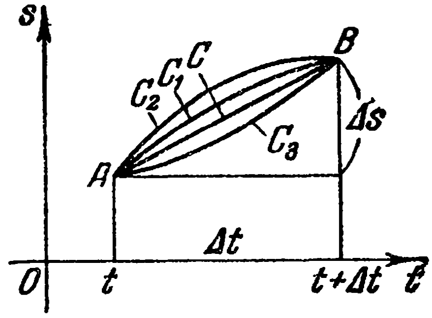

Рис. 49.

В течение этого интервала времени при одном и том же пройденном расстоянии движение может происходить самым различным образом; графически это иллюстрируется тем, что между двумя точками на плоскости Ots (точки A и B на рис. 49) можно провести самые различные линии (AC_1B, AC_2B, AC_3B) — графики движений в данном интервале времени, причем всем этим разнообразным движениям соответствует одна и та же средняя скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. В частности, между точками A и B проходит прямолинейный отрезок (ACB), являющийся графиком равномерного в интервале $(t, t+\Delta t)$ движения. Значит, средняя скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ показывает, с какой скоростью нужно двигаться равномерно для того, чтобы пройти за этот же интервал времени $(t, t+\Delta t)$ то же расстояние Δs.

Оставляя прежним t, уменьшим Δt. Средняя скорость, подсчитанная для измененного интервала $(t, t+\Delta t_1)$, $\Delta t_1<\Delta t$, лежащего внутри данного интервала, может быть, разумеется, иной, чем во всем интервале $(t, t+\Delta t)$. Из этого следует, что среднюю скорость нельзя рассматривать как удовлетворительную характеристику движения: она (средняя скорость) зависит от интервала, для которого производится расчет. Исходя из того, что среднюю скорость в интервале $(t, t+\Delta t)$ следует считать тем лучше характеризующей движение, чем меньше Δt, заставим Δt стремиться к нулю. Если при этом существует предел средней скорости $v_{\text{ср}}$, то его и принимают в качестве скорости движения в данный момент t.

Определение. **Скоростью v прямолинейного движения в данный момент времени t называется предел средней скорости $v_{\text{ср}}$,**

---

[1]) Численно скорость равномерного движения равна расстоянию, проходимому за единицу времени; размерность скорости в единицах СИ — *м/сек*.

соответствующей интервалу ($t, t+\Delta t$), при стремлении Δt к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t}.$$

Пример. Запишем закон свободного падения:

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Для средней скорости падения в интервале времени $(t, t+\Delta t)$ имеем

$$v_{\text{ср}} = \frac{\frac{1}{2} g (t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \frac{2t\,\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} g (2t + \Delta t),$$

а для скорости в момент t

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} g (2t + \Delta t) = gt.$$

Отсюда видно, что скорость свободного падения пропорциональна времени движения (падения).

II. Плотность. Перейдем теперь к важному понятию из другой области физики, определяемому вполне аналогично скорости движения, к понятию плотности.

Возьмем материальную линию (например, проволоку) и будем двигаться от одного из ее концов к другому, измеряя длину s пройденного куска, а также его массу m. Каждому значению s соответствует определенная масса m, и поэтому последняя является функцией s:

$$m = \Phi(s).$$

Говорят, что материя распределена равномерно по всей линии и что эта материальная линия однородна, если два любых равных по длине участка содержат равные же массы. В этом случае m есть линейная функция s, точнее, m зависит прямо пропорционально от s:

$$m = \delta_0 s,$$

где δ_0 — постоянный коэффициент пропорциональности, причем $\Delta m = \delta_0 \Delta s$ и отношение $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ $(= \delta_0)$ показывает, сколько единиц массы m приходится на единицу длины s. Это постоянное отношение называется плотностью (линейной) однородной линии.

Но пусть теперь материя распределена неравномерно. Рассмотрим участок линии от s до $s+\Delta s$; масса Δm этого участка выражается так:

$$\Delta m = \Phi(s+\Delta s) - \Phi(s).$$

Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ массы к длине уже не будет постоянным, а будет зависеть и от s, и от Δs; оно называется **средней линейной плотностью линии** (проволоки):

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta s}.$$

При одной и той же массе Δm на данном интервале $(s, s+\Delta s)$ материя может быть распределена самым различным образом, и в частности равномерно. Значит, средняя плотность $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ равна плотности, с которой нужно распределить материю **равномерно** на том же интервале $(s, s+\Delta s)$, чтобы общая масса ее осталась той же самой, равной Δm. Таким образом, средняя плотность только, как говорят, «в общем», «в среднем» характеризует распределение материи на данном участке. Чтобы избежать такой неопределенности, вводят **плотность в данной точке** линии (при данном s). Это понятие устанавливают, исходя из того соображения, что средние плотности, соответствующие уменьшающимся участкам длины Δs, все лучше характеризуют распределение материи. В связи с этим мы скажем, что *линейной плотностью*[1] δ *материальной линии в данной ее точке* s *называется предел средней линейной плотности* $\delta_{\text{ср}}$, *соответствующей интервалу* $(s, s+\Delta s)$, *при стремлении* Δs *к нулю*:

$$\delta = \lim_{\Delta s \to 0} \delta_{\text{ср}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Phi(s+\Delta s) - \Phi(s)}{\Delta s}.$$

III. **Теплоемкость и скорость химической реакции.** Рассмотрим коротко два других понятия, вводимых по тем же соображениям и определяемых совершенно так же, как скорость движения и плотность, а именно, понятия теплоемкости и скорости химической реакции.

Теплоемкостью[2] c *тела при температуре* τ *называется предел средней теплоемкости* $c_{\text{ср}}$, *соответствующей интервалу* $(\tau, \tau+\Delta\tau)$, *при стремлении* $\Delta\tau$ *к нулю*:

$$c = \lim_{\Delta\tau \to 0} c_{\text{ср}} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Psi(\tau+\Delta\tau) - \Psi(\tau)}{\Delta\tau},$$

где $q = \Psi(\tau)$ — *количество тепла, сообщаемое телу при нагревании его до температуры* τ.

---

[1]) Плотность равномерно распределенной материи численно равна массе, заключенной в единице длины линии; размерность линейной плотности в единицах СИ — *кг/м*.

[2]) Единица измерения теплоемкости — джоуль на градус (*дж/град*).

Скоростью химической реакции γ относительно участвующего в ней вещества в данный момент времени t называется предел средней скорости $\gamma_{\text{ср}}$, соответствующей интервалу $(t, t+\Delta t)$, при стремлении Δt к нулю:

$$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \gamma_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t},$$

где $m = F(t)$ — количество вещества, вступившее в реакцию за время t.

39. Скорость изменения функции. Производная функция. Производная степенной функции.

I. Скорость изменения функции. Каждое из четырех специальных понятий: скорость движения, плотность, теплоемкость, скорость химической реакции, указанных в п. 38, несмотря на существенное различие их физического смысла, является с математической точки зрения, как легко заметить, одной и той же характеристикой соответствующей функции. Все они представляют собой частные виды так называемой скорости изменения функции, определяемой, так же как и перечисленные специальные понятия, с помощью понятия предела.

Разберем поэтому в общем виде вопрос о скорости изменения функции $y = f(x)$, отвлекаясь от физического смысла переменных x и y.

Пусть сначала $f(x)$ — линейная функция:

$$y = f(x) = ax + b.$$

Если независимая переменная x получает приращение Δx, то функция y получает здесь приращение $\Delta y = a\Delta x$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ остается постоянным, не зависящим ни от того, при каком x функция рассматривается, ни от того, какое взято Δx. Это отношение называется *скоростью изменения* линейной функции.

Но если функция $y = f(x)$ не линейная, то отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

зависит и от x, и от Δx. Это отношение только «в среднем» характеризует функцию при изменении независимой переменной от данного x до $x+\Delta x$; оно равно скорости такой линейной функции, которая при взятом Δx имеет то же приращение Δy.

Определение. **Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *средней скоростью $v_{\text{ср}}$ изменения функции в интервале $(x, x+\Delta x)$*.**

Ясно, что чем меньше рассматриваемый интервал, тем лучше средняя скорость характеризует изменение функции, поэтому мы заставляем Δx стремиться к нулю. Если при этом существует предел средней скорости, то он принимается в качестве меры, измеряющей скорость изменения функции при данном x, и называется скоростью изменения функции.

Определение. ***Скоростью изменения функции* в данной точке x называется предел средней скорости изменения функции в интервале $(x, x+\Delta x)$ при стремлении Δx к нулю:**

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

II. Производная функция. Скорость изменения функции $y=f(x)$ определяется посредством такой последовательности действий:

1) по приращению Δx, придаваемому данному значению x, находится соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x);$$

2) составляется отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

3) находится предел этого отношения (если он существует) при произвольном стремлении Δx к нулю.

Как уже отмечалось, если данная функция $f(x)$ не линейная, то отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ зависит и от x, и от Δx. Предел этого отношения зависит только от выбранного значения x и является, следовательно, функцией от x. Если же функция $f(x)$ линейная, то рассматриваемый предел не зависит и от x, т. е. будет величиной постоянной.

Указанный предел называется *производной функцией от функции* $f(x)$ или просто *производной от функции* $f(x)$ и обозначается так: $f'(x)$. Читается: «эф штрих от x» или «эф прим от x».

Определение. ***Производной* данной функции называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при произвольном стремлении этого приращения к нулю:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Значение производной функции в какой-либо данной точке x_0 обозначается обычно $f'(x_0)$ или $y'_{x=x_0}$.

Пользуясь введенным определением производной, можно сказать, что:

1) Скорость прямолинейного движения есть производная от функции $s=F(t)$ по t (производная от пути по времени).

2) Линейная плотность есть производная от функции $m=\Phi(s)$ по s (производная от массы по длине).

3) Теплоемкость есть производная от функции $q=\Psi(\tau)$ по τ (производная от количества тепла по температуре).

4) Скорость химической реакции есть производная от функции $\gamma=F(t)$ по t (производная от количества вещества по времени). И вообще *скорость изменения функции $y=f(x)$ есть производная от y по x.*

Понятие производной принадлежит к числу фундаментальных понятий математического анализа. Один из основателей анализа — И. Ньютон[1]) пришел к понятию производной, исходя из вопроса о скорости движения.

III. Производная степенной функции.

Найдем производные от некоторых простейших функций. Пусть $y=x$. Имеем

$$y'=(x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

т. е. производная $(x)'$ есть постоянная величина, равная 1. Это очевидно, ибо $y=x$ — линейная функция и скорость ее изменения постоянна.

Если $y=x^2$, то

$$y'=(x^2)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\,\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Пусть $y=x^3$, тогда

$$y'=(x^3)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\,\Delta x+3x\,(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2.$$

Легко заметить закономерность в выражениях производных от степенной функции $y=x^n$ при $n=1,\ 2,\ 3$. Докажем, что и вообще *производная от $y=x^n$ при любом целом положительном показателе n равна nx^{n-1}.*

Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}.$$

Выражение, стоящее в числителе, преобразуем по формуле бинома Ньютона:

$$(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+nx^{n-1}\,\Delta x+\frac{n\,(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2+\ldots+\Delta x^n-x^n.$$

---

[1]) И. Ньютон (1642—1727) — великий английский ученый (математик, физик, астроном). Ньютон заложил основы многих разделов науки нового времени, завершил создание основ математического анализа. Творения Ньютона способствовали преодолению средневековой схоластики и внесли неоценимый вклад в дело выработки подлинно научного материалистического мировоззрения.

Значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\ldots+\Delta x^{n-1}.$$

В правой части последнего равенства стоит сумма n слагаемых, первое из которых не зависит от Δx, а остальные стремятся к нулю вместе с Δx. Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}.$$

Итак, степенная функция $y=x^n$ при целом положительном n имеет производную, равную nx^{n-1}:

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

При $n=1$, 2, 3 из найденной общей формулы следуют формулы, выведенные выше.

Позже (п. **45**) мы докажем, что этот результат верен и для любого показателя n, например:

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Рассмотрим теперь отдельно производную от постоянной величины

$$y=C.$$

Так как эта функция не изменяется с изменением независимой переменной, то $\Delta y=0$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$. Следовательно,

$$(C)'=0,$$

т. е. *производная постоянной равна нулю.*

40. Геометрический смысл производной. Производная от функции $y=f(x)$ имеет очень простой и наглядный геометрический смысл, который тесно связан с понятием касательной к линии.

Определение. ***Касательной*** M_0T ***к линии*** AB ***в ее точке*** M_0 (рис. 50) **называется предельное положение прямой, проходящей через точку** M_0 **и другую точку** M **линии, когда эта точка** M **стремится слиться с данной точкой** M_0.

Предельное положение прямой линии определяется тем, что угол TM_0M стремится к нулю вместе с хордой M_0M.

Геометрический смысл производной вытекает из следующего предложения.

Теорема. **Если значение производной от функции $y=f(x)$ при $x=x_0$ равно $f'(x_0)$**[1]**, то прямая, проведенная через точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$, является касательной к графику функции в точке M_0.**

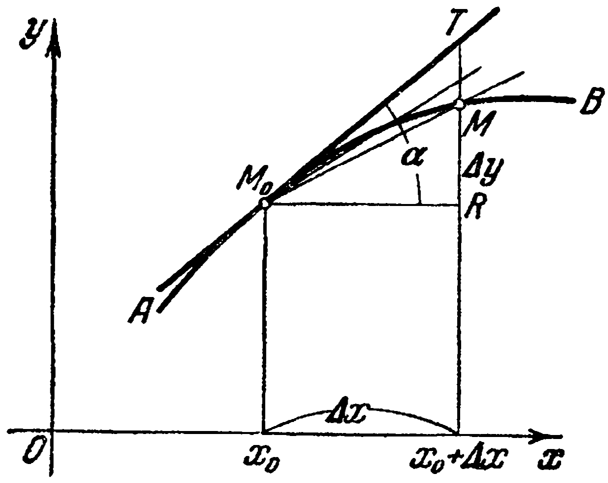

Рис. 50

Доказательство. Проведем через точку M_0 (рис. 50) прямую M_0T с угловым коэффициентом $f'(x_0)$; это значит, что $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона прямой M_0T к оси абсцисс. Придадим затем x_0 приращение Δx, возьмем точку M, лежащую на графике функции и соответствующую значению аргумента $x_0+\Delta x$, и проведем секущую M_0M. Угловой коэффициент этой секущей равен $\frac{RM}{M_0R}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, где $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Пусть теперь $\Delta x \to 0$; тогда точка M будет стремиться по линии AB к точке M_0. Секущая M_0M при этом поворачивается вокруг точки M_0, и ее угловой коэффициент стремится по условию теоремы к определенному пределу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0), \qquad (*)$$

равному угловому коэффициенту прямой M_0T. По формуле для тангенса угла между двумя прямыми (M_0T и M_0M)

$$\operatorname{tg}\angle TM_0M=\frac{f'(x_0)-\frac{\Delta y}{\Delta x}}{1+f'(x_0)\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

В силу равенства (*) при $\Delta x\to 0$ числитель дроби стремится к нулю, а знаменатель — к числу $1+[f'(x_0)]^2\neq 0$. Поэтому $\operatorname{tg}\angle TM_0M$ стремится к нулю, а значит, и сам $\angle TM_0M$ тоже стремится к нулю. Таким образом, мы доказали, что прямая M_0T является касатель-

---

[1]) Подчеркнем, что значение производной $f'(x_0)$ отыскивается так: сначала ищем производную $f'(x)$, а потом в выражение для производной подставляем данное значение x_0. Грубой ошибкой было бы сначала найти $f(x_0)$ и потом дифференцировать; так как $f(x_0)$ — величина постоянная, то мы всегда получали бы нуль!

ной. Установленный геометрический смысл производной коротко формулируют так:

Значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Заметим здесь, что именно вопрос о точном определении и построении касательных к линиям привел Г. Лейбница[1]) к установлению (одновременно с И. Ньютоном) понятия производной.

§ 2. Дифференцирование функций

41. Дифференцирование результатов арифметических действий. Действие отыскания производной называется дифференцированием (объяснение этого названия будет дано немного дальше, в п. **50**). «Продифференцировать функцию $f(x)$» — значит найти ее производную $f'(x)$. Для этого нужно найти

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Такое непосредственное отыскание предела в большинстве случаев представляет собой весьма громоздкое и трудное действие. Но если знать — раз и навсегда — производные всех основных элементарных функций (мы пока знаем только производную степенной функции $y=x^n$), а также правила, по которым следует дифференцировать сложные функции, и результаты арифметических действий, то можно находить производные любых элементарных функций, не выполняя всякий раз указанного предельного перехода.

Выведем прежде всего правила дифференцирования арифметических действий. Мы будем предполагать, что функции-компоненты, т. е. слагаемые, сомножители, делимое и делитель, непрерывны и имеют производные при рассматриваемых значениях независимой переменной. Из доказательств приводимых ниже теорем тогда вытекает, что функции-результаты, т. е. сумма, произведение, частное, также имеют производные при тех же значениях независимой переменной. Имея в виду это обстоятельство, мы не будем всякий раз на него указывать, чтобы не загромождать формулировки теорем, а будем включать в эти формулировки только вопрос о том, как найти производную результата, если известны производные компонент.

---

[1]) Г. Лейбниц (1646—1716) — великий немецкий ученый, прославивший свое имя в самых различных областях науки (математика, физика, философия, история и т. д.). Он вместе с И. Ньютоном завершил создание основ математического анализа; ему принадлежит большое число первоначальных открытий в дифференциальном и интегральном исчислении.

Теорема I. **Производная суммы конечного числа функций равна сумме производных слагаемых.**

Доказательство. Пусть функция y задана как сумма других функций u, v, ..., w той же независимой переменной x:

$$y = u + v + \ldots + w.$$

Докажем, что

$$y' = (u + v + \ldots + w)' = u' + v' + \ldots + w'.$$

Придадим независимой переменной x приращение Δx; функции u, v, ..., w получат соответственно приращения Δu, Δv, ..., Δw, а функция y — приращение Δy. Ясно, что

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + \ldots + (w + \Delta w).$$

Вычитая отсюда функцию y, получим

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \ldots + \Delta w,$$

откуда, деля обе части на Δx, найдем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись теоремой о пределе суммы (п. **29**), будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \ldots + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x};$$

так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \quad \ldots, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = w',$$

то мы и приходим к доказываемому равенству.

Примеры. 1) $y = x^3 - x^2 + x - 1$. Имеем

$$y' = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - (1)' = 3x^2 - 2x + 1.$$

2) $y = x + \frac{1}{x}$. Имеем

$$y' = (x)' + (x^{-1})' = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Теорема II. **Производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и производной второй на первую.**

Доказательство. Пусть функция y задана как произведение двух функций:

$$y = uv.$$

Докажем, что

$$y' = (uv)' = u'v + v'u.$$

В самом деле, придадим независимой переменной приращение Δx; при этом функции u, v, y получат соответствующие приращения Δu, Δv, Δy. Наращенное значение функции будет

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v).$$

Отсюда

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u \cdot v + u\Delta v + \Delta u \Delta v$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v.$$

Применяя известные правила предельного перехода и учитывая, что при $\Delta x \longrightarrow 0$ также и $\Delta v \longrightarrow 0$, как приращение непрерывной функции, найдем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v =$$
$$= u'v + uv' + u' \cdot 0 = u'v + uv',$$

что и требовалось доказать.

Если один из множителей есть постоянная величина, например $v = C$, то получаем

$$y' = (Cu)' = C'u + Cu' = Cu',$$

ибо производная от постоянной равна нулю. Значит, *постоянную величину можно выносить за символ производной.*

Правило дифференцирования произведения двух функций последовательно распространяется на произведение какого угодно конечного числа функций. Так, если $y = uvw$, то

$$y' = (uvw)' = (uv)'w + uvw' = (u'v + uv')w + uvw' =$$
$$= u'vw + uv'w + uvw',$$

т. е. производная произведения трех функций равна сумме трех слагаемых, причем каждое из них является произведением двух из данных функций на производную третьей.

Примеры. 1) $y=5x^3-2x^2+3x-1$. Имеем

$$y'=5(x^3)'-2(x^2)'+3(x)'-(1)'=15x^2-4x+3.$$

2) $y=(2x+3)(1-x)(x+2)$. Имеем:

$$y'=(2x+3)'(1-x)(x+2)+(2x+3)(1-x)'(x+2)+$$
$$+(2x+3)(1-x)(x+2)'=2(1-x)(x+2)-(2x+3)(x+2)+$$
$$+(2x+3)(1-x).$$

Мы получим, разумеется, тот же ответ, если, раскрыв скобки в заданном произведении, продифференцируем получающийся при этом многочлен третьей степени.

Теорема III. **Производная частного двух функций равна дроби, знаменатель которой равен квадрату делителя, а числитель — разности между произведением производной делимого на делитель и произведением делимого на производную делителя.**

Доказательство. Пусть функция y задана как частное двух функций u и v:

$$y=\frac{u}{v}.$$

Докажем, что

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Действительно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\dfrac{u}{v}}{\Delta x}=\frac{\Delta u\cdot v-u\Delta v}{\Delta x\cdot v(v+\Delta v)}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и учитывая, что Δv стремится к 0, как приращение непрерывной функции, получаем

$$y'=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)}=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

что и требовалось доказать.

Примеры. 1) $y=\dfrac{2-3x}{2+x}$. Имеем

$$y'=\frac{(2-3x)'(2+x)-(2-3x)(2+x)'}{(2+x)^2}=\frac{-3(2+x)-(2-3x)}{(2+x)^2}=-\frac{8}{(2+x)^2}.$$

2) $y=x^{-n}$, где n — целое положительное число. Имеем

$$y'=\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{(1)'x^n-1(x^n)'}{x^{2n}}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1},$$

что подтверждает правило дифференцирования степенной функции для случая целого отрицательного показателя.

3) $y=\frac{C}{u}$, где C — постоянная, а u — функция от x. Имеем

$$y'=\frac{C'u-Cu'}{u^2}=-C\frac{u'}{u^2};$$

этот результат следует запомнить; в частности, при $u=x$

$$\left(\frac{C}{x}\right)'=-\frac{C}{x^2}.$$

4) $y=\frac{u}{C}$, где C — постоянная. Для начинающего бывает соблазнительным дифференцировать эту функцию по правилу дифференцирования дроби. Этого делать не следует. Здесь дело обстоит гораздо проще: нужно заметить, что эту функцию можно представить как произведение постоянного множителя $\frac{1}{C}$ на функцию u:

$$y=\frac{1}{C}u,$$

поэтому

$$y'=\left(\frac{1}{C}u\right)'=\frac{1}{C}u'=\frac{u'}{C}.$$

42. Дифференцирование сложной и обратной функций.

1. Дифференцирование сложной функции. Очень важным является правило дифференцирования сложной функции, указывающее выражение для ее производной через производные функций, из которых она составлена.

Теорема. **Производная сложной функции равна производной заданной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.**

Доказательство. Пусть $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Докажем, что

$$y'=f'(u)\,u'=f'(u)\,\varphi'(x).$$

Придадим x приращение Δx; оно вызовет приращение Δu промежуточного аргумента $u=\varphi(x)$, которое в свою очередь повлечет изменение функции y на некоторую величину Δy.

Для отыскания производной y' нужно найти $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$.

Представим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Тогда в силу правила предельного перехода в произведении получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

($\Delta u\to 0$ при $\Delta x\to 0$, так как $u=\varphi(x)$ — непрерывная функция).

Так как

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)\quad \text{и}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\varphi'(x),$$

то мы приходим к доказываемой формуле [1]).

Итак, для того чтобы продифференцировать сложную функцию $y=f[\varphi(x)]$, нужно взять производную от «внешней» функции f, рассматривая ее аргумент $\varphi(x)=u$ просто как переменную, по которой совершается дифференцирование, и умножить на производную от «внутренней» функции $\varphi(x)$ по независимой переменной.

Примеры. 1) $y=(2x^2-1)^3$. Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию, составленную из кубической функции $y=u^3$ и квадратичной $u=2x^2-1$. Имеем

$$y'=(u^3)'u'=(u^3)'(2x^2-1)'=3u^2\cdot 4x=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=\\=48x^5-48x^3+12x.$$

Легко проверить правильность результата. Раскрывая куб разности, имеем: $y=8x^6-12x^4+6x^2-1$; дифференцируя этот многочлен, получим тот же ответ.

2) $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100}$. Здесь возводится в сотую степень функция $u=x+\frac{1}{x}$. Имеем

$$y'=100u^{99}u'=100\left(x+\frac{1}{x}\right)^{99}\left(x+\frac{1}{x}\right)'=100\left(x+\frac{1}{x}\right)^{99}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

Легко видеть все преимущества дифференцирования этой функции с помощью правила дифференцирования сложной функции по сравнению с возможным дифференцированием ее как многочлена, полученного от раскрытия бинома в сотой (!) степени по формуле Ньютона.

---

[1]) Приведенное доказательство теряет силу, если Δu будет обращаться в нуль. Можно доказать (на этом мы не останавливаемся), что теорема и в этом случае оказывается справедливой.

3) $y=\sqrt{1+x^2}$. Полагая $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, имеем

$$y'=(u^{\frac{1}{2}})'\,u'=\frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Предположим теперь, что y, как функция независимой переменной x, представляется посредством цепи, состоящей не из двух, а из трех функций:

$$y=f(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=\psi(x).$$

Согласно доказанному правилу имеем

$$y'=f'(u)\,u',$$

где u' — производная от u, рассматриваемая как функция от независимой переменной x. На основании того же правила

$$u'=\varphi'(v)\,v'=\varphi'(v)\,\psi'(x).$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получаем

$$y'=f'(u)\,\varphi'(v)\,\psi'(x).$$

Аналогично выводится формула при любом числе промежуточных аргументов. Во всех случаях производная y' получается как произведение производной по первому промежуточному аргументу на производную от первого по второму, на производную от второго по третьему и т. д., наконец, на производную последнего (считая от y к x) промежуточного аргумента по x.

Коротко можно сказать так:

Производная сложной функции равна произведению производных от функций, ее составляющих.

Пусть, например, $y=(1+\sqrt{x^2+1})^2$. Представляя эту функцию в виде цепи, получим $y=u^2$, $u=1+\sqrt{v}$, $v=x^2+1$. Дифференцируя, получим

$$y'=(u^2)'(1+\sqrt{v})'(x^2+1)'=2u\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot 2x=\frac{2(1+\sqrt{x^2+1})\,x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

II. Дифференцирование обратной функции. Пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ — пара взаимно обратных функций (см. п. **18**). Покажем, что если известна производная от одной из этих функций, то легко получить выражение для производной другой. Допустим, например, что нам известна производная $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и она не равна нулю. Чтобы найти производную $\varphi'(y)$, нужно найти предел $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Так как $\Delta x\to 0$ при $\Delta y\to 0$ (мы рассматриваем только непрерывные функции), то из тождества $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ получим

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

т. е. что $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$. Аналогично, если $\varphi'(y)\neq 0$, то $f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$. Коротко можно сказать, что **производные от взаимно обратных функций обратны по величине.** Записывают это так:

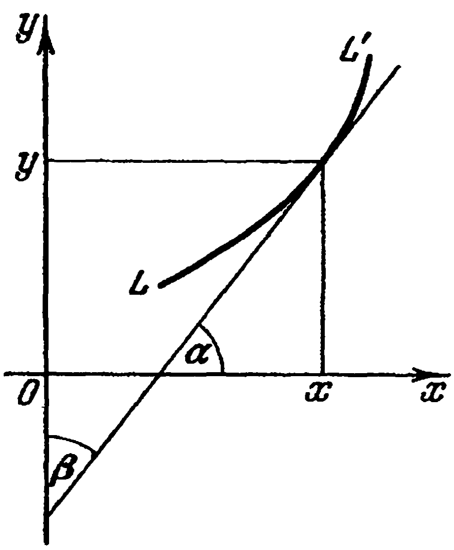

Рис. 51.

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}\quad\text{или}\quad x'_y=\frac{1}{y'_x},$$

где индексы x и y показывают, по какой переменной производится дифференцирование, т. е. какая из переменных принята за независимую.

Связь между производными взаимно обратных функций весьма наглядно иллюстрируется геометрически. В самом деле, пусть линия LL' является графиком функции $y=f(x)$ (рис. 51). Тогда

$$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Уравнение линии LL' можно записать и как $x=\varphi(y)$. Производная этой функции по переменной y, очевидно, равна угловому коэффициенту той же касательной, но уже относительно оси Oy, т. е.

$$\varphi'(y)=\operatorname{tg}\beta.$$

Но $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, значит, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, откуда

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Таким образом, эта формула выражает собственно тот очевидный факт, что *углы, образованные касательной к линии с осями координат, в сумме дают* $\frac{\pi}{2}$.

В качестве примера рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x}$. Здесь $x=y^3$ и $x'_y=3y^2$. Следовательно (мы опускаем индекс у y'), $y'=\frac{1}{3y^2}$.

Выразим теперь производную y' через независимую переменную x. Для этого подставим в полученное равенство вместо y его значение

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Предоставляем читателю самому продифференцировать функцию $y=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ по общей формуле дифференцирования степенной функции и убедиться в том, что результат будет тот же.

43. Производные основных элементарных функций. В п. **39** мы нашли производную степенной функции $y=x^n$:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

Найдем теперь производные всех остальных основных элементарных функций. Ради краткости приращение Δx будем обозначать через h.

I. Производные тригонометрических функций. Пусть

$$y=\sin x.$$

Придадим x приращение $\Delta x = h$. Тогда

$$\Delta y = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

и

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

По доказанному в п. **30** первый множитель равен единице, а

$$\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos(x+0) = \cos x,$$

так как $\cos x$ — непрерывная функция.

В итоге

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{2}$$

Формулу для производной функции $y=\cos x$ выведем на основании правила дифференцирования сложной функции. Так как

$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, то, полагая $x+\frac{\pi}{2}=u$, находим

$$y' = (\sin u)'\,u' = \cos u\cdot 1 = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$

т. е.

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{3}$$

Рекомендуем читателю получить эту формулу иным путем — отыскивая производную по общему правилу.

Производные для функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ получим, применяя правило дифференцирования частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{4}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{5}$$

Примеры. 1) $y = x\sin x$. Имеем

$$y' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x.$$

2) $y=\frac{\cos x}{x}$. Имеем

$$y' = \frac{(\cos x)'\,x-\cos x\,(x)'}{x^2} = -\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}.$$

3) $y=\operatorname{tg} 5x$. Полагая $y=\operatorname{tg} u$ и $u=5x$, получим

$$y' = (\operatorname{tg} u)'\,u' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot 5 = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

4) $y=\sin^3 2x$. Полагая $y=u^3$, $u=\sin v$ и $v=2x$, получим

$$y' = 3u^2\cos v\cdot 2 = 6\sin^2 2x\cos 2x.$$

II. Производные обратных тригонометрических функций. Производные обратных тригонометрических функций легко получить, применяя правило дифференцирования обратной функции (п. 42).

Пусть $y = \arcsin x$; тогда $x = \sin y$ и $x'_y = \cos y$. Отсюда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}.$$

Чтобы получить выражение для производной через независимую переменную x, надо вместо $\cos y$ подставить его выражение через x, т. е.

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Корень берется арифметический, потому что значения функции $y = \arcsin x$ лежат в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а $\cos y$ в этом интервале положителен.

Отсюда

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{6}$$

Обращаем внимание читателя на то, что при $y = \pm \frac{\pi}{2}$, т. е. для $x = \pm 1$ производной не существует, хотя сама функция $y = \arcsin x$ в этих точках определена. Подробнее вопрос о дифференцируемости функций будет рассмотрен в п. 52.

Совершенно аналогично получим, что функция $y = \arccos x$ имеет производную для всех значений x в интервале $(-1, 1)$, причем

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg} x$. Обратная ей функция $x = \operatorname{tg} y$, и

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Следовательно,

$$y'_x = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2} \tag{8}$$

и аналогично

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \tag{9}$$

Примеры. 1) $y = x^2 \arcsin x$. Имеем

$$y' = 2x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2) $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$. Имеем

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}\,\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Здесь производная выражается точно так же, как и производная от $\operatorname{arctg} x$. Это и не удивительно, ибо функции $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ и $\operatorname{arctg} x$ отличаются друг от друга на постоянное слагаемое: $\frac{\pi}{4}$, если $x<1$, и $\frac{3\pi}{4}$, если $x>1$.

III. Производные логарифмической и показательной функций. Рассмотрим логарифмическую функцию $y=\ln x$. Дадим x приращение h. Имеем

$$\frac{\Delta y}{h}=\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}=\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Перепишем это так:

$$\frac{\Delta y}{h}=\frac{1}{x}\,\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}.$$

Отсюда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\,\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\right]=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}},$$

а это согласно пределу, найденному в п. **37**, II, дает

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\frac{1}{x}.$$

Итак, логарифмическая функция $y=\ln x$ имеет производную, равную $\frac{1}{x}$:

$$\mathbf{(\ln x)'=\frac{1}{x}}. \tag{10}$$

Теперь пусть $y=\log_a x$. Известно (п. **20**, II), что $\log_a x= \ln x\log_a e$ и, значит, $(\log_a x)'=\log_a e(\ln x)'=\frac{\log_a e}{x}$.

В частности,

$$(\lg x)'=\frac{M}{x}\approx\frac{0{,}43429}{x}\qquad(M=\lg e).$$

Для отыскания производной показательной функции воспользуемся снова правилом дифференцирования обратной функции. Если $y=a^x$, то $\ln y = x\ln a$ и $x=\frac{\ln y}{\ln a}$. Отсюда $x'_y=\frac{1}{y\ln a}$ и $y'_x=y\ln a=a^x\ln a$. Таким образом,

$$(a^x)'=a^x\ln a. \tag{11}$$

В частности, если $a=e$, то

$$(e^x)'=e^x. \tag{12}$$

Следовательно, функция $y=e^x$ при дифференцировании не меняется.

Примеры. 1) $y=x\ln x$, $y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1$.

2) $y=(\ln x)^3$, $y'=3(\ln x)^2(\ln x)'=3\,\frac{\ln^2 x}{x}$.

3) $y=\ln\sin x$, $y'=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x$.

4) $y=e^{-x}$. Полагая $y=e^u$ и $u=-x$, получим

$$y'=(e^u)'\,u'=-e^{-x}.$$

IV. Производные гиперболических и обратных гиперболических функций. В соответствии с определениями, данными в п. **23**, имеем:

$$(\operatorname{sh} x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{(e^x)'-(e^{-x})'}{2}=\frac{e^x-(-e^{-x})}{2}=\operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{(e^x)'+(e^{-x})'}{2}=\frac{e^x+(-e^{-x})}{2}=\operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)'=\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)'=\frac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x\,(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x}=\frac{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

В этих формулах мы снова замечаем аналогию между гиперболическими и тригонометрическими функциями.

Производные обратных гиперболических функций можно получить или по общему правилу дифференцирования обратных функций, или исходя из их выражений через логарифмическую функцию (п. **23**); мы предоставляем это сделать читателю и приведем лишь окончательный результат:

$$(\operatorname{Arsh} x)'=(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$(\operatorname{Arch} x)'=(\ln(x\pm\sqrt{x^2-1}))'=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(знаки $\pm$ соответствуют двум однозначным ветвям)

$$(\operatorname{Arth} x)'=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1-x^2}.$$

44. Дифференцирование элементарных функций. Примеры. После того как мы вывели правила и формулы дифференцирования, мы в состоянии отыскивать производные любых элементарных функций. При этом нам уже не приходится прибегать к отысканию пределов.

Для удобства выпишем таблицу основных правил и формул дифференцирования, которую необходимо знать наизусть.

Правила дифференцирования:

$$(u+v+\ldots+w)'=u'+v'+\ldots+w',$$

$$(uv)'=u'v+v'u,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Формулы дифференцирования:

1) $(x^n)'=nx^{n-1}$,

2) $(\sin x)'=\cos x$,

3) $(\cos x)'=-\sin x$,

4) $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$,

5) $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

6) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

7) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

8) $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$,

9) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$,

10) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

11) $(a^x)'=a^x\ln a$,

12) $(e^x)'=e^x$.

Если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, то $y'=f'(u)\varphi'(x)$.

Примеры. 1) $y=e^{\sin(2x+1)}$. Полагая $y=e^u$, $u=\sin v$, $v=2x+1$, получим

$$y'=(e^u)'(\sin v)'(2x+1)'=e^u\cos v\cdot 2=2e^{\sin(2x+1)}\cos(2x+1).$$

С накоплением опыта в дифференцировании отпадет необходимость вводить специальные обозначения для промежуточных аргументов. Обычно дифференцирование сложных функций производят, выделяя в уме простейшие звенья, ведущие от y к x.

2) $y=x\sin 3x$,

$$y'=\sin 3x+x(\sin 3x)'=\sin 3x+3x\cos 3x.$$

3) $y=\dfrac{e^{x^2}}{x}$, $y'=\dfrac{(e^{x^2})'x-e^{x^2}}{x^2}=\dfrac{e^{x^2}(2x^2-1)}{x^2}$.

45. Дополнительные замечания о дифференцировании функций.

I. Логарифмическое дифференцирование. Функцию вида

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)}, \qquad f(x)>0,$$

где и основание и показатель изменяются вместе с независимой переменной, называют *степенно-показательной*. Простейшим примером такой функции является функция

$$y=x^x, \quad x>0.$$

Дифференцировать эту степенно-показательную функцию можно как сложную функцию, записывая ее выражение так:

$$x^x=(e^{\ln x})^x=e^{x\ln x}.$$

Тогда

$$(x^x)'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x(\ln x+1).$$

Но можно поступить иначе, предварительно прологарифмировав эту функцию:

$$\ln y=x\ln x.$$

Дифференцируя это тождество по x и помня, что в левой части равенства стоит сложная функция от x, получим

$$\frac{y'}{y}=\ln x+1,$$

откуда

$$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

Таким образом, мы получили то же выражение, что и найденное другим путем.

Операция, состоящая в последовательном применении к функции $f(x)$ сначала логарифмирования (по основанию e), а затем дифференцирования, называется *логарифмическим дифференцированием*, а ее результат

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

— *логарифмической производной от функции* $f(x)$.

Логарифмическое дифференцирование может быть применено для отыскания производных не только от функций степенно-показательного типа. Так, например, для отыскания производной от произведения

$$y=2^x\sqrt{x^2+4}\sin^2 x$$

удобно применить логарифмическое дифференцирование, что позволяет быстрее найти результат. Имеем

$$\ln y = x \ln 2 + 2 \ln \sin x + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 4)$$

и

$$y' = y \left(\ln 2 + 2 \operatorname{ctg} x + \frac{x}{x^2 + 4} \right).$$

Пользуясь логарифмическим дифференцированием, можно доказать справедливость формулы

$$(x^n) = nx^{n-1}$$

для любого n. До сих пор она была доказана лишь для n целого (п. 39, III). Логарифмируем функцию $y = x^n$, считая $x > 0$:

$$\ln y = n \ln x.$$

Дифференцируя, получим $\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$, откуда

$$y' = \frac{n}{x} x^n = nx^{n-1}.$$

Если $x < 0$, то для тех показателей степени, при которых функция определена, ее можно записать в виде $y = (-1)^n (-x)^n$; дифференцируя полученное выражение как сложную функцию, снова придем к доказываемой формуле.

II. Производные неявных функций. Допустим, что y есть неявная функция x, т. е. она задается некоторым уравнением, связывающим независимую переменную x с функцией y, не разрешенным относительно y (см. п. 12). Тогда производную от этой функции можно найти, дифференцируя по x обе части уравнения с учетом того, что y есть функция от x (определяемая этим уравнением). Выясним на примерах практический смысл этого правила.

Найдем производную функции y, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 = 1$$

(уравнение окружности). Дифференцируя по x и имея в виду, что y есть функция от x, получим

$$2x + 2yy' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

В этом примере нетрудно найти явное выражение для y, именно $y = \sqrt{1 - x^2}$. Дифференцируя эту функцию, получаем: $y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ — результат, как легко видеть, совпадающий с только что найденным. (Если считать, что $\sqrt{1-x^2}<0$, то мы получим производную для ветви, определяемой условием $y<0$.)

Возьмем еще неявную функцию $y=f(x)$, определяемую уравнением

$$y^3-3axy+x^3=0.$$

Дифференцируя по x, найдем

$$3y^2y'-3ay-3axy'+3x^2=0,$$

откуда

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

Здесь уже трудно выразить производную только через независимую переменную x. Иногда, пользуясь первоначальным уравнением, связывающим y и x, удается упростить выражение для производной. Например, возьмем неявную функцию $xy^2=e^{x+y}$. Дифференцируя, получим $y^2+2xyy'=e^{x+y}(1+y')$, откуда $y'=\frac{e^{x+y}-y^2}{2xy-e^{x+y}}$. Заменяя e^{x+y} на xy^2, придаем производной более простой вид [1]):

$$y'=\frac{y(x-1)}{x(2-y)}.$$

Таким образом, всякую неявную функцию, заданную уравнением, составленным из элементарных функций, легко продифференцировать по известным нам правилам независимо от того, можем ли мы эту функцию представить в явном виде или нет. Производная такой неявной функции выражается через независимую переменную и саму функцию.

46. Параметрически заданные функции и их дифференцирование.

I. Параметрическое задание функций и линий. Зададим две функции одной и той же переменной t; обозначим их через x и y:

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t). \qquad (*)$$

Задание этих функций означает задание функциональной зависимости между переменными x и y. В самом деле, для каждого значения t (в некоторой области) из системы (*) находятся значения x и y, которые и являются соответствующими друг другу.

---

[1]) То же самое можно получить, если предварительно прологарифмировать формулу, определяющую функцию.

Определение. **Задание функциональной зависимости между двумя переменными, состоящее в том, что обе переменные определяются каждая в отдельности как функции одной и той же вспомогательной переменной, называется *параметрическим*, а вспомогательная переменная — *параметром*.**

Отыскание по системе (*) непосредственной связи между переменными x и y без участия переменной t называется *исключением параметра*. В результате исключения параметра мы получаем уравнение между x и y, задающее одну из этих переменных как явную или неявную функцию другой.

Прямой путь для исключения параметра таков: из первого, например, равенства находим выражение для t через x, т. е. $t=\chi(x)$, где χ — функция, обратная функции φ, и подставляем это выражение во второе равенство:

$$y=\psi[\chi(x)].$$

Таким образом мы получаем явное выражение для y как функции от x. В конкретных случаях употребляются и другие приемы исключения параметра (см. II, пример 1).

Рассматривая зависимость между x и y как уравнение соответствующей линии, можно сказать, что линия задана параметрически, или, точнее, параметрическими уравнениями.

Параметрическое задание функций и линий часто имеет преимущества по сравнению с другими формами их задания. В то время как непосредственная связь между x и y может быть весьма сложной, функции, определяющие x и y через параметр, могут оказаться простыми. Кроме того, при параметрическом задании заранее не предусматривается, какая именно из переменных принимается за независимую и какая — за функцию.

Заметим, что если хотя бы одна из функций системы (*) постоянна, то исключить параметр t нельзя. Например, уравнения $x=1$, $y=\sin t$ не дают возможности связать x и y. Здесь точки с координатами x, y, соответствующие различным значениям t, располагаются на отрезке прямой $x=1$, заключенном между точками $(1, -1)$ и $(1, 1)$.

Параметр может иметь различное истолкование в соответствии с характером функциональной зависимости.

Параметрически заданные функции особенно часто встречаются в механике при задании траектории движения. Параметром служит при этом время t, а фукции $x(t)$ и $y(t)$ выражают законы движения проекций движущейся точки на оси координат.

Исключая параметр t, мы получаем уравнение траектории в виде связи между x и y — координатами движущейся точки.

Приведем один простой пример, а именно рассмотрим траекторию тела, сброшенного с самолета, летящего горизонтально на высоте H со скоростью v_0. Выберем систему координат, как указано на рис. 52, и примем, что тело было сброшено в момент $t=0$ (из точки M_0). Пусть в момент t тело находится в точке $M(x, y)$. Так как в горизонтальном направлении на тело никакие силы не действуют (мы считаем, что сопротивление воздуха отсутствует[1]), то его горизонтальная скорость постоянна и равна v_0. Тогда пройденный по горизонтали путь $x=v_0t$. За то же время t тело по вертикали пройдет путь $s=\frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение силы тяжести, и поэтому $y=H-\frac{gt^2}{2}$ (см. рис. 52). Мы получили уравнение траектории в виде

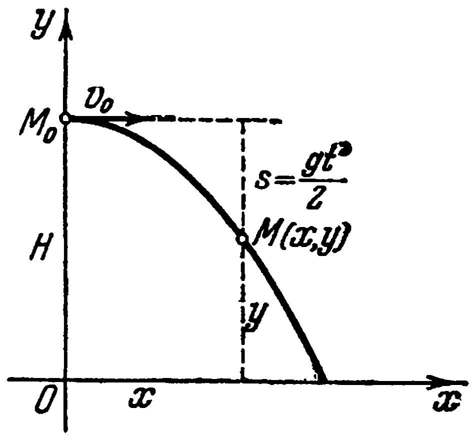

Рис. 52.

$$y=H-\frac{gt^2}{2}, \qquad x=v_0t.$$

Исключим параметр t:

$$y=H-\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Из этого уравнения видно, что траекторией служит **парабола**, а точка M_0 является ее **вершиной**.

II. **Примеры**. Приведем несколько примеров параметрического задания линий.

1) Возьмем окружность с центром в начале координат и радиусом, равным a. Обозначим через t дугу окружности (в радианах) от точки $(a, 0)$ до текущей точки (x, y).

Очевидно,

$$x=a\cos t, \qquad y=a\sin t.$$

Это и есть параметрические уравнения окружности. Для исключения t возведем в квадрат оба уравнения и сложим их почленно. Мы будем иметь

$$x^2+y^2=a^2.$$

Когда t пробегает интервал $[0, 2\pi]$, точка с координатами x, y один раз обегает всю окружность, начиная от точки $(a, 0)$.

Проверим, что параметрическими уравнениями этой же окружности будут и такие (геометрический смысл параметра указан

---

[1]) При учете этого сопротивления задача значительно усложняется.

ниже):

$$y=a\frac{2t}{1+t^2},\qquad x=a\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Возводя обе части в квадрат и складывая, получаем снова

$$x^2+y^2=a^2.$$

При изменении параметра t от 0 до ∞ переменная точка пробегает верхнюю полуокружность от точки $(a,\ 0)$ до точки $(-a,\ 0)$, а при изменении t от 0 до $-\infty$ — нижнюю полуокружность. Таким образом, при непрерывном изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ переменная точка один раз пробегает всю окружность против часовой стрелки, начиная от точки $(-a,\ 0)$. Здесь параметром t служит тангенс половины дуги окружности от точки $(a,\ 0)$ до текущей точки $(x,\ y)$, т. е. как раз той дуги, которая являлась параметром в первых уравнениях. Рекомендуем читателю доказать это.

Приведенный пример показывает, что одна и та же линия может быть задана разными параметрическими уравнениями.

2) Около эллипса с центром в начале координат и с осями a и b, лежащими на осях координат, опишем окружность с тем же центром и с радиусом, равным a (если $a>b$). Тогда, принимая в качестве параметра t дугу этой окружности от точки $(a,\ 0)$ до точки с той же абсциссой, что и текущая точка $(x,\ y)$ эллипса, получим параметрические уравнения эллипса

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t.$$

Действительно, исключая из этих уравнений параметр t, придем к известному каноническому уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

При изменении t в интервале $[0,\ 2\pi)$ точка $(x,\ y)$ движется по указанному эллипсу.

Аналогично уравнения

$$x=a\operatorname{ch}t,\quad y=b\operatorname{sh}t\quad\text{и}\quad x=-a\operatorname{ch}t,\quad y=b\operatorname{sh}t$$

представляют параметрические уравнения соответственно **правой** и **левой** ветвей гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. В обоих случаях параметр t изменяется в интервале $(-\infty,\ \infty)$. В силу этого функции $\operatorname{ch}t$, $\operatorname{sh}t$ и были названы **гиперболическими**.

3) *Циклоидой называется линия, описываемая какой-нибудь точкой окружности, катящейся без скольжения*[1]) *по прямой линии* (рис. 53).

Прямая линия, по которой происходит качение, называется **направляющей прямой**, а катящаяся окружность — **производящей окружностью**, радиус ее обозначим через a.

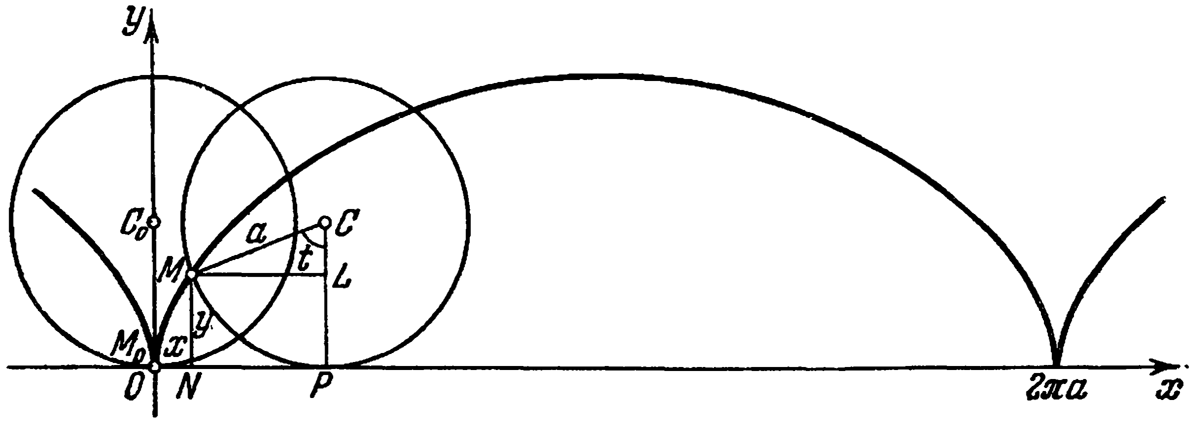

Рис. 53.

Примем за ось Ox направляющую прямую, а за начало координат — точку прямой, с которой совпадает фиксированная точка M_0 производящей окружности.

Для составления параметрических уравнений циклоиды выберем в качестве параметра угол t, на который поворачивается окружность при переходе фиксированной точки окружности M_0 в положение M (рис. 53). Этот угол равен углу между радиусом катящейся окружности, проведенным в точку M, и радиусом, проведенным в точку P ее касания с осью Ox. Найдем абсциссу x точки M циклоиды:

$$x = ON = OP - NP,$$

но $OP = \smile{MP} = at$ (окружность катится без скольжения!), а

$$NP = ML = a \sin t,$$

где t — радианная мера $\angle MCP$. Значит, $x = a(t - \sin t)$. Аналогично находится ордината y точки M:

$$y = NM = PC - LC = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Таким образом, параметрические уравнения циклоиды таковы:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

---

[1]) Говорят, что одна линия катится по другой **без скольжения**, если длина дуги, на которую поворачивается подвижная линия, точно равна длине пройденного куска неподвижной линии.

Одна волна циклоиды получается при изменении t в интервале $[0, 2\pi]$.

Если исключить параметр t, то зависимость между x и y оказывается весьма сложной:

$$x \pm \sqrt{y(2a-y)} = a \arccos \frac{a-y}{a}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi a.$$

III. Производные параметрически заданных функций. Укажем способ отыскания производной параметрически заданной функции. Пусть y как функция x задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Дифференцируя вторую из заданных функций по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$y'_x = \psi'(t)\, t'_x$$

(индекс показывает, какая переменная считается независимой; по ней и производится дифференцирование). Производную t'_x найдем по правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Окончательно

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

что можно короче записать так: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Например, для углового коэффициента касательной к окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ находим выражение

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Так как угловой коэффициент радиуса, проведенного в ту же точку окружности, равен, очевидно, $\operatorname{tg} t$, то это означает, что касательная к окружности перпендикулярна к радиусу.

§ 3. Геометрические задачи. Графическое дифференцирование

47. Касательная и нормаль к линии. Из геометрического смысла производной следует, что если нам известно уравнение $y = f(x)$ некоторой линии l в системе декартовых координат Oxy на плоскости, то мы можем аналитически (т. е. с помощью вычислений) решать геометрические задачи, относящиеся к касательной к этой линии. Прежде всего составим уравнение касательной к линии l в ее точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0=f(x_0)$. Так как касательная прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет угловой коэффициент, равный $f'(x_0)$ (п. **40**), то ее уравнение таково:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (*)$$

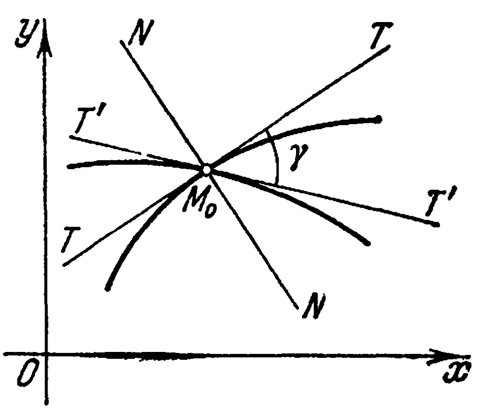

Рис. 54.

Далее, дадим определения трех простых геометрических понятий, связанных с касательной; все обозначения соответствуют рис. 54.

Определение 1. ***Направлением линии в ее точке*** M_0 **называется направление касательной** M_0T, **проведенной к линии в точке** M_0.

Определение 2. ***Углом*** γ ***между двумя пересекающимися в точке*** M_0 ***линиями*** **называется угол** TM_0T' **между касательными, проведенными к линиям в точке их пересечения.**

Определение 3. ***Нормалью к линии в ее точке*** M_0 **называется прямая** M_0N, **проходящая через точку** M_0 **и перпендикулярная к касательной** M_0T **в той же точке.**

Так как нормаль к линии l в точке M_0 проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет угловой коэффициент, равный $-\frac{1}{f'(x_0)}$, то ее уравнение таково:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (**)$$

Приведем примеры, показывающие, как применяется производная при решении геометрических задач.

Примеры. 1) Возьмем параболу $y=ax^2$. Уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ этой параболы имеет вид

$$y-y_0=2ax_0(x-x_0),$$

но $y_0=ax_0^2$ и, значит,

$$y-ax_0^2=2ax_0(x-x_0),$$

или

$$y=2ax_0x-ax_0^2=2ax_0\left(x-\frac{x_0}{2}\right).$$

Из этого уравнения видно, что касательная пересекает ось Ox при $x=\frac{x_0}{2}$, т. е. в середине S отрезка ON (рис. 55).

Таким образом, мы получаем простой способ проведения касательной к параболе. Докажем также одно важное свойство параболы, заключающееся в том, что нормаль (M_0Q) в любой точке параболы делит пополам угол, образованный фокальным радиусом FM_0 и прямой M_0M_1, параллельной оси параболы, т. е. что $\angle QM_0F = \angle QM_0M_1$ (рис. 55).

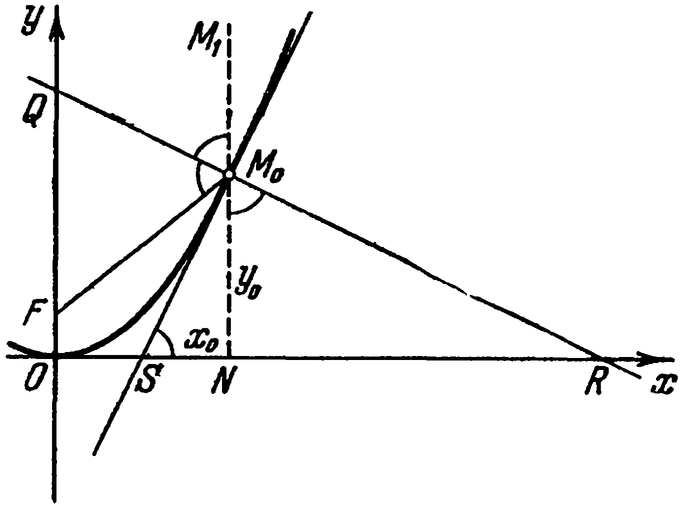

Рис. 55.

Из аналитической геометрии известно, что расстояние $OF = \frac{1}{4a}$. Угловой коэффициент прямой FM_0 равен $\frac{y_0 - \frac{1}{4a}}{x_0}$. Угловой коэффициент нормали M_0Q по предыдущему равен $-\frac{1}{2ax_0}$. По формуле для тангенса угла между двумя прямыми находим

$$\operatorname{tg} \angle QM_0F = \frac{\frac{y_0 - \frac{1}{4a}}{x_0} + \frac{1}{2ax_0}}{1 - \left(\frac{y_0 - \frac{1}{4a}}{x_0}\right)\frac{1}{2ax_0}}.$$

Заменяя y_0 через ax_0^2, после простых преобразований получим

$$\operatorname{tg} \angle QM_0F = 2ax_0 = y'_{x=x_0}.$$

Поэтому $\angle QM_0F$ равен углу наклона касательной M_0S к оси абсцисс, т. е. $\angle NSM_0$. С другой стороны,

$$\angle QM_0M_1 = \angle NM_0R = \angle NSM_0.$$

Следовательно,

$$\angle QM_0F = \angle QM_0M_1,$$

что мы и хотели доказать.

Указанное сейчас свойство параболы широко используется в технике. Так, например, прожекторам, автомобильным фарам придают обычно форму параболоида вращения, т. е. поверхности, полученной вращением параболы вокруг ее оси. Эта форма выбирается по следующим соображениям. Если поместить источник света в фокус параболы, то луч света, падая на гладко отполированную поверхность рефлектора, после отражения от нее останется в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к поверхности, как это следует из известного закона физики. В согласии с тем же законом угол падения луча должен быть равным углу отражения, что в силу указанного свойства параболы влечет за собой параллельность отраженного луча оси рефлектора. Таким образом, после отражения все световые лучи идут параллельным пучком, что и дает наибольшую силу освещения на больших расстояниях.

Аналогично этому придают параболическую форму различным приспособлениям для наилучшего распространения или улавливания звука (музыкальные эстрады, звукоуловители).

2) Найдем уравнение касательной к эллипсу в его точке $M_0(x_0, y_0)$, если эллипс задан своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Дифференцируя неявную функцию, определенную данным уравнением, находим

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0,$$

откуда

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},$$

и значит, угловой коэффициент касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$. Уравнение касательной имеет вид

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

или, после преобразования,

$$\frac{y_0y}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=-\frac{x_0x}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}.$$

Так как $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, то мы получаем такое уравнение искомой касательной:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Аналогично уравнением касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в ее точке $M_0(x_0, y_0)$ является уравнение

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

3) Возьмем в качестве примера линии, заданной параметрическими уравнениями, циклоиду (п. **46**, II)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Найдем угловой коэффициент касательной к циклоиде в точке $M_0(x_0, y_0)$, которая соответствует значению t_0 параметра t:

$$y' = \frac{a \sin t_0}{a(1 - \cos t_0)} = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.$$

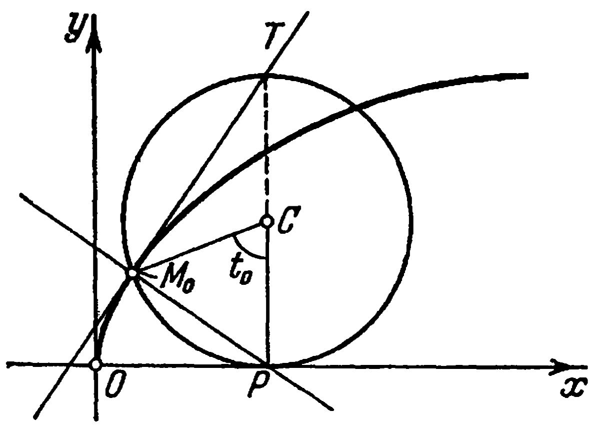

Рис. 56.

Значит, уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}(x - x_0).$$

Пусть $x = at_0$; это абсцисса точки P (рис. 56). Тогда

$$y = a(1 - \cos t_0) + \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2} \times \times [at_0 - a(t_0 - \sin t_0)] = 2a;$$

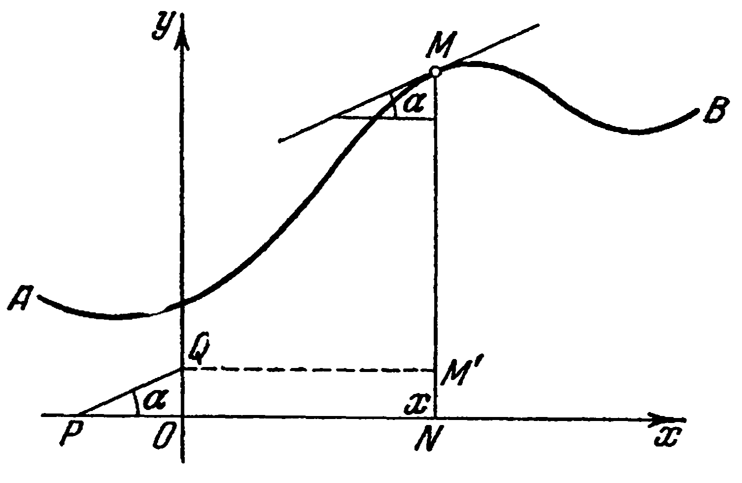

Рис. 57.

отсюда следует, что касательная к циклоиде проходит через верхнюю точку T, а нормаль — через нижнюю точку P производящей окружности в ее положении, соответствующем данной точке касания M_0.

48. Графическое дифференцирование. К графическому отысканию производной прибегают главным образом тогда, когда аналитическое выражение для функции неизвестно и она задается графически (например, посредством самопишущих приборов).

Графическое отыскание производной называется *графическим дифференцированием.*

Пусть AB (рис. 57) есть график некоторой функции $y = f(x)$. Отложим на оси абсцисс влево от начала координат отрезок OP, равный единице масштаба.

Проведем на глаз касательную к линии AB в точке M, соответствующей данной абсциссе x; из точки P (иногда называемой *полюсом графика*) проведем прямую, параллельную этой касательной до пересечения в точке Q с осью ординат. Отрезок OQ будет выражать значение производной $f'(x)$. В самом деле,

$$OQ = OP\operatorname{tg}\alpha = 1\cdot\operatorname{tg}\alpha = f'(x).$$

Операция проведения на глаз касательной является весьма неточной. Ее можно уточнить, если воспользоваться специальным прибором—*зеркальным дериватором*, служащим для проведения нормали к линии.

Простейший зеркальный дериватор можно осуществить с помощью обыкновенного зеркала прямоугольной формы.

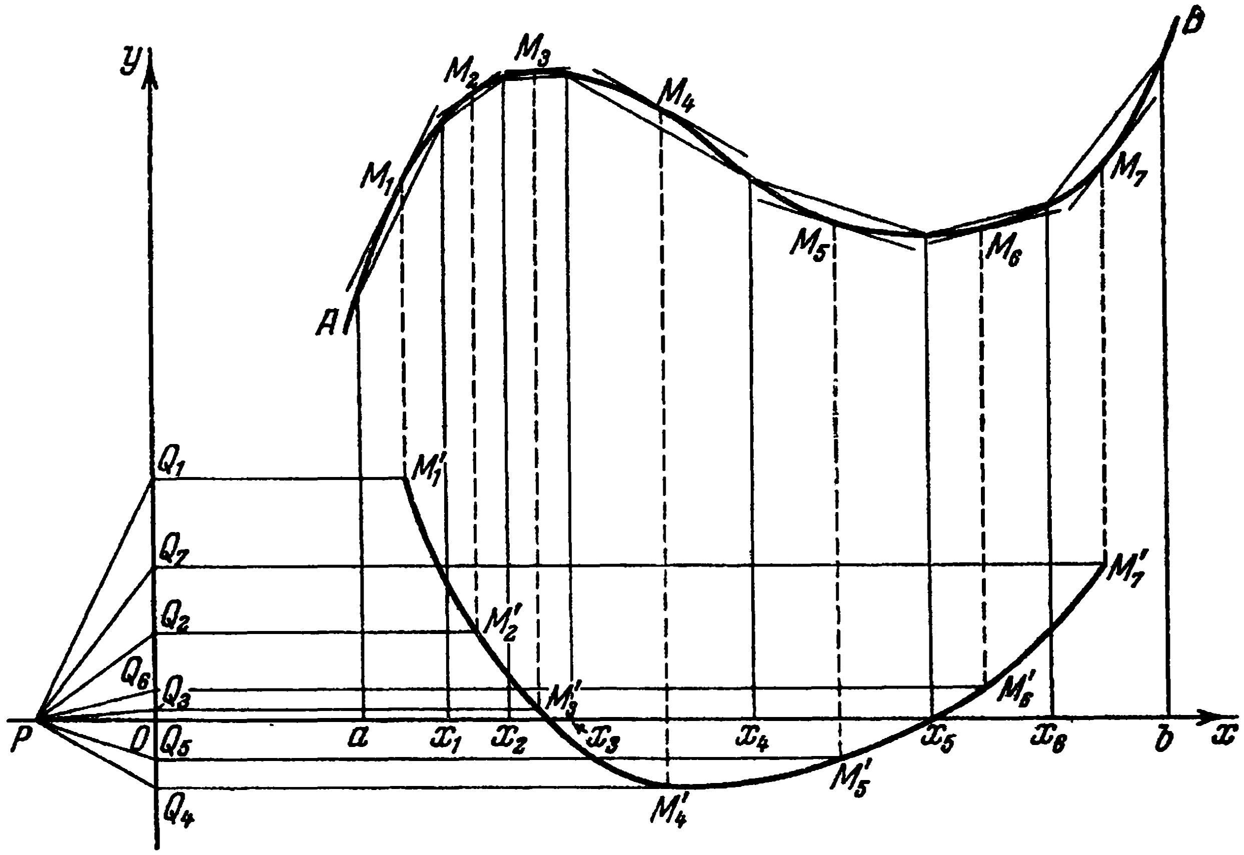

Рис. 58.

Приложив зеркало ребром (перпендикулярно к плоскости чертежа) к графику в точке M, нужно поворачивать его вокруг точки M до тех пор, пока изображение линии в зеркале не будет без излома продолжать саму линию. Тогда положение края зеркала будет давать направление нормали в точке M, а перпендикуляр к нему—касательную.

Проведем из точки Q прямую, параллельную оси Ox, до пересечения с ординатой MN или ее продолжением в точке M'. Ордината этой точки и даст значение производной $f'(x)$ при данном значении независимой переменной x. Для того чтобы вычертить график производной функции $y=f'(x)$ по заданному графику функции $y=f(x)$, разобьем участок AB линии $y=f(x)$ (рис. 58), соответствующий интересующему нас интервалу изменения независимой переменной x, на некоторое число частей прямыми $x=x_1$, $x=x_2$, ... Найдем графически значения производной функции в точках, делящих пополам каждый частичный интервал. Средние точки интервалов выгодны потому, что при этом в качестве касательных можно, как правило, с достаточно большой точностью брать просто прямые, параллельные хордам, соединяющим конечные точки каждой частичной дуги графика.

Далее, описанным уже приемом найдем точки графика производной M_1', M_2', ... Соединив эти точки непрерывной линией, мы и получим приближенный график производной функции $y=f'(x)$. Он будет тем точнее изображать производную функцию, чем больше найдено точек M', т. е. чем больше число частей, на которые разбивается весь интервал. Эти части не обязательно должны быть равны между собой; их размеры нужно брать с таким расчетом, чтобы соответствующие части линии как можно меньше уклонялись от отрезков прямой. Интервал, в котором линия круто и часто извивается, следует разбивать на большее число частей так, чтобы каждая такая часть была достаточно малой.

Мы всюду предполагаем, что масштабы по оси абсцисс и по оси ординат одинаковы. Именно при этом $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$.

49. Геометрический смысл производной в системе полярных координат. До сих пор мы рассматривали уравнения линий в системе декартовых координат, принимая независимую переменную и функцию в качестве соответственно абсциссы и ординаты точки на плоскости; при этом производная y' функции $y=f(x)$ оказалась равной угловому коэффициенту касательной к графику функции.

Будем теперь считать, что независимая переменная и функция являются соответственно полярным углом и полярным радиусом точки на плоскости. Линия, определяемая уравнением, связывающим между собой независимую переменную φ и функцию r,

$$r=f(\varphi),$$

называется *графиком функции* $r=f(\varphi)$ в системе полярных координат.

Каков же геометрический смысл производной $r'=f'(\varphi)$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. **Значение производной $r'=f'(\varphi)$ равно длине полярного радиуса, умноженной на котангенс угла θ между полярным радиусом и касательной, проведенными к графику функции $r=f(\varphi)$ в точке с полярным углом φ:**

$$r'=r\operatorname{ctg}\theta.$$

Доказательство. Возьмем какое-нибудь значение φ и придадим приращение $\Delta\varphi$. Значениям φ и $\varphi+\Delta\varphi$ соответствуют точки M и M' на графике функции $r=f(\varphi)$ (рис. 59). Полярный радиус PM изображает данное значение функции, а полярный радиус PM' — наращенное значение функции $r+\Delta r = f(\varphi+\Delta\varphi)$. Чтобы найти выражение для Δr, применим к треугольнику PMM' теорему синусов:

$$\frac{r+\Delta r}{r}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{\sin[\pi-(\beta+\Delta\varphi)]}{\sin\beta}=\frac{\sin(\beta+\Delta\varphi)}{\sin\beta};$$

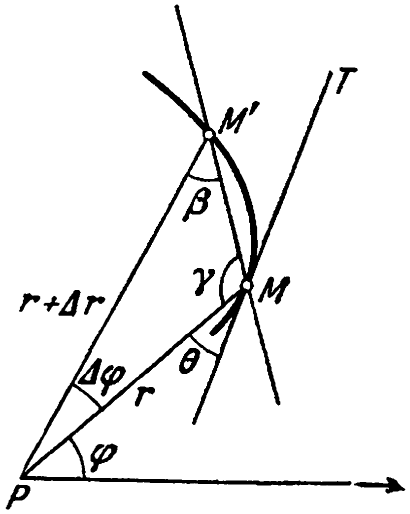

Рис. 59.

далее находим, что

$$1+\frac{\Delta r}{r}=\frac{\sin\beta\cos\Delta\varphi+\cos\beta\sin\Delta\varphi}{\sin\beta}=\cos\Delta\varphi+\operatorname{ctg}\beta\sin\Delta\varphi,$$

откуда

$$\frac{\Delta r}{r}=\cos\Delta\varphi-1+\operatorname{ctg}\beta\sin\Delta\varphi=-2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}+\operatorname{ctg}\beta\sin\Delta\varphi.$$

Разделим обе части этого равенства на $\Delta\varphi$:

$$\frac{1}{r}\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}=-2\frac{\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}+\operatorname{ctg}\beta\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Заставляя $\Delta\varphi$ стремиться к нулю, замечаем, что в правой части равенства первое слагаемое стремится к нулю, а второе слагаемое — к $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\operatorname{ctg}\beta$ и что левая часть стремится к $\frac{1}{r}r'$; таким образом,

$$\frac{1}{r}r'=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\operatorname{ctg}\beta.$$

Но если $\Delta\varphi\to 0$, то точка M' неограниченно приближается к точке M, секущая MM' — к касательной MT и, значит, угол β — к углу θ; вследствие непрерывности $\operatorname{ctg}\beta$ мы и приходим к требуемому равенству

$$r'=r\operatorname{ctg}\theta.$$

Это соотношение дает возможность при помощи дифференциального исчисления решать задачи, связанные с касательными и нормалями линий, заданных уравнениями в полярных координатах.

Заметим, что если с возрастанием угла φ радиус r возрастает, то под θ понимается острый угол (как на рис. 59), а если убывает, — то тупой.

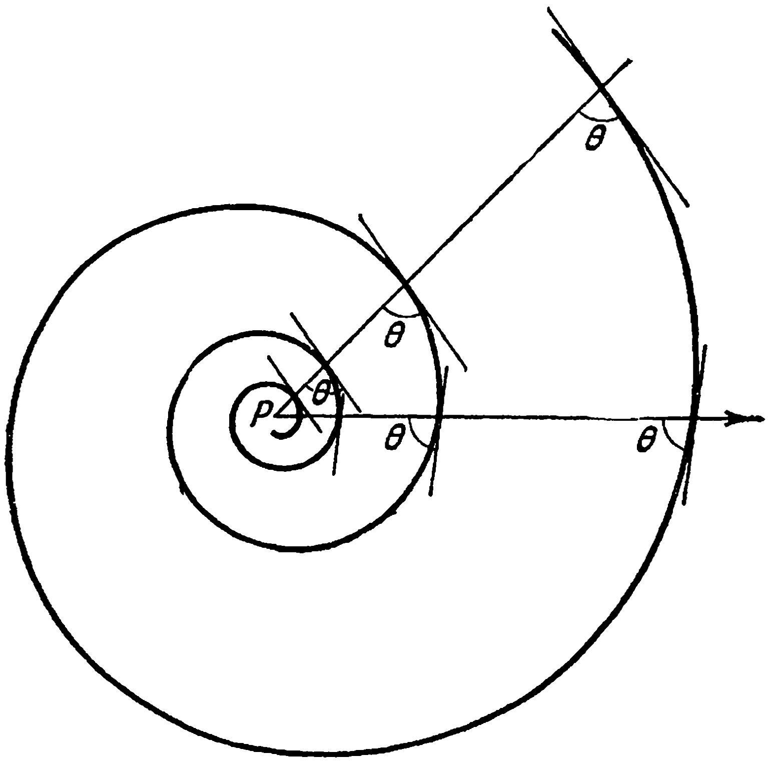

Рис. 60.

Пример. Покажем, что так называемая *логарифмическая спираль* $r = ae^{m\varphi}$ пересекается с любой прямой, проходящей через полюс, под постоянным углом (рис. 60).

В самом деле,

$$r' = ame^{m\varphi} = mr,$$

и значит,

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{r'}{r} = m.$$

§ 4. Дифференциал

50. Дифференциал и его геометрический смысл. С понятием производной теснейшим образом связано другое фундаментальное понятие математического анализа — дифференциал функции.

Пусть $y = f(x)$ — функция, непрерывная при рассматриваемых значениях x и имеющая производную

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon,$$

где ε — бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$. Отсюда находим, что

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\alpha,$$

где $\alpha=\varepsilon\Delta x$.

Итак, *бесконечно малое приращение* Δy *дифференцируемой функции* $y=f(x)$ *может быть представлено в виде суммы двух слагаемых*: 1) *величины, пропорциональной бесконечно малому приращению независимой переменной* Δx, *и* 2) *бесконечно малой величины более высокого порядка, чем* Δx.

Действительно, первое слагаемое $f'(x)\,\Delta x$ при данном значении x пропорционально Δx, а второе слагаемое α таково, что

$$\frac{\alpha}{\Delta x}=\frac{\varepsilon\Delta x}{\Delta x}=\varepsilon \to 0$$

при $\Delta x \to 0$.

Только в одном случае, когда функция $y=f(x)$ линейная, $y=ax+b$, приращение функции Δy, как мы знаем, в точности пропорционально приращению аргумента Δx:

$$\Delta y=a\Delta x,$$

причем коэффициент пропорциональности a постоянен. Но вот теперь оказывается, что если функция $f(x)$ и не является линейной, то при условии, что она имеет производную, все же существует такой коэффициент пропорциональности $f'(x)$, что величина $f'(x)\,\Delta x$ хотя и не равна точно приращению Δy, но отличается от него на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx; при этом коэффициент пропорциональности равен $f'(x)$, и значит, он зависит от значения x.

Справедливо и обратное предложение: *если для данного значения* x *приращение* $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ *можно представить в виде*

$$\Delta y=a\Delta x+\alpha,$$

где α — *бесконечно малая величина более высокого порядка, чем* Δx, *то функция* $y=f(x)$ *имеет производную и* $a=f'(x)$.

В самом деле, мы имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a+\frac{\alpha}{\Delta x},$$

и так как $\frac{\alpha}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то предел $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует и равен a, что и требовалось доказать.

Введем теперь следующее определение.

Определение. ***Дифференциалом***[1]) ***функции* называется величина, пропорциональная бесконечно малому приращению аргумента Δx и отличающаяся от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx.**

Дифференциал функции y обозначается через dy или $df(x)$.

Мы видим, что необходимым и достаточным условием существования дифференциала функции $y=f(x)$ служит существование производной, и тогда

$$dy=f'(x)\,\Delta x.$$

Приращение Δx независимой переменной x называют ее дифференциалом dx, т. е.

$$\Delta x=dx.$$

Это согласуется с тем, что дифференциал функции $y=x$ равен

$$dy=dx=(x)'\,\Delta x=\Delta x,$$

т. е. $dx=\Delta x$.

Таким образом,

Дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал независимой переменной, т. е.

$$dy=f'(x)\,dx.$$

Зная производную, легко найти дифференциал, и обратно. Поэтому действия отыскания производной и дифференциала данной функции носят общее название дифференцирование.

В общем виде (при произвольном x) дифференциал $dy=f'(x)\,dx$ является функцией двух независимых друг от друга переменных: x и dx.

Для производной мы имеем выражение [2])

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

---

[1]) Термин дифференциал происходит от латинского слова differentia, означающего разность.

[2]) Из предыдущего следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}.$$

Нельзя понимать эту запись так, что Δy при $\Delta x\to 0$ стремится к dy, а Δx к dx. Верно здесь только то, что отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к отношению дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, которое имеет смысл только в силу данного нами определения дифференциала dy.

Представление производной в виде отношения дифференциалов оказывается весьма важным в анализе. В этом мы очень скоро убедимся.

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию дифференциала функции $y=f(x)$ (рис. 61). Так как $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$, то дифференциал $dy=f'(x)\,dx$ измеряет отрезок RT, т. е.

Дифференциал dy функции $y=f(x)$ в точке x изображается приращением ординаты точки касательной, проведенной к линии $y=f(x)$ в соответствующей ее точке $(x, f(x))$.

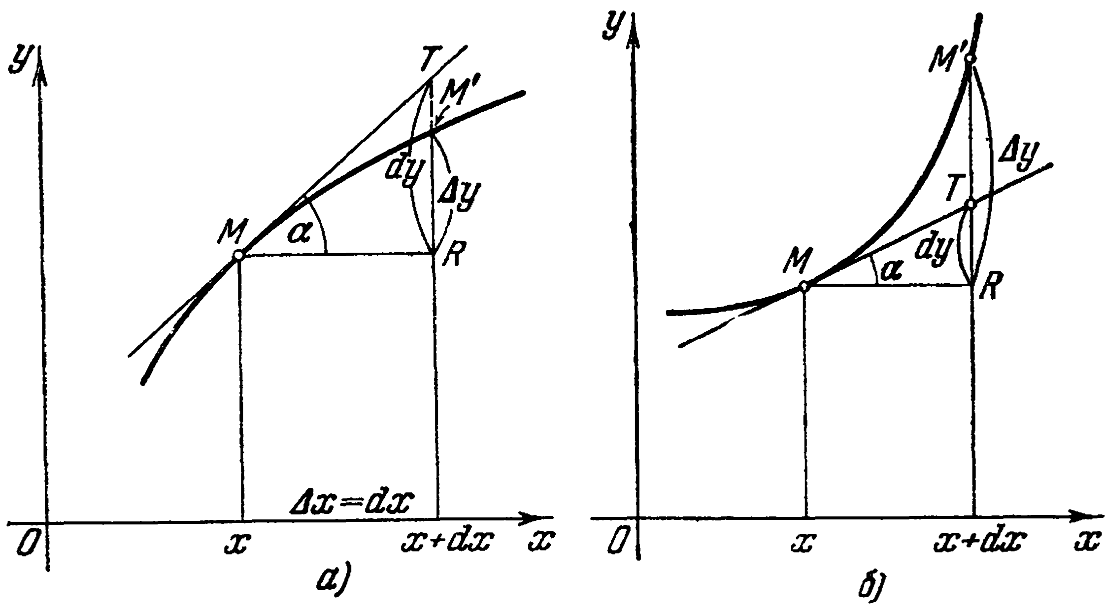

Рис. 61.

Приращение же функции $\Delta f(x)$ изображается приращением ординаты точки линии (отрезок RM' на рис. 61). Поэтому разность между дифференциалом и приращением изображается отрезком $M'T$, заключенным между линией и касательной к ней; *этот отрезок является при $dx \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем отрезок MR.*

Дифференциал функции в данной точке может быть как больше приращения (рис. 61, *а*), так и меньше его (рис. 61, *б*).

51. Свойства дифференциала.

I. Дифференциалы основных элементарных функций. Так как дифференциал получается из производной умножением ее на дифференциал независимой переменной, то, зная производные основных элементарных функций, можем составить без всяких затруднений таблицу дифференциалов этих функций. Так, $d(x^n)=$ $=nx^{n-1}dx$, $d(a^x)=a^x \ln a\,dx$ и т. д.

II. Дифференциалы результатов арифметических действий. В соответствии с правилами отыскания производных, изложенными в п. **41**, и принятыми там обозначениями придем к аналогичным правилам для отыскания дифференциалов.

а) Так как

$$(u+v+\ldots+w)'=u'+v'+\ldots+w',$$

то, умножая обе части равенства на dx, получим

$$d(u+v+\ldots+w)=du+dv+\ldots+dw.$$

б) Так как

$$(uv)'=u'v+uv',$$

то, умножая обе части равенства на dx, получим

$$d(uv)=v\,du+u\,dv,$$

в частности

$$d(Cu)=C\,du.$$

в) Так как

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

то, умножая обе части равенства на dx, получим

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

III. Дифференциал сложной функции. Свойство инвариантности. Рассмотрим свойство дифференциала функции, вытекающее из правила дифференцирования сложной функции.

Пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ — непрерывные функции своих аргументов, имеющие производные по этим аргументам $f'(u)$ и $\varphi'(x)$. Если обозначить $F(x)=f[\varphi(x)]$, то, как было показано в п. **42**, I,

$$y'=F'(x)=f'(u)\varphi'(x). \tag{*}$$

Умножая обе части равенства на dx, получим

$$dy=f'(u)\varphi'(x)\,dx;$$

но $\varphi'(x)\,dx=du$, и значит,

$$dy=f'(u)\,du,$$

т. е. дифференциал dy имеет такой же вид, как если бы величина u была независимой переменной.

Итак,

Дифференциал функции $y=f(u)$ сохраняет одно и то же выражение независимо от того, является ли ее аргумент u независимой переменной или функцией от независимой переменной.

Это свойство называется *инвариантностью* (т. е. неизменностью) *формы дифференциала.* Всегда можно, не интересуясь природой аргумента функции, записать ее дифференциал в одном и том же виде.

Из равенства $dy = f'(u)\,du$ следует:

$$f'(u) = \frac{dy}{du};$$

значит, во всех случаях

Скорость изменения функции относительно своего аргумента равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Равенство (*) теперь можно переписать так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \qquad (**)$$

Правая часть равенства (**) получается из левой просто умножением и делением на du (конечно, если $du \neq 0$). Таким образом, оказывается возможным производить арифметические действия над дифференциалами, как над обыкновенными числами. Это и делает очень часто выгодной запись производной в виде отношения дифференциалов.

Вот, например, как просто при помощи такой записи выводится правило дифференцирования обратной функции (ср. п. **42**, II):

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y}.$$

IV. Дифференциал как главная часть приращения. Пусть в точке x производная функции $y = f(x)$ отлична от нуля: $f'(x) \neq 0$. Тогда

$$\Delta y = f'(x)\,dx + \alpha = dy + \alpha,$$

где α — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем dx. Но при указанном условии она будет бесконечно малой величиной более высокого порядка и чем dy и Δy. Действительно, при $dx \to 0$ имеем

$$\frac{\alpha}{dy} = \frac{\alpha}{f'(x)\,dx} \to 0,$$

ибо $\frac{\alpha}{dx} \to 0$, а $f'(x) \neq 0$. Значит, Δy и dy отличаются друг от друга на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем они сами, и следовательно, они эквивалентны:

$$dy \sim \Delta y.$$

В дальнейшем приращение функции Δy будет очень часто заменяться ее дифференциалом dy. В связи с этим коснемся общего вопроса о приближенном выражении одной переменной величины через другую при условии, что обе они стремятся к одному и тому же пределу.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ при $x \to x_0$ стремятся к одному и тому же пределу A, т. е. $\lim u = \lim v = A$. Тогда предел их разности равен нулю: $\lim(u - v) = 0$ и, следовательно, сама эта разность

$$u(x) - v(x) = \alpha(x)$$

есть бесконечно малая величина при $x \to x_0$.

Если теперь в окрестности точки x_0 заменять значения функции $u(x)$ значениями функции $v(x)$, то абсолютная ошибка $\alpha = |u - v|$ будет бесконечно малой.

Если предел $A \neq 0$, то и относительная ошибка, по которой и оценивается точность приближения, также является бесконечно малой:

$$\delta = \frac{\alpha}{|v|} = \left|\frac{u-v}{v}\right| = \left|\frac{u}{v} - 1\right| \to \left|\frac{A}{A} - 1\right| = 0.$$

Но при $A = 0$, т. е. когда обе функции $u(x)$ и $v(x)$ сами являются бесконечно малыми при $x \to x_0$, относительная ошибка может и не быть бесконечно малой. *Она будет бесконечно малой только тогда, когда $u(x)$ и $v(x)$ — эквивалентные бесконечно малые.* В самом деле, из того, что $\delta = \left|\frac{u-v}{v}\right| \to 0$, следует, что разность $u - v$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем v. Согласно теореме п. **36**, II это и означает, что u и v эквивалентны.

Итак, если две бесконечно малые величины эквивалентны, то значения одной из них являются приближенными значениями другой с бесконечно малой относительной ошибкой. Коротко говорят, что *каждая из двух бесконечно малых есть главная часть другой.*

Вернемся теперь к вопросу о замене приращения функции ее дифференциалом. При фиксированном значении x и приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, и дифференциал $dy = f'(x)\Delta x$ зависят только от Δx и при $\Delta x \to 0$ стремятся к нулю. Так как выше уже было доказано, что Δy и dy эквивалентны, то замена Δy на dy приводит к бесконечно малой относительной ошибке. Поэтому можно сказать, что

Дифференциал функции есть главная часть приращения функции, пропорциональная дифференциалу (приращению) независимой переменной.

Заметим только, что если в данной точке $f'(x) = 0$, то дифференциал $dy = 0$, и он не сравнивается ни с какой другой бесконечно малой величиной, в том числе и с приращением функции Δy.

52. Дифференцируемость функции.

Определение. **Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x, если она имеет в этой точке дифференциал.**

При этом, как мы видели в п. **50**, в точке x существует производная $f'(x)$ (и обратно). Таким образом, существование производной может быть принято в качестве условия дифференцируемости функции, чему с геометрической точки зрения соответствует существование у линии $y=f(x)$ касательной, не перпендикулярной к оси Ox.

Допустим, что функция $f(x)$ дифференцируема при некотором значении x, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x);$$

тогда она обязательно непрерывна в этой точке. В самом деле, при этом $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha$ (см. п. **50**), и при $\Delta x \to 0$ приращение Δy также стремится к нулю, а это и является условием непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x. Поэтому в точках разрыва функция не может иметь производной.

Итак, *если функция $f(x)$ дифференцируема, то она обязательно непрерывна*. Обратное же не всегда справедливо, потому что можно указать примеры таких непрерывных функций, которые не во всех точках имеют производную.

Например, функция $y=|x|$, непрерывная на всей оси Ox, не имеет производной при $x=0$. В самом деле,

$$\Delta y = |x+\Delta x| - |x|,$$

что при $x=0$ дает

$$\Delta y = |\Delta x|$$

и, значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x};$$

при $\Delta x > 0$ будет $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$,

а при $\Delta x < 0$ » $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$.

Отсюда следует, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела при Δx, произвольно стремящемся к нулю, а это и означает, что производной не существует. Геометрически это также ясно: графиком функции $y=|x|$ служит ломаная линия (рис. 62), вершина которой находится в точке (0,0), и, разумеется, в этой точке линия не имеет касательной.

Возможны случаи, когда график непрерывной функции имеет в некоторой точке касательную, а функция в соответствующей точке производной не имеет; это бывает тогда, когда касательная перпендикулярна к оси Ox. Например, для функции $y=\sqrt[3]{x}$ имеем

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

При $x \to 0$ значение производной стремится к бесконечности, т.е. рассматриваемая функция в точке $x=0$ недифференцируема.

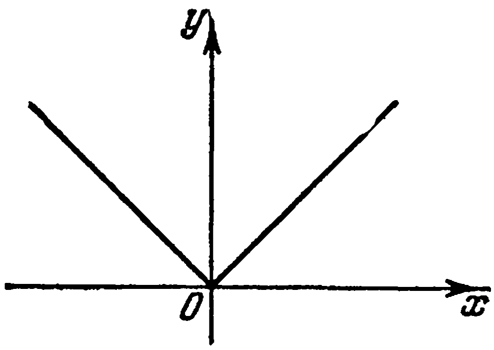

Рис. 62.

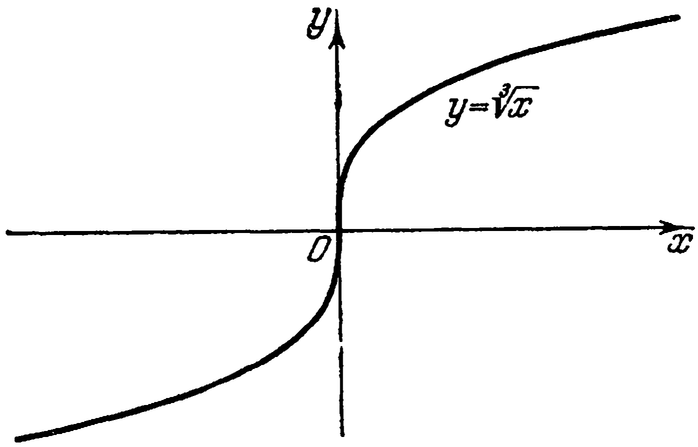

Рис. 63.

В точке (0,0) линия $y=\sqrt[3]{x}$ (кубическая парабола) касается оси Oy (рис. 63).

В целях общности иногда говорят (несмотря на недифференцируемость функции), что в рассмотренном сейчас случае функция имеет бесконечную производную.

В анализе глубоко разработан вопрос о дифференцируемости функции и о связи дифференцируемости с непрерывностью функции. Различие между свойствами непрерывности и дифференцируемости функций изучалось Н. И. Лобачевским[1]). Существуют любопытные примеры непрерывных функций, не дифференцируемых ни в одной точке; графики этих функций являются линиями, не имеющими касательной ни в одной своей точке. Эти линии, конечно, невозможно вычертить и даже составить себе о них сколько-нибудь отчетливое представление. Такие функции и линии обычно в применениях математического анализа не встречаются, и мы их рассматривать не будем.

Заметим, что *все элементарные функции дифференцируемы всюду в интервале, в котором они определены, за исключением, может быть, лишь отдельных точек.*

[1]) Н. И. Лобачевский (1792—1856)—великий русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Ему принадлежит ряд фундаментальных работ в области алгебры и анализа. Его работы оказали большое влияние на дальнейшее развитие математики.

II. Односторонние производные. Вернемся еще раз к функции $y=|x|$, график которой изображен на рис. 62. Как мы уже видели, при $x=0$ предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при произвольном стремлении Δx к нулю не существует. Однако левый и правый пределы этого отношения (см. п. 33) существуют:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Эти пределы называются соответственно левой и правой производными в точке $x=0$. Вообще, если функция $y=f(x)$ в точке x_0 непрерывна и существуют левый и правый пределы отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то они называются *односторонними производными* в точке x_0; соответственно *левая производная* ($f'_{\text{лев}}(x_0)$) *и правая производная* ($f'_{\text{пр}}(x_0)$). Ясно, что если левая и правая производные в данной точке совпадают, то функция дифференцируема.

Если функция определена на некотором замкнутом интервале, то производные на концах интервала определяются именно как односторонние: на левом конце интервала это будет правая производная, а на правом — левая. Это совершенно аналогично определению непрерывности функции на концах интервала (см. п. 32).

53. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Применение дифференциала к приближенному вычислению значений функции основано на замене приращения $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, которое может весьма сложным образом зависеть от Δx, чрезвычайно простым выражением $f'(x_0)\,dx$, в отыскании которого и состоит дифференцирование.

Итак, для малых dx

$$\Delta y = f(x_0+dx) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,dx = dy \qquad (*)$$

с малой относительной ошибкой (см. п. 51, IV).

Приняв $\Delta y = dy$, мы заменяем данную функцию $y=f(x)$ линейной функцией

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0),$$

определяемой тем, что ее значение и значение ее производной при $x=x_0$ равны соответственно $f(x_0)$ и $f'(x_0)$.

Геометрически это равносильно замене линии, являющейся графиком функции $y=f(x)$, касательной к ней в точке $(x_0, f(x_0))$. Такая замена только в достаточно малой окрестности точки x_0 приводит к таким ошибкам, которыми можно пренебречь в изучаемом вопросе. Недостаток формулы $(*)$ заключается в том, что мы не умеем оценить погрешность при данном численном значении dx, хотя и знаем, что при $dx \to 0$ относительная ошибка стремится к нулю[1]).

Приближенное равенство (*) практически используется прежде всего для решения следующей задачи.

Известны значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$, dx; требуется вычислить приближенное значение $f(x_0+dx)$.

Из соотношения (*) сразу получаем нужную формулу

$$f(x_0+dx) \approx f(x_0)+f'(x_0)\,dx.$$

Для иллюстрации приведем следующие примеры (ради сокращения записей будем обозначать x_0 через x и dx через h):

1) $y=\sqrt[m]{x}$. Имеем

$$dy=\frac{1}{m}\,\frac{\sqrt[m]{x}}{x}\,h$$

и, значит,

$$\sqrt[m]{x+h} \approx \sqrt[m]{x}+\frac{1}{m}\,\frac{\sqrt[m]{x}}{x}\,h;$$

в частности, при $x=1$

$$\sqrt[m]{1+h} \approx 1+\frac{h}{m}\,;$$

эта приближенная формула в случае $m=2$ уже была нами получена раньше (п. **37**).

2) $y=\sin x$. Имеем

$$dy=\cos x\cdot h$$

и, значит,

$$\sin(x+h) \approx \sin x+\cos x\cdot h;$$

в частности, при $x=0$ находим формулу $\sin h \approx h$, полученную нами раньше (п. **37**).

Положив, например, $x=\frac{\pi}{6}\,(=30^\circ)$, $h=\frac{\pi}{180}\,(=1^\circ)$, найдем

$$\sin 31^\circ \approx \sin 30^\circ+\cos 30^\circ\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0{,}5+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}01745 \approx 0{,}5151;$$

с пятью верными знаками $\sin 31^\circ \approx 0{,}51504$. Читатель должен себе объяснить, почему мы получили приближенное значение для $\sin 31^\circ$ с избытком.

3) $y=\ln x$. Имеем

$$dy=\frac{1}{x}\,h$$

[1]) Этот недостаток будет устранен в гл. X.

и, значит,

$$\ln(x+h) \approx \ln x + \frac{h}{x};$$

в частности, при $x=1$ приходим к формуле $\ln(1+h) \approx h$, полученной нами раньше (п. **37**).

Пусть известно, что $\ln 781 \approx 6{,}66058$; вычислим $\ln 782$. Формула дает

$$\ln 782 \approx 6{,}66058 + \frac{1}{781} \approx 6{,}66186.$$

По пятизначным таблицам находим $\ln 782 = 6{,}66185$. Как видим, мы сделали незначительную ошибку, причем также в сторону превышения. И здесь читатель сообразит, почему так и должно быть.

Другой очень важной задачей является вычисление предельной абсолютной ошибки функции ε_y по заданной предельной абсолютной ошибке аргумента ε_x. В практических задачах, как правило, аргумент находится при помощи и з м е р е н и я, и его абсолютная ошибка может считаться известной (п. **6**).

Итак, пусть требуется вычислить значение данной функции $y=f(x)$ при некотором значении аргумента x, истинная величина которого нам неизвестна, а известно лишь его приближенное значение x_0 с предельной абсолютной ошибкой ε_x:

$$x = x_0 + dx, \qquad |dx| < \varepsilon_x.$$

Беря вместо истинного значения $f(x)$ величину $f(x_0)$, мы совершаем некоторую ошибку, которую и должны оценить. Из соотношения (*) имеем

$$|f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)|\,|dx| < |f'(x_0)|\,\varepsilon_x.$$

Отсюда видно, что абсолютная ошибка, получающаяся в результате замены $f(x)$ ее приближенным значением $f(x_0)$, меньше чем $|f'(x_0)|\,\varepsilon_x$; эту последнюю величину мы и принимаем за предельную абсолютную ошибку функции ε_y:

$$\varepsilon_y = |f'(x_0)|\,\varepsilon_x.$$

Предельная абсолютная ошибка функции равна произведению абсолютной величины ее производной, взятой при приближенном значении аргумента, на предельную абсолютную ошибку аргумента.

Предельная относительная ошибка функции δ_y *равна*

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|f(x_0)|} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right| \varepsilon_x,$$

т. е. *произведению абсолютной величины логарифмической производной на предельную абсолютную ошибку аргумента.*

Из полученных формул ясно, какова должна быть ошибка ε_x в задании аргумента, чтобы была обеспечена заранее назначенная допустимая ошибка значения функции:

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_y}{|f'(x_0)|} = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \delta_y.$$

Разумеется, при вычислении ε_x нужно знать приближенное значение x_0, чтобы можно было найти соответствующие значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ (см. пример 2).

Для иллюстрации приведем два примера.

1) В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c и приближенное значение угла α с предельной абсолютной ошибкой ε_α. Найдем относительные ошибки при вычислении катетов.

Имеем

$$a = c\sin\alpha, \qquad b = c\cos\alpha,$$

откуда

$$\delta_a = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\varepsilon_\alpha, \qquad \delta_b = \operatorname{tg}\alpha\cdot\varepsilon_\alpha.$$

Если $\alpha > \frac{\pi}{4}$, то $a > b$ и $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{tg}\alpha$; поэтому относительная ошибка будет меньше для большего катета.

2) Нужно найти объем куба с относительной ошибкой $\delta = 0{,}01 = 1\%$. Измерение ребра куба с помощью линейки, цена деления которой равна 1 *см*, дало приближенный результат 20 *см*. Можно ли считать, что приближенное значение $v = 8000$ *см*^{3} обеспечивает требуемую точность?

Обозначим ребро куба через x; тогда $v = x^3$ и $v' = 3x^2$. По формуле для ε_x найдем

$$\varepsilon_x = \frac{8\,000}{3\cdot 400}\cdot 0{,}01 \approx 0{,}07 \text{ см}.$$

При произведенном же измерении ошибка составляет 0,5 *см*, что значительно превышает найденную. Ясно, что нужный результат мы получим, взяв линейку с ценой деления, равной 1 *мм* (тогда $\varepsilon_x = 0{,}05$ *см*), и заново произведя измерение ребра и вычисление объема.

§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков

54. Производные высших порядков.

I. Допустим, что функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в некотором интервале независимой переменной x. Производная от $f'(x)$ (если она существует) называется *производной второго порядка* или *второй производной* от первоначальной функции $f(x)$

и обозначается через $f''(x)$:

$$f''(x) = [f'(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Таким же образом *производной третьего порядка* или *третьей производной* $f'''(x)$ от функции $y = f(x)$ называется производная от производной второго порядка. Дадим общее определение.

Определение. **Производной n-го порядка $f^{(n)}(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка**

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Производные второго и вообще высших порядков оказываются существенно необходимыми для определения важных понятий математики, механики, физики и для более полного исследования функций, чем то, которое можно выполнить, применяя лишь первую производную.

Значение $f''(x)$ в точке x определяет скорость изменения $f'(x)$ в этой точке, т. е. скорость изменения скорости изменения $f(x)$. Снова заимствуя термин из механики, можно назвать $f''(x)$ ускорением изменения функции $f(x)$ при данном x.

Вопрос о геометрическом смысле второй производной будет рассмотрен в гл. IV (п. **62**).

Производные от данной функции в данной точке могут существовать до некоторого определенного порядка, а производных высшего порядка функция в этой точке может и не иметь. Однако всякая элементарная функция, за исключением быть может отдельных точек, имеет в своей области определения производные любых порядков.

В целях единства терминологии производную данной функции называют производной первого порядка или первой производной. Умение дифференцировать всякую элементарную функцию позволяет найти одну вслед за другой последовательные производные данной элементарной функции до любого порядка. Иногда удается просто указать общий вид производной k-го порядка от данной функции для произвольного k. Коротко ее обозначают $y^{(k)}$.

Примеры. 1) $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$, ...,

$$y^{(k)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)x^{n-k};$$

если n — целое положительное число, то

$$y^{(n)} = n! \quad \text{и} \quad y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \ldots = 0.$$

2) $y=\sin x$, $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y''=\sin(x+\pi)$, ...

..., $y^{(k)}=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$.

3) $y=e^x$, $y^{(k)}=e^x$.

4) $y=a^x$, $y'=a^x\ln a$, $y''=a^x(\ln a)^2$, ..., $y^{(k)}=a^x(\ln a)^k$.

5) $y=\ln(1+x)$, $y'=\frac{1}{1+x}$, $y''=-\frac{1}{(1+x)^2}$, ...

$$\ldots,\ y^{(k)}=\frac{(-1)(-2)\ldots(-k+1)}{(1+x)^k}=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},\qquad (k>1).$$

II. Производные неявных функций. Если y — неявная функция, то для отыскания ее высшей производной нужно соответствующее число раз дифференцировать заданное уравнение, связывающее x и y, помня всегда, что y и все ее производные суть функции независимой переменной.

Так, вторую производную от функции y, заданной уравнением

$$x^2+y^2=1,$$

найдем, дважды дифференцируя это уравнение. Получим последовательно

$$x+yy'=0,$$
$$(x)'+(yy')'=1+y'^2+yy''=0.$$

Отсюда

$$y''=-\frac{1+y'^2}{y}.$$

В этом примере функцию и ее производную нетрудно явно выразить через x. Тогда найдем

$$y''=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$$

т. е. то же, что получается при двукратном дифференцировании явного выражения функции. Вообще же производная какого-нибудь порядка от неявной функции всегда может быть выражена, в конечном счете, через независимую переменную и саму функцию.

Так, дифференцируя по x два раза подряд уравнение

$$y^3-3axy+x^3=0,$$

определяющее неявным образом y как функцию x, получим

$$y^2y'-ay-axy'+x^2=0$$

и

$$2y(y')^2+y^2y''-2ay'-axy''+2x=0.$$

Находя из первого равенства y' и подставляя во второе, придем к уравнению, из которого y'' выразится через x и y.

III. Производные параметрически заданных функций. Для того чтобы найти производную высшего порядка от параметрически заданной функции, нужно продифференцировать выражение для предыдущей производной, как сложную функцию независимой переменной. Пусть $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$. Имеем

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Далее,

$$y''=\frac{d\left(\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{f''(t)\varphi'(t)-f'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\frac{dt}{dx},$$

и так как

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)},$$

то

$$y''=\frac{f''(t)\varphi'(t)-f'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

Дифференцируя это выражение по x, найдем третью производную и т. д.

Пример. Найдем вторую производную y'', если

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t.$$

Здесь

$$y'=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{ctg} t,$$

$$y''=\frac{\frac{d(-\operatorname{ctg} t)}{dt}}{-\sin t}=-\frac{1}{\sin^3 t}.$$

IV. Формула Лейбница. Укажем имеющее практическое значение правило для отыскания производной n-го порядка от произведения функций.

Пусть u и v — некоторые функции от x и

$$y=uv;$$

выразим $y^{(n)}$ через производные функций u и v.

Имеем последовательно

$$y'=u'v+uv',$$
$$y''=u''v+2u'v'+uv'',$$
$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

Легко подметить аналогию между выражениями для второй и третьей производных и разложением биномов соответственно во второй и в третьей степенях; эти выражения так сконструированы из производных u и v (нулевого, первого, второго и третьего порядков), как разложения для биномов — из последовательных степеней u и v (нулевой, первой, второй и третьей). Оказывается, эта аналогия справедлива в общем случае.

Формула Лейбница. **При любом n справедливо равенство**

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots$$
$$\ldots+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}. \qquad (*)$$

Эту формулу можно получить из разложения бинома $(u+v)^n$, если в нем заменить степени u и v соответствующими производными от u и v.

Доказательство этой формулы мы не приводим.

Пример. Найдем сотую производную от функции $y=x^2\sin x$. Имеем

$$y^{(100)}=(x^2\sin x)^{(100)}=(\sin x)^{(100)}x^2+$$
$$+100(\sin x)^{(99)}(x^2)'+\frac{100\cdot 99}{2}(\sin x)^{(98)}(x^2)'';$$

следующие слагаемые нет нужды выписывать, ибо все они равны нулю: каждое из них содержит множителем производную выше второго порядка от x^2. Следовательно (см. I),

$$y^{(100)}=x^2\sin\left(x+100\cdot\frac{\pi}{2}\right)+200x\sin\left(x+99\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+9900\sin\left(x+98\cdot\frac{\pi}{2}\right)=x^2\sin x-200x\cos x-9900\sin x.$$

55. Дифференциалы высших порядков. Дифференциал dy функции $y=f(x)$ есть функция двух переменных (п. **50**): независимой переменной x и ее дифференциала dx. Дифференциал dx независимой переменной x есть величина, не зависящая от x: при заданном значении x значения dx могут выбираться произвольно.

Рассматривая $df(x)$ как функцию x, возьмем дифференциал $d[df(x)]$. Если этот дифференциал существует, то он называется *дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* от функции $f(x)$ и обозначается через d^2y:

$$d^2y=d(dy).$$

Таким же образом *дифференциалом третьего порядка* или *третьим дифференциалом* d^3y от функции $y=f(x)$ называется дифференциал от дифференциала второго порядка как функции x. Дадим общее определение.

Определение. ***Дифференциалом n-го порядка*** $d^n y$ **называется дифференциал от дифференциала** $(n-1)$**-го порядка как функции** x**:**

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Найдем теперь выражения для дифференциалов высших порядков от функции $f(x)$, причем предположим, что ее аргумент есть независимая переменная. Имеем для дифференциала второго порядка

$$d(dy) = (dy)'\,dx = [f'(x)\,dx]'\,dx,$$

и так как в силу сказанного dx следует считать при дифференцировании по x величиной постоянной, то

$$d^2 y = f''(x)\,dx\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Точно так же для дифференциала n-го порядка вообще найдем

$$d^n y = (d^{n-1}y)'\,dx = [f^{n-1}(x)\,dx^{n-1}]'\,dx = f^{(n)}(x)\,dx^n,$$

где под dx^n понимается n-я степень dx.

Итак,

Дифференциал n-го порядка равен произведению производной n-го порядка по независимой переменной на n-ю степень дифференциала независимой переменной.

Дифференциал $df(x)$ функции $f(x)$ называется, для общности терминологии, *дифференциалом первого порядка или первым дифференциалом.*

Каждый дифференциал является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем дифференциалы всех низших порядков:

$$\frac{d^n y}{d^m y} = \frac{f^{(n)}(x)\,dx^n}{f^{(m)}(x)\,dx^m} = \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(m)}(x)}\,dx^{n-m} \to 0$$

при $dx \to 0$, если $n > m$ и $f^{(m)}(x) \neq 0$.

Последовательные дифференциалы

$$dy,\ d^2y,\ d^3y,\ \ldots,\ d^n y,\ \ldots$$

располагаются в порядке повышающейся малости.

Если $y = f(x)$, то $dy = f'(x)\,dx$ независимо от того, является ли аргумент x независимой переменной или какой-нибудь функцией от нее (свойство инвариантности формы первого дифференциала, см. п. **51**, III).

Дифференциалы высших порядков уже не обладают этим свойством. В самом деле, предположим, что x есть не независимая переменная, как мы допускали до сих пор, а функция от нее. Тогда dx тоже будет зависеть от независимой переменной, и мы не сможем считать dx постоянным при дифференцировании первого дифференциала по независимой переменной. Таким образом, выражение для d^2y получится иным, чем указанное выше. Именно, взяв дифференциал от dy, на основании правила дифференцирования произведения получим

$$d^2y = d\,[f'(x)\,dx] = d\,[f'(x)]\,dx + f'(x)\,d\,(dx).$$

Но

$$d\,[f'(x)] = f''(x)\,dx \quad \text{и} \quad d\,(dx) = d^2x,$$

поэтому

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Как видим, появился добавочный член $f'(x)d^2x$. Он обращается в нуль, если x — независимая переменная:

$$d^2x = (x)''\,dx^2 = 0 \cdot dx^2 = 0.$$

Еще более сложный вид имеет дифференциал третьего порядка:

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x.$$

Итак, при нахождении дифференциалов высших порядков необходимо строго учитывать природу аргумента дифференцируемой функции: является ли этот аргумент зависимой или же независимой переменной.

Из формул для дифференциалов получаем выражения для производных в виде дробей:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

. . . .

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n},$$

. . . .

Эти формулы, за исключением первой, верной всегда, справедливы лишь при условии, что x — независимая переменная.

Для удобства записи часто вместо $\frac{d^ny}{dx^n}$ условно пишут $\frac{d^n}{dx^n}y$. Так, например, записывают: $\frac{d^3}{dx^3}(2x^4 - x + 1) = 48x$.

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как определяется скорость движения? линейная плотность? теплоемкость? скорость химической реакции?
2. Что называется скоростью изменения функции?

3. Дать определение производной данной функции. Выразить с помощью производной понятия, указанные в вопросах 1 и 2.

4. Что называется касательной прямой к линии в данной ее точке?

5. Каков геометрический смысл производной от данной функции $y=f(x)$ в системе декартовых координат?

6. Сформулировать правила дифференцирования результатов арифметических действий. Привести примеры.

7. В чем заключается правило дифференцирования сложной функции? обратной функции?

8. Вывести формулы для производных всех основных элементарных функций.

9. В чем состоит прием логарифмического дифференцирования?

10. Как дифференцируют неявно заданные функции? Привести примеры.

11. В чем состоит способ параметрического задания функций и уравнений линий? Привести примеры.

12. Указать способ дифференцирования параметрически заданных функций.

13. Что называется направлением линии в данной ее точке? углом между двумя пересекающимися линиями? нормалью к линии в данной ее точке?

14. Описать прием графического дифференцирования.

15. Каков геометрический смысл производной в системе полярных координат? Вывести соответствующую формулу.

16. Что называется дифференциалом функции? Как выражается дифференциал функции через ее производную?

17. Каков геометрический смысл дифференциала данной функции $y=f(x)$?

18. Перечислить основные свойства дифференциала функции. В чем состоит свойство инвариантности вида дифференциала функции?

19. Какая функция называется дифференцируемой? В чем состоит необходимое условие дифференцируемости функции?

20. Привести примеры непрерывных, но недифференцируемых функций.

21. Указать формулу для приближенного вычисления значений функции с помощью дифференциала функции. Привести примеры.

22. Указать формулы для выражения абсолютной и относительной предельных ошибок функции по заданной предельной абсолютной ошибке аргумента.

23. Что называется производной n-го порядка данной функции?

24. Как находятся производные высших порядков от функций, заданных явно? неявно? параметрически?

25. Сформулировать правило Лейбница для дифференцирования произведения функций.

26. Что называется дифференциалом n-го порядка данной функции? Как выражается дифференциал через соответствующую производную функции по независимой переменной?

ГЛАВА IV

ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 1. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши

56. Теоремы Ферма и Ролля. Изучение вопросов применения дифференциального исчисления к исследованию функций мы начнем с теоремы Ферма.

Теорема Ферма[1]). **Пусть функция $y=f(x)$, непрерывная в некотором интервале $[x_1, x_2]$, принимает свое наибольшее (или наименьшее) значение во внутренней точке ξ этого интервала: $x_1<\xi<x_2$. Если в точке ξ производная функции $f(x)$ существует, то она обязательно равна нулю: $f'(\xi)=0$.**

Доказательство. Если функция $f(x)$ принимает в точке ξ свое наибольшее значение, то это значит, что

$$f(x) \leqslant f(\xi) \qquad (*)$$

для всех $x \in [x_1, x_2]$.

Производная $f'(\xi)$ равна

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}.$$

Так как ξ — внутренняя точка интервала, то приращение Δx может принимать и положительные и отрицательные значения.

Рассмотрим отношение

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}.$$

Числитель этого отношения, согласно условию $(*)$, не может быть положительным: $f(\xi+\Delta x)-f(\xi) \leqslant 0$. Поэтому при $\Delta x>0$ отношение

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \leqslant 0$$

---

[1]) П. Ферма (1601—1665) — знаменитый французский математик, работы которого оказали очень большое влияние на развитие математики.

и предел его — правая производная (см. п. 52) — также неположителен: $f'_{\text{пр}}(\xi) \leqslant 0$. Если же $\Delta x < 0$, то отношение

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geqslant 0$$

и, следовательно, $f'_{\text{лев}}(\xi) \geqslant 0$.

Так как по условию теоремы в точке ξ производная функции $f(x)$ существует, то левая и правая производные должны быть равны. Это возможно только в случае $f'_{\text{лев}}(\xi) = f'_{\text{пр}}(\xi) = 0$. Но тогда и $f'(\xi) = 0$, что и требовалось доказать.

Рекомендуем читателю внести соответствующие изменения в ход рассуждений, если в точке ξ функция принимает свое наименьшее значение.

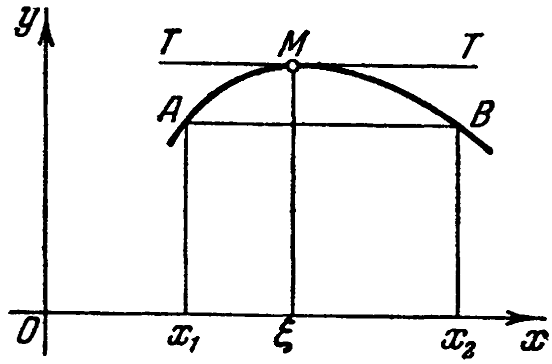

Рис. 64.

Геометрический смысл теоремы Ферма ясен из рис. 64: *касательная к графику функции в его наивысшей (или наинизшей) точке параллельна оси абсцисс*. Если наибольшее или наименьшее значения функции принимаются ею на конце интервала (например, на рис. 64 наименьшее значение принимается при $x = x_1$ и $x = x_2$), то касательная в соответствующей точке не обязана быть параллельной оси абсцисс, т. е. производная может и не равняться нулю.

Отметим, что возможны случаи, когда функция принимает свое наибольшее или наименьшее значения в точках, в которых производная не существует. Так, например, функция $y = |x|$ принимает свое наименьшее значение, равное нулю, в точке $x = 0$, где она не имеет производной. Исследование поведения этой функции и ее график приведены в п. 52.

Почти непосредственным следствием теоремы Ферма является теорема Ролля.

Теорема Ролля[1]). **Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$, дифференцируема во всех его внутренних точках и имеет на концах интервала равные значения, то в этом интервале существует хотя бы одно значение $x = \xi$, для которого $f'(\xi) = 0$.**

Доказательство. Если на концах интервала значения функции равны между собой, $f(x_1) = f(x_2)$, то возможны два случая.

---

[1]) М. Ролль (1652—1719) — французский математик.

1) Внутри интервала функция вовсе не изменяется и везде $f(x)=f(x_1)=f(x_2)$; тогда ее производная равна нулю при всех значениях x.

2) Если функция изменяется, то, будучи непрерывной в замкнутом интервале, она принимает свое наибольшее и наименьшее значения (п. **35**), причем хотя бы одно из этих значений принимается ею внутри интервала $[x_1, x_2]$. Действительно, если бы наибольшее и наименьшее значения принимались на концах интервала, то по условию теоремы они были бы равны и функция была бы постоянной. На рис. 64 изображен случай, когда функция принимает наибольшее значение внутри интервала в точке ξ.

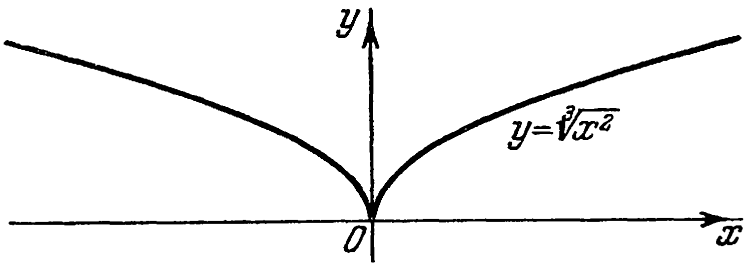

Рис. 65.

По условию теоремы производная существует во всех внутренних точках интервала, а значит и в точке, где функция принимает свое наибольшее или наименьшее значение. По теореме Ферма производная в такой точке равна нулю, а это как раз то, что и требовалось доказать.

Геометрическое истолкование теоремы Ролля таково:

На линии $y=f(x)$, где функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, найдется точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс (рис. 64).

Если $f(x_1)=f(x_2)=0$, то теорему Ролля можно формулировать следующим образом:

Между всякими двумя нулями функции лежит хотя бы один нуль производной.

Именно так, причем лишь для многочленов, теорема впервые была указана самим Роллем.

Утверждение теоремы Ролля перестает быть верным, если не требовать дифференцируемости функции во всех внутренних точках интервала. Например, непрерывная функция $y=\sqrt[3]{x^2}$ на концах интервала $[-1, +1]$ имеет равные значения ($=1$), а вместе с тем ее производная $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ нигде в нуль не обращается. И действительно, в данном случае условия теоремы не выполнены: в точке $x=0$, лежащей внутри интервала $(-1, +1)$, производной не существует. Весьма характерен график этой функции (рис. 65). В точке $(0, 0)$ имеется касательная, перпендикулярная к оси абсцисс, причем кривая в этой точке как бы заостряется. Такие точки будем называть *точками возврата* кривой.

Точно так же теорема может быть неверна, если функция не является непрерывной в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$. Например, функция, заданная в интервале $[0, 1]$ так:

$$\begin{aligned} &y = x, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ &y = 0, \quad \text{если} \quad x = 1, \end{aligned}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, кроме одного: она разрывна в правом конце интервала $[0, 1]$ — в точке $x = 1$. И заключение теоремы не выполняется: как ясно видно, производная

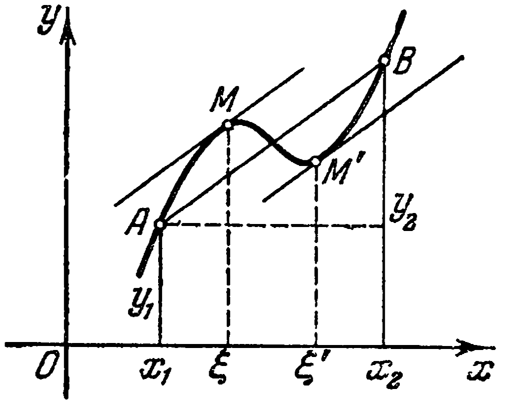

Рис. 66.

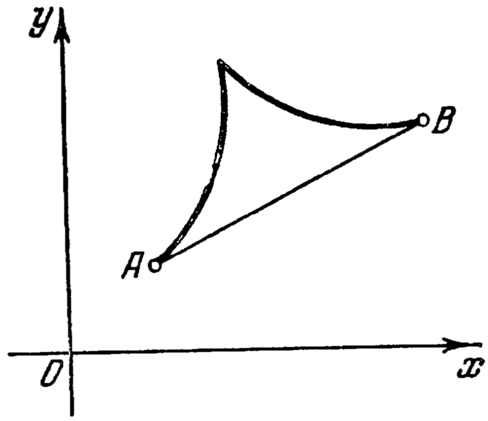

Рис. 67.

во всех точках интервала $(0, 1)$ равна 1, и, следовательно, нет точки, в которой производная обращалась бы в нуль.

Если на концах интервала не существует производной, а сама функция непрерывна, то теорема остается справедливой. Рекомендуем проверить это на примере функции $y = \sqrt{1 - x^2}$, определенной и непрерывной в интервале $[-1, 1]$.

57. Теорема Лагранжа[1]. Вернемся снова к геометрическому истолкованию теоремы Ролля. Так как хорда, стягивающая концы дуги AB (рис. 64), параллельна оси абсцисс, то *касательная в точке M будет параллельна этой хорде*. Геометрически ясно, что это последнее свойство сохранится и в том случае, когда хорда, стягивающая концы дуги, не будет параллельна оси абсцисс. Именно, пусть AB — линия, имеющая в каждой точке касательную и не имеющая точек возврата (рис. 66). Тогда на ней *всегда найдется точка, в которой касательная к линии будет параллельна хорде, стягивающей линию.*

Если условия, наложенные на линию AB, не выполняются, то такой точки может и не найтись (рис. 67).

[1] Ж. Лагранж (1736—1813) — знаменитый французский математик и механик.

Предположим теперь, что линия AB задается уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ — дифференцируемая функция, и абсциссы точек A и B соответственно равны x_1 и x_2 (рис. 66). Так как угловой коэффициент хорды AB равен $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, а угловой коэффициент касательной в точке M (на рис. 66 их две) равен $f'(\xi)$, где ξ — абсцисса точки M, то из условия параллельности касательной и хорды следует равенство их угловых коэффициентов. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

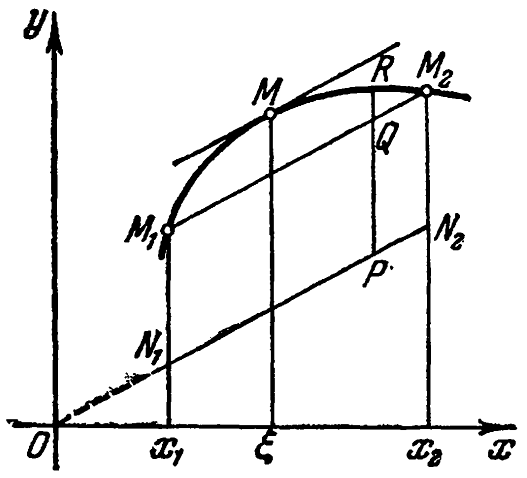

Рис. 68.

Теорема Лагранжа. **Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках, то в этом интервале существует хотя бы одно значение $x=\xi$, для которого**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

Приведем теперь аналитическое доказательство этой теоремы. Для этого образуем вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\lambda x,$$

где λ — угловой коэффициент прямой N_1N_2 (рис. 68), равный угловому коэффициенту хорды M_1M_2:

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: в интервале $[x_1, x_2]$ она непрерывна и в интервале (x_1, x_2) дифференцируема, ибо этими свойствами обладают и $f(x)$ и λx, а на концах интервала ее значения равны между собой:

$$F(x_1)=f(x_1)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x_1=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1},$$

$$F(x_2)=f(x_2)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x_2=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}.$$

Ясен и геометрический смысл вспомогательной функции $F(x)$. Ордината точки ее графика будет изображаться отрезком PR, (рис. 68), равным сумме постоянного отрезка

$$PQ=N_1M_1=N_2M_2$$

и отрезка QR. Значит, хорда, стягивающая конечные точки дуги, соответствующей новой функции, будет параллельна оси Ox. По теореме Ролля существует такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, что $F'(\xi)=0$. Но $F'(x)=f'(x)-\lambda$; следовательно, $f'(\xi)-\lambda=0$, откуда

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi),$$

что и требовалось доказать.

Разумеется, сама теорема Ролля получается из теоремы Лагранжа, когда $f(x_1)=f(x_2)$.

По теореме Лагранжа имеем

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \qquad x_1<\xi<x_2.$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа*. Она выражает тот факт, что

Приращение функции на интервале равно произведению производной в некоторой промежуточной точке интервала на приращение независимой переменной.

Формула Лагранжа позволяет дать точное выражение для приращения функции через приращение аргумента и значение производной в некоторой точке интервала. Она имеет большое теоретическое значение и будет в дальнейшем лежать в основе доказательств ряда важных теорем.

58*. Теорема Коши[1]. Теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа. Приведем сначала ее аналитическую формулировку и доказательство.

Теорема Коши. **Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ и дифференцируемы во всех его внутренних точках, причем $\varphi'(x)$ в этих точках не обращается в нуль, то в этом интервале существует хотя бы одно значение $x=\xi$, для которого**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Заметим, что $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)\neq 0$, так как в противном случае по теореме Ролля существовала бы внутри этого интервала точка, в которой производная $\varphi'(x)$ обращалась бы в нуль, что противоречит условиям теоремы.

Доказательство. Образуем вспомогательную функцию, подобную той, которую мы строили, доказывая теорему Лагранжа.

---

[1]) О. Коши (1789—1859) — знаменитый французский математик. Его выдающиеся труды лежат в основе многих разделов современной математики.

Обозначим отношение $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}$ через λ и положим

$$F(x)=f(x)-\lambda\varphi(x).$$

Вспомогательная функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Ее непрерывность и дифференцируемость следует из того, что этими свойствами обладают функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Равенство значений функции на концах интервала легко проверяется:

$$F(x_1)=f(x_1)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}\varphi(x_1)=\frac{f(x_1)\varphi(x_2)-f(x_2)\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)},$$

$$F(x_2)=f(x_2)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}\varphi(x_2)=\frac{f(x_1)\varphi(x_2)-f(x_2)\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)};$$

следовательно, по теореме Ролля в интервале (x_1, x_2) существует такая точка ξ, что $F'(\xi)=0$. Но $F'(x)=f'(x)-\lambda\varphi'(x)$; следовательно, $f'(\xi)-\lambda\varphi'(\xi)=0$ и

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Теорема доказана.

В частном случае при $\varphi(x)=x$ теорема Коши совпадает с теоремой Лагранжа.

Нельзя доказать теорему Коши, как это может показаться с первого взгляда, простым почленным делением двух формул Лагранжа, относящихся к функциям f и φ, потому что при этом промежуточные значения ξ в первом и во втором случаях не обязаны совпадать.

Покажем, что теорема Коши с геометрической точки зрения выражает тот же самый факт, что и теорема Лагранжа. Обозначим для удобства независимую переменную через t и будем считать, что функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются параметрическими уравнениями некоторой линии, причем $y=f(t)$, $x=\varphi(t)$. Когда параметр t пробегает интервал $[t_1, t_2]$, переменная точка перемещается по какой-то дуге, начальная точка которой имеет координаты $[\varphi(t_1), f(t_1)]$, а конечная $[\varphi(t_2), f(t_2)]$. Угловой коэффициент хорды, стягивающей эти точки, равен отношению $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}$. Производная от функции, заданной параметрически, равна $\frac{dy}{dx}=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$. Следовательно, формула

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \qquad (t_1<\xi<t_2)$$

опять-таки выражает равенство углового коэффициента хорды, стягивающей концы дуги, и углового коэффициента касательной, проведенной в некоторой промежуточной точке.

§ 2. Поведение функции в интервале

59. Признаки монотонности функции. Одно из самых важных назначений дифференциального исчисления — это применение его к исследованию функций (и линий), т. е. к характеристике поведения функции при изменении независимой переменной[1]).

Применение дифференциального исчисления к исследованию функций опирается на весьма простую связь, существующую между поведением функции и свойствами ее производных, прежде всего ее первой производной.

Теорема (необходимый признак монотонности). **1) Если функция $f(x)$ в интервале возрастает, то ее производная $f'(x)$ неотрицательна: $f'(x) \geqslant 0$;**

2) если функция $f(x)$ в интервале убывает, то ее производная $f'(x)$ неположительна: $f'(x) \leqslant 0$;

3) если функция $f(x)$ в интервале не изменяется (есть константа), то ее производная $f'(x)$ тождественно равна нулю.

Доказательство. 1) Пусть функция $f(x)$ в данном интервале возрастает, т. е. $f(x+\Delta x) > f(x)$, если $\Delta x > 0$, и $f(x+\Delta x) < f(x)$, если $\Delta x < 0$, для любого x в этом интервале. Но тогда отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{*}$$

будет величиной положительной независимо от знака Δx и, значит, оно не может иметь в качестве своего предела, которым является производная, отрицательное число; пределом может быть или положительное число, или нуль: $f'(x) \geqslant 0$.

2) Если $f(x)$ убывает, то отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — величина отрицательная и ее пределом, т. е. производной, может быть или отрицательное число, или нуль: $f'(x) \leqslant 0$.

В пунктах 1) и 2) предполагается, что функция $f(x)$ во всех точках имеет производную. Предоставляем читателю нарисовать график непрерывной монотонной функции, которая в отдельных точках не имеет производной (см. п. **52**).

3) Если $f(x)$ — константа, то известно, что ее производная равна нулю: $f'(x) = 0$.

Геометрический смысл этой теоремы очевиден (рис. 69): если подвижная точка $M(x, y)$ при движении по графику функции слева направо, т. е. при возрастании абсциссы, поднимается, то касательная к графику образует с осью Ox острый угол, тангенс

---

[1]) Рекомендуем перед чтением этого пункта еще раз внимательно просмотреть п. **13**.

которого положителен; если же точка $M(x, y)$ опускается, то касательная образует с осью Ox тупой угол, тангенс которого отрицателен.

Следует подчеркнуть, что производная монотонной функции может в отдельных точках обращаться в нуль. Вот простой пример: $y=x^3$. Эта кубическая функция возрастает на всей оси Ox,

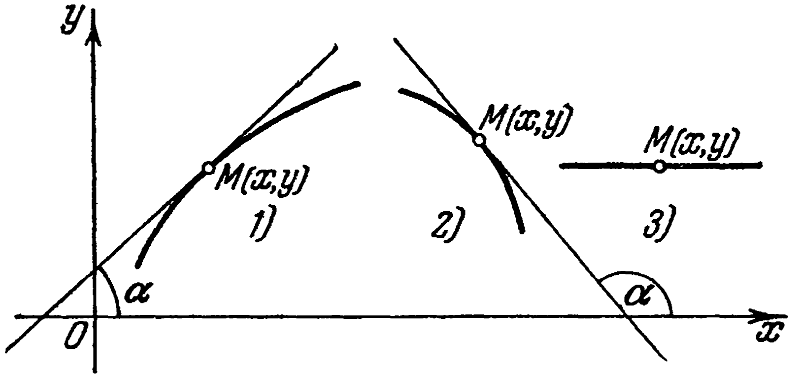

Рис. 69.

но ее производная $y'=3x^2$ обращается в нуль в точке $x=0$, будучи положительной во всех остальных точках. Геометрический смысл этого факта таков: касательная к графику монотонной функции в отдельных точках может быть параллельна оси Ox.

Таким образом, *в интервале монотонности функции знак ее производной не может измениться на обратный.*

Это предложение позволяет по характеру роста монотонной функции в интервале установить знак ее производной в этом интервале.

Однако когда мы только начинаем исследовать функцию, то ее поведение обычно неизвестно, и поэтому значительно важнее обратное предложение, сводящее вопрос о характере роста функции в данном интервале к более простому вопросу о знаке ее производной в этом интервале.

Теорема (достаточный признак монотонности). **1) Если производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ всюду в интервале положительна, то функция $f(x)$ в этом интервале возрастает;**

2) если производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ всюду в интервале отрицательна, то функция $f(x)$ в этом интервале убывает;

3) если производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ всюду в интервале равна нулю, то функция $f(x)$ в этом интервале не изменяется (есть константа).

Доказательство. Возьмем в рассматриваемом интервале две произвольные точки x_1 и x_2, причем пусть $x_1 < x_2$. По формуле Лагранжа имеем:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \quad x_1<\xi<x_2.$$

Так как $x_1 < x_2$, то разность $x_2 - x_1$ положительна и знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ полностью определяется знаком производной $f'(\xi)$. Если производная $f'(x)$ всюду положительна, то и $f'(\xi) > 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е.

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 > x_1,$$

но это и значит, что функция $f(x)$ возрастает[1]).

Если производная всюду отрицательна, то и $f'(\xi) < 0$ и, следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, т. е. функция убывает.

Наконец, если производная всюду равна нулю, то и $f'(\xi) = 0$ и, следовательно, $f(x_2) = f(x_1)$ при любых x_1 и x_2, т. е. функция $f(x)$ постоянна.

Это предложение дает нам простой и удобный аналитический признак монотонности функции в интервале.

Так, например, для того чтобы убедиться, что функция $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 3$ в интервале $-1 < x < 3$ убывает, достаточно удостовериться, что ее производная $y' = 2x^2 - 4x - 6$ при $-1 < x < 3$ отрицательна. А это действительно так, ибо $y' = 2(x+1)(x-3)$, причем множитель $(x+1)$ при всех значениях x в данном интервале положителен, а множитель $(x-3)$ отрицателен.

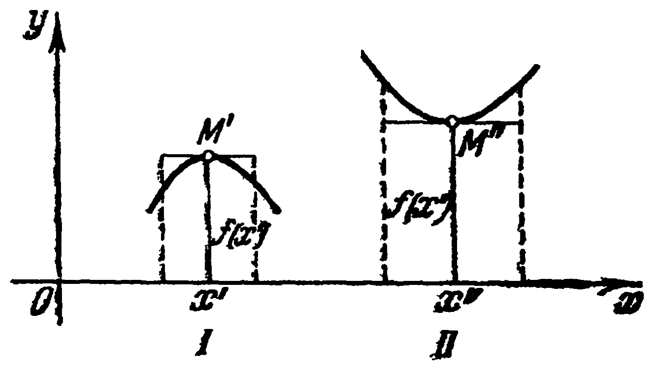

Рис. 70.

Геометрически ясно, что функция будет монотонной и в том случае, когда ее производная, сохраняя все время постоянный знак, в отдельных точках равна нулю. Например, функция $y = x - \sin x$ возрастает в любом интервале, так как ее производная $y' = 1 - \cos x$ все время положительна, кроме точек $x = 2k\pi$, где она равна нулю.

Заметим, что те значения x, в которых производная обращается в нуль, называются *стационарными точками* функции.

60. Экстремумы функции. Особую роль в исследовании функций играют значения x, отделяющие интервал возрастания от интервала убывания или интервал убывания от интервала возрастания (рис. 70). В этих точках функция $f(x)$ меняет характер своего изменения; при переходе независимой переменной через эти точки

[1]) Из хода доказательства видно, что на концах интервала производная может и не существовать.

(как всегда, слева направо) функция $f(x)$ из возрастающей становится убывающей (график I на рис. 70) или, наоборот, из убывающей — возрастающей (график II на рис. 70). Если имеет место первый случай (точка x' на рис. 70 отделяет интервал возрастания от интервала убывания), то существует такая окрестность точки x', что значение $f(x')$ является наибольшим значением функции $f(x)$ в этой окрестности; если имеет место второй случай (точка x'' на рис. 70 отделяет интервал убывания от интервала возрастания), то существует такая окрестность точки x'', что значение $f(x'')$ является наименьшим значением функции $f(x)$ в этой окрестности. Дадим общее определение.

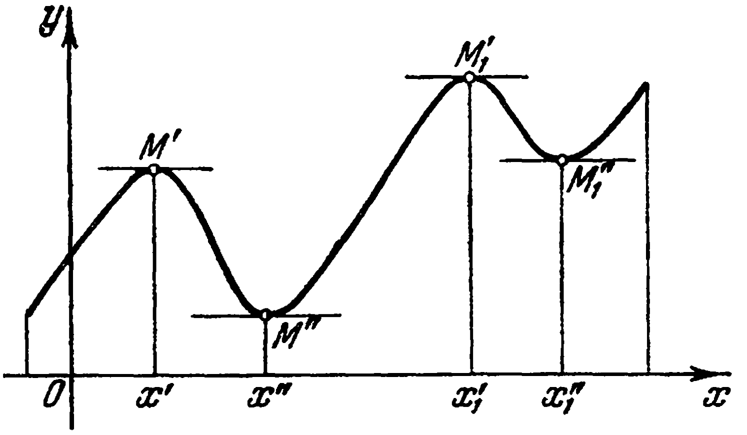

Рис. 71.

Определение. **Точка x_0 называется точкой *максимума* функции $f(x)$, если $f(x_0)$ есть *наибольшее* значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.**

Аналогично

Точка x_0 называется точкой *минимума*, если $f(x_0)$ есть *наименьшее* значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Точки максимума и минимума объединяются названием *точки экстремума*. Если x_0 — точка экстремума (или, как еще можно сказать, экстремальная точка) функции $f(x)$, то говорят, что эта функция *достигает экстремума* — соответственно *максимума* или *минимума* — в точке x_0 и что $f(x_0)$ есть *экстремальное* — соответственно *максимальное* или *минимальное* — значение функции $f(x)$.

Функция на данном интервале может иметь несколько экстремумов, причем какой-нибудь минимум функции может оказаться больше какого-нибудь максимума (рис. 71). Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции в интервале в отличие от экстремумов, носящих относительный характер, называют иногда *абсолютными максимумом и минимумом функции*.

На графике функции точкам экстремума соответствуют вершины линии, обращенные соответственно вверх или вниз (на рис. 71 точки M' и M'').

Обычно встречающиеся функции имеют на заданном конечном интервале лишь конечное, определенное число точек экстремума; именно такие функции, как правило, и будут изучаться в дальнейшем.

Примером функции иного рода служит функция $y=x\sin\frac{1}{x}$, которая в любом интервале, содержащем точку 0, непрерывна, если считать $y_{x=0}=0$, но имеет бесконечное число точек экстремума. Ее схематический график можно построить, воспользовавшись указанием к построению графика функции $y=\sin\frac{1}{x}$ на стр. 102.

Установим теперь признак, дающий *необходимое условие* того, чтобы данная точка являлась точкой экстремума.

Необходимый признак экстремума. **Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.**

Если в точке x_0 функция достигает экстремума, скажем максимума, то значение функции в этой точке является наибольшим ее значением в некоторой окрестности точки x_0. Но по теореме Ферма в тех внутренних точках интервала, в которых

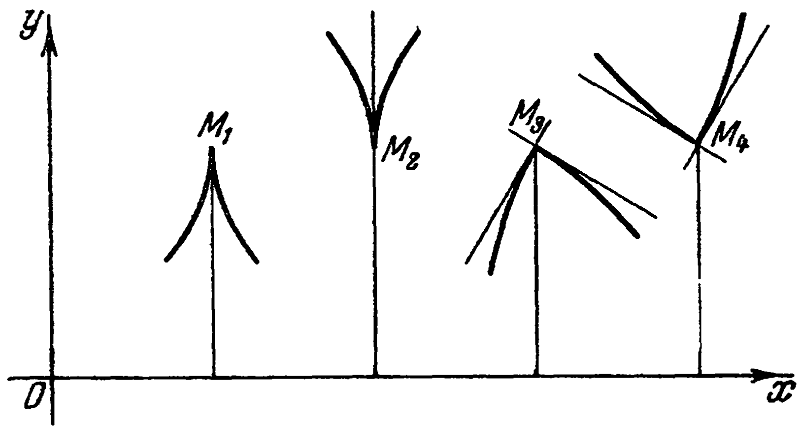

Рис. 72.

дифференцируемая функция достигает своего наибольшего значения, ее производная равна нулю. Совершенно аналогично проводится рассуждение и для точки минимума.

С геометрической точки зрения рассматриваемый признак означает, что *касательная к графику функции в его вершине параллельна оси Ox* (см. рис. 71).

Функция может также иметь экстремумы и в тех отдельных точках, в которых она недифференцируема. Случаи эти изображены на рис. 72. При этом в точках M_1 и M_2 график функции имеет касательную, перпендикулярную к оси абсцисс. Такие точки мы условились называть *точками возврата*. Характерным их признаком является то, что производная $f'(x)$ при стремлении x к абсциссе любой такой точки стремится, с одной стороны, к $+\infty$, а с другой стороны, к $-\infty$. В точках M_3 и M_4 касательная переходит внезапно от одного наклона к другому, т. е. в этих точках график не имеет определенной касательной; такие точки называются *угловыми точками* кривой. При значениях x, равных абсциссам таких точек, левая и правая производные функции $f(x)$ (см. п. **52**) различны.

Важно подчеркнуть, что *необходимый признак экстремума не является достаточным*, т. е. из того, что производная в данной

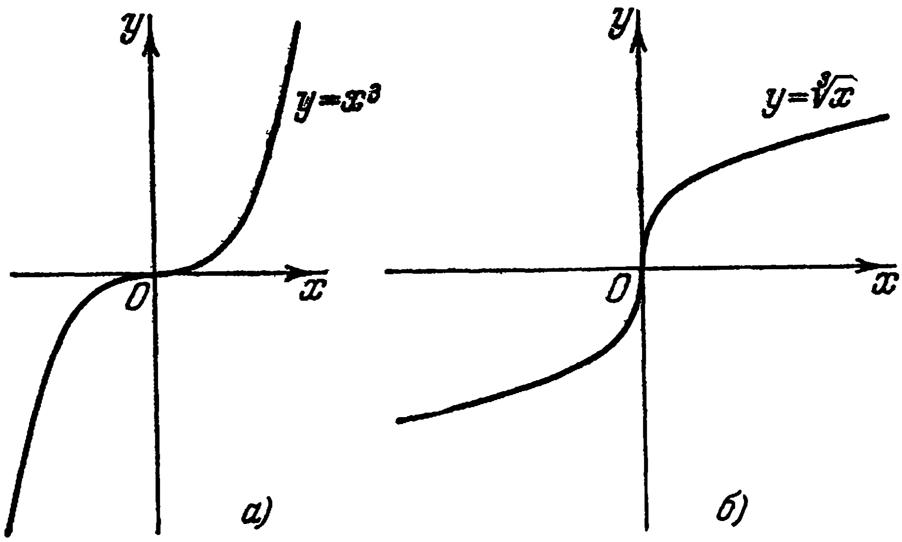

Рис. 73.

точке обращается в нуль (или ее не существует), еще не следует, что эта точка обязательно будет точкой экстремума. Так, например, функция $y=x^3$ имеет производную $y'=3x^2$, обращающуюся в нуль при $x=0$. Однако точка $x=0$ вовсе не является точкой экстремума (рис. 73, *а*).

Функция $y=\sqrt[3]{x}$, для которой $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, не имеет производной при $x=0$. Из рис. 73, *б* ясно видно, что и здесь точка $x=0$ не является экстремальной. Как легко заметить, в обоих приведенных примерах точка $x=0$ не отделяет друг от друга интервалы монотонности противоположного смысла. И слева и справа от этой точки производная имеет один и тот же знак.

Для того чтобы иметь возможность судить о том, когда же данная точка будет являться точкой экстремума, мы перейдем к установлению *достаточного признака экстремума*.

Первый достаточный признак экстремума[1]). **Точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ при переходе x через x_0 меняет знак; при перемене знака $+$ на $-$ точка x_0 является точкой максимума; при перемене $-$ на $+$ точка x_0 является точкой минимума.**

[1]) Позже, в п. **62**, мы познакомимся с другим достаточным признаком экстремума, который и будем называть вторым.

В самой точке x_0 производная в силу необходимого признака равна нулю или не существует.

Доказательство. Пусть при переходе x через x_0 производная меняет знак с $+$ на $-$; это значит, что слева от x_0 находится какой-нибудь интервал возрастания функции, а справа — какой-нибудь интервал убывания функции. Следовательно, точка x_0 есть точка максимума функции.

Так же убеждаемся, что при перемене знака производной с $-$ на $+$ точка x_0 есть точка минимума функции.

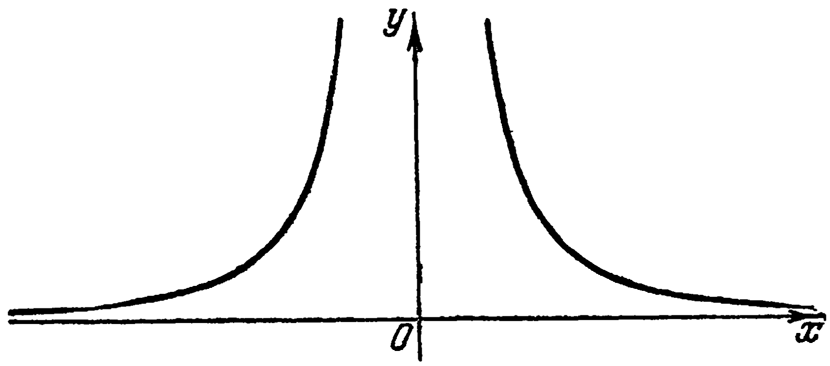

Рис. 74.

Замечание. Следует иметь в виду, что, основываясь только на перемене знака производной, нельзя еще заключить о наличии экстремума; необходимо знать еще, что в самой точке функция непрерывна. Так, например, пусть $y=\frac{1}{x^2}$. Производная этой функции $y'=-\frac{2}{x^3}$ меняет знак при переходе x через точку $x=0$: слева от нуля $y'>0$ и, значит, функция возрастает, справа от нуля $y'<0$ и, значит, функция убывает; сама же точка $x=0$ не является точкой максимума, ибо функция при $x=0$ имеет бесконечный разрыв.

На графике функции (рис. 74) это обстоятельство очевидно.

61. Схема исследования функций на экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции.

I. Схема исследования. Укажем последовательность действий для изучения роста и отыскания экстремумов непрерывной функции $y=f(x)$ в заданном интервале, который может быть как конечным, так и бесконечным. Будем считать, что функция $y=f(x)$ имеет производную всюду, за исключением, быть может, отдельных точек.

1) Прежде всего нужно найти точки интервала, в которых производная равна нулю (стационарные точки), т. е. действительные корни уравнения $f'(x)=0$, а также те точки, в которых производная не существует. Обозначим все найденные точки в порядке возрастания через $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Таким образом,

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Это — те точки интервала, в которых функция $f(x)$ может иметь экстремумы. Их иногда называют *критическими*.

2) Затем разбиваем при помощи точек x_i весь заданный интервал $[a, b]$[1]) на *частичные* интервалы: (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), (x_n, b), в каждом из которых производная сохраняет постоянный знак. В самом деле, в противном случае производная была бы равна нулю (или не существовала бы) еще в точках, отличных от выделенных, а все такие точки мы уже нашли в п. 1). Следовательно, эти интервалы являются интервалами монотонности функции.

3) Находим знак производной в каждом из частичных интервалов, для чего достаточно узнать ее знак в какой-нибудь одной точке интервала. По знаку производной определяем характер изменения функции в каждом интервале монотонности (возрастает она или убывает). Следя за переменой знака производной при переходе через границы интервалов монотонности — точки x_i, выясняем, какие из этих точек будут точками максимума и какие — минимума. При этом может оказаться, что какая-нибудь точка x_i не служит точкой экстремума функции. Это случится, если в двух соседних интервалах (x_{i-1}, x_i) и (x_i, x_{i+1}), разделяемых точкой x_i, функция монотонна в одинаковом смысле, т. е. производная в них имеет один и тот же знак. Тогда они объединяются в один интервал монотонности функции. В этом случае точка x_i не будет точкой экстремума (пример: $x=0$ для функции $y=x^3$).

4) Подстановкой в выражение функции $f(x)$ критических значений $x=x_i$ находим соответствующие значения функции:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n).$$

Как уже отмечалось, не все из этих значений могут оказаться экстремальными.

Если значения $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ вычислены, а также найдены значения функции на концах интервала $f(a)$ и $f(b)$, то ход изменения функции легко представить и без исследования знака производной. Так как нам уже известно, что в каждом из интервалов (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) функция не имеет точек экстремума и, следовательно, монотонна, то, сравнивая между собой значения функции на концах каждого такого интервала, мы и определим, где функция возрастает и где убывает.

Какой из приемов следует употребить, зависит от конкретных обстоятельств. Может быть, что удобнее и легче использовать

[1]) a и b могут быть равны соответственно $-\infty$ и $+\infty$.

знаки производной, а может быть и так, что, нуждаясь все равно в значениях функции в критических точках, проще использовать эти значения и не выяснять знаки производной.

Результаты исследования целесообразно сводить в таблицу:

x	a	$a < x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < b$	b
y y'	$f(a)$	возрастает $+$	$f(x_1)$ 0	убывает $-$	$f(x_2)$ 0	убывает $-$	$f(b)$

На приведенной таблице (для простоты считаем, что в интервале $[a, b]$ всего две критические точки) показана примерная схема ее заполнения.

Знак производной в каждом из интервалов определяется путем вычисления значения производной в одной из точек интервала (безразлично какой). Если производная представлена в виде произведения нескольких множителей, то достаточно найти знаки этих множителей, не вычисляя их значений; по знакам множителей определится и знак произведения (см. ниже пример 2).

По такой таблице можно построить схематический график функции.

II. Наибольшее и наименьшее значения функции. После того как все экстремальные значения функции найдены, легко найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$. Для этого нужно *сравнить*

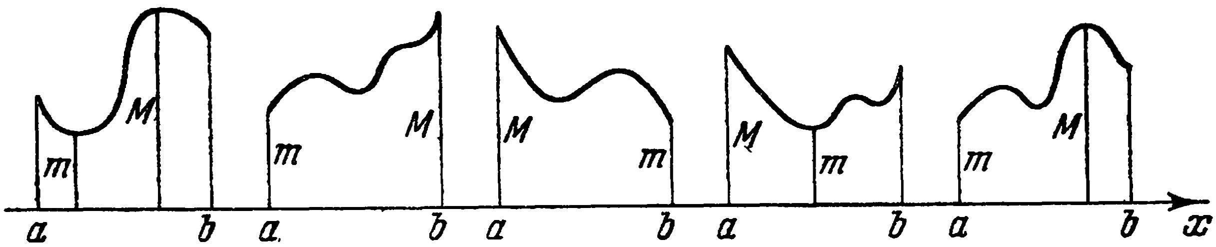

Рис. 75.

между собой значения функции в экстремальных точках и на концах интервала. Действительно, наибольшим значением функции в интервале $[a, b]$ может быть или одно какое-нибудь из максимальных ее значений, или значение на конце интервала. Аналогично наименьшее значение функции следует искать или среди минимальных ее значений, или среди значений на концах интервала. Некоторые из возможных случаев представлены на рис. 75.

Ясно, что если функция в интервале $[a, b]$ монотонно возрастает, то ее наибольшее значение будет $f(b)$, а наименьшее $f(a)$; если функция монотонно убывает, то указанные значения просто поменяются местами.

Часто встречается случай, когда функция в интервале имеет только одну экстремальную точку. Если это точка максимума, то значение функции в ней, очевидно, будет наибольшим значением функции в интервале, а если минимума, то наименьшим.

III. Примеры исследования функций. 1) Основные элементарные функции. Хотя поведение каждой из основных элементарных функций уже описано нами с помощью их графических изображений в первой главе, однако применение первой производной позволяет очень легко аналитически обнаружить простейшие свойства этих функций.

Степенная функция: $y = x^n$. Ее производная $y' = nx^{n-1}$ при $x > 0$ положительна, если $n > 0$, и отрицательна, если $n < 0$. Следовательно, на положительной полуоси Ox функция или везде возрастает ($n > 0$), или везде убывает ($n < 0$).

Показательная функция: $y = a^x$. Знак ее производной $y' = a^x \ln a$ совпадает со знаком $\ln a$, так как функция a^x везде положительна. Поэтому $y' > 0$, если $a > 1$, и $y' < 0$, если $a < 1$. Показательная функция монотонна на всей оси Ox: возрастает в первом случае, убывает во втором.

Логарифмическая функция: $y = \ln x$. Ее производная $y' = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ (а только для этих значений x функция определена) положительная, и значит, $\ln x$ везде возрастает.

Подобным образом, обращаясь к производным, нетрудно восстановить ход изменения и других основных элементарных функций.

2) Рассмотрим функцию

$$y = 3x^3 + 4{,}5x^2 - 4x + 1.$$

Эта функция имеет непрерывную производную на всей оси Ox.

Находим производную:

$$y' = 9x^2 + 9x - 4 = (3x - 1)(3x + 4).$$

Отсюда видно, что производная равна нулю при $x = -\frac{4}{3}$ и при $x = \frac{1}{3}$.

Так как при $x < -\frac{4}{3}$ оба множителя отрицательны, то производная при этих значениях x положительна и, следовательно, функция возрастает. При $-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{3}$ производная отрицательна и функция убывает, а при $x>\frac{1}{3}$ производная снова положительна и функция возрастает. Таким образом, $x=-\frac{4}{3}$ есть точка максимума, а $x=\frac{1}{3}$ — точка минимума, и мы имеем три интервала монотонности: от $-\infty$ до $-\frac{4}{3}$ — интервал возрастания, от $-\frac{4}{3}$ до $\frac{1}{3}$ — интервал убывания и от $\frac{1}{3}$ до $+\infty$ — интервал возрастания.

Вычислим значения функции в точках экстремума и составим таблицу поведения функции. При составлении таблицы учитываем, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(3+\frac{4,5}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=\pm\infty.$$

x	$-\infty$	$-\infty<x<-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}<x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<+\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	возрастает	$7\frac{2}{9}$ max	убывает	$\frac{5}{18}$ min	возрастает	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

По таблице легко построить схематический график функции (рис. 76). Из графика ясно, между прочим, что уравнение

$$3x^3+4,5x^2-4x+1=0$$

имеет только один действительный корень, т. е. остальные два его корня[1]) — сопряженные комплексные числа.

3) Изучим функцию

$$y=\sqrt[3]{x^2}e^x$$

в интервале $[-2;\ 0,5]$. В этом интервале функция непрерывна; она будет положительна во всех точках, за исключением точки $x=0$, где она обращается в нуль. Возьмем производную

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}e^x+\sqrt[3]{x^2}e^x=\frac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}}e^x.$$

[1]) Всякое алгебраическое уравнение имеет столько корней, какова его степень (см. п. 75).

Производная существует в каждой точке заданного интервала, кроме точки $x=0$. В этой же точке производная бесконечна, причем если подходить к точке $x=0$ справа, то $y' \to +\infty$, а если слева, то $y' \to -\infty$. Это указывает на наличие в точке (0, 0) графика функции точки возврата в виде острия (рис. 77).

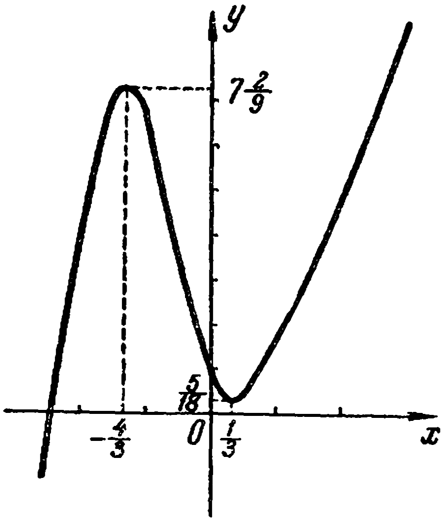

Рис. 76.

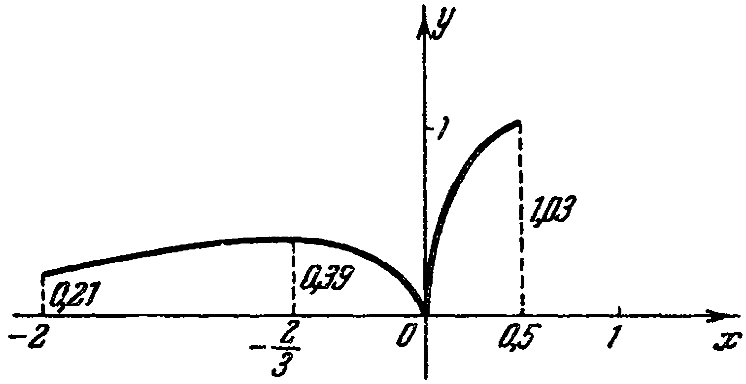

Рис. 77.

Производная равна нулю при $x=-\frac{2}{3}$. Следовательно, в данном интервале есть две критические точки: стационарная точка $x=-\frac{2}{3}$ и точка $x=0$, в которой функция недифференцируема. Мы имеем три интервала монотонности функции: $\left[-2, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, $(0;\ 0{,}5]$. Составляя таблицу поведения функции, видим, что в первом интервале производная положительна—функция в нем возрастает; во втором отрицательна—функция в нем убывает; в третьем снова положительна—функция в нем возрастает. Впрочем, это ясно и из сравнения значений функции в критических точках и на концах интервала:

$$y_{x=-2}\approx 0{,}21;\quad y_{x=-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\,e^{-\frac{2}{3}}\approx 0{,}39;\quad y_{x=0}=0;\quad y_{x=0{,}5}\approx 1{,}03.$$

x	-2	$-2<x<-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}<x<0$	0	$0<x<0{,}5$	$0{,}5$
y y'	$\approx 0{,}21$	возрастает $+$	$\approx 0{,}39$ max 0	убывает $-$	0 min ∞	возрастает $+$	$\approx 1{,}03$

Наибольшее значение функции в интервале $[-2;\ 0{,}5]$ приближенно равно 1,03 и достигается на правом конце интервала, а наименьшее значение равно 0 и достигается в точке $x=0$.

В дальнейшем (см. стр. 201) мы продолжим и уточним то исследование заданной функции, которое было произведено здесь.

4) Методы исследования функций часто могут быть использованы для доказательства неравенств.

Докажем, например, справедливость неравенств

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, \quad \text{если } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим функцию $y=\frac{\sin x}{x}$. Так как ее производная

$$y'=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg} x)$$

в интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ отрицательна $(x<\operatorname{tg} x)$, то y убывает и, значит, функция $\frac{\sin x}{x}$ меньше своего значения при $x=0$ (т. е. меньше 1) и больше своего значения при $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{т. е. больше } \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\right)$:

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1,$$

откуда и следуют наши неравенства.

IV. **Задачи о наибольших и наименьших значениях.** Предположим, что даны две величины, связанные функциональной зависимостью, и требуется отыскать значение одной из них (заключенное в некотором интервале, который может быть и неограниченным), при котором другая принимает *наименьшее* или *наибольшее* возможное значение.

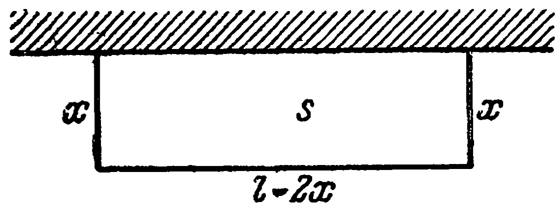

Рис. 78.

Для решения такой задачи прежде всего следует составить выражение для функции, с помощью которой одна величина выражается через другую, а затем найти наибольшее или наименьшее значение полученной функции в данном интервале.

Примеры. 1) Найдем наименьшую длину l забора, с помощью которого можно огородить участок в форме прямоугольника с данной площадью s, примыкающий к стене (рис. 78).

Обозначим одну из сторон прямоугольника через x; тогда, как легко видеть, будем иметь

$$s = x(l - 2x),$$

откуда

$$l = 2x + \frac{s}{x}.$$

Наша задача сводится к отысканию наименьшего значения этой функции при изменении x от 0 до ∞. При $x \to 0$ и при $x \to \infty$ функция $l \to \infty$. Следовательно, наименьшее значение следует искать среди минимумов функции в интервале $(0, \infty)$. Возьмем производную

$$l' = 2 - \frac{s}{x^2}.$$

В интересующем нас интервале имеем одну стационарную точку: $x = \sqrt{\frac{s}{2}}$, которая является точкой минимума функции, ибо $l' < 0$, если $x < \sqrt{\frac{s}{2}}$, и $l' > 0$, если $x > \sqrt{\frac{s}{2}}$. Минимальное значение

$$l_{\min} = 2\sqrt{\frac{s}{2}} + \frac{s}{\sqrt{\frac{s}{2}}} = 2\sqrt{2s}$$

здесь служит и наименьшим значением функции во всем интервале $(0, \infty)$. Значит, какой бы забор, огораживающий прямоугольный участок с площадью s и примыкающий к стене, мы ни взяли, его длина не может быть меньше $2\sqrt{2s}$ и равна этому значению только в том случае, когда меньшая сторона прямоугольника $\left(\text{равная } \sqrt{\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2s}\right)$ в два раза меньше его большей стороны $\left(\text{равной } 2\sqrt{2s} - 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2s} = \sqrt{2s}\right)$. В указанных условиях самый экономичный забор тот, у которого бóльшая сторона в два раза длиннее меньшей стороны.

2) Вычислим, через сколько секунд после начала падения под действием силы тяжести (без учета сопротивления воздуха) кинетическая энергия дождевой капли будет наибольшей (и какова она), если начальная масса капли m_0 и капля равномерно испаряется, так что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности обозначим через k).

Через t *сек* после начала падения кинетическая энергия a будет равна

$$a = \frac{mv^2}{2} = \frac{(m_0 - kt)(gt)^2}{2},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Вопрос сводится к отысканию наибольшего значения этой функции при $t>0$.

Имеем

$$\frac{da}{dt}=-\frac{k}{2}(gt)^2+(m_0-kt)g^2t=g^2t\left(-\frac{3}{2}kt+m_0\right).$$

Ясно, что $\frac{da}{dt}=0$ при $t=0$ и при $t=\frac{2}{3}\frac{m_0}{k}$; если $0<t<\frac{2}{3}\frac{m_0}{k}$, то $\frac{da}{dt}>0$, а если $t>\frac{2}{3}\frac{m_0}{k}$, то $\frac{da}{dt}<0$. Отсюда следует, что при $t=\frac{2m_0}{3k}$ кинетическая энергия a достигает максимума, и так как это единственный экстремум функции, то и наибольшего своего значения; оно равно

$$a_{\max}=\frac{\left(m_0-k\frac{2m_0}{3k}\right)\left(g\frac{2m_0}{3k}\right)^2}{2}=\frac{2}{27}\frac{g^2m_0^3}{k^2}.$$

Если же время падения капли на землю $T\leqslant\frac{2m_0}{3k}$, то кинетическая энергия все время возрастает и наибольшее ее значение будет в момент падения капли на землю.

62. Применение второй производной. Точки перегиба.

I. Второй признак экстремума. С помощью второй производной $f''(x)$ исследуемой функции $f(x)$ можно установить так называемый *второй достаточный признак экстремума*, который иногда оказывается более удобным и простым, чем первый.

Второй достаточный признак экстремума. **Точка x_0 есть точка экстремума функции $f(x)$, если $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq0$, причем, если $f''(x_0)>0$, то x_0 — точка минимума, а если $f''(x_0)<0$, то x_0 — точка максимума.**

Доказательство. Пусть $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$. Предполагая вторую производную непрерывной, мы можем считать, что она сохраняет свой знак в некоторой окрестности точки x_0. Отсюда следует, что функция $f'(x)$ в этой окрестности будет возрастающей, потому что ее производная $f''(x)>0$. Так как $f'(x_0)=0$, то слева от точки x_0 производная $f'(x)$, принимая меньшие значения, будет отрицательной: $f'(x)<0$, а справа,—принимая бо́льшие значения,—положительной: $f'(x)>0$. Итак, функция $f'(x)$ при переходе x через x_0 меняет свой знак с $-$ на $+$, и, согласно известному нам первому достаточному признаку, точка x_0 является точкой минимума.

Рассуждая аналогично, получим, что если $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ убывает и, переходя через точку x_0, меняет знак с $+$ на $-$, т. е. точка x_0 является точкой максимума.

В том случае, когда $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, а также в случае, когда первой производной не существует, вторым признаком воспользоваться нельзя и нужно обратиться к первому признаку. Так, например, обе первые производные функции $y = x^4$ равны нулю при $x = 0$; вторым признаком воспользоваться нельзя, а по первому мы устанавливаем, что функция в этой точке достигает минимума: производная $y' = 4x^3$ меняет знак с $-$ на $+$ при переходе x через нуль. Функция же $y = x^3$, хотя ее первые две производные тоже равны нулю при $x = 0$, не имеет экстремума; действительно, ее первая производная $y' = 3x^2$ не меняет знака при переходе x через нуль.

Однако в случае своей применимости второй признак оказывается весьма удобным: вместо рассмотрения знака функции $f'(x)$ в точках, отличных от предполагаемой точки экстремума, он позволяет дать ответ по знаку функции $f''(x)$ в той же точке.

Примеры. 1) $y = ax^2 + bx + c$. Так как $y' = 2ax + b$ равна нулю при $x = -\frac{b}{2a}$, а $y'' = 2a$, то y имеет максимум в указанной точке, если $a < 0$, и минимум, если $a > 0$.

Этот пример может наглядно убедить в большом значении теории для математической практики. Он показывает, что с расширением средств анализа упрощаются и укорачиваются рассуждения и выкладки, необходимые для исследования конкретных функций. В первой главе, где мы еще не владели дифференциальным исчислением, изучение квадратичной функции потребовало от нас довольно длинных и специальных рассмотрений, а здесь для этого изучения нам понадобилось лишь три строки.

2) Вернемся к примеру 1) п. **61**, IV. Мы выяснили, что функция $l = 2x + \frac{s}{x}$ имеет минимум в стационарной точке $x = \sqrt{\frac{s}{2}}$: производная $l' = 2 - \frac{s}{x^2}$ меняет свой знак при переходе x через эту точку. Но проще заключить о наличии минимума в указанной точке просто из того факта, что $l'' = \frac{2s}{x^3} > 0$ при всех положительных x, а значит, и при $x = \sqrt{\frac{s}{2}}$.

II. Выпуклость и вогнутость линии. Точки перегиба.

Определение. **Дуга называется выпуклой, если она пересекается с любой своей секущей не более чем в двух точках.**

Дуга AB на рис. 79 выпуклая, а на рис. 80 невыпуклая; у дуги на рис. 80 есть секущие M_1M_2, которые, кроме точек M_1 и M_2, пересекаются с дугой AB еще в других, отличных от этих точках M_3.

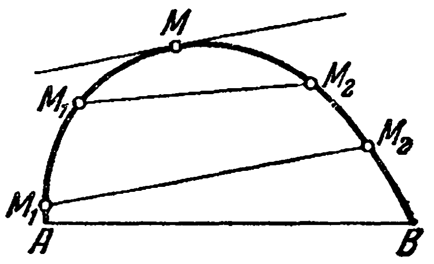

Рис. 79.

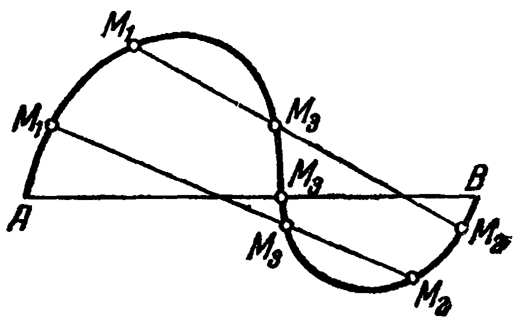

Рис. 80

Если дуга выпуклая, то она целиком лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой ее точке.

Будем теперь рассматривать линии, являющиеся графиками непрерывных функций $y=f(x)$. Если такая линия выпуклая, то ее выпуклость обращена или в в е р х (рис. 81, *I*), или вниз (рис. 81, *II*).

Линии, обращенные выпуклостью вверх, условились называть *выпуклыми*, а обращенные выпуклостью вниз — *вогнутыми*. Геометрически ясно, что выпуклая дуга лежит п о д любой своей касательной, а вогнутая дуга—н а д касательной.

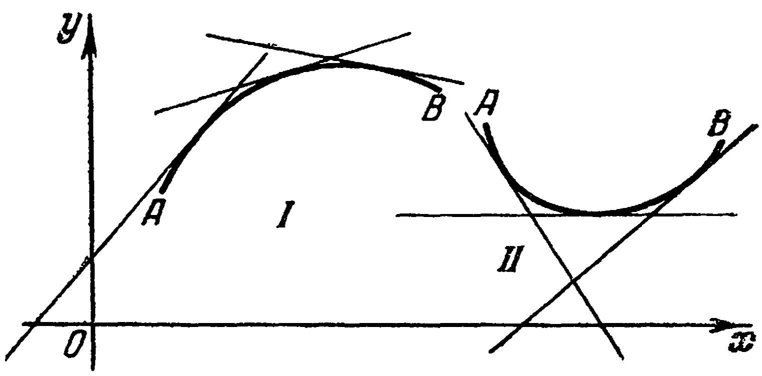

Рис. 81.

Особую роль играют точки на линии, отделяющие выпуклую дугу от вогнутой; они называются т о ч к а м и п е р е г и б а. На рис. 82 точка C отделяет выпуклую дугу AC от вогнутой CB.

О п р е д е л е н и е. ***Точкой перегиба*** **называется такая точка линии, которая отделяет выпуклую дугу от вогнутой.**

При этом предполагается, что в этой точке к линии можно провести касательную. Предоставляем читателю нарисовать линию с угловой точкой, которая отделяла бы выпуклую дугу от вогнутой; такие угловые точки мы не причисляем к точкам перегиба.

В точке перегиба касательная пересекает линию; в окрестности этой точки линия лежит по обе стороны от касательной.

Установление участков выпуклости и вогнутости и точек перегиба линии $y=f(x)$ имеет важное значение для характеристики этой линии, а значит, и для характеристики поведения функции $f(x)$.

III. Признаки выпуклости и вогнутости линии. Связь между второй производной $f''(x)$ и выпуклостью или вогнутостью линии $y=f(x)$ мы установим, пользуясь лишь самыми простыми геометрическими соображениями. В основе лежит следующее предложение.

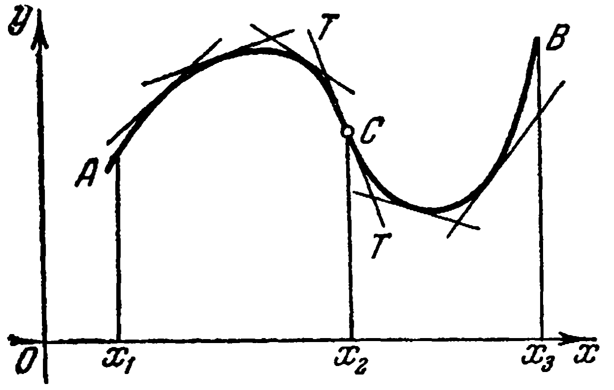

Рис. 82.

Интервалу убывания первой производной соответствует участок выпуклости графика функции, а интервалу возрастания — участок вогнутости.

В самом деле, если дуга выпуклая, то при перемещении точки касания слева направо угловой коэффициент касательной, т. е. $f'(x)$, как это видно из рис. 82, уменьшается: сначала он принимает все меньшие положительные значения, потом становится равным нулю, а затем и отрицательным. (Особенно ясно это видно на рис. 58 п. **48**.) Таким образом, интервал $[x_1, x_2]$ есть интервал убывания функции $f'(x)$.

Верно и обратное: если функция $f'(x)$ убывает, то убывает и угловой коэффициент касательной к линии; при этом дуга кривой будет лежать под любой своей касательной, т. е. она выпуклая. (Это утверждение становится более наглядным, если представить себе кривую, как бы построенную из «бесконечно малых» отрезков касательных.)

Совершенно аналогично можно установить, что если дуга вогнутая, то функция $f'(x)$ возрастает, и наоборот. Так, для графика функции, изображенного на рис. 82, дуга CB — вогнутая и $[x_2, x_3]$ — интервал возрастания $f'(x)$.

Воспользуемся теперь основной теоремой, устанавливающей связь между характером изменения функции и знаком ее производной, приняв за функцию — $f'(x)$ и за ее производную — $f''(x)$. Если $f''(x)>0$, то $f'(x)$ возрастает, а если $f''(x)<0$, то $f'(x)$ убывает. В результате мы получаем следующую теорему.

Теорема. **Если вторая производная $f''(x)$ всюду в интервале отрицательна, то дуга линии $y=f(x)$, соответствующая этому интервалу, выпуклая. Если вторая производная $f''(x)$ всюду в интервале положительна, то дуга линии $y=f(x)$, соответствующая этому интервалу, вогнутая.**

Так же как и в конце п. **59**, отметим, что если $f''(x)$ сохраняет постоянный знак, скажем положительный, и лишь в отдельных точках обращается в нуль, то $f'(x)$ остается возрастающей, а соответствующая дуга графика функции $y=f(x)$ вогнутой. Например, для параболы четвертого порядка $y=x^4$ вторая производная $y''=12x^2$ всюду положительна, кроме точки $x=0$, где она равна нулю; график же этой параболы всюду вогнутый.

Изложенная сейчас теорема делает особенно ясным второй достаточный признак экстремума.

Если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$, то вершина кривой, соответствующая точке x_0, лежит на выпуклой части линии $y=f(x)$, и поэтому точка x_0 является точкой максимума. Если же $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$, то соответствующая вершина лежит на вогнутой части линии, и поэтому точка x_0 является точкой минимума.

IV. Признаки точки перегиба. Мы определили точку перегиба как такую точку графика, которая отделяет выпуклую дугу от вогнутой. Из приведенного выше рассуждения следует, что абсцисса точки перегиба (точка x_2 на рис. 82) разделяет два интервала монотонности первой производной $f'(x)$, т. е. является *точкой экстремума для первой производной*. Применяя необходимый признак экстремума, получаем:

Если x_0 — абсцисса точки перегиба, то либо $f''(x_0)=0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Это и дает нам необходимый признак точки перегиба.

Однако не всякий корень уравнения $f''(x)=0$ является абсциссой точки перегиба. Например, функция $y=x^4$ имеет производные $y'=4x^3$ и $y''=12x^2$. Несмотря на то, что $y''_{x=0}=0$, точка $(0, 0)$ является вершиной кривой и не является точкой перегиба.

Для того чтобы выяснить, когда же точка x_0 будет действительно являться абсциссой точки перегиба, нужно проследить еще, меняет ли вторая производная свой знак при переходе через эту точку. Таким образом, мы и приходим к достаточному признаку точки перегиба:

Точка (x_0, y_0) есть точка перегиба линии $y=f(x)$, если $f''(x)$ меняет знак при переходе x через x_0. При перемене знака с — на + слева от нее лежит участок выпуклости, а справа — участок вогнутости; при перемене знака с + на —, наоборот, участок вогнутости сменяется участком выпуклости.

Приведем еще второй достаточный признак точки перегиба, аналогичный второму достаточному признаку экстремума. Рекомендуем читателю доказать его самостоятельно.

Точка (x_0, y_0) есть точка перегиба линии $y=f(x)$, если $f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$; при $f'''(x_0)>0$ слева от нее лежит участок выпуклости, справа — участок вогнутости, а при $f'''(x_0)<0$ слева лежит участок вогнутости, а справа — участок выпуклости.

В заключение отметим, что при отыскании точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости мы пользуемся теми же правилами, что и при отыскании точек экстремума, применяя, однако, эти правила не к самой функции, а к ее первой производной.

При этом *интервалу возрастания первой производной соответствует участок вогнутости графика функции, интервалу убывания — участок выпуклости и точке экстремума первой производной — абсцисса точки перегиба.*

Примеры. 1) Линия $y=x^4+x^3$ в точке $(0, 0)$ имеет точку перегиба: действительно, $y''_{x=0}=(12x^2+6x)_{x=0}=0$ и $y'''_{x=0}=(24x+6)_{x=0}=6>0$. Слева от точки $(0, 0)$ лежит участок выпуклости, а справа—вогнутости. Предоставляем читателю проверить, что точка $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ также является точкой перегиба.

2) Линия $y=x^5+x$ в точке $(0, 0)$ имеет точку перегиба: прежде всего, $y''_{x=0}=(20x^3)_{x=0}=0$; далее, так как $y'''_{x=0}=0$, то рассматриваем значения y'' вблизи точки $x=0$ и замечаем, что y'' при переходе x через $x=0$ меняет знак с — на $+$. Следовательно, $x=0$ есть абсцисса точки перегиба, причем слева от этой точки лежит участок выпуклости линии, а справа—участок вогнутости.

3) Линия $y=x^4+x$ в точке $(0, 0)$ не имеет перегиба: здесь также $y''_{x=0}=(12x^2)_{x=0}=0$ и $y'''_{x=0}=0$, однако при переходе x через точку $x=0$ производная y'' знака не меняет.

Мы допускали, что функция $f(x)$ во всем рассматриваемом интервале дважды дифференцируема. Если это не так, то нужно исследовать $f'(x)$ и $f''(x)$ в окрестностях тех отдельных точек, в которых эти производные не существуют. В них также может произойти смена участков выпуклости и вогнутости.

В качестве примера можно рассмотреть функцию $y=\sqrt[3]{x}$ (см. рис. 73, б), для которой точка $(0, 0)$ является точкой перегиба.

В обычно встречаемых случаях точки экстремума a, b, c, ... и абсциссы точек перегиба α, β, γ, ... чередуются (см. рис. 71).

Обратим внимание на разницу в характере терминов: точкой экстремума функции называется точка на оси независимой переменной, а точкой перегиба—точка самого графика. Это связано с тем, что понятие экстремума относительное, зависящее от выбранной системы координат: точка на линии, соответствующая точке экстремума,—вершина в одной системе координат может не быть вершиной в какой-нибудь другой системе координат; определение же точки перегиба не зависит от системы координат, а обусловлено свойствами, присущими самой линии: точка перегиба остается таковой при всех перемещениях линии (как твердого тела) на плоскости, т. е. в любой системе декартовых координат.

V. Примеры. 1) Характер графиков основных элементарных функций в смысле их выпуклости теперь может быть очень легко проверен.

Так, график степенной функции $y=x^n$ на положительной полуоси Ox вогнутый при $n<0$ и $n>1$ и выпуклый при $0<n<1$. Действительно, вторая производная $y''=n(n-1)x^{n-2}$ положительна в первых случаях и отрицательна во втором.

График показательной функции $y=a^x$ при любом $a>0$ вогнут на всей оси Ox, так как $y''=a^x\ln^2 a>0$.

Логарифмика $y=\log_a x$ выпукла при $a>1$ и вогнута при $a<1$. Действительно, вторая производная $y''=-\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x^2}$ отрицательна в первом случае и положительна во втором.

Так как

$$(\sin x)''=-\sin x,$$

то участки выпуклости синусоиды расположены выше оси абсцисс, а участки вогнутости — ниже; точками перегиба синусоиды являются точки ее пересечения с осью Ox.

2) Дополним исследование функции

$$y=\sqrt[3]{x^2}e^x,$$

выполненное в п. **61** (III, пример 4). Произведенное уже изучение интервалов монотонности и точек экстремума показывает, что наша функция в интервале $[-2;\ 0{,}5]$ имеет одну точку максимума: $x=-\frac{2}{3}$ и одну точку минимума: $x=0$. Найдем теперь участки выпуклости и участки вогнутости графика функции и точки его перегиба. Для этого возьмем вторую производную

$$y''=\left(\frac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}}\right)'e^x+\frac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}}(e^x)'=\frac{9x^2+12x-2}{9x\sqrt[3]{x}}e^x.$$

Так как множители e^x и $x\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^4}$ положительны, то знак y'' совпадает со знаком квадратного трехчлена $9x^2+12x-2$. Этот трехчлен имеет нули в точках $x_1=-\frac{\sqrt{6}+2}{3}\approx-1{,}48$ и $x_2=\frac{\sqrt{6}-2}{3}\approx 0{,}15$. Легко видеть, что $y''>0$ в интервале $(-2,\ x_1)$, $y''<0$ в интервале $(x_1,\ 0)$, $y''<0$ в интервале $(0,\ x_2)$[1], $y''>0$ в интервале $(x_2;\ 0{,}5)$; значит, в интервале $(-2,\ x_1)$ график функции вогнут, в интервалах $(x_1,\ 0)$ и $(0,\ x_2)$ он выпуклый, в интервале $(x_2;\ 0{,}5)$ вогнутый (рис. 83).

[1]) Нельзя здесь рассматривать сразу весь интервал $[x_1,\ x_2]$, так как внутри него есть точка $(x=0)$ разрыва второй производной.

Чтобы более точно построить теперь график функции, найдем ординаты точек перегиба. Подставляя значения x_1 и x_2 в выражение функции, получим: $y_{x\approx-1,48}\approx 0{,}30$, $y_{x\approx 0,15}\approx 0{,}32$. Как мы видим, график функции, построенный на рис. 83, весьма значительно отличается от графика на рис. 77, построенного без должного анализа. В случае особо точного построения графика рекомендуется найти еще угловые коэффициенты касательных в точках

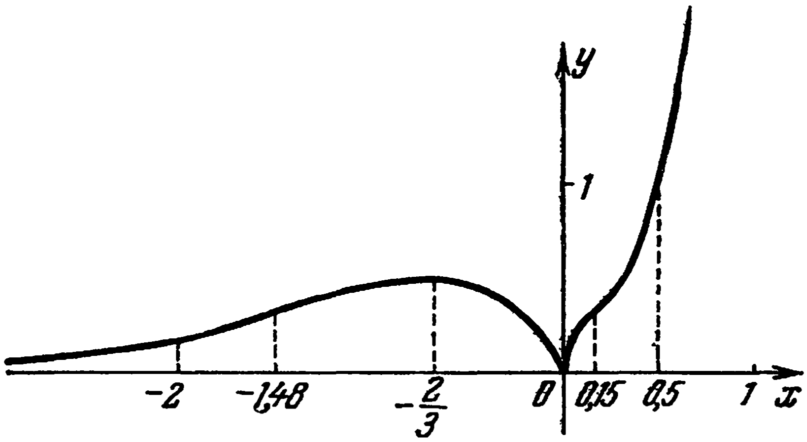

Рис. 83.

перегиба. Для этого нужно подставить значения x_1 и x_2 в выражение для производной; произведя необходимые вычисления, получим

$$y'_{x=-1,48}\approx 0{,}16,\qquad y'_{x\approx 0,15}\approx 1{,}80.$$

Заметим также, что вне рассматриваемого интервала функция не имеет больше ни точек экстремума, ни точек перегиба.

§ 3. Правило Лопиталя. Схема исследования функций

63. Правило Лопиталя[1]).

I. Основные случаи. В дополнение к известным уже нам правилам предельного перехода (гл. II) приведем здесь еще одно очень удобное и простое правило, называемое *правилом Лопиталя*. В дальнейшем мы его также будем применять к исследованию функций. Оно может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема Лопиталя. **Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$) совместно стремятся к нулю или к беско-**

---

[1]) Лопиталь (1661—1704)—французский математик, современник Лейбница и Ньютона. Он написал первую книгу по дифференциальному исчислению—«Анализ бесконечно малых», изданную в 1696 г.

нечности. Если отношение их производных имеет предел, то отношение самих функций также имеет предел, равный пределу отношения производных, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} .$$

Доказывать эту теорему в общем виде мы не будем, а ограничимся лишь рассмотрением простейших случаев и примеров, разъясняющих суть дела.

Докажем прежде всего, что *если при $x \to x_0$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремятся к нулю и их производные в точке x_0 существуют, причем $\varphi'(x_0) \neq 0$, то*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} . \qquad (*)$$

Разумеется, здесь предполагается, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0 и знаменатель $\varphi(x)$ не обращается в нуль в точках этой окрестности, за исключением самой точки x_0.

Поскольку $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$, то

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}} .$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$ и используя теорему о пределе дроби, получим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}} ,$$

что в силу определения производной дает

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} .$$

Примеры.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{(\sin x)'_{x=0}}{1} = 1.$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{1+x}\right)_{x=0}}{1} = 1.$

Мы видим, как просто отыскиваются теперь знакомые нам пределы. Конечно, простота эта в данном случае только кажущаяся, ибо мы пользуемся дифференцированием функций $\sin x$ и $\ln(1+x)$, а оно само опирается на знание пределов отношений $\frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\ln(1+x)}{x}$ при $x \to 0$.

3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \frac{2\cdot 2-5}{2\cdot 2-3} = -1.$

4) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{5\cos 5\pi}{2\cos 2\pi} = -\frac{5}{2}.$

Может случиться, что при $x = x_0$ производная $\varphi'(x_0)$ равна нулю. Тогда, разумеется, формула (*) неприменима и приходится пользоваться правилом Лопиталя в его общей форме:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (**)$$

Доказательство формулы (**) уже более сложно, чем формулы (*). Оно будет опираться на теорему Коши (п. 58), и читатель, пропустивший при чтении эту теорему, может пропустить приводимое доказательство и прямо перейти к примерам.

Снова запишем отношение функций в виде

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}$$

и применим к правой части теорему Коши (при этом мы дополнительно должны предположить, что производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ существуют в окрестности точки x_0 и $\varphi'(x)$ не обращается в нуль нигде, за исключением самой точки x_0). Имеем

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

где ξ — точка, лежащая в интервале между x_0 и x. Если теперь $x \to x_0$, то и точка ξ, заключенная между x_0 и x, будет стремиться к точке x_0. Так как по условию теоремы предел отношения производных существует, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Заменяя теперь переменную ξ переменной x, мы и получаем формулу (**).

Если заранее не оговорить существование предела отношения производных, то формула (**) может не иметь места, хотя предел отношения самих функций может существовать (примеры этого приведены ниже). Дело в том, что из существования предела $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при произвольном стремлении x к x_0 следует, конечно, существование предела $\lim\limits_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, однако обратное неверно, так как точка ξ может принимать только некоторые избранные значения. Это аналогично тому, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует, в то время как для $x = \frac{1}{\pi n}$ предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sin\frac{1}{\left(\frac{1}{\pi n}\right)} = \lim\limits_{n \to \infty} \sin \pi n = 0.$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}$.

Здесь производные числителя и знаменателя в свою очередь стремятся к нулю. Применяя правило Лопиталя повторно, а в случае необходимости и далее, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-x\sin x}{\cos x}=3.$$

Заметим, что формула (**) остается справедливой и тогда, когда отношение производных стремится к бесконечности; тогда и отношение самих функций тоже стремится к бесконечности.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\infty$.

При повторном применении правила Лопиталя рекомендуется сначала произвести все возможные упрощения, например сократить общие множители и использовать уже знакомые пределы.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x-\arcsin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1-x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{(1+\cos x+\cos^2 x)(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Ясно, что предел второго множителя равен $^1/_3$; продолжая применять правило Лопиталя к первому множителю, получим

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-2x}{\sin x}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2\right)=-1.$$

Докажем, что формула (**) остается справедливой при $x\to\infty$, предполагая, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы для достаточно больших $|x|$. Полагая $x=\dfrac{1}{z}$, придем к рассмотренному случаю, так как если $x\to\infty$, то $z\to 0$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)};$$

сокращая на $\left(-\frac{1}{z^2}\right)$ и заменяя $\frac{1}{z}$ снова на x, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Отметим, что правило применимо во всех случаях стремления x к бесконечности, т. е. при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ и $x\to\infty$ (см. п. 25).

Если при $x\to x_0$ (или при $x\to\infty$) обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ совместно стремятся к бесконечности, то формула (**) также остается справедливой. Доказательство более сложно, и мы его спускаем.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0,\ n>0.$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^n}{n!}=\infty,$

если n — целое и положительное число и $a>1$. Заметим, кстати, что рассматриваемый предел равен ∞ при любом n, если $a>1$.

Примеры 8) и 9) показывают, что при $x\to+\infty$ логарифмическая функция $\ln x$ возрастает медленнее, а показательная функция a^x быстрее, чем любая степенная функция x^n (при положительном n).

Приведем пример, когда отношение функций имеет предел, а отношение их производных не стремится ни к какому пределу. Так,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

но вместе с тем

$$\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\frac{1+\cos x}{1}$$

при $x\to\infty$ постоянно колеблется между 0 и 2 и, значит, не имеет предела.

Этот пример не противоречит правилу Лопиталя — просто к нему правило неприложимо.

II. Другие случаи. Первые рассмотренные нами примеры отыскания предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, когда и $f(x)\to0$ и $\varphi(x)\to0$, можно условно обозначить как случаи $\frac{0}{0}$; примеры же, когда и $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to\infty$, — как случаи $\frac{\infty}{\infty}$.

С помощью правила Лопиталя очень часто удается находить пределы функций и в других случаях, отличных от случаев $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Мы рассмотрим случаи: 1) $0\cdot\infty$, 2) $\infty-\infty$, 3) 1^∞, 4) ∞^0, 5) 0^0. Разумеется, эти обозначения ($0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^∞; ∞^0; 0^0, как и $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$) могут служить исключительно для наиболее краткого указания определенного случая при отыскании предела функции. Именно, они указывают, что при заданном изменении независимой переменной x ($x \longrightarrow x_0$ или $x \longrightarrow \infty$) функция представляется выражением, являющимся соответственно:

1) произведением функции, стремящейся к нулю, и функции, стремящейся к бесконечности; 2) разностью двух функций, стремящихся к положительной бесконечности; 3) степенью, основание которой стремится к 1, а показатель — к бесконечности; 4) степенью, основание которой стремится к бесконечности, а показатель — к нулю; 5) степенью, и основание и показатель которой стремятся к нулю[1]).

Нет нужды подробно описывать те приемы, которые позволят каждый из указанных случаев привести к основным случаям: $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. На разбираемых ниже примерах читатель ознакомится с этими приемами.

Заметим только, что в случаях 3), 4), 5) функция предварительно логарифмируется и, значит, сначала отыскивается предел не заданной функции, а ее логарифма, а затем уже по пределу логарифма находится предел функции (что допустимо вследствие непрерывности логарифмической функции).

Примеры. 1) $A=\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x$, $n>0$; случай $0\cdot\infty$. Преобразуя к виду

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}},$$

придем к случаю $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=0.$$

---

[1]) В некоторых учебных руководствах сохраняется традиция называть $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^∞; ∞^0; 0^0 неопределенными выражениями. Нахождение пределов этих выражений называют раскрытием неопределенностей, почему и правило Лопиталя иначе называют **правилом для раскрытия неопределенностей**.

2) $A=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; случай $\infty-\infty$. Преобразуя к виду

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x},$$

придем к случаю $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

3) $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; случай 1^∞. Рассматриваем предел $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, который запишем в виде $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$; это — случай $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$A_1=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

Но $A_1=\ln\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\ln A$, поэтому $A=e^{A_1}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

4) $A=\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; случай ∞^0. Рассматриваем предел $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\ln(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$, или, иначе, $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\ln x}$; это — случай $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя:

$$A_1=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\operatorname{ctg} x\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos x\sin x}=-1,$$

откуда $A=e^{A_1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

5) $A=\lim\limits_{x\to 0}x^x$; случай 0^0. Рассматриваем предел $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\ln x^x$, или, иначе,

$$A_1=\lim_{x\to 0}x\ln x=0$$

(см. пример 1 при $n=1$), откуда $A=e^{A_1}=e^0=1$.

64. Асимптоты линий. Когда мы хотим изучить функцию при стремлении аргумента к бесконечности, нам приходится иметь дело с частями графика, уходящими в бесконечность, так называемыми *бесконечными ветвями графика*. С бесконечными же ветвями нам приходится иметь дело и тогда, когда мы рассматриваем функцию вблизи точек ее бесконечного разрыва (см. п. **33**). Знание бесконечных ветвей функции необходимо для того, чтобы правильно представить себе форму всего графика и, следовательно, характер изменения функции во всей области ее определения.

Подойдем к вопросу с геометрической точки зрения и введем в связи с этим общее определение асимптоты линии (с частными видами асимптот читатель уже встречался ранее).

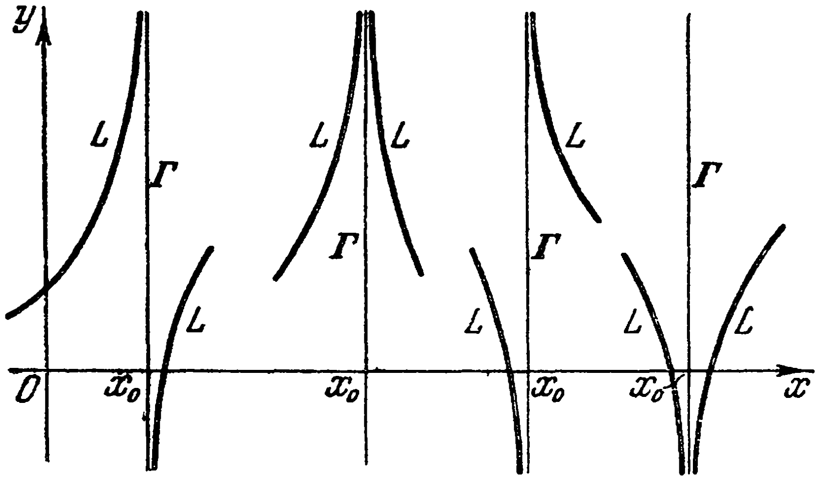

Рис. 84.

Определение. **Прямая линия Г называется *асимптотой* линии L, если расстояние точки линии L от прямой Г стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.**

Следует различать случаи вертикальной и наклонной асимптот.

1) Пусть линия $y=f(x)$ имеет вертикальную асимптоту. Уравнение такой асимптоты будет $x=x_0$, а поэтому, согласно определению асимптоты, обязательно $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$; обратно: если точка x_0 есть точка бесконечного разрыва функции $f(x)$, то прямая $x=x_0$ служит асимптотой линии $y=f(x)$.

Итак, **если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то линия $y=f(x)$ имеет асимптоту $x=x_0$.**

Взаимное расположение бесконечной ветви линии и ее вертикальной асимптоты $x=x_0$ обнаруживается исследованием знака бесконечности ($\pm\infty$), к которой стремится $f(x)$, когда x стремится к x_0, оставаясь меньше x_0, т. е. слева, или оставаясь больше x_0, т. е. справа. Это ясно из рис. 84, где показаны возможные случаи. Может также быть, что график приближается к асимптоте только с одной ее стороны. Например, это будет для функции $y=\ln x$.

2) Пусть линия $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту. Уравнением такой асимптоты будет $y=ax+b$. Согласно определению асимптоты расстояние MN_1 точки M на линии L от асимптоты Г (рис. 85) стремится к нулю при $x \to \infty$. Удобнее вместо расстояния MN_1 рассматривать расстояние MN, т. е. разность ординат точки M и точки N, лежащей на прямой Г и имеющей ту же абсциссу, что и точка M. Из рис. 85 имеем

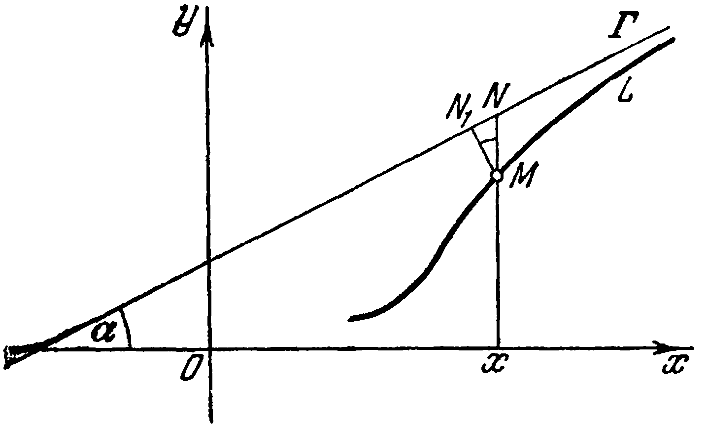

Рис. 85.

$$MN = \frac{MN_1}{\cos\alpha}, \quad MN_1 = MN\cos\alpha,$$

где α — угол между асимптотой и осью Ox; поэтому расстояния MN_1 и MN стремятся к нулю одновременно.

Так как ордината точки M равна значению функции $f(x)$, а ордината точки N — значению линейной функции $ax+b$, то

$$MN = |f(x)-(ax+b)|.$$

Это значит, что *если*

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0,$$

то линия $y=f(x)$ *имеет асимптоту* $y=ax+b$; при этом говорят, что *функция* $f(x)$ *асимптотически стремится к функции* $ax+b$.

Таким образом, вопрос о существовании и нахождении наклонной асимптоты линии $y=f(x)$ сводится к вопросу о существовании и отыскании таких чисел a и b, что

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0. \qquad (*)$$

Если это имеет место, то

$$f(x)=ax+b+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — величина бесконечно малая при $x\to\infty$. Разделим обе части равенства на x и перейдем к пределу при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right).$$

Так как $\frac{b}{x} \longrightarrow 0$ и $\frac{\alpha(x)}{x} \longrightarrow 0$, то

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a. \qquad (**)$$

Из основного условия (*) находим теперь, что

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b. \qquad (***)$$

Ясно, что верно и обратное: если пределы (**) и (***) существуют и числа a и b найдены, то основное условие соблюдается; таким образом,

Если $\frac{f(x)}{x}$ при $x \longrightarrow \infty$ стремится к конечному пределу a и если $f(x) - ax$ при $x \longrightarrow \infty$ стремится к конечному пределу b, то линия $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = ax + b$.

В частности, если функция $f(x)$ стремится к конечному пределу при $x \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b,$$

то, очевидно, $a = 0$ и линия $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту, параллельную оси Ox, именно $y = b$. Если и a и b равны нулю, то асимптотой служит сама ось Ox.

Если хотя бы один из указанных пределов не существует, то линия $y = f(x)$ наклонных асимптот не имеет.

Например, для линии $y = x + \ln x$ имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1, \quad \text{т. е.} \quad a = 1,$$

но

$$\lim_{x \to \infty} (x + \ln x - 1 \cdot x) = \infty$$

и значит, асимптоты в данном случае не существует.

Асимптотическое изменение функции может быть различным при стремлении x к положительной или к отрицательной бесконечности, и поэтому следует раздельно рассматривать случаи $x \longrightarrow +\infty$ и $x \longrightarrow -\infty$.

Если существует асимптота в первом случае, то мы будем называть ее *правосторонней*, а если во втором, то *левосторонней*. Может случиться, что и при $x \longrightarrow +\infty$, и при $x \longrightarrow -\infty$ пределы (**) и (***) одинаковы. Это означает, что правосторонняя и левосторонняя асимптоты являются частями одной и той же прямой.

Вслед за тем как найдена асимптота $y = ax + b$, исследованием знака выражения $\alpha(x) = f(x) - ax - b$ при $x \longrightarrow \infty$ можно установить взаимное расположение бесконечной ветви линии и ее асимптоты. Ветвь линии находится, начиная с некоторого места, либо над асимптотой ($\alpha > 0$), либо под ней ($\alpha < 0$), либо неограниченное число раз пересекает ее (α бесконечное число раз меняет знак).

Примеры. 1) Пусть $y=\frac{x^3}{x^2-1}$. График этой функции имеет две вертикальные асимптоты: $x=-1$ и $x=1$. Чтобы найти наклонную асимптоту, ищем пределы

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=1, \quad b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Итак, наклонной асимптотой является биссектриса координатного угла $y=x$.

Вообще можно заметить, что если функция дробно-рациональная, то при отыскании a и b можно сразу рассматривать произвольное стремление x к бесконечности (см. пример 5 в п. **29**).

2) Пусть $y=x^n e^{-x}$ ($n>0$). График не имеет вертикальных асимптот. Из примера 9 п. **63**, I следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x}=0$ и, следовательно, $a=0$ и $b=0$, т. е. правосторонней асимптотой является положительная полуось абсцисс. Левосторонней асимптоты график не имеет, так как $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^n e^{-x}}{x}=\infty$. Наоборот, функция $y=x^n e^x$ не имеет правосторонней асимптоты, а левосторонней является отрицательная полуось абсцисс.

Исследование функции $y=\sqrt[3]{x^2}e^x$, рассмотренной нами в п. **61**, III и в п. **62**, V, можно теперь завершить во всей области ее существования — на всей оси Ox. Так как отрицательная полуось Ox является левосторонней асимптотой графика функции, а правосторонних асимптот он не имеет, то окончательный вид графика функции будет таким, как он изображен на рис. 83.

3) Линия $y=\frac{\sin x}{x}$ имеет асимптоту $y=0$, которую она пересекает бесконечное число раз. Советуем читателю построить график этой линии.

4) Найти асимптоты линии $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$. Так как $\frac{y}{x}=\mathrm{arctg}\,x$ при $x\to+\infty$ стремится к $\frac{\pi}{2}$, а при $x\to-\infty$ стремится к $-\frac{\pi}{2}$, то ищем пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\pi}{2}x\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(y+\frac{\pi}{2}x\right)$.

По правилу Лопиталя находим

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(y\mp\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,x\mp\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1.$$

Значит, имеем две асимптоты: правостороннюю $y=\frac{\pi}{2}x-1$ и левостороннюю $y=-\frac{\pi}{2}x-1$. Чтобы правильно представить себе вид всей линии, рассмотрим первую и вторую производные от данной функции.

Найдем первую производную

$$y'=\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+x^2}.$$

При $x>0$ оба слагаемых положительны и, следовательно, $y'>0$, функция в интервале $(0, \infty)$ возрастает. При $x<0$ оба слагаемых отрицательны и $y'<0$, функция в интервале $(-\infty, 0)$ убывает (это следует также из четности данной функции). Таким образом, точка $x=0$ является точкой минимума. Значение функции в этой точке $y_{x=0}=0$.

Вторая производная

$$y''=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{(1+x^2)^2}$$

все время положительна; это значит, что кривая всюду вогнута. Пользуясь приведенными соображениями, можно схематично начертить график функции $y=x\operatorname{arctg} x$. Он изображен на рис. 86 [1]).

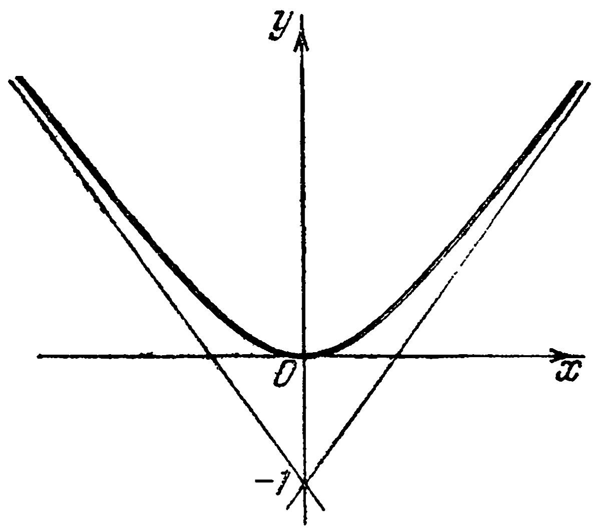

Рис. 86.

При достаточно больших $|x|$ функцию $x\operatorname{arctg} x$ можно считать линейной, т. е.

$$x\operatorname{arctg} x\approx\frac{\pi}{2}x-1 \quad \text{при } x>0,$$

$$x\operatorname{arctg} x\approx-\frac{\pi}{2}x-1 \quad \text{при } x<0.$$

65. Общая схема исследования функций. Теперь мы можем составить схему, по которой удобно производить исследование функций (и линий).

Пусть рассматривается функция $y=f(x)$. Предлагаемая схема состоит из четырех разделов, в которых устанавливаются:

I. **1) Область определения функции.**

2) Точки разрыва и интервалы непрерывности.

3) Поведение функции в окрестностях точек разрыва; вертикальные асимптоты.

---

[1]) Предоставляем читателю проверить, что благодаря постоянной вогнутости линия не может пересекать ни одну из асимптот.

4) Точки пересечения графика с осями координат.

5) Симметрия графика (четность или нечетность функции).

6) Периодичность графика.

II. Интервалы монотонности функции; точки экстремума и экстремальные значения.

III. Интервалы выпуклости и вогнутости; точки перегиба.

IV. Поведение функции в бесконечности. Наклонные (в частности, горизонтальные) асимптоты.

В первом разделе дается в общих чертах описание особенностей функции и ее графика. При этом нельзя забывать о существе той конкретной задачи, которая привела к исследуемой функции. Может, например, оказаться, что достаточно ограничиться более узким интервалом изменения независимой переменной, чем область определения функции.

Выполнение четвертого раздела иногда удобно производить вместе с первым, когда выясняется общая картина поведения функции.

Можно, конечно, ограничиться словесным описанием поведения заданной функции, но правильное, учитывающее все ее особенности, графическое изображение является очень экономным и выразительным средством для наглядного представления изучаемой функциональной зависимости. Поэтому *выполнение первых четырех разделов следует сопровождать постепенным построением графика функции.* При этом прежде всего нужно на оси Ox выделить характерные точки, к которым относятся: точки разрыва, нули, точки экстремума, абсциссы точек перегиба. На плоскости Oxy отмечаются точки графика, соответствующие этим выделенным значениям аргумента.

В промежутках между характерными точками функция не меняет резко своего поведения, ведет себя плавно, но для уточнения в иных случаях следует брать в этих промежутках обыкновенные точки и также вычислять соответствующие им значения функции, получая новые точки графика. Чем больше таких точек, тем точнее линия, проведенная через все построенные точки, будет выражать график функции.

Пример. Исследуем функцию

$$y=\frac{x^2}{1+x}.$$

I. Функция определена и непрерывна на всей оси Ox, за исключением точки $x=-1$, где она терпит бесконечный разрыв. Следовательно, прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой, причем

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} y=-\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} y=+\infty.$$

Нулем функции служит только точка $x=0$.

II. Имеем

$$y' = \frac{x^2+2x}{(1+x)^2} = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}.$$

Производная обращается в нуль при $x=0$ и $x=-2$; в интервале $(-\infty, -2)$ она положительна, в интервалах $(-2, -1)$ и $(-1, 0)$ отрицательна (в точке $x=-1$ она не определена) и в интервале $(0, \infty)$ снова положительна. Значит, функция в первом интервале возрастает, во втором и третьем убывает, в четвертом возрастает; $x=-2$ является точкой максимума, причем максимальное значение функции равно -4, а $x=0$ является точкой минимума, причем минимальное значение функции равно 0.

III. Имеем

$$y'' = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Вторая производная в нуль нигде не обращается, но при переходе x через точку $x=-1$ меняет свой знак с минуса на плюс. Таким образом, в интервале $(-\infty, -1)$ вторая производная отрицательна, в интервале $(-1, \infty)$ положительна. В первом интервале график функции выпуклый, во втором вогнутый.

IV. Так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

и

$$\lim_{x\to\infty} (y - 1\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x}{1+x}\right) = -1,$$

то существует наклонная асимптота $y=x-1$. Вследствие того что разность

$$\alpha(x) = \frac{x^2}{1+x} - (x-1) = \frac{1}{1+x}$$

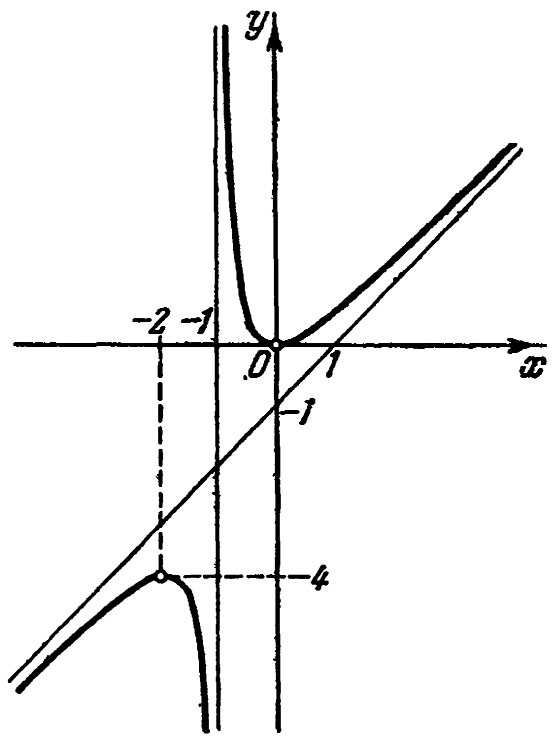

Рис. 87.

положительна при $x>-1$ и отрицательна при $x<-1$, график справа от прямой $x=-1$ находится над асимптотой $y=x-1$, а слева от прямой $x=-1$ под асимптотой.

Приняв

$$y = \frac{x^2}{1+x} \approx x-1,$$

мы совершаем абсолютную ошибку $\alpha = \left|\frac{1}{1+x}\right|$ и относительную $\delta = \frac{1}{x^2}$; уже при $|x| > 10$ относительная ошибка меньше одного процента. Практически функцию $y = \frac{x^2}{1+x}$ при $|x| > 10$ можно считать линейной функцией $y = x - 1$, что, конечно, значительно упрощает ее использование.

Приняв во внимание полученные результаты, без труда построим график (рис. 87), дающий правильное представление о ходе изменения функции на всей оси Ox. Методами аналитической геометрии можно убедиться, что линия $y = \frac{x^2}{1+x}$ есть гипербола.

§ 4. Кривизна

66. Дифференциал длины дуги. Возьмем линию AB — график непрерывной функции $y = f(x)$ — и примем точку A за начало отсчета. Тогда длина дуги $\smile{AM}$ (рис. 88) будет являться функцией абсциссы x точки M; обозначим эту функцию $s(x)$:

$$\overset{\frown}{AM} = s(x).$$

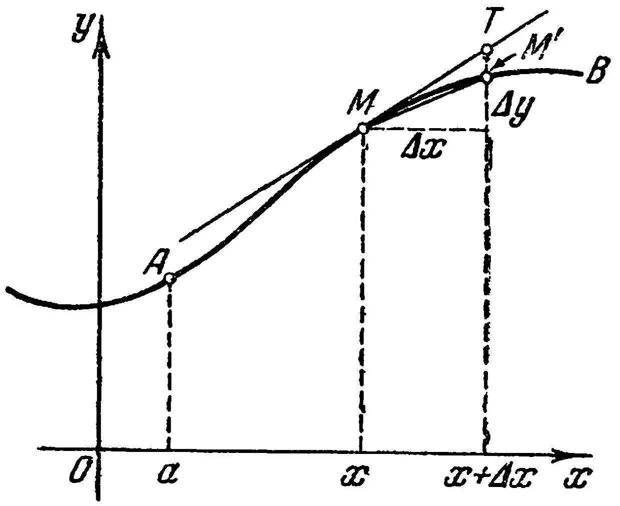

Рис. 88.

Фактическое отыскание длины дуги, т. е. функции $s(x)$ по заданному уравнению линии $f(x)$, мы отложим до главы VI. Пока же мы будем искать только дифференциал этой функции, который назовем *дифференциалом длины дуги*. Так как

$$ds = s'(x)\,dx,$$

то сначала найдем производную функции $s(x)$, т. е. предел отношения длины дуги $\overset{\frown}{MM'}$, соответствующей интервалу $[x, x+\Delta x]$, к Δx:

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Будем предполагать, что непрерывна не только сама функция $f(x)$, но и ее первая производная $f'(x)$; тогда на линии AB не будет ни угловых точек, ни точек возврата. Такие линии условимся называть *гладкими*. Примем без доказательства следующий геометрический факт: *предел отношения длины гладкой дуги к длине стягивающей ее хорды при стремлении длины дуги к нулю равен единице:* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{\smile}{MM'}}{\overline{MM'}} = 1$.

Применительно к окружности это свойство выражается первым замечательным пределом

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

На основании свойства эквивалентных бесконечно малых величин (см. п. **36,** II) заменим при отыскании предела (*) дугу $\overset{\smile}{MM'}$ эквивалентной ей хордой $\overline{MM'} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Тогда

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2},$$

откуда

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Внеся dx под знак радикала, получим простой, легко запоминающийся вид формулы для дифференциала длины дуги:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Из последнего выражения следует, что

Дифференциал длины дуги можно представить длиной соответствующего отрезка касательной к линии в начальной точке дуги (отрезок MT на рис. 88).

Отметим, что хотя и длина хорды $\overline{MM'}$, и длина отрезка касательной MT эквивалентны бесконечно малой дуге $\overset{\smile}{MM'}$, но отрезок MT пропорционален dx, а отрезок MM' не является величиной, пропорциональной dx, в силу чего дифференциалом длины дуги и является длина отрезка касательной к дуге, а не длина стягивающей ее хорды.

67. Кривизна. I. Первая производная $f'(x)$ функции $f(x)$ дает нам простейшую характеристику линии $y = f(x)$, а именно ее направление. Оказывается, что вторая производная $f''(x)$ тесно связана с другой количественной характеристикой этой линии, с так называемой кривизной, устанавливающей меру изогнутости, или искривленности, линии.

Предполагается, что рассматриваемая линия гладкая.

Назовем *углом смежности дуги линии угол* φ *между касательными в ее конечных точках* M_0 и M_1 (рис. 89).

Угол смежности φ в некоторой степени дает представление об изогнутости дуги M_0M_1, так как он является тем углом, на который поворачивается касательная при перемещении точки касания от начальной точки дуги M_0 до конечной M_1; чем угол смежности больше, тем, очевидно, больше изогнутость дуги. Но один и тот же угол смежности могут иметь две дуги с явно различной изогнутостью.

Так, на рис. 89, *I* этот угол приходится на бо́льшую дугу (изогнутость меньше), а на рис. 89, *II* — на меньшую (изогнутость больше). В силу этого для характеристики изогнутости угол смежности дуги рассчитывается на единицу ее длины.

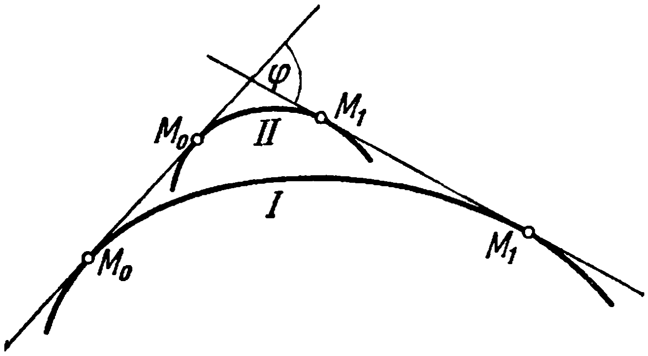

Рис. 89.

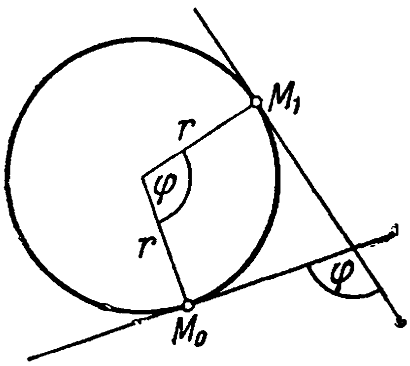

Рис. 90.

Определение. **Отношение угла смежности дуги к ее длине называется *средней кривизной* дуги:**

$$K_{\text{ср}} = \frac{\varphi}{\smile{M_0M_1}}.$$

На отдельных участках той же дуги средняя кривизна может быть иной, чем та, которая соответствует всей дуге. Чтобы избежать этой неопределенности, мы введем кривизну в точке M_0, основываясь на том, что чем меньше дуга M_0M_1, тем лучше средняя кривизна характеризует изогнутость линии вблизи точки M_0.

Определение. ***Кривизной*** K **линии в ее точке M_0 называется предел, к которому стремится средняя кривизна $K_{\text{ср}}$ дуги $\smile{M_0M_1}$ линии при стремлении конечной точки дуги M_1 к ее начальной точке M_0:**

$$K = \lim_{M_1 \to M_0} K_{\text{ср}} = \lim_{M_1 \to M_0} \frac{\varphi}{\smile{M_0M_1}}.$$

В частности, для окружности радиуса r имеем (рис. 90)

$$K_{\text{ср}} = \frac{\varphi}{\smile{M_0M_1}} = \frac{\varphi}{r\varphi} = \frac{1}{r};$$

как видим, средняя кривизна окружности — величина постоянная, и значит, ее кривизна в любой точке также постоянна и обратна радиусу. Это вполне согласуется с нашим непосредственным представлением о характере изогнутости окружности.

Найдем теперь выражение для кривизны линии, заданной уравнением $y=f(x)$ в системе декартовых координат; мы предполагаем, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема при рассматриваемых значениях x. Возьмем на линии точки M и M' с абсциссами соответственно x и $x+\Delta x$. Далее, обозначим через α и $\alpha+\Delta\alpha$ углы, образованные с осью Ox касательными в точках M и M', и через Δs — длину дуги $\overset{\frown}{MM'}$. Так как угол смежности φ дуги $\overset{\frown}{MM'}$ равен $|\Delta\alpha|$ (рис. 91)[1]), то

$$K_{\text{ср}}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}\right|.$$

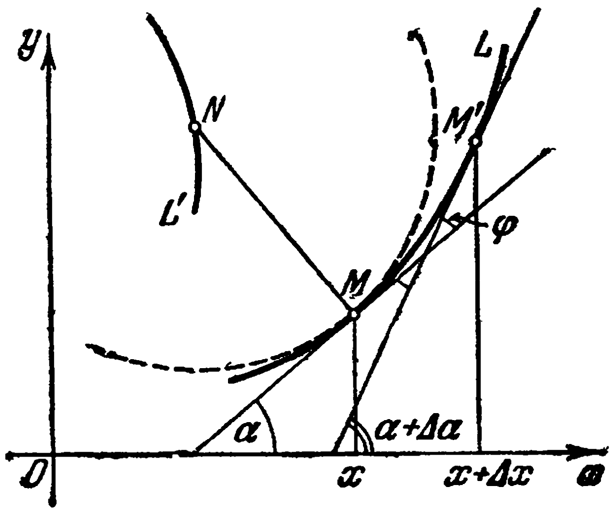

Рис. 91.

При $M'\to M$ имеем $\Delta x\to 0$, и искомая кривизна равна

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}K_{\text{ср}}=\left|\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}}\right|=\left|\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\sqrt{1+y'^2}}\right|$$

(см. п. **66**). Из равенства $\operatorname{tg}\alpha=y'$, т. е. $\alpha=\operatorname{arctg}y'$, находим

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{y''}{1+y'^2},$$

и значит,

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}\right|=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|. \qquad (*)$$

По формуле $(*)$ кривизна определяется как функция абсциссы точки линии. Если уравнение линии дано в параметрической форме: $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, то (см. п. **54**, III)

$$y'=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)},\quad y''=\frac{f''(t)\varphi'(t)-f'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

и

$$K=\left|\frac{f''(t)\varphi'(t)-f'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'^2(t)+f'^2(t)]^{3/2}}\right|$$

или, в сокращенной записи,

$$K=\left|\frac{y''x'-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\right|. \qquad (**)$$

---

[1]) Для вогнутой дуги $\Delta\alpha>0$, а для выпуклой $\Delta\alpha<0$. Поэтому мы и пишем, что $\varphi=|\Delta\alpha|$.

Здесь кривизна является функцией параметра t, соответствующего рассматриваемой точке линии. При $t=x$ формула (**) превращается в формулу (*).

Только окружность (и прямая) имеют постоянную кривизну; кривизна прямой линии, как видно, например, из формулы (*) равна нулю, что опять-таки вполне согласуется с нашим непосредственным представлением о неизогнутости прямой линии. У других линий кривизна вообще меняется от точки к точке.

Пример. Найдем кривизну параболы $y=x^2$ в любой ее точке. Имеем: $y'=2x$ и $y''=2$. Поэтому $K=\frac{2}{(\sqrt{1+4x^2})^3}$; в частности, кривизна параболы в ее вершине равна 2.

II. Радиус, центр и круг кривизны. Эволюта и эвольвента. Проведем в точке M (рис. 91) нормаль к линии L (в сторону ее вогнутости) и отложим на этой нормали от точки M отрезок $MN=\rho$, по величине обратный кривизне K:

$$\rho=\frac{1}{K}.$$

Определение. **Отрезок MN называется *радиусом кривизны*, точка N — *центром кривизны*, а круг (и окружность) с центром в точке N и радиусом MN — *кругом* (и *окружностью*) *кривизны* линии в ее точке M.**

Окружность кривизны имеет, очевидно, ту же кривизну, что и данная линия в точке M.

Для радиуса кривизны имеем формулу

$$\rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|.$$

В качестве меры изогнутости линии можно вместо кривизны использовать радиус кривизны, причем линия тем больше изогнута в данной точке, чем меньше радиус кривизны. Заметим, что радиус кривизны прямой линии в любой ее точке условно считается бесконечным, так же как условно считают прямую линию окружностью бесконечного радиуса. Роль радиуса кривизны линии в механике при изучении криволинейного движения точки будет объяснена позднее, в п. 71.

Замена бесконечно малой дуги линии вблизи данной точки соответствующей дугой окружности кривизны сопровождается, как можно показать, бесконечно малой ошибкой более высокого порядка, чем при замене ее соответствующим отрезком касательной. Следовательно, малую дугу линии мы можем считать дугой окружности кривизны с бо́льшим правом (т. е. с меньшей ошибкой), чем отрезком касательной.

Каждой точке M на линии L соответствует точка N—центр кривизны L в точке M.

Определение. **Геометрическое место центров кривизны линии L называется ее *эволютой* L', а сама линия L относительно своей эволюты L' называется *эвольвентой*.**

Укажем без доказательств приемы приближенных построений эволюты по эвольвенте и эвольвенты по эволюте.

1) Каждая нормаль к эвольвенте является касательной к эволюте; эволюта как бы огибает все семейство нормалей эвольвенты. Поэтому, если построить достаточно большое число нормалей к эвольвенте L, то огибающая их линия и будет эволютой L' (рис. 92).

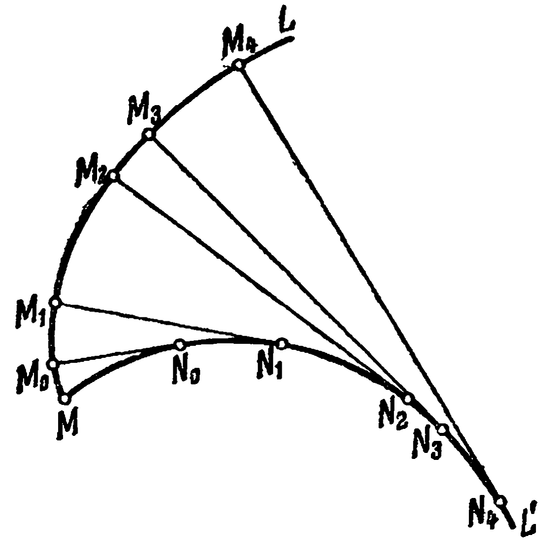

Рис. 92.

2) Если гибкую нерастяжимую нить, обтягивающую заданную выпуклую линию L' (эволюту) развертывать, сохраняя постоянно натянутой, то каждая ее точка опишет эвольвенту L (рис. 92). Поэтому эвольвенту называют еще разверткой. Эта операция развертывания нити равносильна качению без скольжения прямой линии по данной линии L'; каждая точка такой прямой описывает эвольвенту L линии L'. Отсюда ясно, что данная эволюта L' имеет бесконечное число эвольвент L. В то же время любая данная линия, рассматриваемая как эвольвента, имеет только одну эволюту.

§ 5. Пространственные линии. Векторная функция скалярного аргумента[1]

68. Пространственные линии. В п. **46** мы видели, что линия, принадлежащая плоскости Oxy, может быть задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$. Точно так же параметрическими уравнениями могут быть заданы и пространственные линии:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \qquad (*)$$

С изменением параметра t точка $M(x, y, z)$, координаты которой находятся по формулам (*), опишет некоторую линию.

---

[1]) Предполагается, что читатель уже знаком с векторной алгеброй и аналитической геометрией в пространстве.

Если все три уравнения (*) линейны:

$$x=mt+a, \quad y=nt+b, \quad z=pt+c,$$

то получаются известные из аналитической геометрии параметрические уравнения прямой. Исключая параметр t, получим ее канонические уравнения

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Касательная к пространственной линии определяется так же, как и для плоской линии, т. е. как *предельное положение секущей, проходящей через данную точку M и близкую к ней точку M', при условии, что точка M' стремится к данной точке M* (см. п. **40**).

Выведем уравнения касательной к линии, заданной параметрическими уравнениями (*), в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, соответствующей значению параметра t_0.

Уравнения секущей прямой, проходящей через точки

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \text{ и } M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z),$$

будут

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

Деля все знаменатели на соответствующее приращение Δt параметра и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим искомые уравнения

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}, \qquad (**)$$

где $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$. При этом мы считаем, что хотя бы одна из производных $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ не равна нулю. В противном случае точка (x_0, y_0, z_0) называется *особой*; такие точки линии мы не рассматриваем.

Прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, так же как и в плоском случае, называется *нормалью* к линии в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Линия в каждой своей точке имеет, очевидно, бесконечно много нормалей; все они лежат в одной плоскости, перпендикулярной к касательной и проходящей через точку касания.

Определение. **Плоскость, перпендикулярная к касательной прямой в точке касания линии, называется *нормальной плоскостью* к линии в данной точке.**

Согласно известному условию из аналитической геометрии уравнением нормальной плоскости как плоскости, перпендикулярной к прямой (**) и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, будет

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

Пример. Пусть линия задана уравнениями

$$x=t^2-1, \quad y=t^2+2, \quad z=3t-1.$$

Составим уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к этой линии в точке M_0 (0, 3, 2), соответствующей значению параметра $t=1$. Так как $x'_{t=1}=2$, $y'_{t=1}=2$, $z'_{t=1}=3$, то уравнения касательной будут

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3},$$

а нормальной плоскости

$$2x+2y+3z-12=0.$$

Для дальнейшего нам понадобится формула для дифференциала длины дуги пространственной линии, заданной уравнениями (*); она совершенно аналогична соответствующей формуле для плоской кривой (см. п. **66**). Как и раньше, будем рассматривать гладкие линии; это значит, что функции (*) имеют непрерывные производные. Для таких линий отношение длины Δs дуги, заключенной между точками $M(x, y, z)$ и $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, к длине хорды, соединяющей эти точки, стремится к единице при стремлении точки M' к точке M. Длина хорды равна $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$; поэтому

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} \to 1.$$

Деля числитель и знаменатель на приращение параметра Δt, соответствующее приращениям координат Δx, Δy, Δz, получим

$$\frac{\frac{\Delta s}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}} \to 1.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, находим

$$\frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=1,$$

т. е.

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt \quad \text{или} \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Как показано выше, направляющий вектор **T** касательной к линии в точке M имеет проекции $\{x', y', z'\}$, где для краткости x' обозначает $x'(t)$ и т. д. Направляющие косинусы вектора **T** равны

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Воспользовавшись формулой для дифференциала длины дуги, можно формулы для направляющих косинусов переписать в виде

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

69. Винтовая линия. В качестве примера рассмотрим пространственную линию, определенную следующими кинематическими условиями: точка M движется с постоянной линейной скоростью v_1 по окружности радиуса a, а сама окружность одновременно поступательно перемещается в направлении, перпендикулярном к ее плоскости с постоянной скоростью v_2. При этом точка M опишет линию, целиком лежащую на круглом цилиндре (рис. 93); она называется *цилиндрической винтовой линией*. В том случае, когда точка M движется по окружности против движения часовой стрелки, если смотреть со стороны, куда направлено поступательное движение, винтовая линия называется *правой* или просто *правым винтом* (как на рис. 93). В противном случае она называется *левой винтовой линией* или *левым винтом*.

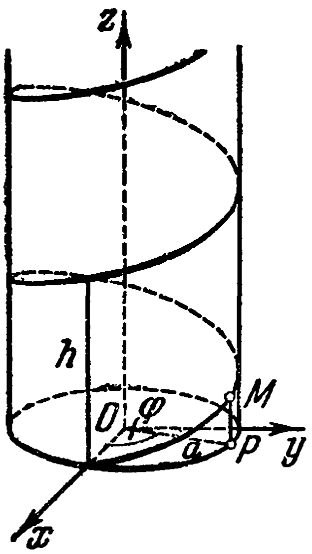

Рис. 93.

Выведем уравнения винтовой линии в предположении, что осью цилиндра служит ось Oz и поступательное движение происходит в положительном направлении оси Oz, причем в момент $t=0$ точка M находится в точке $(a, 0, 0)$.

Угловая скорость вращательного движения точки M равна $\frac{v_1}{a}$, и поэтому ее абсцисса и ордината в момент t будут равны $x = a\cos\frac{v_1}{a}t$, $y = a\sin\frac{v_1}{a}t$. Что касается аппликаты z, то она равна высоте, на которую поднялась точка к моменту t, т. е. $z = v_2 t$. Если в качестве параметра взять не время t, а полярный угол φ точки P — проекции точки M на плоскость Oxy $\left(\varphi=\frac{v_1}{a}t\right)$, то уравнения винтовой линии запишутся так:

$$x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=c\varphi,\qquad \text{где } c=\frac{v_2}{v_1}a.$$

Это — уравнения правого винта; уравнения левого винта отличаются от них только знаком перед коэффициентом c.

После того как угол φ изменится на 2π, точка M вернется на ту же образующую цилиндра, поднявшись при этом на высоту h, равную $2\pi c$. Эта величина называется *шагом винта*. Внося шаг h в уравнения, получим практически удобный вид параметрических уравнений винтовой линии:

$$x=a\cos\varphi,\qquad y=a\sin\varphi,\qquad z=\frac{h}{2\pi}\varphi.$$

Здесь оба коэффициента уравнения (a и h) имеют простой геометрический смысл.

Винтовая линия обладает рядом интересных свойств. Отметим два из них:

1) Напишем уравнения касательной к винтовой линии в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{-a\sin\varphi_0}=\frac{y-y_0}{a\cos\varphi_0}=\frac{z-z_0}{\frac{h}{2\pi}},$$

где φ_0 — значение угла, соответствующее точке M_0. Отсюда

$$\cos\gamma=\frac{h}{2\pi\sqrt{a^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}=\frac{h}{\sqrt{(2\pi a)^2+h^2}},$$

т. е. косинус угла γ, образованного касательной с осью Oz, а значит, и сам угол γ остаются постоянными во всех точках винтовой линии. Но образующие цилиндра параллельны оси Oz, поэтому ***винтовая линия пересекает образующие цилиндра под постоянным углом,*** зависящим только от радиуса цилиндра и шага винта.

2) Цилиндр, на котором начерчена винтовая линия, развернем на плоскость вокруг какой-нибудь образующей и ограничимся отрезком цилиндра, равным по высоте шагу винта (на нем находится один виток винтовой линии) (рис. 94). Основание цилиндра и сечения цилиндра, параллельные основанию, перейдут в параллельные отрезки длиной $2\pi a$, а образующие — в другие отрезки, перпендикулярные к первым, длиной h. Указанное развертывание не исказит ни углов между линиями, проведенными

на цилиндре, ни длин линий. Вследствие этого винтовая линия должна развернуться в такую линию, которая пересекает параллельные отрезки в одной плоскости под одним и тем же углом. Но такой линией является только прямая. Итак, винтовая линия при нашем построении перейдет в диагональ прямоугольника со сторонами $2\pi a$ и h. Рис. 94 наглядно демонстрирует найденную

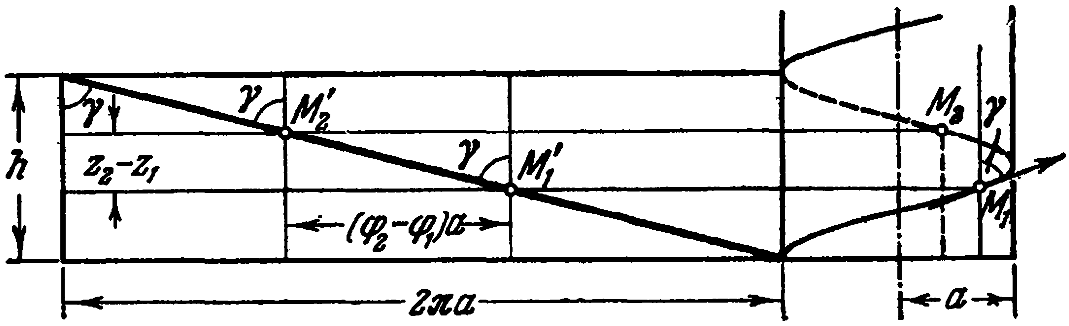

Рис. 94.

выше величину косинуса угла γ пересечения винтовой линии с образующей цилиндра.

Возьмем какие-нибудь две точки винтовой линии M_1 и M_2. Расстояние между ними, измеренное по винтовой линии, равно отрезку прямой $M_1'M_2'$, в который перейдет дуга винтовой линии, заключенная между точками M_1 и M_2. Отсюда заключаем, что *винтовая линия дает кратчайшее расстояние между двумя точками цилиндра.*

Линия на поверхности, проходящая через две заданные точки и дающая кратчайшее расстояние между ними, называется *геодезической*. Так, геодезической линией на плоскости служит прямая, на сфере — окружность большого круга. На цилиндре геодезической линией оказывается винтовая линия.

70. Векторная функция скалярного аргумента.

I. Векторная функция. Годограф. Как известно из векторной алгебры, разложение любого вектора $\mathbf{A}$, проекции которого на оси координат равны x, y и z, имеет вид

$$\mathbf{A}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат. Если проекции x, y, z — постоянные числа (только такой случай и рассматривается в векторной алгебре), то и вектор $\mathbf{A}$ называется *постоянным*. Пусть теперь проекции вектора являются функциями параметра t, изменяющегося в некотором интервале:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

Тогда и сам вектор называется *переменным*; при этом каждому значению параметра t будет соответствовать определенный вектор

$$\mathbf{A}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k}.$$

Определение. **Если каждому значению параметра t соответствует определенный вектор A(t), то A(t) называется *векторной функцией скалярного аргумента*.**

Как и в векторной алгебре, мы рассматриваем свободные векторы, т. е. такие векторы, которые считаются равными, если они имеют равные модули и одинаковые направления, или, иначе говоря, равные проекции на оси координат.

Мы будем представлять себе вектор $\mathbf{A}(t)$ исходящим из начала координат; тогда при изменении t конец вектора $\mathbf{A}(t)$, имеющий координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, будет описывать некоторую линию L, уравнениями которой служат следующие параметрические уравнения:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Так как вектор $\mathbf{A}(t)$ есть не что иное, как радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M на линии L, то эту линию можно задать таким одним векторным уравнением:

$$\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}.$$

Определение. **Линия L, описанная концом вектора $\mathbf{A}$, называется *годографом* векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{A}(t)$.**

Начало координат называют при этом *полюсом годографа*.

Если у вектора $\mathbf{A}(t)$ меняется только модуль, то годографом его будет луч, исходящий из полюса, или некоторая часть этого луча. Если модуль вектора $\mathbf{A}(t)$ постоянен ($|\mathbf{A}(t)| = \text{const}$) и меняется только его направление, то годограф есть линия, лежащая на сфере с центром в полюсе и с радиусом, равным модулю вектора $\mathbf{A}(t)$.

С векторной функцией скалярного аргумента особенно часто приходится иметь дело в кинематике при изучении движения точки. Радиус-вектор движущейся точки является функцией времени: $\mathbf{r} = \mathbf{A}(t)$; годограф этой функции есть траектория движения. При этом уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{A}(t)$ называют уравнением движения (см. п. **71**).

II. Предел и непрерывность векторной функции. Для векторных функций $\mathbf{A}(t)$ скалярного аргумента вводятся основные понятия анализа аналогично тому, как это делается для скалярных функций.

Определение. **Вектор A называется *пределом векторной функции* $\mathbf{A}(t)$ *при* $t \to t_0$:**

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A},$$

если для всех значений t, достаточно мало отличающихся от t_0, модуль разности векторов $|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}|$ будет как угодно мал.

Если $\mathbf{A}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k}$ и $\mathbf{A}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$, то

$$|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}|=\sqrt{[x(t)-a]^2+[y(t)-b]^2+[z(t)-c]^2}.$$

Ясно, что из стремления к нулю $|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}|$ при $t\to t_0$ следует, что $x(t)\to a$, $y(t)\to b$, $z(t)\to c$; разумеется, верно и обратное. Коротко это можно выразить в виде простого правила: *проекции предела векторной функции* $\mathbf{A}(t)$ *равны пределам ее проекций.*

Определение. **Векторная функция $\mathbf{A}(t)$ называется непрерывной при данном значении параметра t, если она определена в окрестности точки t и если**

$$\lim_{\Delta t\to 0}|\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)|=\lim_{\Delta t\to 0}|\Delta\mathbf{A}(t)|=0.$$

При этом геометрический смысл разности $\Delta\mathbf{A}(t)$ ясен из рис. 95. Это будет вектор $\overline{MM'}$ или вектор $\overline{MM''}$. Пусть вектор $\mathbf{A}(t)$ имеет разложение

$$\mathbf{A}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k}. \quad (*)$$

Тогда

$$\mathbf{A}(t+\Delta t)=x(t+\Delta t)\,\mathbf{i}+ \\ +y(t+\Delta t)\,\mathbf{j}+z(t+\Delta t)\,\mathbf{k}.$$

В соответствии с правилами векторной алгебры

$$\Delta\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)= \\ =\Delta x\mathbf{i}+\Delta y\mathbf{j}+\Delta z\mathbf{k}, \quad (**)$$

где $\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)$ и т. д. Так как

$$|\Delta\mathbf{A}(t)|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$

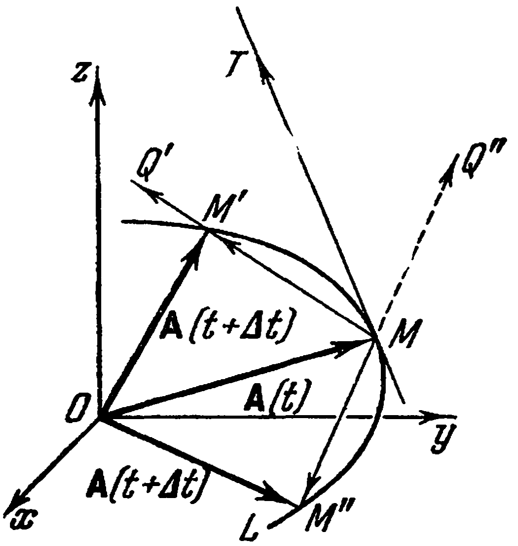

Рис. 95.

то из условия $|\Delta\mathbf{A}(t)|\to 0$ следует, что и $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$. Очевидно и обратное, т. е. из стремления к нулю Δx, Δy, Δz следует стремление к нулю $|\Delta\mathbf{A}(t)|$. Это означает, что если непрерывна векторная функция $\mathbf{A}(t)$, то непрерывными будут и ее проекции на оси координат $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, и наоборот. Ясно, что годографом непрерывной векторной функции $\mathbf{r}=\mathbf{A}(t)$ будет непрерывная линия. Мы будем в дальнейшем предполагать, что эта линия во всех точках имеет касательную (см. п. 68).

III. Производная векторной функции. Чтобы определить производную векторной функции $\mathbf{A}(t)$ по скалярному аргументу t, составим прежде всего отношение

$$\frac{\Delta \mathbf{A}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t}.$$

Геометрически это отношение изображается вектором, направленным в сторону, соответствующую возрастанию t (направление от M к M' на рис. 95). Действительно, если $\Delta t>0$, то вектор $\frac{\Delta \mathbf{A}(t)}{\Delta t}=\overline{MQ'}$ имеет то же направление, что и вектор $\Delta \mathbf{A}(t)=\overline{MM'}$, т. е. он направлен в ту сторону годографа, которая соответствует возрастанию параметра t. Если же $\Delta t<0$, то вектор $\Delta \mathbf{A}(t)=\overline{MM''}$ направлен в противоположную сторону, и при делении на отрицательное число Δt мы получим вектор $\overline{MQ''}$, направленный снова в сторону возрастания t.

Рассмотрим теперь предел отношения $\frac{\Delta \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$.

Определение. **Предел**

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

называется *производной от векторной функции* $\mathbf{A}(t)$ *по скалярному аргументу* t.

В силу определения предела (см. II) производная векторной функции сама является вектором. Она обозначается $\mathbf{A}'(t)$ или $\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$. Чтобы определить направление вектора $\mathbf{A}'(t)$, достаточно заметить, что при $\Delta t \to 0$ точка M' (M'') стремится к точке M, и поэтому секущая MM' (MM'') стремится к касательной в точке M. Поэтому *производная* $\mathbf{A}'(t)$ *является вектором* $\overline{MT}$, *касательным к годографу векторной функции* $\mathbf{A}(t)$, *направленным в сторону, соответствующую возрастанию параметра* t.

Если векторная функция $\mathbf{A}(t)$ имеет постоянный модуль, но переменное направление, то ее производная функция $\mathbf{A}'(t)$ является *вектором, перпендикулярным к вектору* $\mathbf{A}(t)$. В самом деле, годограф лежит на сфере, и поэтому производная $\mathbf{A}'(t)$, как вектор, касательный к годографу, перпендикулярна к радиусу-вектору $\mathbf{A}(t)$.

Итак, *производная вектора с постоянным модулем перпендикулярна к нему.*

Перейдем теперь к фактическому отысканию производной $\mathbf{A}'(t)$. Пусть векторная функция $\mathbf{A}(t)$ задана своим разложением

$$\mathbf{A}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k}.$$

Тогда, согласно (**),

$$\frac{\Delta \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k}.$$

Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$ и воспользовавшись правилом отыскания предела векторной функции, получим разложение производной $\mathbf{A}'(t)$ по единичным векторам

$$\mathbf{A}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Из этого разложения следует, что

$$|\mathbf{A}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.$$

Вспоминая выражение для дифференциала длины дуги ds (п. **68**), последнее равенство можно записать в виде

$$|\mathbf{A}'(t)| = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, модуль производной векторной функции $|\mathbf{A}'(t)|$ равен *производной от длины годографа по аргументу* t. Необходимо подчеркнуть, что модуль производной $|\mathbf{A}'(t)|$ не равен производной от модуля $(|\mathbf{A}(t)|)'$. Особенно наглядно это видно на примере производной вектора с постоянным модулем: в этом случае производная модуля вектора как постоянного числа просто равна нулю; производная же самого вектора есть вектор, к нему перпендикулярный.

Пользуясь выражением для $\mathbf{A}'(t)$, легко показать, что все основные правила дифференцирования переносятся почти без изменения на векторные функции:

1) $[\mathbf{A}_1(t) + \mathbf{A}_2(t)]' = \mathbf{A}_1'(t) + \mathbf{A}_2'(t)$,

2) $[f(t)\,\mathbf{A}(t)]' = f'(t)\,\mathbf{A}(t) + f(t)\,\mathbf{A}'(t)$,

где $f(t)$ — скалярная функция; в частности, $[C\mathbf{A}(t)]' = C\mathbf{A}'(t)$, где C — скаляр.

Правила дифференцирования скалярного и векторного произведений двух векторных функций также ничем не отличаются от соответствующего правила в случае произведения скалярных функций:

3) $[\mathbf{A}_1(t)\cdot\mathbf{A}_2(t)]' = \mathbf{A}_1'(t)\cdot\mathbf{A}_2(t) + \mathbf{A}_1(t)\cdot\mathbf{A}_2'(t)$,

4) $[\mathbf{A}_1(t)\times\mathbf{A}_2(t)] = [\mathbf{A}_1'(t)\times\mathbf{A}_2(t)] + [\mathbf{A}_1(t)\times\mathbf{A}_2'(t)]$.

(В правиле 4 важен порядок перемножаемых векторов.)

Доказательства всех этих правил рекомендуем читателю провести самостоятельно.

Последовательным дифференцированием можно найти производные высших порядков от векторной функции. Так,

$$\mathbf{A}''(t) = x''(t)\,\mathbf{i} + y''(t)\,\mathbf{j} + z''(t)\,\mathbf{k}$$

и т. д.

71*. Приложения к механике. Рассмотренное нами дифференцирование векторной функции скалярного аргумента имеет важное применение в механике при определении скорости и ускорения криволинейного движения. (В пп. **38**, I и **54**, I был рассмотрен вопрос о скорости и ускорении прямолинейного движения.)

Пусть годограф векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{A}(t)$ является траекторией движущейся точки, t — время. Тогда вектор-производная

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

называется *скоростью движения.*

Таким образом, *скорость движения есть вектор, касательный к траектории в соответствующей точке и направленный в сторону движения* (т. е. в сторону возрастания t).

Модуль скорости равен (см. п. **70**, III)

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{A}'(t)| = \frac{ds}{dt},$$

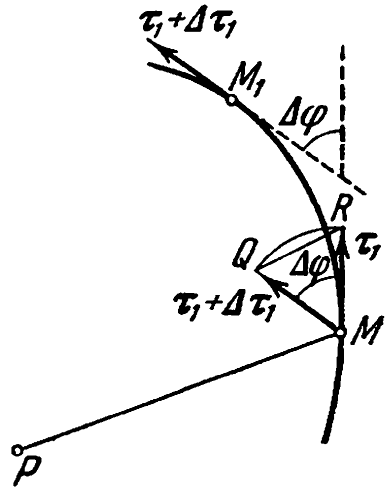

Рис. 96.

т. е. равен *производной от пути по времени.*

Если движение прямолинейное, то скалярная величина $\frac{ds}{dt}$ вполне характеризует скорость движения. Именно ее мы и называли скоростью прямолинейного движения. Вектор

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

называется *ускорением движения.*

Представим ускорение $\mathbf{w}$ в несколько ином виде. Для этого обозначим через $\boldsymbol{\tau}_1$ единичный вектор касательной к годографу (рис. 96). Тогда

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}_1.$$

Дифференцируя это произведение (см. правило 2), получим

$$\mathbf{w} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}_1 + \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt}.$$

Рассмотрим теперь производную $\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt}$. Так как $\boldsymbol{\tau}_1$ — единичный вектор $|\boldsymbol{\tau}_1| = 1$, то производная его будет к нему перпендикулярна, т. е. направлена по некоторой нормали к кривой (эту нормаль называют *главной нормалью*). Обозначив единичный вектор этой нормали через $\mathbf{v}_1$, запишем

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt}\right| \mathbf{v}_1.$$

Из рис. 96 ясно, что $|\Delta\boldsymbol{\tau}_1|$ есть хорда, стягивающая дугу окружности $\breve{QR} = |\boldsymbol{\tau}_1|\,\Delta\varphi = \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — угол смежности дуги $\breve{MM_1}$ (см. п. **67**). В силу эквивалентности бесконечно малой дуги и хорды можно записать

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Произведем еще следующее преобразование:

$$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}K,$$

где $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$ — предел отношения угла смежности к длине дуги. Величину K, так же как и для плоской кривой, мы называем *кривизной* пространственной кривой, а величину, ей обратную, $\rho = \frac{1}{K}$ — *радиусом кривизны*[1]). Подставляя выражение для $\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt}$ в формулу для ускорения, получим

$$\mathbf{w} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}_1 + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}\mathbf{v}_1.$$

Первый составляющий вектор $\mathbf{w}_t = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}_1$ называется *тангенциальным* ускорением; величина его равна второй производной от пути по времени, и он направлен по касательной к траектории движения. Второй составляющий вектор $\mathbf{w}_n = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}\mathbf{v}_1 = \frac{|\mathbf{v}|^2}{\rho}\mathbf{v}_1$ называется *нормальным ускорением*; он направлен по нормали к траектории, величина его равна квадрату величины скорости, деленному на радиус кривизны.

Если движение прямолинейное, то вектор $\boldsymbol{\tau}_1$ постоянный, его производная равна нулю и ускорение полностью ха-

[1]) Формулу для кривизны K пространственной линии мы не выводим.

рактеризуется величиной $\frac{d^2s}{dt^2}$ — ускорением прямолинейного движения.

Если движение **равномерное**, т. е. постоянна величина скорости $|\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}$, то первое слагаемое равно нулю и остается лишь нормальное ускорение

$$\mathbf{w}_n = \frac{|\mathbf{v}|^2}{\rho}\mathbf{v}_1.$$

В частности, когда точка равномерно движется по окружности радиуса R, то $\rho = R$ и $|\mathbf{w}_n| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R}$. Это ускорение направлено к центру окружности и называется **центростремительным**.

§ 6. Комплексные функции действительного переменного

72. Комплексные числа. Предполагая, что читатель знаком с комплексными числами из курса элементарной математики, напомним лишь вкратце основные определения и правила арифметических действий.

Число

$$z = x + iy,$$

где x и y — любые действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица* ($i^2 = -1$), называется *комплексным числом*; x называется *действительной частью*, а y — *мнимой частью* комплексного числа z. Два комплексных числа считаются **равными**, если равны порознь их действительные и мнимые части. Это значит, что равенство

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

равносильно двум равенствам

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Равенство $z = x + iy = 0$ имеет место, только если и $x = 0$ и $y = 0$.

Будем изображать комплексное число $z = x + iy$ точкой плоскости Oxy (рис. 97); абсциссой точки будет служить действительная, а ординатой — мнимая части комплексного числа. Поэтому ось абсцисс называют *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*; плоскость же называют *комплексной плоскостью*. Если точка изображает число z, то ее называют точкой z.

Можно изображением комплексного числа считать также вектор, идущий из начала координат в указанную точку; его проекциями на оси координат являются соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. Этой геометрической иллюстрацией комплексных чисел мы воспользуемся в следующем пункте.

Если $y=0$, то комплексное число $z=x$ есть действительное число, изображаемое точкой действительной оси, а если $x=0$, то $z=iy$ называется *чисто мнимым числом*, изображаемым точкой мнимой оси.

Положение точки, изображающей комплексное число z, можно определять также при помощи полярных координат r и φ (рис. 97). При этом $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем*, а φ — *аргументом* комплексного числа; они обозначаются так:

$$r=|z|, \qquad \varphi=\operatorname{Arg} z.$$

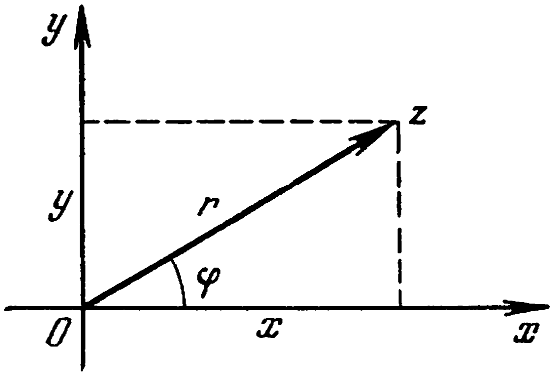

Рис. 97.

Величина $\operatorname{Arg} z$ определена лишь с точностью до слагаемого $2k\pi$, где k — целое число. Если угол φ выбран в пределах от $-\pi$ до π, то его называют *главным значением* аргумента и обозначают через $\arg z$.

Если $z=x+iy$, то комплексное число $x-iy$ называется *сопряженным* с z и обозначается через $\bar{z}$. Точка $\bar{z}$ симметрична точке z относительно действительной оси (т. е. оси абсцисс). Ясно, что $|\bar{z}|=|z|$ и $\arg\bar{z}=-\arg z$.

Пользуясь формулами перехода от декартовых координат к полярным ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$), можно любое комплексное число, отличное от нуля, записать в *тригонометрической форме*

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Действия над комплексными числами производят в соответствии с формулами:

1) $$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

т. е. сумма двух комплексных чисел есть комплексное число, действительная и мнимая части которого равны сумме соответствующих частей слагаемых. Геометрически этому соответствует известное из векторной алгебры правило сложения векторов;

2) $$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2);$$

вычитание есть действие, обратное сложению, и аналитически выражает обычное геометрическое вычитание векторов. Разность двух комплексных чисел z_1-z_2 изображается вектором с началом в точке z_2 и концом в точке z_1. Таким образом, $|z_1-z_2|$ есть длина прямолинейного отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2;

3) $$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Если сомножители взять в тригонометрической форме, то легко вывести, что

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\\ =r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

т. е. при *умножении модули чисел перемножаются, а аргументы складываются.*

Последовательно распространяя это правило на любое число n сомножителей и считая их равными между собой, придем к правилу возведения комплексного числа в целую степень

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

n — целое положительное число.

Это — так называемая *формула Муавра*[1]).

Произведение комплексного числа на сопряженное ему будет действительным положительным числом, равным квадрату модуля каждого из сомножителей $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2=|\bar{z}|^2$;

$$4)\qquad \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}$$

при условии, что $x_2+iy_2\neq0$. Деление есть действие, обратное умножению. Если делимое и делитель взять в тригонометрической форме, то

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

т. е. при *делении модуль делимого делится на модуль делителя, а аргумент делителя вычитается из аргумента делимого.*

Внимательно рассмотрев вышеприведенные формулы, легко заметить, что выражаемые ими правила можно объединить общим и очень простым правилом:

Арифметические действия над комплексными числами производятся по обычным правилам действий над обыкновенными двучленами $(x+iy)$, *но в результате* i^2 *везде заменяется на* -1.

Известные в области действительных чисел законы и свойства арифметических действий без изменения переносятся в область комплексных чисел.

Отметим, что если в каком-нибудь арифметическом действии вместо всех комплексных чисел взять их сопряженные, то и результат получится сопряженный первоначальному. Действительно, изменив знаки y_1 и y_2 на обратные, мы увидим, что в правых частях всех четырех формул 1), 2), 3) и 4) знак мнимой части также пере-

[1]) А. Муавр (1667—1754) — английский математик.

менится на обратный. Но если это имеет место в каждом из четырех арифметических действий, то, значит, имеет место и в любой их совокупности.

73. Определение и дифференцирование комплексных функций. I. Допустим, что мы рассматриваем векторную функцию скалярного аргумента при условии, что ее проекция на ось Oz при всех значениях t равна нулю. Тогда

$$\mathbf{A}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}, \qquad (*)$$

и линия $\mathbf{r}=\mathbf{A}(t)$ — годограф этой функции — будет целиком лежать в плоскости Oxy. В этом случае часто оказывается удобным вектор $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ считать геометрическим изображением комплексного числа $z=x+iy$ и вместо векторной функции $\mathbf{r}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}$ говорить о комплексной функции действительного переменного [1]) $z(t)=x(t)+iy(t)$.

Определение. **Если каждому значению действительного параметра t соответствует определенное комплексное число**

$$z(t)=x(t)+iy(t), \qquad (**)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — функции, принимающие действительные значения, то $z(t)$ называется комплексной функцией действительного переменного.

Обычно параметр t изменяется в некотором интервале, конечном или бесконечном.

Годографом функции $z(t)$ называется линия с параметрическими уравнениями $x=x(t)$ и $y=y(t)$; таким образом, годографы векторной функции $(*)$ и комплексной функции $(**)$ есть одна и та же линия.

Определения предела и непрерывности комплексной функции действительного переменного совершенно аналогичны соответствующим определениям для векторной функции; предоставляем их сформулировать читателю. Подчеркнем лишь, что непрерывность комплексной функции $z(t)$ эквивалентна непрерывности ее действительной и мнимой частей $x(t)$ и $y(t)$. Годографом непрерывной функции $z(t)$, при изменении параметра t от t_1 до t_2, служит непрерывная линия, соединяющая точки $z(t_1)$ и $z(t_2)$.

Примеры. 1) $z(t)=t+it^2$ $(-\infty<t<+\infty)$.

Здесь $x=t$ и $y=t^2$; годографом служит парабола $y=x^2$. При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка движется по параболе так, что внутренность параболы остается слева.

2) $$z(t)=\cos t+i\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

---

[1]) Комплексные функции комплексного переменного служат предметом изучения в теории функций комплексного переменного (см., например, [6]).

Так как $|z(t)|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$, годографом служит окружность радиуса 1 с центром в начале координат; при изменении t от 0 до 2π точка пробегает окружность против часовой стрелки. Если бы параметр t изменялся в интервале $[0, \pi]$, то годографом была бы верхняя половина окружности с начальной точкой $z=1$ и конечной точкой $z=-1$.

3) $$z(t)=1+i\cos t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Годографом служит отрезок прямой, параллельной мнимой оси, заключенный между точками $z_1=1+i$ и $z_2=1-i$; при изменении t в заданнном интервале он пробегается дважды: сначала сверху вниз, а потом снизу вверх.

II. Производная комплексной функции действительного переменного. Производная комплексной функции $z(t)$ определяется как обычно, т. е. как предел отношения приращения функции $\Delta z=z(t+\Delta t)-z(t)$ к приращению независимой переменной Δt:

$$z'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Производная $z'(t)$ в свою очередь является комплексной функцией. Геометрически, вектор, изображающий комплексное число $z'(t_0)$, параллелен касательной к годографу функции $z(t)$, проведенной в точке, соответствующей значению параметра t_0.

Дословно повторяя рассуждения, приведенные при выводе формулы для производной векторной функции скалярного аргумента, получим

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t).$$

Эта формула показывает, что комплексную функцию $z(t)=$ $=x(t)+iy(t)$ можно дифференцировать как обыкновенную сумму, считая i просто постоянным. Разумеется, это правило приобретает смысл только после введенных определений. Легко проверить, что все правила дифференцирования действительных функций без всяких изменений переносятся на комплексные функции.

Отметим, что произведение комплексных функций производится по правилу умножения комплексных чисел и не связано ни со скалярным ни с векторным произведениями векторных функций.

74. Показательная функция и формулы Эйлера. В этом пункте мы дадим определение показательной функции с мнимым показателем степени $z=e^{it}$ и изучим ее свойства. Эта функция в дальнейшем будет играть очень важную роль как в самой математике, так и в ее приложениях к целому ряду конкретных дисциплин (электротехнике, теории колебаний и др.).

Определение. **Показательной функцией с мнимым показателем степени называется комплексная функция**

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \qquad (*)$$

где параметр t может принимать любые действительные значения.

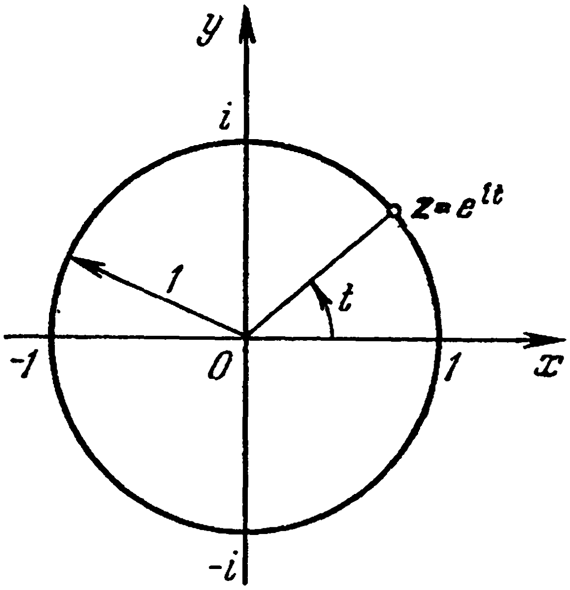

Рис. 98.

Формула (*) называется *формулой Эйлера.*

Основанием для этого, может быть, на первый взгляд несколько странного определения[1]) служит то обстоятельство, что для функции e^{it} оказываются справедливыми все правила действий с обычной показательной функцией $y = e^x$, включая формулу дифференцирования.

Прежде чем проверить эти правила, остановимся на некоторых свойствах функции e^{it}, вытекающих прямо из ее определения.

Как мы уже видели в примере 2 п. **73**, модуль функции e^{it} равен единице; это следует так же из того, что правая часть формулы (*) представляет тригонометрическую форму записи комплексного числа с модулем, равным 1, и аргументом, равным t:

$$|e^{it}| = 1, \qquad \operatorname{Arg} e^{it} = t.$$

Годографом функции $z = e^{it}$ служит единичная окружность (рис. 98). При $t = 0$ получим точку $z = 1$, при $t = \frac{\pi}{2}$ — точку $z = i$, при $t = \pi$ — точку $z = -1$ и т. д. Таким образом,

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{3i\pi}{2}} = -1.$$

При увеличении параметра t точка e^{it} движется по окружности против часовой стрелки и при $t = 2\pi$ снова возвращается в исходное положение:

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

При дальнейшем увеличении t от 2π до 4π точка e^{it} снова обежит окружность и т. д. Отсюда уже ясно, что *функция e^{it} периодическая с периодом $T = 2\pi$.* Действительно,

$$e^{i(t+2\pi)} = \cos (t + 2\pi) + i \sin (t + 2\pi) = \cos t + i \sin t = e^{it}.$$

[1]) Позже, в гл. XI, мы придем к такому же определению, исходя из совершенно других соображений.

Заметим, что если n — целое число, то

$$e^{2n\pi i}=1, \qquad e^{(2n+1)\pi i}=-1.$$

Основное правило действий с показательной функцией заключается в том, что если x_1 и x_2 — действительные числа, то $e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$. Проверим, что это правило соблюдается и для мнимых показателей степени. По правилу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме

$$e^{it_1}e^{it_2}=(\cos t_1+i\sin t_1)(\cos t_2+i\sin t_2)=$$
$$=\cos(t_1+t_2)+i\sin(t_1+t_2)=e^{i(t_1+t_2)}.$$

Здесь t_1 и t_2 — любые действительные числа (положительные или отрицательные).

Формула Эйлера позволяет записывать комплексные числа в *показательной форме*. Если $|z|=r$ и $\operatorname{Arg} z=\varphi$, то

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}.$$

Правило умножения показывает, что если $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1z_2=r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Произведение числа $z=re^{i\varphi}$ на $e^{i\alpha}$ равно $ze^{i\alpha}=re^{i(\varphi+\alpha)}$. Геометрически это означает, что вектор, изображающий комплексное число z, поворачивается на угол α. Поэтому $e^{i\alpha}$ иногда называют *поворотным множителем*. В частности, если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то умножение на $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ приводит к повороту вектора против часовой стрелки на угол 90°.

Требование сохранения правила умножения приводит к следующему определению:

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}e^{i\beta t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t). \qquad (**)$$

Отсюда

$$|e^{(\alpha+i\beta)t}|=e^{\alpha t}, \qquad \operatorname{Arg} e^{(\alpha+i\beta)t}=\beta t.$$

Эти формулы определяют степень числа e с любым комплексным показателем степени. Так, например, $e^{2+3i}=e^2(\cos 3+i\sin 3)$.

Перейдем к дифференцированию функции e^{it}. По правилу отыскания производной комплексной функции действительного переменного

$$(e^{it})'=-\sin t+i\cos t=i(\cos t+i\sin t)=ie^{it}.$$

Таким образом, *комплексная функция e^{it} дифференцируется так же, как если бы i было просто постоянным числом.*

Геометрически дифференцирование функции e^{it} сводится к повороту вектора $z=e^{it}$ на угол 90° против часовой стрелки.

Пользуясь формулой (**), легко проверить, что вообще

$$[e^{(\alpha+\beta i)t}]' = (\alpha+\beta i)\, e^{(\alpha+\beta i)t}.$$

Это значит, что всегда справедлива формула

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t},$$

где λ — любое число, действительное или комплексное.

Формула Эйлера

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

выражает показательную функцию с комплексным показателем степени через тригонометрические функции. Заменив в этой формуле t на $-t$, получим

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t.$$

(Отметим, что e^{it} и e^{-it} — комплексно сопряженные выражения.)

Теперь легко выразить тригонометрические функции $\cos t$ и $\sin t$ через показательную

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}. \qquad (***)$$

Эти формулы также называются формулами Эйлера.

§ 7. Решение уравнений

75. Общие сведения об уравнениях. С решением уравнений приходится сталкиваться в самых разных задачах, как чисто математического, так и прикладного характера. Например, при исследовании функции $y=f(x)$ для отыскания нулей функции, точек экстремума и абсцисс точек перегиба требуется решить соответственно уравнения $f(x)=0$, $f'(x)=0$, $f''(x)=0$. Далеко не всегда эти уравнения удается решить точно, и приходится отыскивать их корни приближенно. Однако, прежде чем переходить к приближенным методам решения, мы изложим вкратце некоторые общие свойства уравнений, частично уже известных читателю.

I. Алгебраические уравнения и разложение многочленов на множители. Пусть дан многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с действительными или комплексными коэффициентами, причем $a_0 \neq 0$. Тогда уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (*)$$

называется *алгебраическим уравнением n-й степени.*

Основная теорема высшей алгебры утверждает, что *всякое алгебраическое уравнение степени $n>0$ имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный.* При этом, однако, теорема не указывает способов фактического отыскания корня; она говорит только об его существовании. Доказательство основной теоремы алгебры далеко выходит за рамки книги.

При делении многочлена n-й степени $P(x)$ на двучлен $x-\alpha$ мы получаем в частном многочлен $Q(x)$ степени $n-1$ и в остатке какое-то число R. Это можно записать в виде тождества

$$P(x)=(x-\alpha)\,Q(x)+R.$$

Подставляя в это тождество вместо x число α, получим, что $P(\alpha)=R$, т. е. что *остаток от деления многочлена на двучлен $x-\alpha$ равен значению этого многочлена при $x=\alpha$* (теорема Безу[1])). Если α является корнем многочлена $P(x)$, то $R=P(\alpha)=0$ и

$$P(x)=(x-\alpha)\,Q(x).$$

Пусть x_1 является корнем уравнения (*); тогда

$$P(x)=(x-x_1)\,Q_1(x),$$

где $Q_1(x)$ — многочлен степени $n-1$. Легко заметить, что его старший коэффициент (коэффициент при x^{n-1}) равен старшему коэффициенту многочлена $P(x)$, т. е. a_0.

Если степень $Q_1(x)$ не равна нулю, т. е. он не сводится к постоянной a_0, то к нему можно снова применить основную теорему. Пусть x_2 — корень $Q_1(x)$; тогда $Q_1(x)=(x-x_2)\,Q_2(x)$, где степень многочлена $Q_2(x)$ равна $n-2$, а старший коэффициент по-прежнему равен a_0. Выражение для $P(x)$ примет вид

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\,Q_2(x).$$

Ясно, что x_2 тоже является корнем уравнения (*). Повторяя этот процесс n раз, мы придем к разложению многочлена $P(x)$ на линейные множители

$$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

При таком последовательном получении корней x_1, x_2, $\ldots x_n$ может оказаться, что некоторые из них будут совпадать. Если какой-то корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности k*. Если $k=1$, т. е. корень встретился только один раз, то он называется *простым*.

Пусть корень x_1 имеет кратность k_1, корень x_2 — кратность k_2 и т. д. Тогда разложение многочлена $P(x)$ можно записать так:

$$P(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}, \qquad (**)$$

---

[1]) Э. Безу (1730—1783) — французский математик.

где r — число различных корней, а сумма кратностей всех корней равна n

$$k_1+k_2+\ldots+k_r=n.$$

Последнее равенство означает, что *алгебраическое уравнение n-й степени имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Все сказанное до сих пор относилось к уравнениям (*) с любыми комплексными коэффициентами. Будем теперь считать, что все коэффициенты a_0, a_1, ... a_n — действительные числа. Тогда комплексные корни уравнения (*) (если они есть) попарно сопряжены. Это является следствием замечания, сделанного в самом конце п. **72**. Действительно, если коэффициенты многочлена $P(x)$ — действительные числа, то, вычисляя его значения при комплексно сопряженных значениях x, мы снова получим комплексно сопряженные числа: $P(\alpha-i\beta)=\overline{P(\alpha+i\beta)}$. Это и значит, что если $P(\alpha+i\beta)=0$, то и $P(\alpha-i\beta)=0$. Легко проверить, что корни $\alpha+i\beta$ и $\alpha-i\beta$ имеют одинаковую кратность. Отсюда, кстати, следует, что *любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.*

Объединим в разложении (**) множители, соответствующие комплексно сопряженным корням кратности l; перемножая их, получим

$$(x-\alpha-i\beta)^l(x-\alpha+i\beta)^l=(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^l=(x^2+px+q)^l,$$

где $p=-2\alpha$ и $q=\alpha^2+\beta^2$. Дискриминант квадратного трехчлена $p^2-4q<0$, так как его корни комплексные.

Проделав указанное преобразование со всеми множителями, содержащими комплексные корни, получим разложение многочлена $P(x)$ на линейные и квадратичные действительные множители

$$P(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots,$$

где k_i — кратности действительных корней, а l_i — кратности комплексно сопряженных корней. Ясно, что $(k_1+\ldots)+2(l_1+\ldots)=n$. Полученным разложением мы воспользуемся в следующей главе.

Из сказанного выше следуют простые, но важные для дальнейшего замечания.

1. *Если многочлен $P(x)$ равен нулю при любых значениях x,* т. е. $P(x)\equiv 0$, *то все его коэффициенты равны нулю*

$$a_0=a_1=\ldots=a_n=0.$$

В самом деле, если бы $a_0\neq 0$, то $P(x)$ имел бы n корней, если бы $a_0=0$, $a_1\neq 0$, то $P(x)$ имел бы $n-1$ корень и т. д.; в условии же сказано, что многочлен имеет бесчисленное множество корней.

Из приведенного рассуждения следует также, что если многочлен n-й степени имеет больше чем n корней, то он тождественно равен нулю.

2. *Если два многочлена равны друг другу при любых значениях* x

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\equiv b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m,$$

то равны их степени и равны между собой коэффициенты при одинаковых степенях x.

Действительно, перенося все члены тождества в левую часть и считая, например, что $n>m$, запишем

$$a_0x^n+\ldots+a_{n-m-1}x^{m+1}+(a_{n-m}-b_0)\,x^m+\ldots$$
$$\ldots+(a_{n-1}-b_{m-1})\,x+(a_n-b_m)\equiv 0.$$

Но тогда из первого замечания следует, что во-первых $a_0=a_1=\ldots=a_{n-m-1}=0$, т. е. что старший член первого многочлена есть $a_{n-m}x^m$, а во-вторых, что $a_{n-m}=b_0, \ldots, a_{n-1}=b_{m-1}$, $a_n=b_m$; при этих условиях оба многочлена тождественны.

Алгебраические уравнения с произвольными коэффициентами читатель умеет решать в двух случаях: $n=1$ (линейное уравнение) и $n=2$ (квадратное уравнение). Для случаев $n=3$ и $n=4$ (кубическое уравнение и уравнение четвертой степени) также имеются общие формулы решения (формулы Кардано и Феррари[1])), однако ввиду их громоздкости пользование ими крайне затруднительно. Для уравнений же пятой степени и выше доказано, что вообще не существует формул, пользуясь которыми можно было бы при помощи конечного числа алгебраических действий выразить корни через коэффициенты таких уравнений, или, как еще говорят, решить уравнение в радикалах[2]); известны также и конкретные примеры таких «нерешаемых» уравнений. Лишь в отдельных частных случаях, в основном известных из школьного курса алгебры, возможно и алгебраическое решение; чаще всего это бывает тогда, когда левую часть уравнения удается разложить на произведение многочленов меньших степеней.

В силу сказанного ясно, почему так важно уметь решать уравнения приближенно.

II. Уравнение $R(x)=0$, где $R(x)$ — рациональная функция, всегда можно привести к виду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ —

---

[1]) Д. Кардано (1501—1576) — крупный итальянский ученый эпохи Возрождения. Л. Феррари (1522—1565) — итальянский математик.

[2]) Доказательство этого утверждения связано с именами двух замечательных математиков: норвежца Н. Абеля (1802—1829) и француза Э. Галуа (1811—1832).

многочлены (см. п. **11**). Для его решения нужно найти корни алгебраического уравнения $P(x)=0$ и взять из них те, при которых знаменатель $Q(x)$ не равен нулю. Если при некотором значении $x=\alpha$ и $P(\alpha)=0$ и $Q(\alpha)=0$, то условимся α считать корнем $R(x)$, если $\lim\limits_{x\to\alpha} R(x)=0$, и не считать в противном случае.

Иррациональные уравнения, т.е. уравнения, содержащие x под знаком корня, обычно удается свести к алгебраическим, возвышая обе части уравнения в соответствующие степени. При этом, однако, могут появиться посторонние корни, и поэтому, найдя корни полученного алгебраического уравнения, нужно взять из них только те, которые удовлетворяют исходному уравнению.

III. Трансцендентные уравнения. Уравнение $f(x)=0$ называется трансцендентным, если функция $f(x)$ — трансцендентная (п. **11**). Примерами трансцендентных уравнений служат логарифмические, показательные и тригонометрические уравнения, изучаемые в курсе элементарной математики. Другие типы трансцендентных уравнений, как правило, алгебраическим путем решены быть не могут. Более того, без специального исследования вообще нельзя сказать, имеет ли данное трансцендентное уравнение корни и в каком количестве.

76. Признак кратности корня. Чтобы перенести на трансцендентные уравнения определение кратности корня, рассмотрим подробнее свойства кратных корней алгебраических уравнений. Пусть многочлен $P(x)$ имеет корень α кратности k. Тогда разложение (**) из п. **75** можно записать в виде

$$P(x)=(x-\alpha)^k Q(x), \qquad \text{где} \quad Q(\alpha)\neq 0.$$

Производная $P'(x)$ (это тоже многочлен) равна

$$P'(x)=(x-\alpha)^{k-1}[kQ(x)+(x-\alpha)Q'(x)]=(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x).$$

Ясно видно, что $Q_1(\alpha)=kQ(\alpha)\neq 0$. Поэтому производная $P'(x)$ имеет число α корнем кратности $k-1$; если $k=1$, то $P'(\alpha)\neq 0$ и α не является корнем производной. Рассуждая аналогично, установим, что $P''(x)$ имеет α корнем кратности $k-2$ и т. д. Для производной $P^{(k-1)}(x)$ корень α будет простым, а для k-й производной $P^{(k)}(x)$ число α вообще не является корнем. Таким образом, если α является корнем кратности k для многочлена $P(x)$, то

$$P(\alpha)=0, \quad P'(\alpha)=0, \quad \ldots, \quad P^{(k-1)}(\alpha)=0, \quad \text{но} \quad P^{(k)}(\alpha)\neq 0.$$

Именно это свойство кратных корней алгебраического уравнения мы и примем за определение кратности корня любого уравнения.

Определение. **Число α называется корнем кратности k уравнения $f(x)=0$, или k-кратным нулем функции $f(x)$** [1]**, если**

$$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ \ldots,\ f^{(k-1)}(\alpha)=0, \text{ но } f^{(k)}(\alpha)\neq 0.$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ имеет k производных в точке α.

Например, функция $y=x-\sin x$ имеет в точке $x=0$ трехкратный нуль, так как $y_{x=0}=0$, $y'_{x=0}=(1-\cos x)_{x=0}=0$, $y''_{x=0}=$ $=(\sin x)_{x=0}=0$, но $y'''_{x=0}=\cos 0\neq 0$.

Уравнение $\sqrt[3]{x^2}=0$ имеет корень, равный нулю. Мы не говорим об его кратности, так как уже первая производная его левой части $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ не существует при $x=0$.

Предоставляем читателю проверить, что если α — простой корень уравнения $f(x)=0$, то график функции $y=f(x)$ пересекает ось абсцисс; если α — двукратный корень, то график касается оси абсцисс и в некоторой окрестности точки α целиком лежит по одну сторону от оси абсцисс (т. е. точка α является точкой экстремума функции $f(x)$). Когда α — трехкратный корень, то точка $(\alpha, 0)$ оси абсцисс является точкой перегиба графика и касательная в ней совпадает с осью абсцисс; нетрудно также установить, что будет, если α — корень более высокой кратности.

77. Приближенное решение уравнений. Мы рассмотрим лишь те способы приближенного решения уравнений, которые непосредственно примыкают к содержанию настоящей главы — исследованию функций. Заметим прежде всего, что знание хотя бы примерного поведения функции $y=f(x)$ уже позволяет приблизительно установить, в каких интервалах график функции пересекает ось абсцисс, т. е. где уравнение $f(x)=0$ имеет корни. Функция $f(x)$ предполагается непрерывной; поэтому если в точках x_1 и x_2 функция имеет р а з н ы е знаки, то из свойств непрерывных функций (п. **35**) сразу следует, что в интервале $[x_1, x_2]$ имеются нули функции.

Будем считать, что интервал $[x_1, x_2]$ удалось выбрать настолько малым, что в нем лежит только один корень уравнения $f(x)=0$; такой интервал назовем *интервалом изоляции корня*. То, что выбранный интервал является интервалом изоляции, обычно удается проверить при помощи производной $f'(x)$: если она сохраняет постоянный знак, то функция $f(x)$ в этом интервале монотонна и график ее пересекает ось абсцисс только один раз.

[1] Говорят также *нулем k-го порядка*.

Итак, мы исходим из того, что нам так или иначе удалось изолировать корень x_0 уравнения $f(x)=0$ в некотором интервале $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$. Каждое из чисел x_1 и x_2 можно считать приближенным значением корня x_0: первое x_1 — с недостатком, второе x_2 — с избытком, причем разность $x_2 - x_1$ является, очевидно, предельной абсолютной ошибкой этих приближенных значений. Излагаемые здесь методы приближенного решения уравнений состоят в приемах, посредством которых по данному интервалу изоляции $[x_1, x_2]$ и по функции $f(x)$ находится такой новый интервал $[x_1', x_2']$, что

$$x_1 \leqslant x_1' < x_0 < x_2' \leqslant x_2,$$

т. е. суживается интервал изоляции; значения x_1' и x_2' — лучшие, чем x_1 и x_2, приближенные значения корня x_0. Применяя к интервалу $[x_1', x_2']$ тот же или другой метод, получаем еще лучшие приближенные значения x_1'', x_2'' корня x_0.

Мы приводим три метода, самые простые и удобные: метод проб, метод хорд и метод касательных, который известен еще под названием метода Ньютона, а также комбинирование этих трех методов.

Отметим еще, что иногда примерное положение корня уравнения $f(x)=0$ удобнее находить, записав уравнение в виде $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=f(x)$. Если графики функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ известны, то абсциссы точек их пересечения и будут являться корнями данного уравнения. Так, например, записав уравнение $\ln x + x - 2 = 0$ в виде $\ln x = 2 - x$ и построив соответствующие графики, легко заметить, что единственный корень лежит между 1 и 2.

I. Метод проб. Этот метод является самым простым, но не лучшим из методов последовательного приближения к корню уравнения. Пусть интервал $[x_1, x_2]$ есть интервал изоляции корня уравнения $f(x)=0$. Если корень простой, то значения функции $f(x)$ на концах интервала имеют разные знаки; допустим для определенности, что $f(x_1) < 0$, а $f(x_2) > 0$. Возьмем любое значение $x = x'$ в интервале $[x_1, x_2]$ и испробуем его, подставив в функцию $f(x)$; если $f(x') < 0$, то мы, заменяя x_1 на x', получим суженный интервал изоляции $[x', x_2]$; если же $f(x') > 0$, то мы придем к суженному интервалу изоляции $[x_1, x']$, заменив x_2 через x'.

Неограниченно применяя метод проб, мы получим последовательность точек x', x'', ..., которая, как это можно доказать, имеет своим пределом корень x_0. В силу этого с помощью метода проб можно найти приближенное значение корня с любой точностью.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$f(x)=x^3+1,1\,x^2+0,9\,x-1,4=0.$$

Так как $f'(x)=3x^2+2,2\,x+0,9>0$ для всех значений x, то функция $f(x)$ монотонно возрастает и, значит, ее график лишь один раз пересекает ось Ox; кроме того, $f(0)=-1,4$, а $f(1)=1,6$, и значит, уравнение имеет единственный действительный корень, лежащий в интервале $[0,1]$.

Находим $f(0,5)=-0,55$; затем вычисляем $f(0,7)=0,112$.

Это показывает, что интервал $[0,5;\ 0,7]$ есть уменьшенный интервал изоляции искомого корня. Далее мы имеем

$$f(0,6)=-0,25,\quad f(0,65)=-0,076,\quad f(0,67)=-0,002.$$

Ясно, что мы таким образом приближаемся к корню; он лежит в интервале $[0,67;\ 0,7]$. Приблизим теперь к корню правую границу интервала изоляции. Испробуем 0,68; получим $f(0,68)=0,034$.

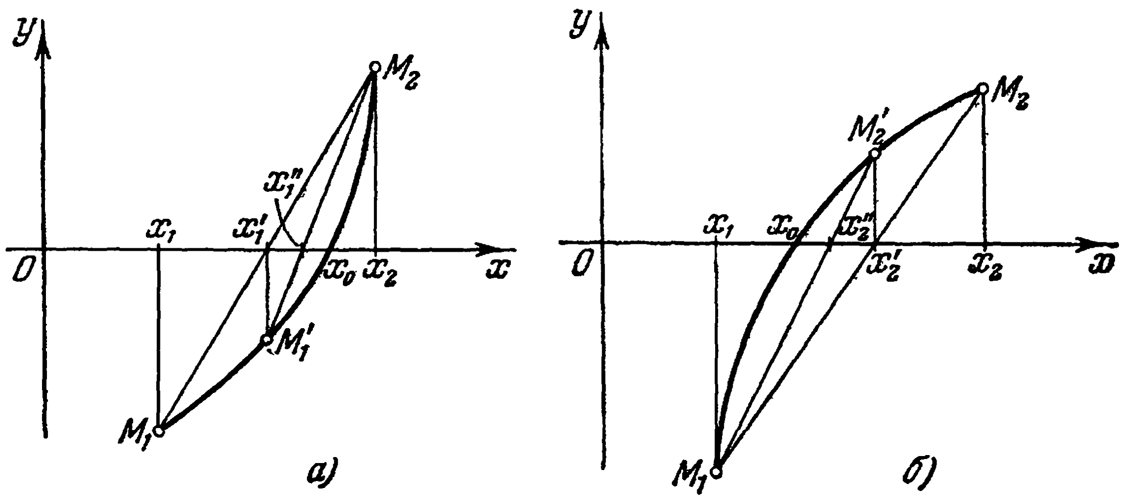

Рис. 99.

Итак, мы нашли новый интервал изоляции $[0,67;\ 0,68]$, который в 100 раз меньше первоначального $[0,1]$. Если взять в качестве значения корня число 0,675, то абсолютная ошибка будет меньше 0,005.

Метод проб чаще всего требует более длинных вычислений, чем излагаемые ниже методы хорд и касательных, ибо в этом методе выбор каждого следующего, более точного приближенного значения корня в значительной мере случаен, тогда как в двух следующих методах этот выбор производится целесообразно.

II. Метод хорд. Условия сохраняем те же, что и в методе проб. Соединим концы дуги M_1M_2 (рис. 99) линии $y=f(x)$, соответствующей интервалу $[x_1,\ x_2]$, хордой M_1M_2. Очевидно, что на рис. 99, *а* точка $x=x_1'$ пересечения этой хорды с осью Ox лежит ближе к x_0, чем x_1; исходя из нового суженного интервала $[x'_1, x_2]$, получим точно так же точку x''_1, которая будет лежать еще ближе к x_0, чем x'_1. Таким образом, находим последовательность точек $x_1, x'_1, x''_1, \ldots$, стремящуюся, возрастая, к неизвестному нам корню x_0. Аналогично на рис. 99, *б* также получается последовательность точек $x_2, x'_2, x''_2, \ldots$, стремящаяся, убывая, к корню x_0.

Написав уравнение хорды M_1M_2

$$\frac{y-f(x)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

найдем, положив $y=0$, выражение для абсциссы x' точки пересечения хорды с осью Ox:

$$x'=x_1-f(x_1)\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)} \quad \text{или} \quad x'=x_2-f(x_2)\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}. \qquad \text{(A)}$$

Это выражение, верное для обоих случаев, изображенных на рис. 99, *а* и *б* (а также и когда $f(x_1)>0$, $f(x_2)<0$), дает новое приближение x' к корню x_0 по двум предыдущим приближениям x_1 и x_2. Для того чтобы сузить интервал изоляции, нужно заменить x_1 или x_2 через x'. Какая именно из этих точек заменяется, можно установить сразу по известному нам поведению функции $f(x)$ или, когда это затруднительно, по знаку $f(x')$.

Пример. Применим метод хорд к тому же уравнению

$$f(x)=x^3+1{,}1\,x^2+0{,}9\,x-1{,}4=0.$$

Полагая $x_1=0$, $x_2=1$, находим по формуле (A)

$$x^{\mathrm{I}}=1-f(1)\frac{1-0}{f(1)-f(0)}\approx 0{,}467$$

и, далее, считая $x_1=0{,}467$, $x_2=1$,

$$x^{\mathrm{II}}\approx 0{,}617;$$

точно так же

$$x^{\mathrm{III}}\approx 0{,}660,\quad x^{\mathrm{IV}}\approx 0{,}668,\quad x^{\mathrm{V}}\approx 0{,}670,\quad x^{\mathrm{VI}}\approx 0{,}670.$$

Устойчивость первых трех десятичных знаков в x^{V} и x^{VI} указывает, как и почти всегда при подобных вычислениях, на то, что мы подошли близко к истинному значению корня. Испробуем для выяснения точности значение 0,671. Имеем: $f(0{,}671)\approx 0{,}0012$, и так как $f(0{,}670)<0$, то новым интервалом изоляции длиной всего в 0,001 будет интервал $[0{,}670; 0{,}671]$. Взяв за приближенное значение корня 0,6705, мы допускаем ошибку, не превосходящую 0,0005, т. е. в 10 раз меньшую, чем та, которая была допущена в методе проб при одном и том же (примерно) объеме вычислений.

III. Метод касательных. Пусть теперь дуга M_1M_2 линии $y=f(x)$, соответствующая интервалу изоляции $[x_1, x_2]$, имеет в каждой своей точке касательную и не имеет точек перегиба, т. е. $f''(x)$ не меняет знака в интервале $[x_1, x_2]$.

В то время как метод хорд основан на замене дуги линии ее хордой, метод касательных исходит из замены этой дуги ее касательной. Касательная проводится в концевой точке дуги M_1

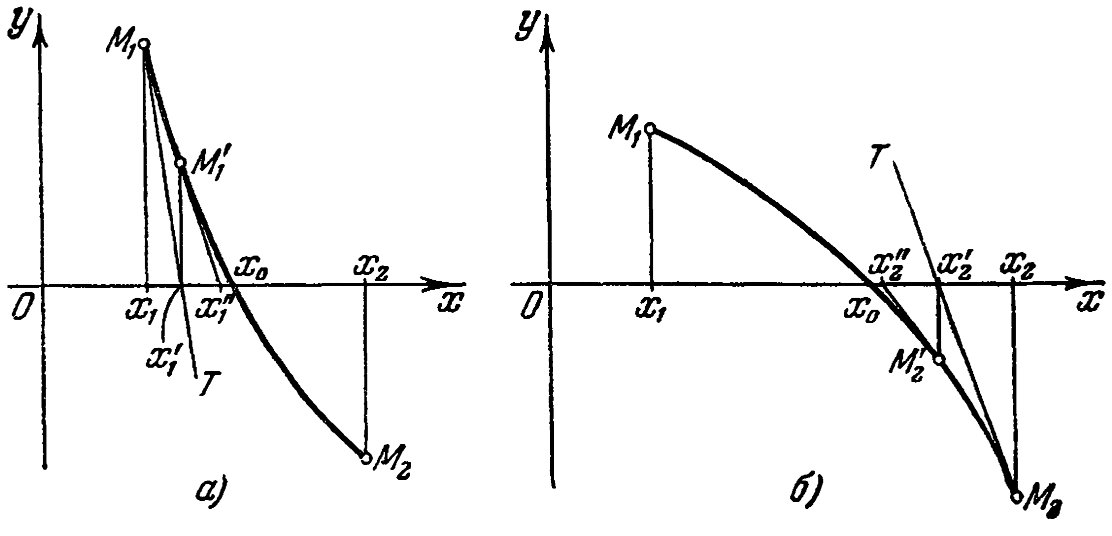

Рис. 100.

или M_2, причем именно в той, которая лежит над осью Ox, если дуга вогнута $(f''(x) \geqslant 0)$ (рис. 100, *а*), и которая лежит под осью Ox, если дуга выпукла $(f''(x) \leqslant 0)$ (рис. 100, *б*).

Эти условия обеспечивают то, что точка пересечения x_1' (или x_2') касательной с осью Ox всегда будет находиться между корнем x_0 и одним из концов (x_1 или x_2) интервала изоляции $[x_1, x_2]$; интервал $[x_1', x_2]$ или $[x_1, x_2']$ будет новым суженным интервалом изоляции корня x_0. Если какое-нибудь из условий не выполнено, то новый интервал изоляции может оказаться шире прежнего, и мы, таким образом, не приблизимся к корню, а удалимся от него. Повторное применение метода касательных приводит к последовательности, имеющей в качестве предела корень x_0. Значит, и по этому методу корень можно найти с любой точностью.

На рис. 100 представлены два возможных случая; остальные случаи читатель изобразит на чертеже самостоятельно.

Написав уравнение касательной M_1T или M_2T

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \quad \text{или} \quad y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2),$$

найдем, положив $y=0$, выражение для абсциссы x_1' или x_2' точки ее пересечения с осью Ox:

$$x_1'=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \text{или} \quad x_2'=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \tag{Б}$$

Пример. Снова вернемся к уравнению

$$f(x)=x^3+1{,}1x^2+0{,}9x-1{,}4=0.$$

Так как $f''(x)=6x+2{,}2>0$ в интервале $[0, 1]$, то касательную проводим в точке с абсциссой, равной 1. По формуле (Б) имеем последовательно

$$x^{\mathrm{I}}=1-\frac{f(1)}{f'(1)}\approx 0{,}738, \qquad x^{\mathrm{II}}=0{,}738-\frac{f(0{,}738)}{f'(0{,}738)}\approx 0{,}674,$$

$$x^{\mathrm{III}}\approx 0{,}671,\ x^{\mathrm{IV}}\approx 0{,}671,$$

причем ясно из самого метода получения приближений, что $f(0{,}671)>0$. Так как $f(0{,}670)<0$, то новым интервалом изоляции будет интервал $[0{,}670, 0{,}671]$. Этот интервал по методу касательных мы получили еще быстрее, чем по методу хорд.

IV. Комбинированные методы. Совместное использование различных методов для решения уравнений иногда называют *комбинированным методом*.

Допустим сейчас, что выполнены условия, указанные во всех рассмотренных методах: дуга линии $y=f(x)$, соответствующая интервалу изоляции $[x_1, x_2]$ корня x_0 уравнения $f(x)=0$, в каждой своей точке имеет касательную, не имеет точек перегиба и $f(x_1)f(x_2)<0$. Если применять совместно, например, метод хорд и метод касательных, то это приведет к двум последовательностям точек, стремящихся к точке x_0, с недостатком и с избытком. В случае *а* на рис. 100 метод касательных дает приближенные значения $x_1^{(n)}$ к корню x_0 с недостатком, а метод хорд — приближенные значения $x_2^{(n)}$ с избытком; в случае же *б* — наоборот. Это и ускоряет процесс вычисления корня с данной точностью.

Разумеется, комбинированный метод можно также употреблять, совмещая метод хорд или метод касательных с методом проб, как фактически уже было сделано выше при решении уравнения

$$f(x)=x^3+1{,}1x^2+0{,}9x-1{,}4=0.$$

Применим к этому уравнению комбинированный метод. Имеем $x_1'\approx 0{,}467$ (см. II) и $x_2'\approx 0{,}738$ (см. III).

По формулам (А) и (Б) находим

$$x_1''=0{,}467-\frac{f(0{,}467)\,(0{,}738-0{,}467)}{f(0{,}738)-f(0{,}467)}\approx 0{,}658,\ x_2''\approx 0{,}674,$$

$$x_1'''=0{,}658-\frac{f(0{,}658)\,(0{,}674-0{,}658)}{f(0{,}674)-f(0{,}658)}\approx 0{,}670,\ x_2'''\approx 0{,}671.$$

Здесь мы уже на третьем шаге достигли интервала изоляции [0,670; 0,671], в 1000 раз меньшего первоначального интервала [0, 1].

В настоящее время методы приближенного решения уравнений составляют один из важнейших разделов вычислительной математики или, как еще говорят, численного анализа. Особенно подробно разработаны приемы решения алгебраических уравнений, позволяющие находить не только действительные, но и комплексные корни; один из наиболее употребительных таких приемов носит имя Н. И. Лобачевского. Указания о книгах, посвященных этому вопросу, читатель найдет в списке литературы ([7], [8]).

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулировать и доказать теорему Ферма. В чем состоит ее геометрический смысл?

2. Сформулировать и доказать теорему Ролля; указать ее геометрический смысл.

3. Сформулировать теорему Лагранжа; объяснить ее геометрический смысл и привести аналитическое доказательство.

4*. Сформулировать и доказать теорему Коши.

5. Сформулировать и доказать прямую и обратную теоремы о связи между ростом функции и знаком ее производной. Каков геометрический смысл этих теорем?

6. Определить точки экстремума (максимума и минимума) функции, экстремальные значения функции, абсолютные экстремумы (наибольшие и наименьшие значения).

7. Сформулировать необходимый признак экстремума. Привести примеры, показывающие, что он не является достаточным.

8. В чем состоит первый достаточный признак экстремума?

9. Изложить схему исследования функции на экстремумы.

10. Как отыскиваются наибольшее и наименьшее значения функции на данном интервале?

11. В чем состоит второй достаточный признак экстремума? Доказать его.

12. Дать определение выпуклости и вогнутости линии $y=f(x)$ и точки перегиба.

13. Сформулировать и доказать теорему о связи между характером изогнутости линии $y=f(x)$ и знаком второй производной от функции $f(x)$.

14. В чем состоят первый и второй достаточные признаки для точек перегиба?

15. Изложить теорему Лопиталя. Привести различные примеры применения правила Лопиталя.

16. Что называется асимптотой данной линии?

17. Вывести аналитические признаки вертикальной и наклонной асимптот линии $y=f(x)$.

18. Описать общую схему исследования функций.

19. Вывести формулу для дифференциала длины дуги. На каком геометрическом свойстве линии основывается этот вывод?

20. Что называется кривизной линии в данной ее точке? Вывести формулу для кривизны.

21. Определить радиус, центр и круг кривизны.

22. Дать определение эволюты и эвольвенты. Указать приемы их приближенного построения.

23. Вывести уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной линии.

24. Дать определение и вывести уравнения цилиндрической винтовой линии.

25. Дать определения векторной функции скалярного аргумента и ее годографа.

26. Дать определения предела и непрерывности векторной функции; сформулировать правило отыскания ее предела.

27. Дать определение производной векторной функции скалярного аргумента и указать ее геометрический смысл. Вывести формулу разложения производной по единичным векторам.

28*. Что называется скоростью и ускорением криволинейного движения? Вывести выражения для тангенциального и нормального ускорений.

29. Дать определение комплексной функции действительного переменного, ее предела и непрерывности.

30. Дать определение производной коплексной функции и указать правило ее отыскания.

31. Дать определение показательной функции с мнимым показателем степени. Указать ее годограф, доказать периодичность и вывести формулу для ее производной.

32. Что называется показательной формой комплексного числа?

33. Вывести формулы Эйлера, выражающие тригонометрические функции через показательную.

34. Описать процесс разложения многочлена на линейные и квадратичные действительные множители.

35. Дать определение кратного корня уравнения; придумать примеры трансцендентных уравнений, имеющих простые и кратные корни.

36. Что называется интервалом изоляции корня уравнения? Описать способы отыскания таких интервалов.

37. Изложить методы проб, хорд, касательных и комбинированные методы для нахождения приближенного значения корня уравнения.

ГЛАВА V

ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Неопределенный интеграл[1])

78. Первообразная функция. Занимаясь дифференцированием функций, мы ставили перед собой следующую задачу: *по данной функции найти ее производную.* Теперь перейдем к изучению обратной задачи: *найти функцию, зная ее производную.* Как мы вскоре увидим, решение этой обратной задачи имеет очень большое значение для дальнейшего изучения анализа и его приложений. Начнем с определения первообразной функции.

Определение. ***Первообразной от функции*** $f(x)$ **называется функция** $F(x)$**, производная которой равна данной функции:**

$$F'(x) = f(x).$$

Чтобы лучше отдать себе отчет о соотношении между первообразной и данной функциями, рассмотрим примеры.

Пусть $y = x^2$. Для какой функции x^2 служит производной? Очевидно, для $\frac{x^3}{3}$:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Поэтому первообразной от x^2 является функция $\frac{x^3}{3}$. Но не только она. В самом деле, производной от $\frac{x^3}{3}+5$, $\frac{x^3}{3}-100$ и вообще от $\frac{x^3}{3}+C$, где C — произвольная постоянная величина, будет также x^2. Следовательно, любая функция $\frac{x^3}{3}+C$ является первообразной от x^2.

---

[1]) В прежних изданиях Курса сначала изучался определенный интеграл, а потом неопределенный. Так как чаще поступают наоборот, то в настоящем издании соответствующие параграфы (1 и 2) переставлены, но по-прежнему могут читаться в любой последовательности.

Две функции x^2 и $\frac{x^3}{3}+C$ при любой постоянной C находятся в таком соотношении друг к другу: первая является производной от второй, вторая — первообразной от первой.

Подобно этому любая функция $\ln x + C$ является первообразной от $\frac{1}{x}$, любая функция $\sin x + C$ является первообразной от $\cos x$ и т. д.

При рассмотрении примеров бросается в глаза то обстоятельство, что первообразных у данной функции не одна, а бесчисленное множество, так как постоянная величина C может принимать любые значения; производных же у данной функции, разумеется, только одна.

Сформулируем теперь основную теорему о первообразных.

Теорема. **Всякая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.**

Наиболее трудным моментом доказательства является установление того, что данная непрерывная функция вообще имеет хоть какую-нибудь первообразную. Этот факт мы доказывать не будем, а несколько позже приведем его геометрическую иллюстрацию. Пока же примем, что *любая непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$*.

Но тогда функция $F(x)+C$ при всякой постоянной C будет также первообразной, так как

$$[F(x)+C]' = F'(x) = f(x).$$

Итак, функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество первообразных.

Нам остается показать, что любые две первообразные от функции $f(x)$ отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две первообразные от $f(x)$, тождественно не равные между собой. Имеем

$$F'(x) = f(x), \qquad \Phi'(x) = f(x).$$

Вычитая одно равенство из другого, получим $F'(x) - \Phi'(x) = 0$, т. е. $[F(x) - \Phi(x)]' = 0$. Но если производная от некоторой функции (в нашем случае от $F(x) - \Phi(x)$) тождественно равна нулю, то сама функция есть постоянная (п. **59**); следовательно, $F(x) - \Phi(x) = C_1$ (где C_1 — вполне определенная постоянная), что и требовалось доказать.

Таким образом, выражение $F(x)+C$, где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная от $f(x)$, а C — произвольная постоянная, охватывает все без исключения первообразные от $f(x)$. Придавая различные численные значения C, мы будем получать различные первообразные.

Геометрическая иллюстрация существования первообразной. Приведем теперь геометрическую иллюстрацию того факта, что любая непрерывная функция имеет первообразную.

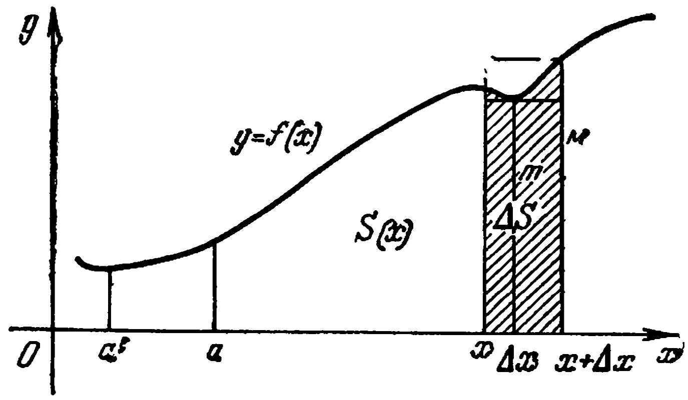

Рис. 101.

Рассмотрим график функции, изображенный на рис. 101. Зафиксируем точку a и обозначим через $S(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, x]$. Ясно, что, меняя x, мы как-то изменяем и площадь криволинейной трапеции $S(x)$. Найдем производную от функции $S(x)$, исходя из определения производной

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}.$$

Пусть x получил приращение Δx; площадь $S(x)$ получает при этом приращение ΔS (рис. 101). Геометрически ясно, что

$$m\Delta x<\Delta S<M\Delta x,$$

где m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в интервале $[x, x+\Delta x]$. Ведь $m\Delta x$ — это площадь прямоугольника, целиком лежащего внутри фигуры, площадь которой обозначена ΔS, а $M\Delta x$ — площадь прямоугольника, содержащего эту фигуру внутри себя. Деля все части неравенства на Δx, получим

$$m<\frac{\Delta S}{\Delta x}<M.$$

Так как $f(x)$ — непрерывная функция, то при $\Delta x\to 0$ и m и M, являющиеся значениями функции в интервале $[x, x+\Delta x]$, будут стремиться к значению функции в точке x, т. е. к $f(x)$. По признаку существования предела (п. **30**) отношение $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ будет стремиться к тому же пределу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x).$$

Таким образом, $S(x)$ действительно является первообразной от $f(x)$.

Так же наглядно можно показать, что первообразных бесчисленное множество. Взяв за начальную не точку a, а какую-нибудь другую точку a', мы получим новую функцию — площадь криволинейной трапеции с основанием $[a', x]$, которая отличается от $S(x)$ на площадь трапеции с основанием $[a', a]$, т. е. на постоянную величину.

Разумеется, приведенное рассуждение, почти полностью основанное на геометрических представлениях, не может служить аналитическим доказательством теоремы. В то же время оно показывает, что отыскание первообразных, или, как мы будем говорить, интегрирование функций, тесно связано с задачей отыскания площадей фигур, ограниченных кривыми линиями.

79. Неопределенный интеграл. Основная таблица интегралов. Введем название действия отыскания первообразных.

Определение. **Отыскание первообразных называется *неопределенным интегрированием*, а выражение, охватывающее множество всех первообразных от данной функции $f(x)$, называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$ и обозначается так:**

$$\int f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, а переменная x — *переменной интегрирования*.

Предполагается, что подынтегральная функция $f(x)$ при рассматриваемых значениях x непрерывна.

В п. 78 было установлено, что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — какая-нибудь из первообразных от $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Неопределенное интегрирование есть действие, обратное дифференцированию. При помощи дифференцирования мы по данной функции находим ее производную, а при помощи неопределенного интегрирования мы по данной производной находим первообразную функцию. Правильность интегрирования всегда можно проверить дифференцированием результата. Выбор символа для обозначения результата операции, обратной дифференцированию, будет оправдан в дальнейшем.

Найти неопределенный интеграл от функции — это значит найти все первообразные от нее (для чего достаточно указать одну из них). Потому и говорят неопределенное интегрирование, что при этом не указывается, какая именно из первообразных имеется в виду.

График первообразной от функции $f(x)$ называется *интегральной кривой* функции $y=f(x)$. Очевидно, мы получим любую другую интегральную кривую, если передвинем какую-нибудь интегральную кривую параллельно самой себе в направлении оси ординат.

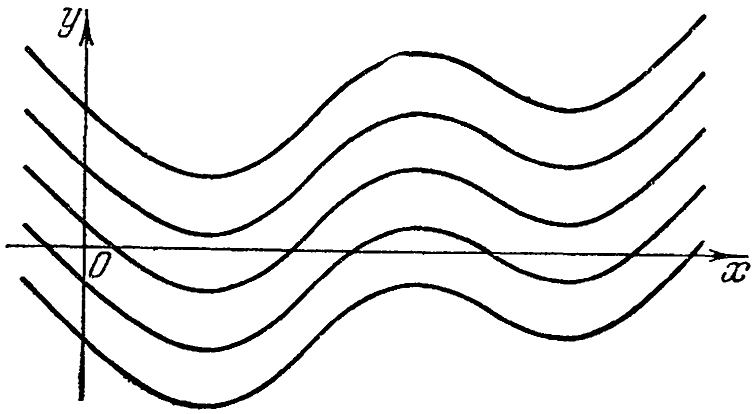

Рис. 102.

Поэтому неопределенный интеграл геометрически представляется множеством всех интегральных кривых, получаемых при непрерывном параллельном движении одной из них по направлению оси Oy (рис. 102).

По самому определению неопределенного интеграла имеем

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$$

или

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$$

и

$$\int f'(x)\,dx=f(x)+C$$

или

$$\int df(x)=f(x)+C.$$

Символы дифференциала и неопределенного интеграла уничтожают друг друга, будучи примененными последовательно (если отвлечься от постоянного слагаемого в двух последних формулах).

В дальнейшем, говоря об интеграле и об интегрировании, мы будем понимать неопределенный интеграл и неопределенное интегрирование.

Приведем прежде всего формулы интегрирования, прямо вытекающие из формул дифференцирования основных элементарных функций. Каждая из них легко проверяется дифференцированием.

Основная таблица интегралов.

1) $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1.$ 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ [1].

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ 4) $\int e^x dx = e^x + C.$

5) $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$ 6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$ 10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C.$

12) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ [2].

Добавим еще формулы интегрирования, связанные с гиперболическими и обратными гиперболическими функциями (см. п. **23**):

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arch} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

(Объединение двух последних формул приводит к формуле (11) основной таблицы.)

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arth} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.$$

---

[1]) В этой формуле x может находиться в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$; изменяться в интервале, содержащем точку 0, он не может, так как в таком интервале подынтегральная функция уже не является непрерывной. Если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$ и производная равна $\frac{1}{x}$. Если же $x < 0$, то $\ln|x| = \ln(-x)$ и производная снова равна $\frac{1}{x}$. Таким образом, формула охватывает оба случая.

[2]) x может находиться в трех интервалах: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$; доказательство общности формулы аналогично приведенному в сноске [1]).

Последняя формула справедлива при $-1<x<1$ (область определения $\operatorname{Arth} x$); ее обобщением и незначительным видоизменением является формула (12).

80. Простейшие правила интегрирования. Примеры.

Теорема I (об интеграле суммы). **Интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых функций**

$$\int (u+v+\ldots+w)\,dx=\int u\,dx+\int v\,dx+\ldots+\int w\,dx, \qquad (*)$$

где $u, v, \ldots, w$ — функции независимой переменной x.

Равенства, в обеих частях которых стоят неопределенные интегралы, означают, что левая и правая их части являются совокупностями первообразных от одной и той же функции. Следовательно, для проверки таких равенств достаточно убедиться, что производные обеих их частей равны между собой.

Производная левой части равенства (*) по определению интеграла равна $u+v+\ldots+w$. Применяя к правой части правило дифференцирования суммы, опять-таки получим

$$\left[\int u\,dx+\int v\,dx+\ldots+\int w\,dx\right]'=$$
$$=\left(\int u\,dx\right)'+\left(\int v\,dx\right)'+\ldots+\left(\int w\,dx\right)'=u+v+\ldots+w.$$

Теорема доказана.

Теорема II (о вынесении постоянного множителя). **Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за символ интеграла**

$$\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx,$$

где c — константа.

Действительно, производные обеих частей равенства равны

$$\left(\int cf(x)\,dx\right)'=cf(x);\quad \left(c\int f(x)\,dx\right)'=c\left(\int f(x)\,dx\right)'=cf(x),$$

что и требовалось доказать.

Пример.

$$\int (2\sin x-3\cos x)\,dx=2\int \sin x\,dx-3\int \cos x\,dx=$$
$$=-2\cos x-3\sin x+C.$$

Хотя каждое промежуточное интегрирование дает произвольное постоянное слагаемое, в окончательном результате указывается только одно слагаемое, так как сумма произвольных постоянных будет также произвольной постоянной.

Теорема III (об инвариантности формул интегрирования). **Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т. е. если**

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \text{ то и } \int f(u)\,du = F(u)+C,$$

где $u=\varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция от x.

Доказательство. Из того, что

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \quad \text{следует} \quad F'(x)=f(x).$$

Возьмем теперь функцию $F(u)=F[\varphi(x)]$; для ее дифференциала в силу теоремы об инвариантности вида первого дифференциала функции (п. **51**, III) имеем

$$dF(u)=F'(u)\,du=f(u)\,du.$$

Отсюда

$$\int f(u)\,du = \int dF(u) = F(u)+C.$$

Это правило очень важно. Основная таблица интегралов в силу этого правила оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией ее; таким образом, основная таблица сразу значительно расширяется.

Возьмем, например, интеграл $\int 2xe^{x^2}\,dx$. Замечая, что $2x\,dx$ есть не что иное, как дифференциал $d(x^2)$, перепишем интеграл так:

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\,d(x^2) = \int e^u\,du,$$

где положено $u=x^2$. Последний интеграл, согласно формуле (4) основной таблицы и теореме III, равен e^u+C, значит,

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2}+C.$$

Как показывает этот пример, нужно стараться так преобразовать подынтегральное выражение, чтобы оно приняло вид подынтегрального выражения известного нам интеграла, например одного из интегралов основной таблицы.

Сразу предупредим читателя, что интегрирование значительно сложнее дифференцирования. Дифференцирование функций (элементарных) производится по раз и навсегда установленным правилам и формулам; интегрирование же требует, так сказать, индивидуального подхода к каждой функции. Нужен большой навык, чтобы быстро и уверенно производить преобразования подынтегрального выражения для приведения интеграла к знакомому (табличному) виду[1]). Приводимые ниже примеры должны помочь в приобретении такого навыка; мы настоятельно рекомендуем читателю после разбора этих примеров самостоятельно решить побольше задач из задачника. Лишь после этого стоит переходить к изучению некоторых общих методов интегрирования, приведенных дальше.

Примеры. 1) $\int \sin 5x\,dx$. Умножим и разделим интеграл на 5 и внесем множитель 5 под символ интеграла:

$$\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x\cdot 5dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x\,d(5x).$$

Полагая $5x = u$, придем к интегралу основной таблицы:

$$\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin u\,du = -\frac{1}{5}\cos u + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

Подобным же образом найдем, например, что

$$\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x) = -\frac{1}{3}\int e^{u}du = $$
$$= -\frac{1}{3}e^{u} + C = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C.$$

2) $\int (2x-1)^{100}\,dx$. Умножая и деля на 2 и замечая, что $2dx = d(2x-1)$, получим

$$\int (2x-1)^{100}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{100}\,d(2x-1).$$

Полагая $2x-1=u$, находим

$$\int (2x-1)^{100}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{100}du = \frac{1}{2}\frac{u^{101}}{101} + C = \frac{1}{202}(2x-1)^{101} + C.$$

Легко видеть все преимущества такого интегрирования по сравнению с интегрированием многочлена, полученного от раскрытия бинома в сотой (!) степени по формуле Ньютона.

3) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$. Преобразуем интеграл к виду

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2+1).$$

---

[1]) Заметим, что такое преобразование далеко не всегда удается выполнить. Это связано с одной специфической трудностью интегрального исчисления, заключающейся в том, что даже для сравнительно простых функций первообразные не всегда выражаются при помощи элементарных функций, т. е. являются функциями более сложного вида. Подробнее об этом будет сказано в п. 85.

Мысленно полагая $x^2+1=u$, получим

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

С развитием навыка в интегрировании не будет нужды записывать все промежуточные выкладки и обозначения. Бо́льшая часть их производится в уме.

4) $\int \frac{dx}{3x-1}$. Имеем

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{(3x-1)'}{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\,(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C.$$

Вообще, *если числитель подынтегральной функции является производной знаменателя, то интеграл равен логарифму абсолютной величины знаменателя.*

В самом деле,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Например:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C,$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C.$$

5) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$. Замечая, что $x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2)$, получим

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x^2) + C.$$

6) $\int \frac{3x+2}{2x-1}\,dx$. Разделив числитель на знаменатель, получим в частном 1,5 и в остатке 3,5. Следовательно,

$$\int \frac{3x+2}{2x-1}\,dx = \int\left(1{,}5 + \frac{3{,}5}{2x-1}\right)dx = 1{,}5x + 1{,}75\ln|2x-1| + C.$$

7) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ и $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$. Имеем

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} =$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Совершенно аналогично найдем второй интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

К этим интегралам легко преобразуются интегралы $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$; нужно только знаменатель представить в виде суммы или разности квадратов. Например,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right| + C.$$

8) $\int \frac{x+3}{x^2+4x+8}\,dx$. К этому интегралу применим комбинированный прием. Замечая, что производная знаменателя равна $2x+4$, запишем числитель в виде $\frac{1}{2}(2x+4)+1$ и разобьем интеграл на сумму двух интегралов, каждый из которых находится уже известными приемами:

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+4x+8} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{2} + C.$$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$. Аналогично примеру 7 получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}\right) + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + C.$$

(При преобразовании логарифмического члена слагаемое — $\ln a$ отнесено к произвольной постоянной.)

10) $\int \sin x \cos x\, dx$. По известной формуле тригонометрии имеем

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin 2x\, d(2x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Этот интеграл можно брать иначе:

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x\, d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

или

$$\int \sin x \cos x\, dx = -\int \cos x\, d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

Может показаться, что для одного и того же интеграла мы получили три существенно различных ответа:

$$-\frac{1}{4}\cos 2x + C, \quad \frac{1}{2}\sin^2 x + C, \quad -\frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

Однако легко проверить, что разность любых двух из них есть величина постоянная. Поэтому каждое из найденных нами выражений дает все множество первообразных от $\sin x \cos x$.

11) $\int \sin^2 x\, dx$ и $\int \cos^2 x\, dx$ легко находятся при помощи формул $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Например,

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C.$$

12) $\int \cos^3 x\, dx$. Последовательно находим

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x\, d(\sin x) = \int (1-\sin^2 x)\, d(\sin x) =$$
$$= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x\, d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

81. Интегрирование по частям и замена переменной. Так как интегрирование—действие, обратное дифференцированию, то каждому правилу дифференцирования должно соответствовать некоторое правило интегрирования. Доказанные в п. **80** три правила интегрирования соответствуют правилам дифференцирования суммы, произведения функции на постоянную величину, сложной функции.

I. Интегрирование по частям. Метод интегрирования по частям следует из формулы дифференцирования произведения двух функций.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$—дифференцируемые функции от x. Имеем

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

откуда

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (*)$$

Это и есть формула интегрирования по частям. Произвольную постоянную при интегрировании $d(uv)$ мы не записываем, присоединяя ее к произвольной постоянной второго, не завершенного в общем виде интегрирования в правой части равенства $(*)$.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ представляется каким-либо образом в виде произведения двух множителей u и dv (последний обязательно содержит dx) и заменяется двумя интегрированиями: 1) при отыскании v из выражения для dv; 2) при отыскании интеграла от $v\,du$. Может оказаться, что эти два интегрирования легко осуществляются, тогда как заданный интеграл непосредственно найти трудно.

Примеры. 1) $\int xe^x dx$. Примем $e^x dx$ за dv, x — за u, т. е. положим

$$\left.\begin{aligned} e^x\,dx &= dv, \\ x &= u, \end{aligned}\right\} \text{ откуда } \left\{\begin{aligned} v &= \int e^x\,dx = e^x, \\ du &= dx. \end{aligned}\right.$$

Получаем по формуле $(*)$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Мы видим, как незнакомый интеграл был приведен к хорошо известным.

Неудачной была бы попытка представить подынтегральное выражение иначе: $x\,dx = dv$, $e^x = u$; тогда $v = \frac{x^2}{2}$, $du = e^x\,dx$ и

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x\,dx.$$

Здесь интеграл в правой части равенства более сложный, чем в левой. Легко заметить, что именно этот более трудный интеграл при помощи удачного применения метода (положить $dv = e^x dx$ и $u = x^2$) приводится к более простому интегралу в левой части, который мы и нашли выше.

2) $\int x \ln x\, dx$. Положим

$$\left.\begin{aligned} x\,dx &= dv, \\ \ln x &= u, \end{aligned}\right\} \text{ откуда } \left\{\begin{aligned} v &= \frac{x^2}{2}, \\ du &= \frac{dx}{x}. \end{aligned}\right.$$

Тогда

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Здесь неудачей было бы положить $\ln x\, dx = dv$, $x = u$, так как интеграл $\int \ln x\, dx$ не проще исходного; его самого следует находить интегрированием по частям, положив $dx = dv$, $\ln x = u$. Тогда $v = x$, $du = \frac{dx}{x}$ и $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$.

Иногда для получения результата нужно последовательно несколько раз применить интегрирование по частям.

3) $\int x^2 \cos x\, dx$. Положим

$$\begin{array}{r|l} \cos x\, dx = dv, & v = \sin x, \\ x^2 = u, & du = 2x\, dx. \end{array}$$

Формула (*) дает

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx.$$

Последний интеграл снова берется по частям. Окончательно получаем

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

С развитием навыка отпадает необходимость подробно записывать все промежуточные выкладки и обозначения.

Многократным интегрированием по частям можно найти интегралы

$$\int x^m \sin x\, dx, \quad \int x^m \cos x\, dx, \quad \int x^m e^x\, dx$$

(m — целое положительное число) и, значит, интегралы

$$\int P(x) \sin x\, dx, \quad \int P(x) \cos x\, dx, \quad \int P(x)\, e^x\, dx,$$

где $P(x)$ — любой многочлен.

Повторное интегрирование по частям иногда приводит к первоначальному интегралу, и тогда получается или ничего не дающее тождество (повторное интегрирование было произведено неудачно), или же такое равенство, что из него удается найти выражение для искомого интеграла. Рассмотрим пример

4) $\int e^x \cos x\, dx$. Положим

$$\begin{array}{l|l} e^x\, dx = dv, & v = e^x, \\ \cos x = u, & du = -\sin x\, dx. \end{array}$$

Отсюда

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx.$$

Снова применим интегрирование по частям, положив[1])

$$\begin{array}{l|l} e^x dx = dv, & v = e^x, \\ \sin x = u, & du = \cos x dx. \end{array}$$

Тогда получим

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx,$$

и мы пришли к исходному интегралу. Подставив найденное выражение в результат первой операции, получим

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx;$$

перенося интеграл из правой части в левую, найдем

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

Умение правильно определять, когда и как следует применять метод интегрирования по частям, вырабатывается практикой.

II. Замена переменной (метод подстановки). При отыскании интегралов мы уже неоднократно пользовались теоремой III п. **80** об инвариантности формул интегрирования. Если подынтегральное выражение удавалось записать в виде

$$f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx = f(u)\, du,$$

где $u = \varphi(x)$ и интеграл от выражения справа известен:

$$\int f(u)\, du = F(u) + C,$$

то исходный интеграл был равен

$$\int f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Основную трудность как раз и представляет преобразование подынтегрального выражения, так как заранее неизвестно к чему

[1]) Если здесь принять $\sin x\, dx$ за dv, то придем к тождеству

$$\int e^x \cos x\, dx = \int e^x \cos x\, dx.$$

нужно придти и какой должна быть функция $\varphi(x)$. В п. **80** мы уже познакомились с самыми разнообразными примерами таких преобразований; при этом в простейших случаях формула подстановки $u=\varphi(x)$ не записывалась и окончательное выражение для интеграла получалось сразу.

В более сложных случаях рекомендуется сначала выбрать ту подстановку, которая представляется удачной, и лишь после преобразования подынтегрального выражения смотреть, добились ли мы своей цели — упрощения интеграла. Может оказаться, что новый интеграл еще не является табличным, но приводится к такому проще чем исходный; это уже оправдывает сделанную подстановку.

Например, интеграл $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx$ в результате подстановки $\sin x=u$, $\cos x\,dx=du$ приводится к интегралу $\int \frac{2u}{1+u^4}\,du$. Записав последний в виде $\int \frac{d\,(u^2)}{1+(u^2)^2}$ (при этом подстановка $u^2=v$ совершается в уме), видим, что он равен $\operatorname{arctg} u^2+C$ и значит

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx=\operatorname{arctg}(\sin^2 x)+C.$$

(Более сложная подстановка $\sin^2 x=u$ сразу привела бы заданный интеграл к табличному.)

До сих пор мы применяли метод подстановки, заменяя переменную интегрирования x другой переменной u при помощи формулы $u=\varphi(x)$. Можно производить замену, выражая не u через x, а наоборот x через u, т. е. полагая

$$x=\psi(u),\quad dx=\psi'(u)\,du$$

(предполагается, что $\psi(u)$ и $\psi'(u)$ непрерывны). Тогда

$$f(x)\,dx=f[\psi(u)]\,\psi'(u)\,du$$

$$\int f(x)\,dx=\int f[\psi(u)]\,\psi'(u)\,du. \tag{**}$$

Если последний интеграл удалось найти и он оказался равным $F(u)+C$, то заданный интеграл находится возвращением к переменной x. Для этого нужно из уравнения $x=\psi(u)$ выразить u через x, т. е. найти обратную функцию и подставить ее вместо u в выражение найденного интеграла.

Как и раньше, самое трудное — это удачно выбрать подстановку $x=\psi(u)$. Приведем примеры, иллюстрирующие обе формы замены переменной.

Примеры. 1) $\int x^2\sqrt[3]{4-3x^3}\,dx$. Положим $4-3x^3=u$.

Дифференцируя, имеем: $-9x^2dx = du$ и $x^2dx = -\frac{1}{9}du$. Поэтому

$$\int x^2 \sqrt[3]{4-3x^3}\,dx = -\frac{1}{9}\int \sqrt[3]{u}\,du = -\frac{1}{12}u^{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= -\frac{1}{12}(4-3x^3)\sqrt[3]{4-3x^3} + C.$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. Положим $\sqrt{e^x+1} = u$, т. е. $e^x+1 = u^2$. Тогда

$$e^x\,dx = 2u\,du \quad \text{и} \quad dx = \frac{2u\,du}{e^x} = \frac{2u\,du}{u^2-1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2u\,du}{(u^2-1)\,u} = 2\int \frac{du}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

Нередко вместе с заменой переменной нужно применить другие методы (например, интегрирование по частям), для того чтобы довести задачу до конца.

3) $\int x^5 e^{x^3}\,dx$. Положим $x^3 = u$. Имеем $3x^2\,dx = du$ и, значит,

$$\int x^2 x^3 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int ue^u\,du,$$

а этот интеграл, как мы знаем (I, пример 1), берется по частям. Получаем

$$\int x^5 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^u(u-1) + C = \frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1) + C.$$

Пока мы пользовались подстановками типа $u = \varphi(x)$. Покажем теперь применение подстановок типа $x = \psi(u)$ на примерах очень часто встречающихся *тригонометрических* и *гиперболических* подстановок.

4) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Положим $x = \sin u$, $dx = \cos u\,du$. Подставляя, находим

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right) + C$$

(см. пример 11 п. 80). Возвращаясь к переменной x и замечая, что $\sin 2u = 2\sin u\cos u = 2x\sqrt{1-x^2}$, получим

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

5) $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$. Здесь очень удобна подстановка[1]) $x=\operatorname{sh}u$, $dx=\operatorname{ch}u\,du$:

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\operatorname{ch}^2u\,du=\frac{1}{2}\int(1+\operatorname{ch}2u)\,du=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\operatorname{sh}2u\right)+C.$$

Так как $u=\operatorname{Arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (см. п. **23**, II), а $\operatorname{sh}2u=2\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u=2x\sqrt{x^2+1}$, то

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]+C.$$

Аналогично при помощи подстановки $x=\operatorname{ch}u$ найдем

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right]+C.$$

Процесс интегрирования обычно состоит в *целесообразном* применении изложенных выше приемов (алгебраические преобразования подынтегрального выражения, интегрирование по частям, интегрирование подстановкой), для того чтобы привести заданный интеграл к интегралу, уже известному.

82. Интегрирование рациональных функций. Важнейшим классом элементарных функций, интегралы от которых находятся при помощи достаточно простой последовательности действий[2]), является класс *рациональных функций* (п. **11**). Всякая рациональная функция $R(x)$ может быть представлена в виде дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — *многочлены*:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Прежде всего заметим, что если степень m числителя $P(x)$ больше или равна степени n знаменателя $Q(x)$, то, разделив многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, мы получим в частном некоторый многочлен $N(x)$ и в остатке многочлен $P_1(x)$ не выше $(n-1)$-й степени. Следовательно,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=N(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

---

[1]) Другая возможная подстановка $x=\operatorname{tg}u$ приводит к очень громоздким преобразованиям. Введение гиперболических функций, хотя к ним читатель, возможно, и менее привык, позволяет значительно упростить производимые преобразования.

[2]) Последовательность действий называется *алгоритмом*.

Интегрирование многочлена $N(x)$ не доставляет никаких затруднений, и значит, весь вопрос заключается в интегрировании дроби, степень числителя которой меньше степени знаменателя.

Итак, пусть степень числителя меньше степени знаменателя ($m<n$). Такую рациональную дробь иногда называют *правильной*.

1. Разложение на простейшие дроби. Мы предполагаем, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют действительные коэффициенты, причем коэффициент многочлена $Q(x)$ при x^n равен 1 (этого всегда можно достигнуть делением числителя и знаменателя на коэффициент при x^n).

Многочлен $Q(x)$ — знаменатель заданной подынтегральной рациональной дроби — согласно п. **75**, I, может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами

$$Q(x)=(x-\alpha)^k \ \ldots \ (x^2+px+q)^t \ \ldots, \tag{*}$$

где α есть k-кратный действительный корень уравнения $Q(x)=0$, а квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет сопряженные комплексные корни (и значит, $p^2-4q<0$), которые служат t-кратными сопряженными комплексными корнями уравнения $Q(x)=0$. Интегрирование рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ мы основываем на знании разложения (*) многочлена $Q(x)$ на действительные множители (или, что равносильно этому, на знании всех корней уравнения $Q(x)=0$). Задачей отыскания корней алгебраического уравнения $Q(x)=0$ мы здесь специально заниматься не будем и в последующем полагаем, что разложение (*) так или иначе является известным. При этом оказывается, что дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы так называемых *простейших дробей* 1-го и 2-го *видов*

$$\frac{A_i}{(x-\alpha)^i}, \qquad \frac{B_i x+C_i}{(x^2+px+q)^i},$$

где A_i, B_i, C_i — постоянные, а именно:

Каждому множителю $(x-\alpha)^k$ в представлении (*) знаменателя $Q(x)$ соответствует в разложении дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на слагаемые сумма k простейших дробей 1-го вида

$$\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-\alpha},$$

а каждому множителю $(x^2+px+q)^t$ соответствует сумма t

простейших дробей 2-го вида

$$\frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q}.$$

Доказывать это предложение в общем случае мы не будем; на рассматриваемых подробно примерах будет видно, как можно фактически осуществить разложение заданной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби, т. е. найти все неизвестные коэффициенты A_i, B_i, C_i.

Таким образом, при разложении (*) знаменателя $Q(x)$ на множители имеет место разложение дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на слагаемые:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \ldots + \frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \\ + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+px+q} + \ldots \quad (**)$$

Отсюда следует, что интеграл от всякой рациональной дроби сводится к интегралам от простейших рациональных дробей 1-го и 2-го видов, а эти интегралы находятся очень легко, что мы и увидим опять-таки на нижеследующих примерах. Эти примеры необходимо разобрать основательно, ибо на них мы демонстрируем, избегая общих рассмотрений, возможные случаи интегрирования рациональных дробей.

Итак, *предлагаемый метод интегрирования рациональных дробей* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *состоит в том, что, зная разложение знаменателя на множители, мы составляем разложение* (**) *и данный интеграл заменяем суммой интегралов от соответствующих простейших дробей.*

II. Примеры.

1) $\int \frac{x-3}{x^3-x}\,dx$. Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби должно иметь вид

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

(какими буквами обозначены коэффициенты, не имеет, конечно, никакого значения). Прежде всего нам нужно найти коэффициенты A, B, C.

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x-3 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1).$$

Так как это — тождество, то, согласно замечанию на стр. 243, коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны между собой:

$$0=A+B+C, \qquad 1=B-C, \qquad -3=-A.$$

Из этой системы трех уравнений с тремя неизвестными находим

$$A=3, \qquad B=-1, \qquad C=-2.$$

Еще проще для определения коэффициентов A, B и C поступить так: полагая последовательно $x=0$, $x=1$, $x=-1$, получим: $-3=-A$, $-2=2B$, $-4=2C$, т. е. снова

$$A=3, \qquad B=-1, \qquad C=-2.$$

Итак, тождественно

$$\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1},$$

поэтому

$$\int\frac{x-3}{x^3-x}\,dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{x+1}=$$
$$=3\ln|x|-\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C=$$
$$=\ln\left|\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}\right|+C.$$

2) $\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\,dx$. Разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители. Замечая, что он обращается в нуль при $x=-1$, разделим его на $x+1$; в частном получится $x^2-4x+4=(x-2)^2$ и, значит, разложение дроби на простейшие должно иметь вид

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}.$$

Найдем коэффициенты A, B, C. Приводя к общему знаменателю и освобождаясь от него, получим

$$x-5=A(x-2)^2+B(x+1)+C(x+1)(x-2).$$

Здесь удобно положить $x=-1$, $x=2$, $x=0$; получаем

$$-6=9A, \qquad -3=3B, \qquad -5=4A+B-2C.$$

Отсюда

$$A=-\frac{2}{3}, \quad B=-1, \quad C=\frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\,dx=-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}=$$
$$=-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln|x-2|+C.$$

3) $\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx$. Знаменатель легко раскладывается на множители:

$$x^4+x^3-x-1 = x^3(x+1)-(x+1) = (x+1)(x^3-1) = \\ = (x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Разлагаем подынтегральную функцию на простейшие:

$$\frac{12}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Коэффициенты A, B, C, D находим из тождества

$$12 = A(x-1)(x^2+x+1)+B(x+1)(x^2+x+1)+ \\ +(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

Подставляя сюда четыре различных численных значения x, например $x=1$, $x=-1$, $x=0$, $x=2$, получаем систему

$$12 = 6B, \qquad 12 = -A+B-D,$$
$$12 = -2A, \qquad 12 = 7A+21B+3(2C+D),$$

из которой находим

$$A=-6, \quad B=2, \quad C=4, \quad D=-4.$$

Следовательно,

$$\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx = -6\int \frac{dx}{x+1}+2\int \frac{dx}{x-1}+4\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx.$$

Последний интеграл в правой части находим, выделяя в числителе производную знаменателя:

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \\ = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx = -6\ln|x+1|+2\ln|x-1|+ \\ +2\ln(x^2+x+1)-4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

4) $\int \frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. Знаменатель подынтегральной дроби уже дан своим разложением (*) на множители. Имеем

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1},$$

где постоянные A, B, C, D, E будут найдены из того условия, что это равенство (разложение) тождественное. Освобождаемся от знаменателей:

$$x^2+x-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)x(x^2+1).$$

Здесь проще приравнять друг другу коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях. Начиная с коэффициента при x^4, получим следующую систему:

$$A+D=0,\ E=0,\ 2A+B+D=1,$$
$$C+E=1,\ A=-1.$$

Решая эту систему, находим

$$A=-1,\quad B=2,\quad C=1,\quad D=1,\quad E=0.$$

Значит, тождественно

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1},$$

и поэтому

$$\int\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}\,dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx+\int\frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

Первый и третий интегралы справа известны: они равны соответственно $-\ln x$ и $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

Займемся вторым интегралом:

$$\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Последний интеграл в правой части обозначим через I_2:

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Применим здесь следующий прием. К числителю подынтегрального выражения прибавим и вычтем x^2 и разобьем интеграл на два интеграла:

$$I_2=\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Применяя интегрирование по частям ко второму интегралу:

$$\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=dv, \quad x=u, \qquad \left| \quad v=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}, \quad du=dx, \right.$$

получим

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{x}{2\,(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Подставляя в выражение для I_2, найдем

$$I_2=\frac{x}{2\,(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2\,(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Окончательно исходный интеграл равен

$$\int\frac{x^2+x-1}{x\,(x^2+1)^2}\,dx=-\ln x-\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{2\,(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+$$
$$+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C=\frac{x-2}{2\,(x^2+1)}+\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Легко проверить правильность ответа: производная правой части равна подынтегральной функции.

Прием, указанный для отыскания I_2, применим и для отыскания интеграла

$$I_k=\int\frac{dx}{(x^2+1)^k}$$

при произвольном целом $k>1$. Если записать, что

$$\frac{1}{(x^2+1)^k}=\frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}-\frac{x^2}{(x^2+1)^k}$$

и преобразовать интеграл от второго слагаемого при помощи интегрирования по частям, как это сделано выше, то получим равенство

$$I_k=\frac{x}{2\,(k-1)\,(x^2+1)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2\,(k-1)}\,I_{k-1}.$$

Это — так называемая *формула приведения (рекуррентная формула)* для отыскания I_k. Заменив в ней k на $k-1$, получим выражение интеграла I_{k-1} через I_{k-2} и т. д. В конце концов мы придем к интегралу

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+C,$$

и интегрирование будет завершено. Предоставляем читателю проверить, что, например,

$$I_4=\frac{x}{6\,(x^2+1)^3}+\frac{5x}{24\,(x^2+1)^2}+\frac{5x}{16\,(x^2+1)}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}x+C.$$

В заключение еще раз подчеркнем, что если отвлечься от чисто алгебраических трудностей, то интеграл от любой рациональной функции всегда может быть найден. Из приведенных примеров видно, что он выражается через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы, т. е. является элементарной функцией. Это замечание существенно, так как во многих случаях интегралы даже от очень простых функций уже не будут функциями элементарными (см. п. **85**, III), и мы, пытаясь привести их к табличным интегралам, лишь понапрасну тратим время.

Поэтому очень часто при интегрировании главные усилия направляются на отыскание такой замены переменной, которая приводила бы данный интеграл к интегралу от рациональной функции; тогда дальнейший путь интегрирования ясен. О таких заменах говорят, что они *рационализируют* интеграл. Примеры общих замен такого типа приведены в пп. **83** и **84**.

Будем в дальнейшем символом $R(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ обозначать выражение, рациональное относительно $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, т. е. такое, в котором над $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ производятся только рациональные действия. Ясно, что если каждая из величин $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ является рациональной функцией некоторой переменной u, то и все выражение $R(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ будет тоже рациональной функцией от u.

83. Интегрирование простейших иррациональных функций.

I. Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}, \ldots)\, dx, \tag{*}$$

где подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования x и различных радикалов из x. Обозначим через n наименьшее кратное всех показателей $k, m, \ldots$; тогда все отношения $\frac{n}{k} = r_1, \frac{n}{m} = r_2, \ldots$ — целые числа.

Интеграл (*) *заменой переменной*

$$x = u^n, \qquad dx = nu^{n-1}\, du$$

приводится к интегралу от рациональной функции (рационализируется).

В самом деле, при указанной замене интеграл (*) принимает вид

$$\int R(u^n, u^{r_1}, u^{r_2}, \ldots)\, nu^{n-1}\, du$$

и, согласно замечанию, сделанному в конце предыдущего пункта, подынтегральное выражение есть рациональная функция от u.

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Положим $x=u^6$. Тогда $\sqrt{x}=u^3$, $\sqrt[3]{x}=u^2$, $dx=6u^5\,du$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int \frac{u^5}{u^3+u^2}\,du=6\int \frac{u^3}{u+1}\,du.$$

Дальнейшее просто: выделяя целую часть и интегрируя, получим

$$6\int \frac{u^3}{u+1}\,du=6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln|u+1|\right)+C,$$

и, возвращаясь к старой переменной,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

Почти ничего не изменится, если все подкоренные выражения есть одна и та же дробно-линейная функция $\frac{ax+b}{px+q}$, т. е. интеграл имеет вид

$$\int R\left(x,\ \sqrt[k]{\frac{ax+b}{px+q}},\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{px+q}},\ \ldots\right)dx.$$

В этом случае интеграл рационализируется заменой

$$\frac{ax+b}{px+q}=u^n,\qquad x=\frac{qu^n-b}{a-pu^n},$$

$$dx=\frac{aq-bp}{(a-pu^n)^2}\,nu^{n-1}\,du.$$

Если $p=0$, $q=1$, т. е. подкоренное выражение — линейная функция, то все преобразования значительно упрощаются.

II. Рассмотрим несколько интегралов, зависящих от иррационального выражения $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Выносся за символ интеграла $\frac{1}{\sqrt{a}}$ (если $a>0$) или $\frac{1}{\sqrt{-a}}$ (если $a<0$), приведем интеграл к виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}\quad \text{или}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}.$$

Выделяя полные квадраты, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}}\quad \text{или}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4q+p^2}{4}-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}}.$$

Согласно решению примера 9 п. **80** первый интеграл выражается через логарифмы, а второй при $4q+p^2>0$ — через арксинус; если же во втором интеграле $4q+p^2\leqslant 0$, то подынтегральная функция принимает лишь мнимые значения.

2) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Легко проверить, что замена $x-\alpha=\frac{1}{u}$ приводит этот интеграл к интегралу вида 1).

3 $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. Этот интеграл можно разбить на два интеграла, выделив в числителе производную подкоренного выражения; тогда один легко взять непосредственно (как интеграл от степенной функции), а второй является интегралом вида 1).

4) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. Выделением полного квадрата в подкоренном выражении интеграл сводится к одному из трех известных интегралов (п. **81**, II, примеры 4 и 5):

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad \int \sqrt{x^2\pm 1}\,dx.$$

84. Интегрирование тригонометрических функций. Пусть дано выражение, зависящее, и притом рационально, только от тригонометрических функций. Так как все тригонометрические функции рационально определяются через $\sin x$ и $\cos x$, то это выражение можно считать рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$, т. е. оно имеет вид $R(\sin x,\ \cos x)$.

Интеграл $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$ *подстановкой* $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ *преобразуется в интеграл от рациональной функции (рационализируется).*

По известным тригонометрическим формулам

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

т. е.

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Наконец, из равенства $x=2\operatorname{arctg}u$ имеем $dx=\frac{2}{1+u^2}\,du$. Итак,

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\ \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\,du.$$

Подынтегральная функция рациональна относительно u.

Примеры. 1) $\int \frac{dx}{\sin x}$ и $\int \frac{dx}{\cos x}$. Полагая $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+u^2}{2u}\,\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

2) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. Полагаем $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{2du}{(1+u^2)\left(3+5\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{du}{4-u^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

Вообще, с помощью указанного приема очень удобно вычислять интегралы вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$.

Метод интегрирования функций $R(\sin x, \cos x)$ с помощью подстановки $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ всегда приводит к цели, но именно в силу своей общности он часто является не наилучшим в смысле краткости и простоты необходимых преобразований.

Если, например, $\sin x$ и $\cos x$ входят в выражение функции R только в четных степенях, то гораздо быстрее ведет к цели подстановка $u = \operatorname{tg} x$. Тогда $\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$, и интеграл рационализируется.

3) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} = \int \frac{du}{(1+u^2)\left(\frac{u^2}{1+u^2} - \frac{3}{1+u^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}x+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Такой же подстановкой берется интеграл вида $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$.

4) $$\int \frac{dx}{1+2\operatorname{tg} x} = \int \frac{du}{(1+u^2)(1+2u)}.$$

Находя интеграл от рациональной дроби и возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{dx}{1+2\operatorname{tg} x} = \frac{1}{5}[x+2\ln|\cos x+2\sin x|]+C.$$

Часто также бывает выгодным принять $u=\sin x$ или $u=\cos x$. Для иллюстрации рассмотрим интегралы типа

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

где m и n — целые числа. При их отыскании можно вообще избежать интегрирования рациональных дробей.

а) Если $m>0$ и нечетное, то подстановка $\cos x=u$ сразу приводит интеграл к сумме интегралов от степенных функций; если $n>0$ и нечетное, то к тому же приводит подстановка $\sin x=u$.

5) $$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\sin x\,dx = -\int \frac{(1-u^2)^2}{u^2}\,du,$$

где $u=\cos x$. Разбивая интеграл на сумму интегралов, интегрируя и возвращаясь к переменной x, получим

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x}+2\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

б) Если оба показателя m и n положительны и четны, то с успехом применяются тригонометрические преобразования с кратными аргументами.

6) $$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx +$$
$$+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x\cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

(Подстановка $\operatorname{tg} x=u$ привела бы к более длинным выкладкам.)

в) Если оба показателя m и n отрицательны и сумма их четна, то подстановка $u=\operatorname{tg} x$ (или $u=\operatorname{ctg} x$) снова приводит интеграл к сумме интегралов от степенных функций.

7) $$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x} = \int \frac{du}{(1+u^2)\dfrac{u^3}{(1+u^2)^{3/2}}\dfrac{1}{(1+u^2)^{1/2}}} =$$
$$= \int \frac{1+u^2}{u^3}\,du = -\frac{1}{2u^2}+\ln|u|+C = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+\ln|\operatorname{tg} x|+C.$$

К тому же самому ведет применение искусственного приема: единица в числителе представляется как $(\sin^2 x+\cos^2 x)^k$, где $2k=|m+n|-2$.

8) $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^6 x} dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + 2 \int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x} dx =$$
$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C.$$

г) Если один из показателей равен нулю, а второй есть отрицательное нечетное число, то общая подстановка $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ опять-таки приводит к интегрированию степенных функций.

9) $$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{2du}{(1+u^2)\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^3} = -\frac{1}{8u^2} + \frac{1}{2} \ln |u| + \frac{u^2}{8} + C =$$
$$= -\frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{8} + C.$$

10) $$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{dx}{\sin^3 \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Легко заметить, что и при других показателях m и n интеграл сводится к сумме интегралов рассмотренных типов; например ($m = -2$, $n = -3$):

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^3 x} dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

Трудности, связанные с разнообразием применяемых приемов, полностью искупаются легкостью заключительного интегрирования.

Интегралы $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ очень удобно отыскивать при помощи

рекуррентных формул, позволяющих постепенно переходить от бо́льших показателей степеней m и n к меньшим. В таблице, приведенной в конце книги, эти формулы значатся под номерами 64 и 65. Покажем на одном примере метод их получения. Обозначим через

$$I_n = \int \cos^n x \, dx.$$

Положим

$$dv = \cos x \, dx, \qquad u = \cos^{n-1} x.$$

При этом

$$v = \sin x, \quad du = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x \, dx$$

и

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx =$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx,$$

откуда

$$n I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

и, следовательно,

$$I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Это и есть *формула приведения*, которую мы хотели получить. Она позволяет легко довести задачу нахождения интеграла до конца.

Заметим, наконец, что к интегрированию функций $R(\sin x, \cos x)$ может быть приведено с помощью различных преобразований и подстановок интегрирование целого ряда других функций, например функций $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, т. е. функций, рациональных относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Но на этом вопросе мы задерживаться не будем.

85. Заключительные замечания. Использование таблиц интегралов.

1. *О технике интегрирования.* Сравнительно в редких случаях удается дать правила для интегрирования функций. Но и тогда, когда имеется теоретическая схема для получения окончательного результата интегрирования, она вовсе не является наилучшим, наиболее экономным путем. Интегрирование чаще всего может быть выполнено не единственным способом. И всякий раз частные обстоятельства должны подсказать тот искусственный прием, который в данном случае быстрее всех других приводит к цели. Владение операцией интегрирования (как и всякой математической операцией) заключается не только в знании того, как *можно* в конце концов найти данный интеграл, но и в умении взять его с минимумом затраченного времени и труда.

Для характеристики этого приведем простой пример.

Возьмем интеграл

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^4} \, dx.$$

Было бы оплошностью применить здесь общее правило (разложить данную дробь на простейшие). Можно заметить, что предварительная подстановка $u = x+1$ значительно облегчает задачу:

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^4} \, dx = \int \frac{(u-1)^3}{u^4} \, du = \int \frac{du}{u} - 3 \int \frac{du}{u^2} + 3 \int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u^4} =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + C.$$

Изобретательность и навык приобретаются практикой при решении достаточно большого числа примеров.

II. Использование таблиц интегралов. Изученные нами методы интегрирования состоят в преобразованиях, приводящих данный интеграл к интегралу, заранее известному, т. е. находящемуся в известной таблице интегралов. До сих пор мы пользовались только самой краткой — основной таблицей интегралов. Но ясно, что чем более полной таблицей интегралов мы имеем возможность пользоваться, тем проще и короче делается само интегрирование.

В практических целях часто употребляют различные справочники и готовые таблицы особенно часто встречающихся интегралов. В конце книги имеется таблица интегралов, сравнительно небольшая, но достаточная для нахождения интегралов в практически часто встречающихся случаях. Покажем на двух примерах ее применение.

1) $\int \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{-1+4x-2x^2}}\,dx$. Этого интеграла нет в нашей таблице, но его нетрудно привести к интегралам, находящимся в ней. Прежде всего подкоренной квадратный трехчлен $-1+4x-2x^2$ преобразуем к виду квадратного двучлена:

$$-1+4x-2x^2=-[1+2(x^2-2x)]=1-2(x-1)^2.$$

В интеграле заменим переменную интегрирования по формуле $u=x-1$, т. е. $x=u+1$; получим

$$\int \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{-1+4x-2x^2}}\,dx=\int \frac{(u+1)^2-3(u+1)+1}{\sqrt{1-2u^2}}\,du=$$

$$=\int \frac{u^2}{\sqrt{1-2u^2}}\,du-\int \frac{u}{\sqrt{1-2u^2}}\,du-\int \frac{du}{\sqrt{1-2u^2}}.$$

Каждый из трех интегралов в правой части равенства имеется в таблице — в формулах 33, 31, 29. Пользуясь этими формулами при $a=\sqrt{2}$, $b=1$, находим

$$\int \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{-1+4x-2x^2}}\,dx=\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}u\sqrt{1-2u^2}+\arcsin\sqrt{2}u\right)\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-2u^2}\right]-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}u\right]+C=$$

$$=\frac{1}{4}(2-u)\sqrt{1-2u^2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}u+C.$$

Возвращаясь к заданной переменной x, приходим к окончательному ответу

$$\int \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{-1+4x-2x^2}}\,dx = \frac{1}{4}(3-x)\sqrt{-1+4x-2x^2} - \\ - \frac{3}{4\sqrt{2}} \arcsin\sqrt{2}\,(x-1) + C.$$

2) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$. По формуле 70 при $m=4$, $n=2$ получаем (по второй строке)

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{1}{6}\int \sin^4 x\, dx.$$

Интеграл в правой части равенства находим снова по формуле 64 при $m=4$, $n=0$ (по первой строке):

$$\int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\, dx$$

и далее ($m=2$, $n=0$):

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C.$$

Значит, окончательно

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \\ = \frac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \frac{1}{24}\sin^3 x \cos x - \frac{1}{16}\cdot\sin x \cos x + \frac{1}{16}x + C.$$

III. **Об интегрировании в элементарных функциях.** В отличие от дифференцирования, интегрирование не есть действие, *всегда* позволяющее найти элементарную функцию, являющуюся *первообразной* от заданной элементарной функции. Строго доказано, что во многих случаях и не существует такого элементарного выражения для первообразной. Другими словами, можно указать элементарные функции, интегралы от которых не выражаются никакими конечными комбинациями *основных* элементарных функций. Про такие функции говорят, что они не *интегрируемы в элементарных функциях* (или не интегрируемы в конечном виде).

Так, например, интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}},\ \int \frac{e^x}{x}\,dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\ \int \frac{dx}{\ln x},\ \int e^{-x^2}\,dx$$

нельзя представить никакими элементарными функциями.

Следует различать *существование* функции и возможность ее выражения с помощью *элементарных функций*. Указанные интегралы существуют, но наших средств—всех основных элементарных функций—оказывается недостаточно для того, чтобы составить из них конечные выражения для этих интегралов.

Разъясним эту мысль. Допустим, что мы позволяем себе пользоваться всеми основными элементарными функциями, кроме логарифмической. Тогда многие известные интегралы станут неберущимися. Например, при этом нельзя будет выразить в конечном виде $\int \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dx}{x^2-1}$ и т. п. В самом деле, среди принятых функций (раз нет в распоряжении логарифмической) не существует функции, производная которой была бы равна $\frac{1}{x}$ или $\frac{1}{x^2-1}$ и т. п. Включив в рассмотрение и логарифмическую функцию, мы сумеем выразить эти интегралы в конечном виде, но не будет ничего удивительного, если другие интегралы останутся еще не берущимися в конечном виде. Для того чтобы сделать и их берущимися, нужно расширить класс основных функций, которыми условились пользоваться. Так в анализе и поступают. Среди неберущихся интегралов выделяют особенно простые и важные и детально изучают определяемые ими неэлементарные функции. Эти новые функции пополняют запас наших средств и делают доступным для интегрирования в конечном виде ряд не интегрируемых в старом смысле функций.

§ 2. Определенный интеграл

86. Некоторые задачи геометрии и физики. К понятию определенного интеграла приводят самые разнообразные задачи определение площади плоской фигуры, отыскание работы переменной силы, нахождение пути по заданной переменной скорости и многие, многие другие. Разберем эти задачи по отдельности. При этом сначала покажется, что методы их решения никак не связаны с содержанием предыдущего параграфа—неопределенного интегрирования. Лишь позже, установив свойства определенного интеграла, мы обнаружим его тесную связь с неопределенным интегралом; именно эта связь и будет лежать в основе практического решения поставленных задач.

I. Площадь криволинейной трапеции. Теория площадей исходит из двух положений:

1) площадь фигуры, составленной из нескольких фигур, равна сумме площадей этих фигур;

2) площадь прямоугольника равна произведению его измерений.

В элементарной геометрии, опираясь на эти положения, находят площадь треугольника, а также и площадь многоугольника, так как всякий многоугольник может быть разбит на треугольники.

С помощью предельного перехода по площадям правильных вписанных и описанных многоугольников определяется площадь круга. Однако при этом используются особые геометрические свойства фигуры (круга), что в других случаях делается очень затруднительным.

Прежде всего определим площадь *криволинейной трапеции*, т. е. фигуры, ограниченной осью Ox, графиком непрерывной функции

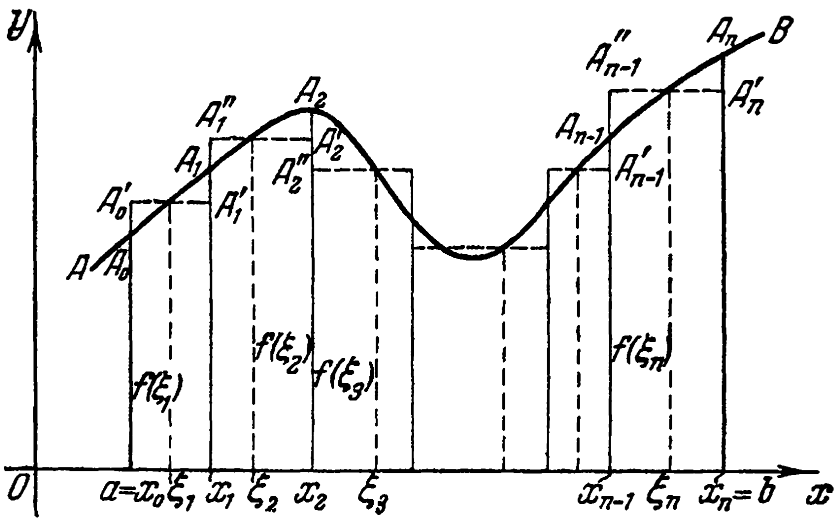

Рис. 103.

$[=f(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 103); интервал $a, b]$ оси Ox назовем *основанием* трапеции[1]). Будем пока предполагать, что $f(x)>0$ в интервале $[a, b]$, т. е. что трапеция расположена над осью Ox. Разделим основание трапеции — интервал $[a, b]$ — на n частичных интервалов

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n],$$

где $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

Проведя в точках деления интервала $[a, b]$ прямые, параллельные оси ординат, мы разобьем рассматриваемую криволинейную трапецию на n частичных трапеций (рис. 103).

Возьмем теперь в каждом из частичных интервалов по произвольной точке и обозначим их через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, так что

$$x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1, \quad x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n.$$

(Некоторые из выбранных точек ξ, или даже все, могут совпадать с точками деления интервала $[a, b]$ на частичные.)

В точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ проведем прямые, параллельные оси Oy, до пересечения с линией $y=f(x)$; отрезки этих прямых — ординаты точек графика — соответственно равны $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$.

---

[1]) Эта терминология отличается от принятой в элементарной геометрии, где интервал $[a, b]$ называется высотой трапеции, а основаниями ее называются отрезки параллельных прямых $x=a$, $x=b$.

На частичных интервалах как на основаниях построим n прямоугольников с высотами, равными соответственно значениям функции $f(x)$ в точках ξ_i (рис. 103). Мы получили n-ступенчатую фигуру, которую также можно рассматривать как криволинейную трапецию с основанием $[a, b]$, но ограниченную не заданной линией $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$, а ломаной $A_0'A_1'A_1''A_2'A_2''\ldots A_n'$.

Площадь s_n этой n-ступенчатой фигуры мы будем считать приближенным значением площади s заданной криволинейной трапеции, тем более точным, чем больше n и чем меньше длины частичных интервалов. Другими словами, мы исходим из того естественного и наглядного представления, что чем больше число прямоугольников и чем они у́же, тем теснее построенная указанным сейчас способом ломаная линия $A_0'A_1'\ldots$ примыкает к заданной линии $A_0A_1\ldots$ и тем лучше площадь s_n соответствующей n-ступенчатой фигуры должна выражать площадь s заданной трапеции. Отсюда ясно, что *площадью s криволинейной трапеции, ограниченной линией $A_0A_1A_2\ldots A_n$ следует назвать предел, к которому стремится переменная площадь n-ступенчатой фигуры, ограниченной ломаной линией $A_0'A_1'A_1''A_2'\ldots A_n'$ при неограниченном увеличении числа n и при стремлении к нулю наибольшей длины частичных интервалов.*

Следует иметь в виду, что точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ могут быть произвольными, но необходимо, чтобы при неограниченном увеличении числа n частичных интервалов длина наибольшего из них действительно стремилась к нулю. Если этого не предусмотреть, то может так случиться, что ступенчатая фигура не будет неограниченно приближаться к криволинейной трапеции. В самом деле, будем увеличивать число точек деления основания так, например, чтобы какой-нибудь частичный интервал, пусть (x_{n-1}, b) (рис. 103), оставался неизменным. Тогда ломаная может неограниченно приближаться к дуге A_0A_{n-1} заданной линии $y=f(x)$, но вовсе не будет приближаться к дуге $A_{n-1}A_n$ и постоянная часть трапеции $x_{n-1}A_{n-1}A_nb$ не будет при этом процессе покрываться нашими фигурами. Таким образом, по площадям этих фигур мы никак не сможем определить площадь трапеции. Если же указать, что длина наибольшего частичного интервала стремится к нулю, то из этого следует, что число n частичных интервалов неограниченно возрастает.

Напишем теперь выражение для s_n. Вся фигура состоит из n прямоугольников, а площадь прямоугольника, соответствующего частичному интервалу $[x_{i-1}, x_i]$, очевидно, равна $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$. Значит,

$$s_n=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})+\ldots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}).$$

Все слагаемые этой суммы имеют один и тот же вид: отличаются они друг от друга только значениями индекса (указателя) при независимой переменной.

Для сокращения записи вводят символ $\sum$ (греческая прописная буква «сигма») — символ суммы, именно пишут

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (*)$$

Этот символ вообще означает, что нужно сложить выражения данного вида, придавая индексу суммирования i все целые значения от значения, указанного под символом «сигма», до значения, указанного над символом «сигма».

В соответствии с определением площади s имеем

$$s = \lim s_n = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Как указано выше, мы считаем, что переход к пределу совершается при условии, что длина наибольшего частичного интервала, т. е. $\max(x_i - x_{i-1})$, стремится к нулю.

Определив площадь криволинейной трапеции, мы в состоянии находить площади и других фигур. Обычно их можно разбить на некоторое число криволинейных трапеций и, таким образом, искомую площадь определить как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций, составляющих эту фигуру. Так, например, площадь фигуры, изображенной на рис. 104, может быть представлена в виде следующей алгебраической суммы:

$$\text{пл. } AA'C'C - \text{пл. } BB'C'C + \text{пл. } BB'D'D - \text{пл. } AA'D'D.$$

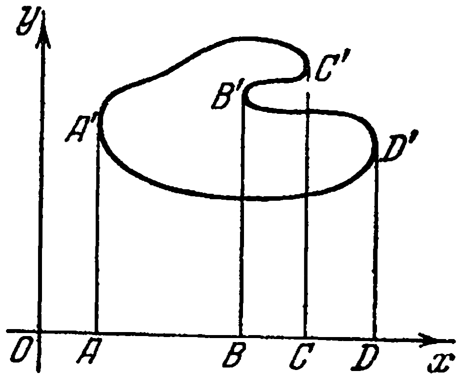

Рис. 104.

II. Работа переменной силы. Перейдем теперь к важной задаче физики — к определению работы. Мы увидим, что определение работы будет вполне аналогично определению площади трапеции.

Пусть под действием некоторой силы тело движется по прямой линии, причем направление силы совпадает с направлением движения.

Требуется определить работу, произведенную при перемещении тела из положения M в положение N (рис. 105).

Если на протяжении всего пути от M к N сила остается постоянной, то, как известно, работа определяется как произведение силы на длину пути. Обозначим через A работу, через P — силу, через S — длину пути MN. Тогда[1])

$$A = PS.$$

Предположим, однако, что сила на пути от M к N изменяется. В каждой точке между M и N, находящейся на расстоянии s от

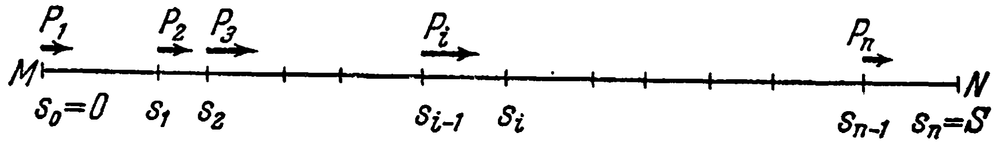

Рис. 105.

точки M, действующая сила принимает соответствующее значение P. Это значит, что сила P есть некоторая функция расстояния s, т. е. $P = f(s)$. Как определить работу, совершенную при перемещении тела из точки M в точку N в этом случае?

Разобьем весь путь MN, т. е. интервал изменения переменной s, на n участков точками, находящимися на расстояниях

$$s_0 = 0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{i-1},\ s_i,\ \ldots,\ s_{n-1},\ s_n = S$$

от точки M. Вместо действующей на пути MN переменной силы P возьмем другую силу P_n, сохраняющую постоянные значения на каждом из наших участков, причем эти значения положим равными значениям действующей силы P в каких-нибудь точках участков. На первом участке $[s_0, s_1]$ эта сила равна $P_1 = f(\sigma_1)$, где $\sigma_1 \in [s_0, s_1]$; на втором $[s_1, s_2]$ она равна $P_2 = f(\sigma_2)$, где $\sigma_2 \in [s_1, s_2]$; на участке $[s_{i-1}, s_i]$ она равна $P_i = f(\sigma_i)$, где $\sigma_i \in [s_{i-1}, s_i]$, и т. д.

Так как работа на всем пути равна сумме работ, соответствующих отдельным участкам, на которые разбит путь, то для работы A_n, произведенной силой P_n, будем, очевидно, иметь

$$A_n = f(\sigma_1)(s_1 - s_0) + f(\sigma_2)(s_2 - s_1) + \ldots + f(\sigma_i)(s_i - s_{i-1}) + \ldots$$
$$\ldots + f(\sigma_n)(s_n - s_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\sigma_i)(s_i - s_{i-1}).$$

Величину A_n мы принимаем за приближенное значение искомой работы, тем более точное, чем больше число n и чем меньше участки, на которые разбивается весь путь MN. Работу A **определяют** как предел A_n при $n \to \infty$; при этом, как и раньше, предполагается, что длина наибольшего из частичных участков

[1]) Если P выражено в ньютонах и S в метрах, то A будет выражено в джоулях.

стремится к нулю:

$$A = \lim A_n = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\sigma_i)(s_i - s_{i-1}).$$

III. Путь и масса. Скажем кратко еще о двух других задачах физики — об определении пути и массы. Решение этих задач будет произведено совершенно так же, как и предыдущих.

1) Предположим, что точка совершает поступательное движение, причем известна величина скорости v в любой момент времени t в некотором промежутке $[T_1, T_2]$, т. е. $v = f(t)$.

Путь s, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1, T_2]$, определяется так:

$$s = \lim s_n = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(t_i - t_{i-1}),$$

где $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$ — точки, разбивающие интервал $[T_1, T_2]$ на n частичных интервалов, причем

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T_2$$

и

$$t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

мы опять считаем, что $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$. Каждое слагаемое $f(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$ суммы дает путь, который прошло бы тело за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$, если бы оно двигалось в это время с постоянной скоростью, равной $f(\tau_i)$.

Задача определения пути по скорости обратна задаче определения скорости по пути (см. п. **38**, I).

2) Возьмем отрезок материальной линии и предположим, что известна плотность δ в каждой ее точке s, т. е. $\delta = f(s)$, причем длина s изменяется на участке $[0, S]$.

Масса m материальной линии на участке ее длины $[0, S]$ определяется так:

$$m = \lim m_n = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\sigma_i)(s_i - s_{i-1}),$$

где $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n$ — точки, делящие интервал $[0, S]$ на n частичных интервалов, причем

$$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} < s_n = S,$$

$$s_{i-1} \leqslant \sigma_i \leqslant s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{и} \quad \max(s_i - s_{i-1}) \to 0.$$

Каждое слагаемое $f(\sigma_i)(s_i - s_{i-1})$ суммы дает массу, которую содержал бы участок линии $[s_{i-1}, s_i]$, если бы плотность на этом участке была постоянной, равной $f(\sigma_i)$ (т. е. если бы масса была распределена равномерно).

Задача определения массы по плотности обратна задаче определения плотности по массе (см. п. **38**, II).

87. Определенный интеграл. Теорема существования. В предыдущем пункте мы видели, что решение многих важных задач геометрии и физики (определение площади, работы, пути, массы) приводит к одной и той же последовательности действий над известными функциями и их аргументами. Раз эта последовательность действий применяется в различных случаях и имеет большое значение, то мы установим ее математически, независимо от конкретных условий той или иной задачи. Тогда и применение ее в каждом отдельном подходящем случае будет заранее узаконено и не будет требовать специальных рассуждений.

Если отвлечься от физического смысла переменных и от их обозначений, то указанная последовательность действий состоит в следующем:

1) интервал $[a, b]$, в котором задана непрерывная функция $f(x)$ (теперь мы отбросим предположение, что $f(x)>0$ в интервале $[a, b]$), разбивается на n частичных интервалов при помощи точек

$$x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n=b,$$

причем

$$a<x_1<x_2<\ \ldots\ <x_{n-1}<b;$$

2) значение функции $f(\xi_i)$ в какой-нибудь точке $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$ умножается на длину этого интервала x_i-x_{i-1}, т. е. составляется произведение $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$;

3) берется сумма I_n всех этих произведений

$$I_n=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ \ldots\ +f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})=\\=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

или, если обозначить x_i-x_{i-1} через Δx_i,

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i; \tag{A}$$

4) находится предел I суммы I_n при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала, и следовательно, при $n\to\infty$, т. е.

$$I=\lim I_n=\lim\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

В рассмотренных выше четырех конкретных задачах этот предел I измеряет соответственно площадь, работу, путь, массу. В общем случае он называется *определенным интегралом* или просто *интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается так:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

и читается: интеграл от a до b $f(x)$ на dx. Следовательно, по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Сумма (А) называется *n-й интегральной суммой.*

Определение. ***Определенным интегралом*** **называется предел, к которому стремится *n*-я интегральная сумма (А) при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала.**

Символ интеграла указывает на его происхождение: $\int$ является как бы вытянутой буквой s, первой буквой слова «summa»; выражение, стоящее за (говорят также: под) символом интеграла, показывает вид суммируемых слагаемых; индекс при переменной в выражении под интегралом опущен, чем подчеркивается, что в процессе суммирования, завершающегося предельным переходом, переменная x принимает все значения в интервале $[a, b]$; числа, стоящие под и над символом интеграла, указывают концы интервала, на котором производилось суммирование.

Как и в неопределенном интеграле, функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением* и переменная x — *переменной интегрирования*. Интервал $[a, b]$ называется *интервалом интегрирования*, число a — *нижним*, а число b — *верхним пределами*[1]) интеграла.

Сам процесс образования определенного интеграла показывает, что символ $\int_a^b f(x)\,dx$ есть некоторое число. Величина его зависит только от вида подынтегральной функции и от чисел a и b, определяющих интервал интегрирования. Переменная интегрирования x служит лишь для удобного обозначения определенного интеграла; ничего не изменится, если переменную интегрирования обозначить другой буквой, например t или u:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du.$$

---

[1]) Здесь термин «предел» употребляется в смысле, не имеющем отношения к понятию «предел функции».

Внешняя общность записи определенного и неопределенного интегралов (в записи последнего отсутствуют лишь пределы интегрирования) подчеркивает тесную связь между ними, хотя определенный интеграл есть число, а неопределенный интеграл — совокупность первообразных функций. Эту связь мы установим позднее (в п. **92**), а сейчас пока только отметим, что она позволит вычислять определенные интегралы не при помощи построения интегральных сумм с последующим переходом к пределу, а при помощи неопределенного интегрирования. Именно поэтому мы не приводим примеров вычисления определенных интегралов с помощью суммирования; этот процесс вызывает серьезные затруднения в самых, казалось бы, простых случаях.

Отметим только совершенно очевидный результат

$$\int_a^b dx = b - a, \qquad (*)$$

который следует из того, что любая интегральная сумма для функции $f(x) \equiv 1$ равна $b-a$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a.$$

Применяя определение интеграла к четырем конкретным вопросам, разобранным в п. **86**, можно полученные там выводы выразить в таких словах:

1) *площадь криволинейной трапеции равна интегралу от ординаты линии, ограничивающей трапецию, взятому по основанию*:

$$s = \int_a^b f(x)\,dx;$$

2) *работа, произведенная силой, равна интегралу от силы, взятому по пути*:

$$A = \int_0^S f(s)\,ds;$$

3) *путь, пройденный телом, равен интегралу от скорости, взятому по времени*:

$$s = \int_{T_1}^{T_2} f(t)\,dt;$$

4) *масса, распределенная на линии, равна интегралу от плотности, взятому по длине линии:*

$$m = \int_0^S f(s)\,ds.$$

Говоря об определенном интеграле, мы еще не затрагивали вопроса о том, для каких функций этот интеграл существует, т. е. для каких функций существуют пределы их интегральных сумм. Ответ дается следующей теоремой, которую мы приводим без доказательства.

Теорема существования определенного интеграла. **Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$, то ее n-я интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала. Этот предел, т. е. определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, не зависит от способа разбиения интервала интегрирования на частичные интервалы и от выбора в них промежуточных точек.**

Интегральные суммы, составленные при различных разбиениях интервала интегрирования и различных выборах точек ξ, могут отличаться друг от друга весьма значительно. Сформулированная выше замечательная теорема показывает, что для непрерывных функций разница между этими суммами стирается по мере возрастания числа точек деления и убывания длины наибольшего частичного интервала, совсем исчезая в пределе.

Далее везде предполагается, если не сказано противное, что рассматриваемые функции — непрерывные.

88. Простейшие свойства определенного интеграла.

Теорема I (об интеграле суммы). **Интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых функций:**

$$\int_a^b (u + v + \ldots + w)\,dx = \int_a^b u\,dx + \int_a^b v\,dx + \ldots + \int_a^b w\,dx,$$

где u, v, ..., w — функции независимой переменной x.

Доказательство. Обозначим интеграл в левой части равенства через I. По определению интеграла имеем

$$I = \lim \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i + \ldots + w_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \lim \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta x_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i \right),$$

где u_i, v_i, ..., w_i — соответственно значения функций u, v, ..., w в какой-нибудь точке интервала $[x_{i-1}, x_i]$, а $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Воспользовавшись теоремой о пределе суммы, будем иметь

$$I = \lim \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i + \lim \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta x_i + \ldots + \lim \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i,$$

т. е.

$$I = \int_a^b u\,dx + \int_a^b v\,dx + \ldots + \int_a^b w\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Теорема II (о вынесении постоянного множителя). **Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за символ интеграла**

$$\int_a^b cu\,dx = c\int_a^b u\,dx,$$

где u — функция аргумента x, c — константа.

Доказательство. Обозначим интеграл в левой части равенства через I. По определению интеграла имеем

$$I = \lim \sum_{i=1}^{n} cu_i \Delta x_i.$$

Вынося постоянную c сначала за знак суммы, а потом за символ предела, получим

$$I = \lim c \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i = c \lim \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i = c \int_a^b u\,dx,$$

что и требовалось доказать.

89. Перестановка пределов и разбиение интервала интегрирования. Геометрический смысл интеграла. До сих пор мы предполагали, что нижний предел интеграла меньше верхнего, или, как говорят, что интервал интегрирования направлен вправо. Ничто не мешает, однако, в общем определении интеграла считать, что $a > b$, т. е. что интервал интегрирования направлен влево. При разбиении интервала интегрирования на части точками x_1, x_2, ..., x_{n-1} будем иметь (рис. 106)

$$a > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > b,$$

и, следовательно, все разности $x_i - x_{i-1}$ будут отрицательными. Это значит, что при построении интегральной суммы разность $x_i - x_{i-1}$ уже не является длиной частичного интервала, а отличается от нее знаком.

Если мы теперь рассмотрим два интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_b^a f(x)\,dx$$

и составим для них интегральные суммы при одном и том же разбиении интервала на частичные и при одном и том же выборе

Рис. 106.

промежуточных точек, то ясно, что эти суммы будут отличаться друг от друга только знаком. Таким образом, мы получаем теорему:

Теорема III (о перестановке пределов). **Если верхний и нижний пределы интеграла поменять местами, то интеграл изменит только знак:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Вследствие теоремы III мы в дальнейшем при изучении интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

будем считать, что $a < b$, ибо если $a > b$, то с помощью изменения знака подынтегральной функции данный интеграл сводится к интегралу, у которого нижний предел меньше верхнего.

Совершенно ясно также, что если верхний и нижний пределы интегрирования совпадают, т. е. если $b = a$, то такой интеграл нужно считать равным нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

С геометрической точки зрения это означает, что если конец основания трапеции совместить с его началом, то трапеция превратится в прямолинейный отрезок — ординату $f(a)$, площадь которого нужно считать равной нулю.

Теорема IV (о разбиении интервала интегрирования). **Если интервал интегрирования $[a, b]$ разбит на две части $[a, c]$ и $[c, b]$, то**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Доказательство. Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения интервала $[a, b]$ на части (см. теорему существования, п. 87), будем дробить интервал так, чтобы точка c всегда была точкой деления. При этом интегральную сумму можно представить так:

$$\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum\nolimits_1 f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum\nolimits_2 f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где в первой сумме в правой части собраны все элементы, соответствующие точкам деления интервала $[a, c]$, а во второй сумме — элементы, соответствующие точкам деления интервала $[c, b]$. И первая и вторая суммы суть интегральные суммы для функции $f(x)$, соответствующие интервалам $[a, c]$ и $[c, b]$. Если число точек деления неограниченно возрастает, а длина наибольшего частичного интервала стремится к нулю для всего интервала $[a, b]$, то то же самое, очевидно, будет выполняться и для интервалов $[a, c]$ и $[c, b]$; при этом первая сумма стремится к интегралу в пределах от a до c, а вторая — к интегралу в пределах от c до b, и мы получаем требуемое равенство.

Равенство $(*)$ справедливо и в том случае, когда точка c лежит вне интервала $[a, b]$, справа от него ($a < b < c$) или слева от него ($c < a < b$) (при условии, конечно, что функция $f(x)$ непрерывна в $[a, c]$ или в $[c, b]$).

Пусть $a < b < c$. По доказанному, так как b лежит между a и c,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Меняя местами пределы второго интеграла в правой части, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что равенство (*) имеет место и при $c < a < b$.

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что если $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — как угодно расположенные числа в интервале непрерывности функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)\,dx. \qquad (**)$$

Теорема IV выражает так называемое свойство аддитивности определенного интеграла.

Теорема V (о знаке интеграла). **Если подынтегральная функция в интервале интегрирования не меняет знака, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция.**

Доказательство. Пусть $f(x) \geqslant 0$ в интервале $[a, b]$ $(a < b)$. Тогда в интегральной сумме $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ все слагаемые неотрицательны и, значит, $I_n \geqslant 0$, а предел неотрицательной величины не может быть отрицателен, т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Покажем теперь, что этот интеграл не может равняться нулю, если только функция $f(x)$ не равна нулю тождественно. Пусть в какой-то точке c интервала $f(c) > 0$. Тогда вследствие непрерывности функции $f(x)$ существует такой интервал $[\alpha, \beta]$ (рис. 107), в котором функция остается положительной (см. п. **32**). Обозначим через m ее наименьшее значение в интервале $[\alpha, \beta]$; тогда $f(x) \geqslant m > 0$ для $x \in [\alpha, \beta]$. Любая интегральная сумма для интервала $[\alpha, \beta]$ удовлетворяет неравенству

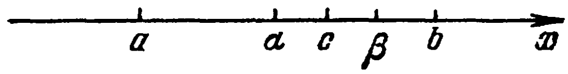

Рис. 107.

$$\sum_{k=1}^{r} f(\xi_k)\,\Delta x_k \geqslant \sum_{k=1}^{r} m\Delta x_k = m \sum_{k=1}^{r} \Delta x_k = m(\beta - \alpha).$$

Но тогда и ее предел $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqslant m(\beta - \alpha) > 0$. По теореме IV

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx.$$

Первый и третий интегралы в правой части равенства, по доказанному выше, неотрицательны, а второй, как мы только что показали, положителен. Значит,

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0,$$

что и требовалось доказать.

Если подынтегральная функция в интервале интегрирования меняет знак, то интеграл от нее может быть и положительным числом, и отрицательным, и равным нулю.

Свойство определенного интеграла, вытекающее из теоремы V, следует иметь в виду при решении задач. Например, находя с помощью интеграла площадь криволинейной трапеции, необходимо учитывать ее расположение относительно основания. В случае, когда трапеция целиком лежит над осью Ox, интеграл от ординаты выражает площадь; в случае, когда трапеция целиком лежит под осью Ox, интеграл, будучи отрицательным, выражает площадь трапеции, взятую с отрицательным знаком. Наконец, в случае, когда трапеция лежит и над осью Ox, и под ней, для отыскания ее площади нужно отдельно вычислить интегралы, выражающие площади ее частей, расположенных над осью абсцисс, отдельно — интегралы, выражающие площади частей, расположенных под осью абсцисс, и затем взять сумму их абсолютных величин.

Геометрический смысл интеграла. Условимся площади криволинейной трапеции, расположенной над осью Ox, приписывать знак плюс, а расположенной под осью Ox — знак минус. Тогда, очевидно, в силу теорем IV и V определенный интеграл от функции $f(x)$ будет суммой алгебраических площадей (т. е. снабженных определенными знаками) криволинейных трапеций, расположенных над и под осью Ox, из которых составляется данная трапеция. Эту сумму и называют алгебраической площадью всей криволинейной трапеции.

Имея это в виду, мы в дальнейшем *определенный интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

всегда можем рассматривать независимо от конкретного смысла переменной интегрирования x *и функции* $f(x)$ *как алгебраическую площадь криволинейной трапеции с основанием* $[a,\ b]$, *ограниченной линией* $y=f(x)$.

В соответствии с этой геометрической иллюстрацией интеграла теорема IV (см. равенство (**)), выражающая свойство интеграла, которое называется *аддитивностью*, означает тот наглядный факт, что если основание криволинейной трапеции разбить на частичные интервалы, то площадь всей трапеции будет равна сумме площадей трапеций, опирающихся на частичные интервалы.

90. Оценка интеграла. Теорема о среднем. Среднее значение функции.

1. Оценка интеграла. Укажем границы, между которыми наверняка заключено значение интеграла.

Теорема VI (об оценке определенного интеграла). **Значение определенного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений подынтегральной функции на длину интервала интегрирования, т. е.**

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a), \qquad a<b,$$

где m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Доказательство. Возьмем две функции $M-f(x)$ и $m-f(x)$. Первая из них в интервале $[a, b]$ неотрицательна, вторая неположительна. Значит, по теореме V (п. **89**)

$$\int_a^b [M-f(x)]\,dx > 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b [m-f(x)]\,dx < 0.$$

Применяя теоремы п. **88** и формулу (*) п. **87**, получим

$$M(b-a) > \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать. Из доказательства теоремы V следует, что знаки неравенств могут перейти в знаки равенств только в том случае, когда функция $f(x)$ постоянна.

Геометрический смысл доказанных неравенств таков: площадь криволинейной трапеции больше площади прямоугольника с основанием, равным основанию трапеции, и высотой, равной наименьшей ординате трапеции, и меньше площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной наибольшей ординате трапеции (рис. 108).

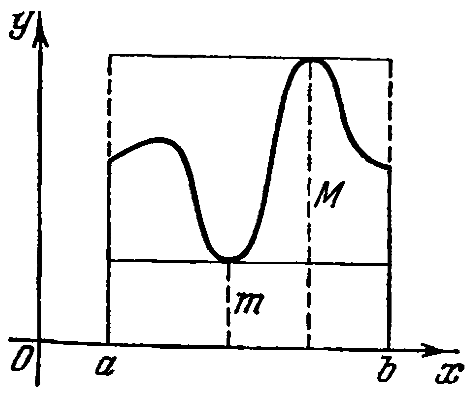

Рис. 108.

Находя границы для интеграла, мы, как говорят, производим его оценку. Может случиться, что весьма трудно или даже невозможно найти точное значение интеграла, а оценивая его, мы узнаем, хотя бы грубо, приближенное его значение. С такого рода оценками приходится довольно часто встречаться в математике.

Указанные в теореме VI границы для интеграла тем более точны, чем короче интервал интегрирования и чем меньше линия $y=f(x)$ отличается по положению от прямой, параллельной оси Ox.

Примеры. 1) Оценим интеграл

$$\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}\,dx.$$

Известными методами дифференциального исчисления (гл. IV) находим, что наибольшее и наименьшее значения подынтегральной функции в интервале $[0, 2]$ равны соответственно 0,6 и 0,5. Значит,

$$0{,}5\,(2-0) < \int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}\,dx < 0{,}6\,(2-0),$$

т. е. интеграл заключен между 1 и 1,2. Если считать, что он равен 1,1, то предельная абсолютная ошибка равна 0,1, а относительная $\frac{0{,}1\cdot 100}{1{,}1} \approx 9\%$. Позже мы сумеем найти точное значение приведенного интеграла. Оно равно $\frac{4}{3}\ln 5 - \ln 3 \approx 1{,}047$.

2) Оценим интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Легко проверить, что подынтегральная функция в интервале $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ убывает и, следовательно,

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi}{4} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{4},$$

т. е.

$$\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Таким образом, интеграл заключен между 0,5 и 0,71, что дает нам право считать его равным 0,6 с точностью до 0,1. Более точные приемы показывают, что приближенно он равен 0,62.

II. Обобщение теоремы об оценке интеграла. Интегрирование неравенств. Справедлива следующая более общая теорема, чем теорема VI.

Теорема VII. **Если в каждой точке x интервала $[a, b]$**

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x),$$

то

$$\int_a^b \psi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad a < b.$$

Это значит, что неравенство между функциями влечет неравенство того же смысла между их определенными интегралами, или, говоря коротко, *неравенства можно интегрировать*. Читатель должен понять, хотя бы из простых геометрических соображений, что дифференцирование неравенства может привести к нелепым результатам. Например, из неравенства $f(x) < M$, конечно, не следует, что $f'(x) < 0$.

Доказательство теоремы немедленно следует из применения к неравенствам $f(x) - \varphi(x) \leqslant 0$ и $f(x) - \psi(x) \geqslant 0$ теоремы V о знаке интеграла. Опять-таки знак неравенства между интегралами переходит в знак равенства только тогда, когда функции тождественно равны между собой.

В частном случае, когда $\varphi(x)$ тождественно равно M, а $\psi(x)$ тождественно равно m, получаем теорему VI.

С помощью теоремы VII легко получается важное неравенство, которым мы воспользуемся в дальнейшем. При любом x

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

(Если $f(x) > 0$, то правая часть неравенства превращается в равенство, а левая часть очевидна; если $f(x) < 0$, то наоборот.) Тогда

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

или

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля функции. Предоставляем читателю выяснить геометрический смысл этого неравенства. Напомним еще, что аналогичное неравенство имеет место и для сумм: модуль суммы не превосходит суммы модулей.

III. Теорема о среднем. Определенный интеграл обладает следующим важным свойством.

Теорема VIII (о среднем). **Внутри интервала интегрирования $[a, b]$ существует хотя бы одно значение $x = \xi$, для которого**

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi). \qquad (*)$$

Доказательство. В силу теоремы VI имеем

$$m < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < M$$

и, значит,

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \mu,$$

где μ — некоторое число, заключенное между наименьшим (m) и наибольшим (M) значениями функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$, т. е. $m < \mu < M$. Но $f(x)$, будучи непрерывной функцией, обязательно принимает хотя бы один раз каждое значение, лежащее между m и M (см. п. **35**). Следовательно, при некотором $\xi \in (a, b)$ функция $f(x)$ получит значение, равное μ, т. е. $f(\xi) = \mu$, что и требовалось доказать.

Из равенства (*) находим

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \qquad a < \xi < b.$$

Эта формула позволяет теорему о среднем высказать в такой форме:

Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой промежуточной точке интервала интегрирования на длину интервала.

Дадим наглядное пояснение теоремы. При движении прямой, параллельной оси Ox (рис. 109), вверх от положения BC площадь прямоугольника $ABCK$ будет непрерывно возрастать от величины, меньшей площади трапеции, до величины, большей ее. Очевидно, при некотором промежуточном положении прямой — обозначим его через FG — площадь прямоугольника $AFGK$ окажется в точности равной площади трапеции S. Так как при этом движении прямая постоянно пересекает линию, ограничивающую трапецию, то и в положении FG найдется одна или несколько (на рис. 109 две) точек пересечения Q; абсцисса любой точки пересечения и будет требуемым по теореме значением ξ.

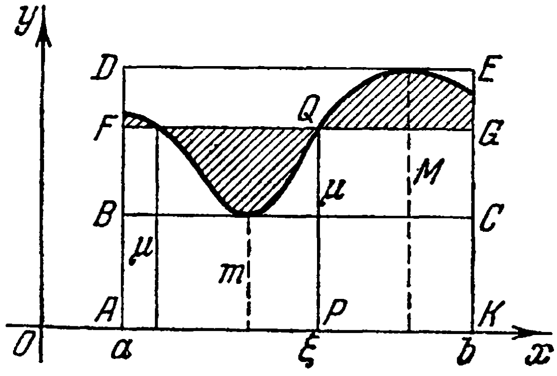

Рис. 109.

IV. Среднее арифметическое значение функции. Значение $f(\xi)$, находимое по теореме о среднем, называется средним арифметическим значением функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$.

Определение. ***Средним арифметическим значением*** $y_{ср}$ **непрерывной функции** $y=f(x)$ **в интервале** $[a, b]$ **называется отношение определенного интеграла от этой функции к длине интервала:**

$$y_{ср}=\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Приведем некоторые соображения в обоснование этого определения.

Пусть некоторая величина y принимает n значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Средним арифметическим значением этой величины называется частное $\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$. Так, если температура воздуха в течение суток измеряется через каждый час, то средней температурой будет частное от деления суммы всех наблюденных температур на 24.

Но представим себе теперь, что величина изменяется непрерывно (например, температура воздуха известна в любой момент суток) и мы хотим как-то в среднем охарактеризовать всю совокупность ее значений. Как в этом случае следует определить среднюю температуру воздуха, принимая во внимание всю известную совокупность значений температуры? Вообще, что́ следует принять в качестве среднего значения непрерывной функции $y=f(x)$ в некотором интервале $[a, b]$?

Разобьем интервал $[a, b]$ на n равных частичных интервалов и возьмем значения функции в серединах этих интервалов — точках ξ_i:

$$f(\xi_1),\quad f(\xi_2),\quad \ldots,\quad f(\xi_n).$$

При таком выборе точек ξ_i значения функции берутся через равные промежутки; именно так обычно поступают при всякого рода измерениях. Возьмем среднее арифметическое η_n указанных значений:

$$\eta_n = \frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}.$$

Ясно, что чем больше n, тем больше значений функции учитывается при отыскании среднего значения, и поэтому естественно за среднее значение $y_{\text{ср}}$ функции принять предел, к которому стремится η_n при $n \to \infty$. Найдем этот предел.

Умножив и разделив выражение для η_n на $b-a$, получим

$$\eta_n = \frac{1}{b-a}[f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n],$$

где $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ (при этом $\Delta x \to 0$), получаем указанное выше выражение для среднего значения

$$y_{\text{ср}} = \lim \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

На основании теоремы о среднем (теорема VIII) заключаем, что $y_{\text{ср}} = f(\xi)$, где $\xi \in (a, b)$. Среднее значение непрерывной функции в интервале всегда (если только функция не постоянная) меньше некоторых ее значений, больше других ее значений и равно хотя бы одному ее значению.

Понятие среднего значения функции очень употребительно в технике. Многие величины часто характеризуются своими средними значениями; таковы, например, давление пара, мощность переменного тока, скорость химической реакции и т. п.

91. Производная от интеграла по его верхнему пределу.

I. Интеграл с переменным верхним пределом. Будем считать нижний предел интеграла постоянным, а верхний переменным. Придавая верхнему пределу различные значения, будем получать соответствующие значения интеграла; следовательно, при рассматриваемом условии интеграл является функцией своего верхнего предела.

Остановимся на общепринятых обозначениях. Независимая переменная в верхнем пределе обычно обозначается той же буквой, скажем x, что и переменная интегрирования. Таким образом, например, записывают

$$I(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Однако переменная x в подынтегральном выражении служит лишь вспомогательной переменной — переменной интегрирования, пробегающей в процессе составления интеграла (суммирования) значения от a до x — верхнего предела интеграла. Если нам нужно вычислить частное значение функции $I(x)$, например при $x=b$, т. е. $I(b)$, то мы подставим b вместо x в верхний предел интеграла, но, разумеется, не будем подставлять b вместо переменной интегрирования. Поэтому нагляднее было бы употреблять такую запись:

$$I(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

взяв для переменной интегрирования какую-нибудь другую букву (здесь t). Мы, однако, будем часто обозначать одной буквой и переменную интегрирования, и независимую переменную в верхнем пределе, всегда помня их различный смысл в символе интеграла.

Свойства интеграла, изученные в предыдущем параграфе, относятся и к интегралу с переменным верхним пределом.

II. Производная от интеграла[1]). Весьма важно изучить связь между функцией $I(x)$ и данной подынтегральной функцией $f(x)$.

Теорема IX (о производной интеграла по верхнему пределу). **Производная от интеграла по его верхнему пределу равна подынтегральной функции**

$$\boldsymbol{I'(x)=\left(\int_a^x f(x)\,dx\right)'=f(x).} \qquad (*)$$

Иными словами: **интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции.**

Доказательство. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда наращенное значение функции $I(x)$ будет

$$I(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)\,dx.$$

Значит,

$$\Delta I=I(x+\Delta x)-I(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)\,dx-\int_a^x f(x)\,dx.$$

---

[1]) Если при прохождении курса сначала изучается определенный интеграл, то перед чтением этого пункта следует прочитать п. 78, где дано определение первообразной функции и ее геометрическая иллюстрация.

Применяя к первому интегралу справа теорему IV, получим

$$\Delta I=\int_a^x f(x)\,dx+\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx-\int_a^x f(x)\,dx=\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx.$$

Последний интеграл по теореме о среднем равен

$$\Delta I=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\,\Delta x,$$

где ξ — точка, лежащая между x и $x+\Delta x$.

По определению производной имеем

$$I'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi).$$

Но если $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x$ стремится к x; поэтому и подавно $\xi\to x$, а так как $f(x)$ — непрерывная функция, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы следует также, что

$$d\int_a^x f(x)\,dx=f(x)\,dx. \qquad (**)$$

Необходимо заметить, что результаты в формулах (*) и (**) не зависят от обозначения переменной интегрирования; имеют место, например, такие равенства:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x),$$

$$d\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\,dx.$$

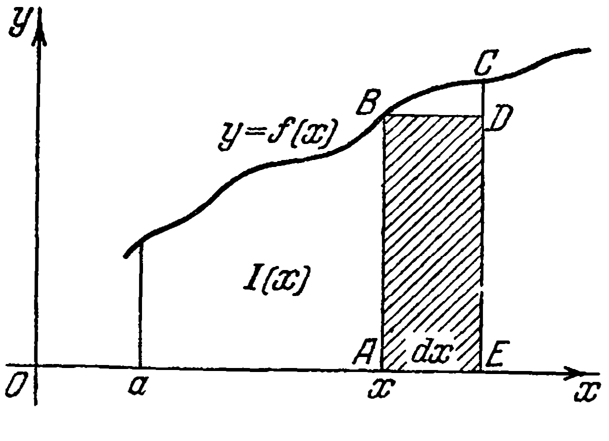

Рис. 110.

Геометрический смысл теоремы был установлен в п. **78**; напомним его еще раз. Функция $I(x)$ выражает переменную площадь криволинейной трапеции с переменным основанием $[a, x]$, ограниченной линией $y=f(x)$. В теореме утверждается, что производная от площади трапеции по абсциссе равна ординате линии, ограничивающей трапецию (отрезок $AB=f(x)$ на рис. 110), или что дифференциал площади трапеции равен площади прямоугольника $ABDE$ со сторонами, равными соответственно приращению основания трапеции и ординате линии в крайней точке.

92. Формула Ньютона—Лейбница. Теперь мы подошли к завершающему этапу наших рассуждений, позволяющему установить обходный путь для вычисления определенных интегралов.

Теорема X. **Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятых при верхнем и нижнем пределах интеграла:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x). \qquad (*)$$

Равенство (*) называется формулой Ньютона—Лейбница.

Другими словами:

Значение определенного интеграла равно приращению любой первообразной от подынтегральной функции в интервале интегрирования.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$I(x) = \int_a^x f(x)\,dx;$$

так как она является первообразной от функции $f(x)$, то в соответствии с теоремой п. **78** ее нужно искать среди функций $F(x)+C$, где $F(x)$—какая-нибудь из первообразных от $f(x)$.

Следовательно,

$$I(x) = F(x) + C_1,$$

где C_1—некоторая определенная постоянная. Для отыскания ее воспользуемся еще одним известным нам свойством функции $I(x)$, а именно тем, что

$$I(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Отсюда $F(a) + C_1 = 0$, т. е. $C_1 = -F(a)$.

Итак,

$$I(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a);$$

при $x = b$ получаем доказываемое равенство (*).

Разность значений функции записывают часто так:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Вертикальная черта с нижним и верхним индексами, стоящая справа от символа функции и называемая *знаком двойной подстановки*, указывает, что из значения функции, принимаемого ею при верхнем индексе, нужно вычесть ее значение, принимаемое при нижнем индексе.

Воспользовавшись этим обозначением, формуле (*) можно придать вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b,$$

причем $F'(x) = f(x)$.

Формула Ньютона—Лейбница дает нам основной способ вычисления определенных интегралов. Она позволяет находить определенный интеграл, обходя суммирование, при помощи первообразных функций, т. е. при помощи неопределенного интегрирования. Для иллюстрации возьмем несколько простых примеров:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3};$$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a} \qquad (a > 0,\ b > 0);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Если взять какие-нибудь другие первообразные от подынтегральных функций (т. е. отличающиеся от выше взятых на постоянные величины), то, очевидно, получим те же результаты.

Заметим теперь, что так как $F(x)$ есть первообразная от $F'(x)$, то

$$\int_a^x F'(x)\,dx = F(x) - F(a);$$

это можно записать так:

$$\int_a^x dF(x) = F(x) - F(a).$$

Мы пришли к несколько иному виду формулы Ньютона—Лейбница, позволяющему основную теорему этого пункта выразить так:

Приращение функции в интервале равно определенному интегралу по этому интервалу от дифференциала функции.

Замечание. Теперь очень легко показать, что путь s, найденный нами в п. 87 при помощи интеграла (по скорости v), действительно совпадает с тем путем, исходя из которого была определена скорость. Пусть путь s как функция времени t задан так: $s=F(t)$. Тогда $v=f(t)=F'(t)$ (см. п. 38, I). Поэтому

$$s=\int_0^t F'(t)\,dt,$$

откуда по формуле Ньютона — Лейбница (считая, что $F(0)=0$) получаем

$$s=F(t).$$

что и требовалось доказать.

Аналогично в задаче о массе (п. 86, III) имеем

$$m=\int_0^s f(s)\,ds,$$

где $f(s)=\Phi'(s)$ (см. п. 38, II), причем $m=\Phi(s)$. Подставляя в интеграл вместо $f(s)$ функцию $\Phi'(s)$ (и считая $\Phi(0)=0$), получим по формуле Ньютона — Лейбница

$$m=\int_0^s \Phi'(s)\,ds=\Phi(s),$$

что и требовалось доказать.

93*. Интегрирование комплексных функций действительного переменного. Определенный интеграл от комплексной функции действительного переменного (см. п. 73) определяется следующим образом.

Если $z(t)=x(t)+iy(t)$, *то*

$$\int_a^b z(t)\,dt=\int_a^b x(t)\,dt+i\int_a^b y(t)\,dt. \qquad (*)$$

Таким образом, вычисление интеграла от комплексной функции сводится к вычислению интегралов от ее действительной и мнимой частей.

Если $Z(t)=X(t)+iY(t)$, где $X(t)$ и $Y(t)$ — какие-либо первообразные соответственно для $x(t)$ и $y(t)$, то по правилу вычисления производной комплексной функции

$$Z'(t)=X'(t)+iY'(t)=x(t)+iy(t)=z(t).$$

Комплексную функцию $Z(t)$ естественно назвать *первообразной* для комплексной функции $z(t)$. Применяя формулу Ньютона — Лейбница к интегралам в правой части равенства (*), получим

$$\int_a^b z(t)\,dt=X(t)\Big|_a^b+iY(t)\Big|_a^b=Z(t)\Big|_a^b.$$

Это — *формула Ньютона — Лейбница для комплексных функций действительного переменного.*

Примеры. 1) Если n — целое число ($n \neq 0$), то

$$\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \frac{e^{int}}{in}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi in}-1}{in} = 0,$$

так как $e^{2\pi in} = 1$ (см. п. **74**).

2)

$$\int_0^{\pi} e^{it}\,dt = \frac{e^{it}}{i}\Big|_0^{\pi} = \frac{e^{\pi i}-1}{i} = -\frac{2}{i} = 2i.$$

§ 3. Способы вычисления определенных интегралов

94. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Важнейшим результатом, устанавливающим связь между определенным и неопределенным интегралами, является формула Ньютона — Лейбница, согласно которой определенный интеграл вычисляется при помощи неопределенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\,\Big|_a^b.$$

Так как в правой части равенства можно брать любую первообразную, то безразлично какую брать произвольную постоянную при неопределенном интегрировании; поэтому ее вообще не пишут.

Простейшие правила интегрирования суммы и произведения постоянной на функцию совершенно одинаковы для определенного и неопределенного интегралов. Теперь мы рассмотрим правила интегрирования по частям и замены переменной и укажем некоторые особенности их применения для вычисления определенных интегралов.

I. Правило интегрирования по частям:

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dv = uv\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v\,du, \qquad \text{(A)}$$

где u и v — функции независимой переменной.

Доказательство. Имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dv = \int u\,dv\,\Big|_{x_1}^{x_2} = \left(uv - \int v\,du\right)\Big|_{x_1}^{x_2};$$

отсюда непосредственно и следует доказываемая формула.

Вместо того чтобы до конца довести неопределенное интегрирование по частям, а затем выполнить двойную подстановку, можно сразу воспользоваться формулой (A).

Рассмотрим в качестве примера интеграл

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, \quad n\text{ — целое положительное число.}$$

Положим

$$dv = \sin x\,dx, \qquad u = \sin^{n-1} x.$$

При этом

$$v = -\cos x, \quad du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx$$

и

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю; заменяя во втором слагаемом $\cos^2 x$ через $1-\sin^2 x$, получим

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,$$

т. е.

$$I_n = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n,$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Это — *формула приведения* (рекуррентная формула). С ее помощью мы можем в конце концов снизить показатель степени до 1, если n — нечетное число, или до 0, если n — четное число. Но интегралы I_1 и I_0 известны:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1, \qquad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

и, таким образом, задача решается до конца. Например,

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{16}\pi.$$

Предварительное полное отыскание неопределенного интеграла потребовало бы более громоздких выкладок.

II. Правило замены переменной (подстановки). Правило замены переменной в определенном интеграле требует большого внимания.

Напомним (см. п. 81, II), что если $x=\psi(u)$, то

$$\int f(x)\,dx=\int f[\psi(u)]\,\psi'(u)\,du.$$

При этом, если известен один из интегралов, то известен и второй. Если первый равен $F(x)$ (произвольную постоянную C не пишем), то второй равен $F[\psi(u)]$; если же известен второй интеграл, то чтобы найти первый, нужно вместо u подставить его выражение через x.

Теперь сформулируем правило.

Если в интервале $[u_1, u_2]$ функции $x=\psi(u)$, $\psi'(u)$ и $f[\psi(u)]$ непрерывны и $\psi(u_1)=x_1, \psi(u_2)=x_2$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{u_1}^{u_2} f[\psi(u)]\,\psi'(u)\,du. \tag{Б}$$

Доказательство. Будем считать, что неопределенный интеграл слева известен и равен $F(x)$; тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=F(x_2)-F(x_1).$$

Согласно сказанному выше неопределенный интеграл справа равен $F[\psi(u)]$, и поэтому

$$\int_{u_1}^{u_2} f[\psi(u)]\,\psi'(u)\,du=F[\psi(u_2)]-F[\psi(u_1)]=F(x_2)-F(x_1).$$

Сравнивая полученные равенства, мы и приходим к формуле Б).

Из формулы (Б) видно, что подынтегральное выражение преобразуется так же, как и в случае неопределенного интеграла. Новые же пределы интегрирования u_1 и u_2 являются корнями уравнений

$$x_1=\psi(u) \text{ и } x_2=\psi(u)$$

относительно неизвестной u.

Итак, вместо того чтобы, выполнив при помощи замены переменной неопределенное интегрирование, вернуться к первоначальной переменной, а затем вычислить двойную подстановку в данных пределах, можно сразу взять двойную подстановку в новых пределах. Результат — значение определенного интеграла — получится тот же, а выкладок потребуется меньше.

Часто замена переменной в определенном интеграле производится не по формуле $x=\psi(u)$, а по формуле $u=\varphi(x)$, выражающей новую переменную через заданную. Тогда новые пределы u_1 и u_2 сразу определяются по формулам

$$u_1=\varphi(x_1), \qquad u_2=\varphi(x_2).$$

При этом иногда возникают затруднения, связанные с тем, что если функция $u=\varphi(x)$ не монотонная, то обратная к ней функция $x=\psi(u)$ будет не однозначной. Может даже оказаться, что различным значениям x_1 и x_2 будут соответствовать одинаковые значения $u_1=u_2$ $\left(\text{например, при подстановке } u=\cos x \text{ в пределах от } -\frac{\pi}{2} \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$ и интеграл справа в формуле (Б) будет равен нулю, а слева нет. Поэтому, чтобы формула (Б) оставалась справедливой, нужно на функцию $u=\varphi(x)$ наложить некоторые ограничения: достаточно потребовать, чтобы $\varphi(x)$ *была в интервале* (x_1, x_2) *монотонна и имела производную, не равную нулю ни в одной внутренней точке интервала* (короче, производная $\varphi'(x)$ должна сохранять постоянный знак). Тогда обратная функция $x=\psi(u)$ будет удовлетворять всем требованиям, сформулированным в правиле подстановки (см. теорему V п. **34** и п. **42**).

Примеры. 1) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Положим $x=\sin u$. Новые пределы интегрирования u_1 и u_2 найдем из уравнений $0=\sin u$ и $\frac{1}{2}=\sin u$; u_1 можно взять равным 0, а u_2 — равным $\frac{\pi}{6}$. При изменении u от 0 до $\frac{\pi}{6}$ переменная $x=\sin u$ пробежит весь данный интервал интегрирования $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Таким образом,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 u \cos u}{\cos u}\,du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 u\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(u - \frac{\sin 2u}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

При выборе новых пределов интегрирования мог возникнуть вопрос: почему взяты пределы $u_1=0$ и $u_2=\frac{\pi}{6}$, а не, скажем, $u_1=0$ и

$u_2=\frac{5\pi}{6}$? Ведь $\sin\frac{5\pi}{6}$ тоже равен $\frac{1}{2}$. Можно проверить, что и при этих пределах величина интеграла останется прежней, однако его вычисление усложнится. Дело в том, что теперь $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\cos^2 u}$ уже не равно просто $\cos u$. Это имеет место только в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, где $\cos u \geqslant 0$; в интервале же $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ корень будет равен $-\cos u$, так как $\cos u \leqslant 0$. Поэтому

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\sin^2 u \cos u}{|\cos u|}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\,du - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2 u\,du.$$

Произведя дальнейшие выкладки, получим тот же результат, что и раньше. Чтобы избежать ненужных осложнений при вычислениях, всегда берут наименьший возможный интервал изменения новой переменной интегрирования.

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$. Полагая $\cos x = u$, будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_1^0 \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

3) $U_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$. Положим $x=\frac{\pi}{2}-u$; тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u\,du,$$

а так как значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Метод вычисления последнего интеграла с помощью формул приведения указан на стр. 313.

4) Выведем формулу для интеграла, взятого по симметричному интервалу $[-a, a]$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx,$$

в случаях, когда подынтегральная функция четна и нечетна. Представим этот интеграл так:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Заменив переменную интегрирования в первом интеграле в правой части по формуле $x = -u$, получим

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Обозначим в первом интеграле справа переменную интегрирования снова через x; тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]\,dx.$$

Подынтегральная функция в правой части равна нулю, если $f(x)$ — функция нечетная, и равна $2f(x)$, если $f(x)$ — функция четная. Следовательно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция,} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция.} \end{cases}$$

Эти формулы очень полезны. Например, сразу ясно, что

$$\int_{-a}^{a} x^5 e^{x^2}\,dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x\,dx = 0.$$

Рекомендуем читателю выяснить геометрический смысл выведенных формул.

95. Приближенные методы интегрирования. Перейдем теперь к некоторым употребительным методам приближенного интегрирования, позволяющим находить приближенное значение определенного интеграла от любой непрерывной функции с практически достаточной точностью. Потребность в приближенном вычислении интеграла может возникнуть и тогда, когда не существует или неизвестен метод отыскания точного значения интеграла, и тогда, когда этот метод известен, но неудобен. Излагаемые приближенные численные методы основаны на следующем: рассматривая интеграл как площадь криволинейной трапеции, мы получим ее приближенное значение, т. е. приближенное значение интеграла, если вычислим площадь другой трапеции, ограничивающая линия которой по возможности мало отклоняется по положению от заданной линии. Вспомогательную линию при этом проводим так, чтобы получилась фигура, площадь которой легко вычисляется.

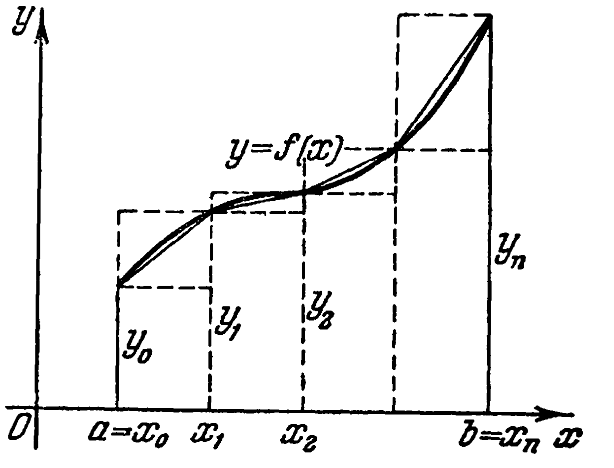

Рис. 111.

Мы дадим следующие правила численного интегрирования: 1) правило прямоугольников и правило трапеций, 2) правило параболических трапеций, называемое по имени его автора правилом Симпсона[1]).

I. Правило прямоугольников и правило трапеций. Разделим интервал интегрирования $[a, b]$ на n равных частей (частичных интервалов) и заменим данную трапецию ступенчатой фигурой, состоящей из n прямоугольников, опирающихся на частичные интервалы, причем высоты этих прямоугольников равны значениям функции $y=f(x)$ в начальных или в конечных точках частичных интервалов (рис. 111). Значение площади этой фигуры и будет давать приближенное значение искомого интеграла $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Результат будет тем более точен, чем больше взято число частичных интервалов.

Если обозначить значения функции $f(x)$ в точках деления через $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$, т. е. положить $y_k=f(x_k)$, $x_k=a+k\Delta x$, где $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, а k принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n$, то, очевидно, будем иметь следующие формулы:

$$I\approx \underline{I}=\Delta x\,(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})$$

или

$$I\approx \overline{I}=\Delta x\,(y_1+y_2+\ldots+y_n).$$

Эти формулы и называются *формулами прямоугольников.*

---

[1]) Т. Симпсон (1710—1761)—английский математик.

Оставим разбиение интервала $[a, b]$ прежним, но заменим теперь каждую дугу линии $y=f(x)$, соответствующую частичному интервалу, хордой, соединяющей конечные точки этой дуги. Таким образом, мы заменяем данную криволинейную трапецию n прямолинейными (рис. 111). Геометрически очевидно, что площадь такой фигуры более точно выражает искомую площадь, чем площадь n-ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников.

Ясно, что площадь каждой трапеции, построенной на частичном интервале, равна полусумме площадей, соответствующих этому интервалу прямоугольников. Суммируя все эти площади, получим

$$I \approx I_{\text{тр}} = \frac{\underline{I}+\overline{I}}{2} = \Delta x \left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right).$$

Эта формула и носит название *формулы трапеций.*

Если функция $f(x)$ монотонна, то величины $\underline{I}$ и $\overline{I}$ дают оценку интеграла значительно более точную, чем указанная в теореме VI п. **90.** При этом ясно, что если функция монотонно возрастает (этот случай как раз изображен на рис. 111), то

$$\underline{I}<I<\overline{I},$$

а если монотонно убывает, то, наоборот,

$$\underline{I}>I>\overline{I}.$$

Беря в качестве приближенного значения интеграла значение, получаемое по формуле трапеций

$$I \approx \frac{\underline{I}+\overline{I}}{2},$$

мы будем уверены, что абсолютная ошибка не превосходит абсолютной величины полуразности $\overline{I}$ и $\underline{I}$, т. е.

$$|\Delta I| \leqslant \frac{|\overline{I}-\underline{I}|}{2}.$$

В качестве примера найдем приближенное значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

и сравним найденные величины с его точным значением, равным $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$. Пусть $n=10$. Тогда $\Delta x = 0{,}1$; $x_k = k \cdot 0{,}1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 10)$. Вычисляя значения функции (с точностью до 0,001), получим

$$y_0 = 1, \qquad y_1 = \frac{1}{1+(0,1)^2} \approx 0,990,$$

$$y_2 = \frac{1}{1+(0,2)^2} \approx 0,962, \quad y_3 \approx 0,917, \quad y_4 \approx 0,862, \quad y_5 = 0,8,$$

$$y_6 \approx 0,735, y_7 \approx 0,671, \quad y_8 \approx 0,610, \quad y_9 \approx 0,552, \quad y_{10} = 0,5.$$

Следовательно,

$$\underline{I} = 0,1\,(1 + 0,990 + 0,962 + 0,917 + 0,862 + 0,8 + 0,735 + \\ + 0,671 + 0,610 + 0,552) \approx 0,810.$$

Аналогично вычислим $\overline{I}$:

$$\overline{I} \approx 0,755.$$

В этом примере $\underline{I} > \overline{I}$, так как функция убывающая. Таким образом,

$$0,755 < I < 0,810.$$

Возьмем в качестве I значение

$$I \approx \frac{0,755+0,810}{2} \approx 0,782.$$

При этом абсолютная ошибка не превосходит $|\Delta I| < 0,028$, относительная $\frac{0,028\cdot 100}{0,782} \approx 3,6\%$. Фактически же абсолютная ошибка составляет всего 0,003.

Вычислим еще приближенное значение интеграла

$$I = \int_0^\pi \sin x\, dx = 2.$$

Пусть $n = 6$. Тогда по формуле трапеций

$$I \approx I_{\text{тр}} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\sin 0 + \sin \pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{2\pi}{6} + \sin\frac{3\pi}{6} + \sin\frac{4\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6}\right) = \\ = \frac{\pi}{6}\left(0,5 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0,5\right) \approx 1,9541.$$

Абсолютная ошибка равна 0,0459, а относительная — 2,5%.

В этом примере подынтегральная функция в интервале интегрирования не монотонна и мы не можем дать о ц е н к у для вычисляемого интеграла.

Действительно, здесь $\underline{I} = \overline{I} = I_{\text{тр}}$, т. е. все эти значения дают искомую величину интеграла с недостатком. Чтобы получить все-таки оценку для вычисляемого интеграла, мы должны разбить интервал интегрирования на части, в каждой из которых функция монотонна, и рассмотреть интегралы по каждому частичному интервалу отдельно.

II. Правило Симпсона. Это правило требует не на много большей затраты труда, чем предыдущие, а приводит обычно к более точным результатам (при одном и том же разбиении интервала).

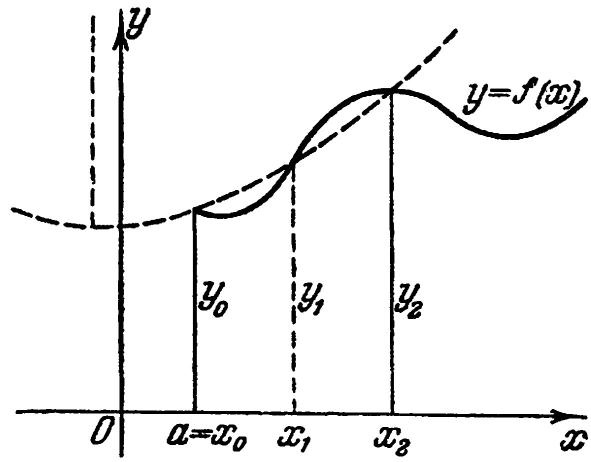

Рис. 112.

Как и раньше, разобьем интервал $[a, b]$ на n равных частей, но предположим, что n — четное число: $n=2m$. Заменим дугу линии $y=f(x)$, соответствующую интервалу $[x_0, x_2]$, дугой параболы, ось которой параллельна оси ординат и которая проходит через следующие три точки дуги: начальную точку дуги (x_0, y_0), среднюю точку (x_1, y_1), конечную точку (x_2, y_2) (рис. 112). Аналитически это означает, что в интервале $[x_0, x_2]$ данная функция $y=f(x)$ заменяется квадратичной функцией $y=px^2+qx+r$. Коэффициенты p, q и r выбираются так, чтобы значения обеих функций были равны при x_0, x_1 и x_2 соответственно

$$y_0=px_0^2+qx_0+r, \quad y_1=px_1^2+qx_1+r, \quad y_2=px_2^2+qx_2+r.$$

Решая полученные уравнения, находим коэффициенты p, q и r.

Произведя подобные замены и в интервалах $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$, ..., $[x_{n-2}, x_n]$ будем считать, что площадь данной трапеции приближенно равна сумме площадей получающихся параболических трапеций. Докажем теперь, что площадь S трапеции, ограниченной какой-нибудь параболой $y=px^2+qx+r$ с осью, параллельной оси ординат, будет выражаться формулой

$$S=\frac{(\text{дл. осн.})}{6}(y_{\text{н}}+4y_{\text{с}}+y_{\text{к}}), \qquad (*)$$

где $y_{\text{н}}$ — ордината начальной, $y_{\text{с}}$ — ордината средней и $y_{\text{к}}$ — ордината конечной точек дуги параболы.

Предположим сначала, что основанием трапеции служит интервал оси Ox, симметричный относительно начала координат, $[-\gamma, \gamma]$. Для площади такой параболической трапеции имеем выражение

$$S=\int_{-\gamma}^{\gamma}(px^2+qx+r)\,dx=p\int_{-\gamma}^{\gamma}x^2\,dx+q\int_{-\gamma}^{\gamma}x\,dx+r\int_{-\gamma}^{\gamma}dx,$$

т. е.

$$S = p\frac{\gamma^3-(-\gamma)^3}{3} + q\frac{\gamma^2-(-\gamma)^2}{2} + r\frac{\gamma-(-\gamma)}{1} = \frac{2}{3}p\gamma^3 + 2r\gamma.$$

Так как здесь $y_н = y_{x=-\gamma} = p\gamma^2 - q\gamma + r$, $y_c = y_{x=0} = r$, $y_к = y_{x=\gamma} = p\gamma^2 + q\gamma + r$ и длина основания равна 2γ, то непосредственной подстановкой этих значений в формулу (*) убеждаемся в ее справедливости.

Очевидно, что эта формула справедлива и для параболической трапеции рассматриваемого вида с любым основанием. Действительно, площадь трапеции не изменится, если перенести ее параллельно самой себе так, чтобы основание стало симметричным относительно начала координат, и тогда искомая площадь выразится в согласии с формулой (*).

Возвращаясь к первоначальной задаче, найдем по этой формуле площадь S_1 параболической трапеции, опирающейся на интервал $[x_0, x_2]$:

$$S_1 = \frac{x_2-x_0}{6}(y_0+4y_1+y_2) = \frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+y_2),$$

где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Аналогично выразятся площади $S_2, S_3, \ldots, S_m$ последующих параболических трапеций:

$$S_2 = \frac{\Delta x}{3}(y_2+4y_3+y_4),$$
$$S_3 = \frac{\Delta x}{3}(y_4+4y_5+y_6),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_m = \frac{\Delta x}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n).$$

Сложив почленно все эти равенства, получим выражение, дающее приближенное значение искомого интеграла:

$$I \approx \frac{\Delta x}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+4y_{n-1}+y_n].$$

Это и есть *формула Симпсона.*

По формуле Симпсона, например, для интеграла $I = \int\limits_0^1 x^4\,dx$ $(=0{,}2)$ при $n = 10$ находим: $I \approx 0{,}200013$; абсолютная ошибка составляет всего 0,000013, а относительная — 0,01%.

Ясно, что для любого интеграла от квадратичной функции $y = px^2 + qx + r$ формула Симпсона должна, конечно, дать точное значение. Заметим, что формула Симпсона дает также точное значение и для интеграла от кубической функции.

Применим формулу Симпсона к интегралу $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$, вычисленному раньше по формуле трапеций.

Простые подсчеты при $n=6$ дают

$$I \approx \frac{\pi}{18}(8+2\sqrt{3}) \approx 2{,}001.$$

Относительная ошибка результата равна 0,05% — очень хорошая точность, достигнутая всего при шести точках деления интервала интегрирования.

Для интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по правилу Симпсона только при $n=4$ найдем $I \approx 0{,}78539$ со всеми верными знаками. Пользуясь правилом трапеций, мы получили для величины этого интеграла худший результат при значительно большем объеме вычислений.

Приведенные правила приближенного численного интегрирования позволяют находить интегралы не только от функций, заданных формулами, но и от функций, заданных геометрическим или табличным способом.

Пример. Ширина реки равна 20 *м*; промеры глубины в некотором поперечном ее сечении через каждые 2 *м* дали следующую таблицу:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0,2	0,5	0,9	1,1	1,3	1,7	2,1	1,5	1,1	0,6	0,2

Здесь расстояние (в метрах) от одного из берегов обозначено через x, соответствующая глубина реки (также в метрах) — через y. Требуется найти площадь S поперечного сечения реки.

По формуле трапеций находим

$$S = 2\left(\frac{0{,}2+0{,}2}{2}+0{,}5+0{,}9+1{,}1+1{,}3+1{,}7+\right.$$
$$\left.+2{,}1+1{,}5+1{,}1+0{,}6\right) = 22\ м^2;$$

по формуле Симпсона находим

$$S = \frac{2}{3}[0{,}2+4\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}9+\ldots+4\cdot 0{,}6+0{,}2] = 21{,}9\ м^2.$$

Результаты — весьма близкие. О точности их говорить не приходится, так как по условию задачи точный профиль реки не задан.

96. Графическое интегрирование. Остановимся теперь на графическом методе отыскания значения интеграла. Пусть нам известен график функции $y=f(x)$. Поставим задачу: геометрическими средствами, не прибегая к вычислениям, найти приближенное значение интеграла

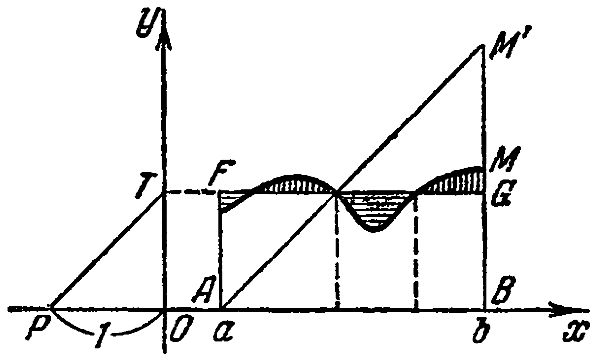

Рис. 113.

$$I=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Будем предполагать, что масштаб по оси Ox равен масштабу по оси Oy и что полюс графика P находится на расстоянии единицы масштаба от начала координат: $OP=1$ (рис. 113). Проведем прямую FG, параллельную оси Ox и пересекающую линию $y=f(x)$ так, чтобы площадь полученного прямоугольника как можно меньше отличалась от площади нашей криволинейной трапеции. Для этого нужно, чтобы площадь, заключенная между линией и прямой FG и лежащая над прямой, по возможности точно равнялась площади, заключенной между линией и прямой и лежащей под прямой. Продолжим прямую FG до пересечения с осью Oy в точке T и соединим эту точку с полюсом графика. Наконец, из точки A проведем прямую, параллельную PT, до пересечения с прямой $x=b$ в точке M'.

Легко убедиться в том, что отрезок $M'B$ изображает искомую площадь, т. е. отрезок $M'B$ содержит столько линейных масштабных единиц, сколько квадратных единиц содержит площадь криволинейной трапеции. В самом деле, из подобия треугольников POT и ABM' находим

$$\frac{BM'}{AB}=\frac{OT}{OP}, \quad \text{откуда} \quad BM'=\frac{AB\cdot OT}{OP};$$

но $OP=1$, а $AB\cdot OT$ измеряет площадь трапеции.

Если интервал $[a, b]$ недостаточно мал, то проведение прямой FG на глаз может привести к ощутимой ошибке. Для того чтобы уточнить построение, разобьем интервал интегрирования на частичные интервалы (не обязательно равные между собой) и всю трапецию — на ряд трапеций, опирающихся на эти частичные интервалы. Точки деления выберем таким образом, чтобы каждый частичный интервал был интервалом монотонности подынтегральной функции и чтобы в числе точек деления находились все точки пересечения линии $y=f(x)$ с осью Ox. Если в каждом интервале линия незначительно отличается от прямой, то в качестве средних линий частичных трапеций можно брать просто ординаты в средних точках частичных интервалов. Тогда отпадает необходимость проводить на глаз вспомогательные линии. Практически обычно так и поступают.

Последовательно для каждой из частичных криволинейных трапеций построим указанным выше путем отрезок, изображающий ее площадь. В целях ясности чертежа удобно откладывать этот отрезок не от данной оси Ox, а от другой оси O_1x, параллельной первой (рис. 114). В точке $x=a$ площадь трапеции, отсчитываемая от прямой $x=a$, очевидно, равна нулю. Отметим на оси O_1x точку $M'_0(a, 0)$, она соответствует точке M_0 линии $y=f(x)$. До прямой $x=x_1$ площадь трапеции равна площади первой частичной

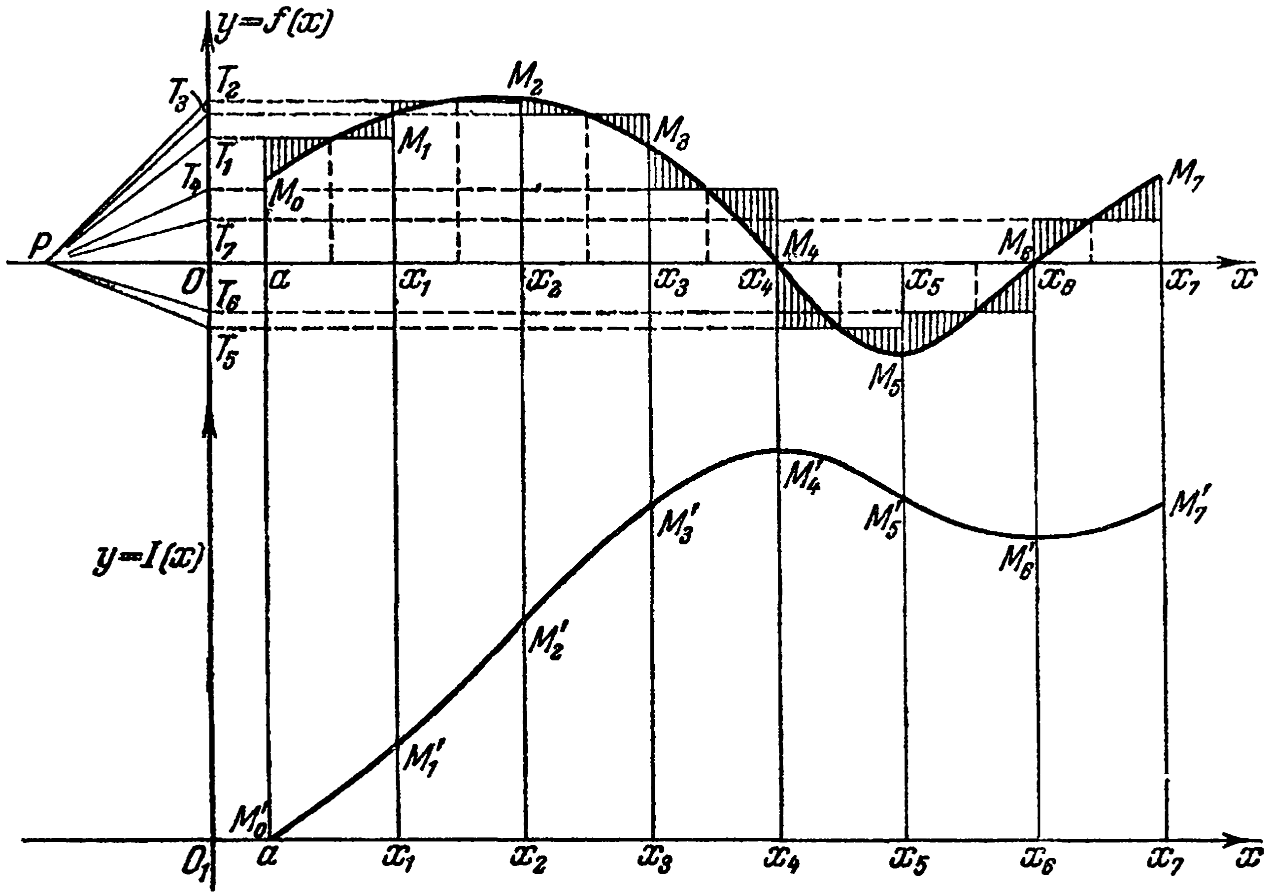

Рис. 114.

трапеции; она изобразится отрезком M'_1x_1, которой мы получим, если из точки M'_0 проведем прямую, параллельную PT_1, до пересечения с прямой $x=x_1$ в точке M'_1. Эта точка соответствует точке M_1 на линии. Площадь трапеции до прямой $x=x_2$ (т. е. значение интеграла, взятого от a до x_2) равна сумме (в алгебраическом смысле) площадей первой и второй частичных трапеций. Она изобразится отрезком M'_2x_2, который получится, если из точки M'_1 провести прямую, параллельную PT_2, до пересечения с прямой $x=x_2$ в точке M'_2. Эта точка соответствует точке M_2 на линии. Продолжая так же дальше, построим последовательно точки M'_3, M'_4, ..., соответствующие точкам M_3, M_4, ... линии. Ордината точки M'_n, соответствующей точке $M_n[b, f(b)]$ линии, и даст нам искомое значение интеграла I. Ясно, что чем больше точек деления, тем точнее получится построение.

Соединим полученные точки M'_0, M'_1, M'_2, ..., M'_n плавной линией. Ординаты этой линии, очевидно, приближенно изображают значения интеграла, взятого от $x=a$ до соответствующих точек основания трапеции. Другими словами, эта линия является графиком функции, определяемой нашим интегралом с переменным верхним пределом:

$$I(x)=\int_a^x f(x)\,dx.$$

Как известно (п. **79**), линия $y=I(x)$ называется интегральной кривой функции $y=f(x)$. Рассмотренное нами геометрическое построение интегральной кривой по графику подынтегральной функции называется *графическим интегрированием*.

Так же как и в случае графического дифференцирования, графическое интегрирование бывает наиболее удобным тогда, когда подынтегральная функция задается графически, а аналитическое ее выражение неизвестно. Это нередко встречается в практике, например, когда функция определяется графиком, записываемым самопишущим прибором.

§ 4. Несобственные интегралы

97. Интегралы с бесконечными пределами. Говоря об определенных интегралах, мы всегда до сих пор подразумевали, что интервал интегрирования конечен и подынтегральная функция на нем непрерывна. Именно для этого случая и сформулирована теорема существования определенного интеграла (п. **87**). Довольно часто, однако, возникает необходимость распространить определение определенного интеграла на случаи бесконечного интервала интегрирования и разрывной подынтегральной функции. В этом пункте будут рассмотрены интегралы с бесконечными пределами; интегралы от разрывных функций будут изучаться в п. **99**.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в полубесконечном интервале $[a, \infty)$. Тогда мы можем вычислить интеграл от функции $f(x)$, взятый по любому интервалу $[a, \eta]$, $\eta > a$. Интеграл

$$I(\eta)=\int_a^\eta f(x)\,dx$$

тем лучше выражает величину, которую следует принять в качестве интеграла от функции $f(x)$ в интервале $[a, \infty)$, чем больше η. Заставим η неограниченно возрастать. Имеются две возможности: или $I(\eta)$ при $\eta \to \infty$ имеет предел, или $I(\eta)$ предела не имеет; последнее означает, что $I(\eta)$ или стремится к бесконечности, или колеблется и вообще не стремится ни к какому пределу.

Определение. ***Несобственным интегралом*** **от функции $f(x)$ в интервале $[a, \infty)$ называется предел интеграла $\int\limits_a^\eta f(x)dx$ при $\eta \to \infty$. Записывают это так:**

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\eta \to \infty} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx.$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*.

Если первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ известна, то легко установить, сходится несобственный интеграл или нет. С помощью формулы Ньютона—Лейбница получаем

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\eta \to \infty} [F(\eta) - F(a)] = F(\infty) - F(a).$$

Таким образом, *если предел первообразной $F(x)$ при $x \to \infty$ существует* (он обозначен через $F(\infty)$), *то несобственный интеграл сходится, а если этот предел не существует, то интеграл расходится.*

Примеры. 1) $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 0 + 1 = 1$. Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$ сходится и равен 1.

2) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^\infty = \infty$. Интеграл расходится, так как первообразная $\ln x$ при $x \to \infty$ стремится к бесконечности.

3) Интеграл $\int\limits_0^\infty \cos x\,dx$ расходится, так как величина $\int\limits_0^\eta \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^\eta = \sin \eta$ не стремится к пределу при $\eta \to \infty$ (колеблется).

Аналогично определяется несобственный интеграл и в интервале $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\eta \to -\infty} \int_{\eta}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(-\infty),$$

где $F(-\infty)$ — предел первообразной $F(x)$ при $x \to -\infty$.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, то можно рассматривать и несобственный интеграл в интервале $(-\infty, +\infty)$. По определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если оба интеграла в правой части сходятся, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется сходящимся.*

Если первообразная $F(x)$ известна, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty),$$

где под символами $F(+\infty)$ и $F(-\infty)$ понимают пределы, к которым стремится $F(x)$ соответственно при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. *Если хотя бы один из этих пределов не существует, то несобственный интеграл расходится.*

4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

5) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = e^x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \infty - 0 = \infty.$$ Интеграл расходится.

6) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Здесь и $F(-\infty)$ и $F(+\infty)$ равны бесконечности; интеграл расходится.

Заметим, что на несобственные интегралы без всяких изменений переносятся простейшие свойства определенного интеграла, сформулированные в п. **88**, если только все интегралы, стоящие в правых частях равенств, выделенных жирным шрифтом, сходятся. Справедливы также теоремы III—V п. **89**.

Сходящимся несобственным интегралам можно придать определенный геометрический смысл. Пусть, например, график функции $y=f(x)$ ограничивает трапецию с бесконечным основанием (рис. 115). Если несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, то будем говорить, что заштрихованная фигура имеет площадь, равную этому интегралу. Если интеграл расходится, то говорить о площади фигуры нельзя.

Например, бесконечной трапеции, ограниченной положительной полуосью Ox, прямой $x=a\ (a>0)$ и линией $y=\frac{1}{x^3}$, можно приписать площадь, равную $\frac{1}{2a^2}$, ибо

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_a^\infty = \frac{1}{2a^2}.$$

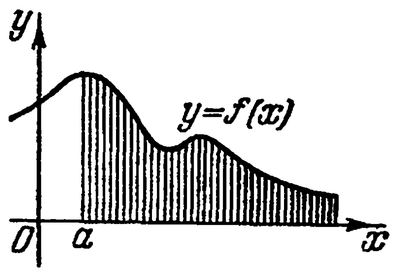

Рис. 115.

Бесконечной трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, положительной полуосью Ox и прямой $x=a\ (a>0)$, нельзя приписать площадь, так как

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \ln x\,\Big|_a^\infty = \infty.$$

Несобственные интегралы рассмотренного типа часто встречаются в задачах механики и электростатики в связи с определением *потенциала*.

Пусть точка M массы m, находящаяся в начале координат, притягивает свободную точку M_1 массы 1, лежащую на расстоянии x от M на оси Ox. Величина P силы притяжения, как известно, определяется по закону Ньютона

$$P=k\frac{m}{x^2}, \qquad \text{где } k \text{ — константа,}$$

а работа, произведенная при перемещении M_1 из точки $x=r$ в точку $x=b\ (b>r>0)$, — из формулы

$$A=-\int\limits_r^b k\frac{m}{x^2}\,dx = km\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{r}\right).$$

Знак минус перед интегралом взят потому, что направление силы противоположно направлению движения точки M (по той же причине работа оказалась отрицательной).

Если точка удаляется в бесконечность ($b=\infty$), то

$$A=-\int_r^\infty k\frac{m}{x^2}\,dx=-k\frac{m}{r}.$$

Если точка M_1 будет перемещаться из бесконечности в точку $x=r$, то сила притяжения произведет уже положительную работу:

$$A=k\frac{m}{r}.$$

Эта работа называется *потенциалом силы притяжения материальной точки M при $x=r$* (или в точке $x=r$).

98*. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами. Выяснение вопроса о сходимости несобственных интегралов значительно усложняется, если первообразная функция неизвестна. В таких случаях иногда удается установить сходится или расходится интеграл, пользуясь специальными признаками, не требующими знания первообразной. Будем для определенности говорить об интегралах вида $\int_a^\infty f(x)\,dx$; признаки сходимости для интегралов $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ формулируются совершенно аналогично.

I. Начнем со случая, когда подынтегральная функция $f(x)$ во всех точках интервала $[a, \infty)$ неотрицательна: $f(x)\geqslant 0$. Геометрически ясно, что $I(\eta)=\int_a^\eta f(x)\,dx$ с возрастанием η будет возрастать (если есть интервалы, в которых $f(x)\equiv 0$, то в них $I(\eta)$ постоянна). По признаку существования предела (см. конец п. **31**), если возрастающая функция ограничена, то она имеет предел. Поэтому, если только нам известно, что $I(\eta)$ ограничена: $I(\eta)\leqslant M$, где M — некоторая постоянная, то уже можно сказать, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится и его величина не превосходит M. При этом, разумеется, мы еще не знаем, чему этот интеграл равен; вычисление несобственных интегралов, когда первообразная неизвестна, гораздо сложнее установления их сходимости, и производится специальными приемами.

С помощью сказанного легко доказать следующий признак.

Признак сравнения. **Пусть для всех значений x выполняется неравенство**

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x). \tag{*}$$

Тогда: 1) если сходится интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$, то сходится и $\int_a^\infty f(x)\,dx$;

2) если расходится интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$, то расходится и $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$.

Доказательство. Предположим, что интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ сходится и равен M; тогда $\int_a^\eta \varphi(x)\,dx \leqslant M$ для любого η. По теореме об интегрировании неравенств (п. 90, II)

$$\int_a^\eta f(x)\,dx \leqslant \int_a^\eta \varphi(x)\,dx \leqslant M.$$

Это значит, что $I(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx$ есть ограниченная функция и интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится.

Если дано, что интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ расходится, то возрастающая функция $\int_a^\eta f(x)\,dx$ стремится к бесконечности; но так как $\int_a^\eta \varphi(x)\,dx \geqslant \int_a^\eta f(x)\,dx$, то и функция $\int_a^\eta \varphi(x)\,dx$ тоже стремится к бесконечности, т. е. $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ расходится. Признак полностью доказан.

Предоставляем читателю выяснить геометрический смысл признака сравнения.

Совсем не обязательно считать, что неравенство (*) выполняется во всем интервале $[a, \infty)$. Признак остается справедливым, если это неравенство соблюдается для всех $x \geqslant b > a$. Тогда мы с помощью признака сравнения исследуем интеграл в интервале $[b, \infty)$. Добавление же затем постоянной величины — интеграла в пределах от a до b, — очевидно, не нарушит сходимости или расходимости интеграла.

Наибольшая трудность исследования данного несобственного интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ с помощью признака сравнения заключается в том, что нам заранее неизвестно, с чем же сравнивать подынтегральную функцию. Поэтому, чтобы применять признак, нужно иметь некоторый запас функций, относительно интегралов от которых было бы известно, сходятся они или расходятся. Легко, например, проверить, что интегралы от функций $y = e^{-kx}$ при $k > 0$ сходятся в любом интервале $[a, \infty)$, а при $k \leqslant 0$ расходятся.

Так как при $x > 1$ имеет место неравенство $e^{-x^2} < e^{-x}$, то интеграл $\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится. Согласно замечанию, сделанному чуть выше, сходится и интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, а так как подынтегральная функция четная, то и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ называется *интегралом Пуассона* [1]) и играет очень важную роль в теории вероятностей. Позже (в п. **131**) он будет вычислен специальным приемом; пока мы просто приведем его значение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

В качестве функций сравнения очень часто применяются сте-

---

[1]) С. Пуассон (1781—1840) — выдающийся французский математик, физик и механик. Почетный член Петербургской академии наук.

пенные функции $y=\frac{1}{x^m}$, относительно которых докажем следующее.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^m}$, *где* $a>0$, *сходится при* $m>1$ *и расходится при* $m\leqslant 1$. (Ясно, что интересен только случай $m>0$, потому что при $m<0$ подынтегральная функция стремится к бесконечности при $x\to\infty$ и интеграл от нее заведомо расходится.)

При $m\neq 1$ имеем

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^m}=\left.\frac{x^{-m+1}}{-m+1}\right|_a^\infty.$$

Если $m>1$, то показатель степени $1-m<0$ и первообразная стремится к нулю при $x\to\infty$; интеграл сходится. Если же $m<1$, то $1-m>0$ и первообразная стремится к бесконечности при $x\to\infty$, т. е. интеграл расходится. Расходимость интеграла при $m=1$ установлена в примере 2 п. **97**.

Примеры. 1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x}\,\sqrt[3]{1+x^2}}$ сходится, так как неравенство $\frac{1}{\sqrt{1+x}\,\sqrt[3]{1+x^2}}<\frac{1}{x^{1/2}\,x^{2/3}}=\frac{1}{x^{7/6}}$ справедливо при всех $x\geqslant 1$ и интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{7/6}}$ сходится $\left(m=\frac{7}{6}>1\right)$.

2) $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ расходится, потому что $\frac{\sqrt{x}}{1+x}>\frac{\sqrt{x}}{x+x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ при $x>1$ и интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится $\left(m=\frac{1}{2}<1\right)$.

II. Признак сравнения, сформулированный в п. I, относится только к функциям, сохраняющим один и тот же знак в бесконечном интервале интегрирования (ясно, что исследование интеграла от отрицательной функции сводится к предыдущему). Более сложным оказывается исследование интегралов от функций, не сохраняющих постоянный знак, например таких, как $\frac{\sin x}{x}$. Мы приведем сейчас один признак сходимости, позволяющий иногда сводить исследование к случаю положительных функций.

Если сходится интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ *(интеграл от абсолютной величины функции* $f(x)$*), то сходится и интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$. При этом интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся.*

Для доказательства образуем две вспомогательные функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$, определив их следующим образом:

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } f(x)<0,\end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } f(x)>0,\\ f(x), & \text{если } f(x)\leqslant 0.\end{cases}$$

(Построение графиков функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ по заданной функции $f(x)$ показано на рис. 116.)

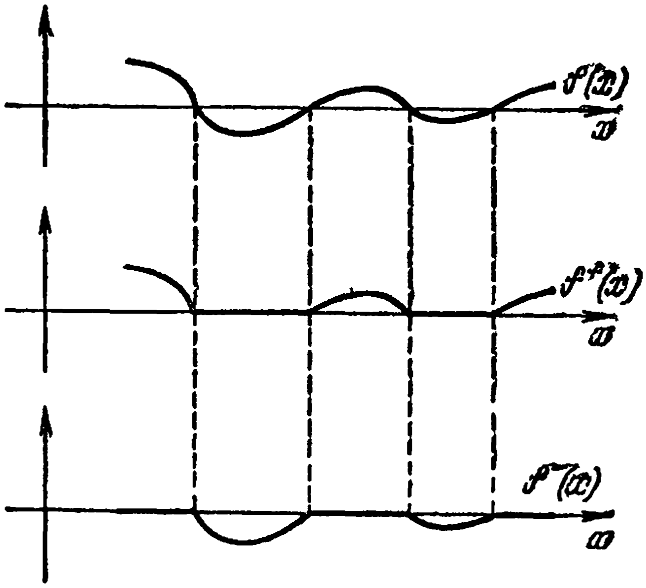

Рис. 116.

Ясно, что функции $f^+(x)$ и $-f^-(x)$ неотрицательны и каждая из них не превосходит $|f(x)|$. Так как по условию интеграл от $|f(x)|$ сходится, то по признаку сравнения заключаем, что сходятся и интегралы $\int\limits_a^\infty f^+(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty [-f^-(x)]\,dx$; изменив в последнем интеграле знак перед функцией, мы, очевидно, не нарушим его сходимости.

Но $f(x)=f^+(x)+f^-(x)$, и раз сходятся интегралы от $f^+(x)$ и $f^-(x)$, то согласно замечанию на стр. 328 интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ тоже сходится. Признак доказан.

Например, интегралы $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ и $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$ абсолютно сходятся, так как подынтегральные функции по абсолютной величине не превосходят положительной функции $\frac{1}{1+x^2}$, интеграл от которой сходится (пример 4 п. **97**).

Если сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то абсолютно сходятся и интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$, так как модули подынтегральных функций, очевидно, не превосходят $|f(x)|$. Этим простым замечанием мы воспользуемся в дальнейшем.

Если интеграл от $|f(x)|$ расходится, то об интеграле от $f(x)$ на одном этом основании еще ничего сказать нельзя: он может расходиться, а может и сходиться. В последнем случае (т. е. когда интеграл от $f(x)$ сходится, а интеграл от $|f(x)|$ расходится) говорят, что $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ *сходится условно* (не абсолютно).

Примером этого служит интеграл Дирихле[1]) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. Можно доказать (мы этого делать не будем), что этот интеграл сходится, а интеграл от модуля подынтегральной функции расходится. Таким образом, интеграл Дирихле сходится условно. Его величина вычислена специальными приемами:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

99. Интегралы от разрывных функций. Если в интервале $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет некоторое число точек разрыва первого рода, то дать определение интеграла для такой функции не представляет никаких затруднений. В самом деле, при этом естественно считать, что интеграл есть просто сумма обыкновенных интегралов, взятых по частичным интервалам, на которые разбивается интервал $[a, b]$ всеми точками разрыва функции. Обозначив их через $c_1, c_2, \ldots, c_k$, где $a<c_1<c_2<\ldots<c_k<b$, будем иметь

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^{c_1} f(x)\,dx+\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\ldots+\int\limits_{c_k}^{b} f(x)\,dx.$$

Этим самым дается и определение площади криволинейной трапеции, соответствующей функции $y=f(x)$ с конечным числом

---

[1]) Г. Дирихле (1805—1859) — известный немецкий математик.

точек разрыва первого рода в интервале $[a, b]$ (рис. 117): площадь такой трапеции есть сумма площадей трапеций, опирающихся на частичные интервалы $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, ..., $[c_k, b]$, заключенные между последовательными точками разрыва.

Перейдем к распространению определения интеграла для функций с бесконечными разрывами.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна для всех значений x, $a \leqslant x < b$, а в правом конце $x=b$ интервала претерпевает бесконечный разрыв. Ясно, что обычное определение интеграла здесь теряет свой смысл. Но если взять обыкновенный интеграл

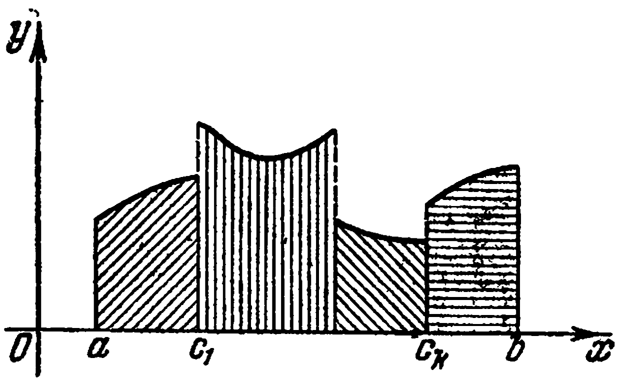

Рис. 117.

$$I(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad \varepsilon>0,$$

то мы можем считать, что $I(\varepsilon)$ с уменьшением ε все лучше выражает ту величину, которую следует принять в качестве интеграла от функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$. Заставим ε стремиться к нулю. Тогда $I(\varepsilon)$ либо имеет предел, либо не имеет (стремясь к бесконечности или вовсе не стремясь ни к какому пределу, т. е. колеблясь).

Определение. ***Несобственным интегралом*** **от функции $f(x)$, непрерывной при $a \leqslant x < b$ и неограниченной при $x \to b$, называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ при $\varepsilon \to 0$.**

Записывают это так:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad \varepsilon>0.$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*.

Аналогично, если функция $f(x)$ претерпевает бесконечный разрыв только в левом конце $x=a$ интервала $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx, \qquad \delta>0.$$

Если первообразная функция $F(x)$ известна, то в обоих случаях можно записать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

понимая под $F(b)$ (или $F(a)$) предел, к которому стремится первообразная $F(x)$ при $x \to b$ (или при $x \to a$). Если этот предел не существует, то интеграл расходится.

Примеры. 1) $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^a = 2\sqrt{a}$.

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)\Big|_0^1$. При $x \to 1$ предел $\ln(1-x)$ равен бесконечности; интеграл расходится.

Вообще можно заметить, что интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ и $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ сходятся, если $k < 1$, и расходятся, если $k \geqslant 1$. Предоставляем читателю доказать это.

3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\,\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. В этом примере подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв на обоих концах интервала интегрирования.

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в какой-нибудь промежуточной точке $x = c$ интервала $[a, b]$, $a < c < b$, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Если оба интеграла в правой части равенства сходятся, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$; этот интеграл расходится, если расходится хотя бы один из интегралов справа.

4) $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x}\,\Big|_{-1}^0 + 3\sqrt[3]{x}\,\Big|_0^2 = 3 + 3\sqrt[3]{2}$

5) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$. Оба интеграла справа расходятся, а значит, расходится и данный интеграл.

Предположим, что линия $y = f(x)$ имеет в точке $x = b$ асимптоту, перпендикулярную к оси Ox; тогда ограниченная ею трапеция будет бесконечной (с бесконечными высотами) (рис. 118). Если существует несобственный интеграл от функции $f(x)$, то считают, что он измеряет площадь этой бесконечной трапеции; в противном случае трапеция площади не имеет.

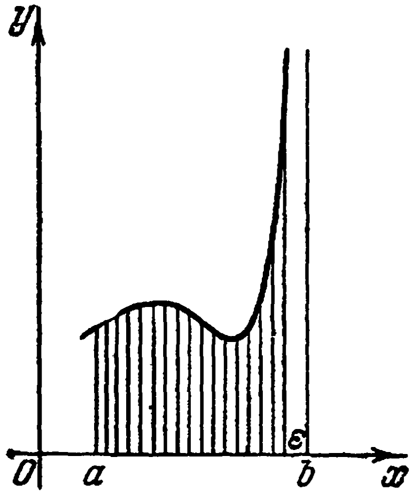

Рис. 118.

Например, бесконечной трапеции, ограниченной линией $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, можно приписать площадь, равную $2\sqrt{a}$, ибо $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{a}$ (пример 1).

Бесконечной же трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$ и теми же прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, нельзя приписать площади, ибо $\int\limits_0^a \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_0^a$ расходится.

На признаках сходимости интегралов от функций с бесконечными разрывами мы останавливаться не будем, так как они подобны рассмотренным в п. **98**.

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется первообразной от данной функции? Привести примеры.
2. Доказать теорему о виде первообразной данной непрерывной функции.
3. Что называется неопределенным интегралом от данной функции? интегральной кривой данной функции?
4. Сформулировать и доказать простейшие правила интегрирования. Привести примеры.
5. В чём состоят методы интегрирования по частям и замены переменной в неопределенном интеграле? Привести примеры.
6. Какая рациональная дробь называется правильной? Какие дроби называются простейшими (1-го и 2-го видов)?
7. Как производится разложение правильной рациональной дроби на простейшие?
8. В чем состоит метод интегрирования рациональной функции?
9. Привести примеры интегрирования простейших иррациональных функций.
10. Указать общий метод вычисления интеграла от функции, рациональной относительно тригонометрических функций.
11. Описать методы вычисления интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$, где n и m — целые числа.
12. Когда говорят, что функция не интегрируется в элементарных функциях (в конечном виде)?
13. Как определяется площадь криволинейной трапеции? работа силы? путь? масса?
14. Что называется определенным интегралом от данной функции в данном интервале? Выразить с помощью интеграла понятия, перечисленные в вопросе 13.

15. В чем состоит теорема существования определенного интеграла?
16. Сформулировать и доказать простейшие свойства определенного интеграла.
17. В чем состоят свойства аддитивности и сохранения знака определенного интеграла?
18. Каков геометрический смысл определенного интеграла от данной функции $y=f(x)$ в данном интервале $[a, b]$ в системе декартовых координат?
19. Сформулировать, доказать и геометрически иллюстрировать теорему об оценке интеграла. Доказать обобщение теоремы об оценке интеграла.
20. Сформулировать, доказать и геометрически иллюстрировать теорему о среднем в интегральном исчислении.
21. Что такое среднее арифметическое значение функции $y=f(x)$ в интервале $[a, b]$?
22. Чему равна производная от интеграла по его верхнему пределу? Доказать соответствующую теорему и привести ее геометрическую иллюстрацию.
23. Сформулировать и вывести формулу Ньютона—Лейбница.
24. В чем состоит метод интегрирования по частям в определенном интеграле?
25. В чем состоит метод замены переменной (подстановки) в определенном интеграле?
26. Вывести упрощающую формулу для интеграла, взятого по симметричному интервалу $[-a, a]$ от четной и нечетной функций.
27. Сформулировать и вывести правила приближенного отыскания определенного интеграла: 1) правила прямоугольников и трапеций, 2) правило параболических трапеций (Симпсона).
28. Описать метод графического интегрирования.
29. Что называется несобственным интегралом от данной функции по бесконечному интервалу? Дать геометрическую иллюстрацию и привести примеры сходящихся и расходящихся интегралов.
30. Доказать признак сравнения для несобственных интегралов.
31. Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся и какой условно сходящимся?
32. Что называется несобственным интегралом от разрывной функции по данному конечному интервалу? Дать геометрическую иллюстрацию и привести примеры сходящихся и расходящихся интегралов.

ГЛАВА VI
ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Некоторые задачи геометрии и статики

100. Площадь фигуры. Начнем с задачи о вычислении площади плоской фигуры, или, как говорят еще, о квадратуре фигуры. Исторически эта задача так непосредственно связана с интегрированием, что часто само отыскание интеграла называют *квадратурой*, и если какая-нибудь задача приводит к вычислению интеграла, то говорят, что она сводится к *квадратуре*.

I. Система декартовых координат. В декартовой системе координат за основную фигуру, площадь которой выражается одним интегралом, принимается криволинейная трапеция. Если $y=f(x)$ — уравнение линии, ограничивающей трапецию, то площадь трапеции S (в предположении, что $y \geqslant 0$) равна

$$S=\int_{a}^{b} y\,dx,$$

где пределы интегрирования a и b $(a<b)$ — абсциссы начала и конца линии.

Если линия задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t),$$

то, совершая подстановку в интеграле по формуле $x=\varphi(t)$, получим

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

где t_1 и t_2 — значения, между которыми изменяется параметр t, когда точка пробегает слева направо всю линию, ограничивающую трапецию сверху.

Пример. Найдем площадь S, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Имеем

$$S=2\int_{-a}^{a} y\,dx, \qquad y \geqslant 0.$$

Здесь удобно перейти к параметрическому заданию: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (см. п. 46).

Тогда

$$S=-2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt.$$

Вычисление дает

$$S=2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt=2ab\frac{1}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\pi ab.$$

II. Система полярных координат. Если линия, ограничивающая фигуру, задана уравнением в полярной системе координат, то в качестве основной фигуры принимается *криволинейный сектор* (рис. 119) — фигура, ограниченная линией $r=f(\varphi)$, с которой любой луч, исходящий из полюса P, пересекается не более чем в одной точке, и двумя лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$.

Покажем, что площадь такого сектора выражается одним интегралом. Разобьем весь сектор на n частичных секторов при помощи лучей, наклоненных к полярной оси под углами

$$\varphi_0=\alpha,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n=\beta.$$

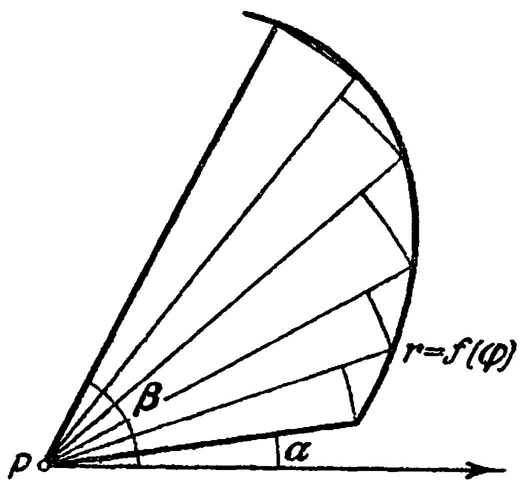

Рис. 119.

Заменим каждый криволинейный сектор круговым, т. е. будем считать, что на каждом из участков $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$) функция $f(\varphi)$ постоянна и равна значению $r_k=f(\varphi_k)$.

Напомним, что площадь кругового сектора радиуса r с центральным углом α равна $\frac{1}{2}r^2\alpha$. Поэтому площадь фигуры, составленной из n круговых секторов, заменяющих криволинейные секторы (рис. 119), будет равна

$$S_n = \frac{1}{2} f^2(\varphi_0)(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{2} f^2(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2} f^2(\varphi_{n-1})(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\varphi_i)\,\Delta\varphi_i, \qquad (*)$$

где $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$.

При образовании интегральной суммы для простоты принято, что все промежуточные точки ξ_i совпадают с **левыми** концами частичных интервалов $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$. Поэтому несколько изменено обозначение для $\Delta\varphi_i$ и суммирование ведется не от 1 до n, а от 0 до $n-1$.

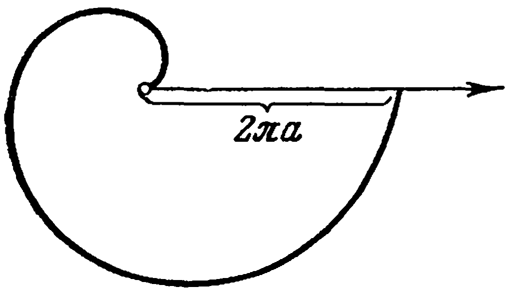

Рис. 120.

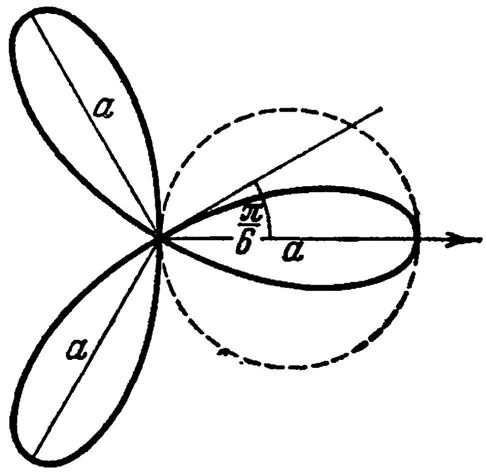

Рис. 121.

Предел суммы (*) при условии, что $n \to \infty$ и наибольший из углов $\Delta\varphi_i$ стремится к нулю, как раз и даст искомую площадь криволинейного сектора. Сумма (*) есть интегральная сумма для функции $f^2(\varphi)$ на интервале $[\alpha, \beta]$, и поэтому

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi,$$

или, коротко,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi, \qquad \text{где } r = f(\varphi).$$

Примеры. 1) Вычислим площадь S фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ и отрезком полярной оси (рис. 120):

$$S = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2\, d\varphi = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

2) Вычислим площадь S фигуры, ограниченной линией $r = a\cos 3\varphi$, которую называют *трехлепестковой розой* (рис. 121).

Площадь шестой части всей фигуры (половины одного лепестка) выражается интегралом

$$\frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi\,d\varphi.$$

Действительно, конец полярного радиуса опишет всю ограничивающую сектор линию, когда полярный угол изменится от 0 до $\frac{\pi}{6}$.

Следовательно, площадь розы равна

$$S=3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi\,d\varphi=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\,d\psi=a^2\frac{\pi}{4}$$

(мы заменили $3\varphi=\psi$), т. е. площади круга, диаметр которого равен a.

101. Объем тела[1]). Пусть дано тело, ограниченное замкнутой поверхностью, и пусть известна *площадь любого его сечения*, произведенного плоскостью, перпендикулярной к некоторой прямой, например к оси абсцисс (рис. 122).

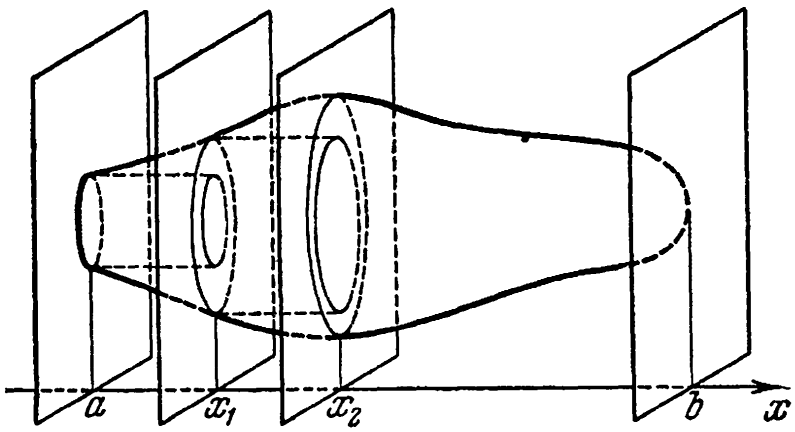

Рис. 122.

При этом можно считать, что площадь такого сечения является известной нам функцией $S(x)$, где x — абсцисса точки пересечения указанной плоскости с осью x.

Предположим далее, что все тело заключено между двумя перпендикулярными к оси x плоскостями, пересекающими ее в

[1]) Общее определение объемов тел связано с изучением двойных интегралов и будет изложено в главе VIII. Сейчас мы рассматриваем один важный частный случай этой задачи.

точках a и b $(a < b)$. Для определения объема такого тела разобьем его на слои с помощью секущих плоскостей, перпендикулярных к оси x и пересекающих ее в точках $x_0 = a$, x_1; x_2, ..., $x_n = b$. Заменим каждый слой **прямым цилиндром** с той же высотой и основанием, равным $S(x_i)$ (рис. 122); объем прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту. Поэтому объем n-ступенчатого тела выразится суммой

$$V_n = S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + S(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} S(x_i)\,\Delta x_i.$$

Предел полученной суммы, а она является интегральной суммой для функции $S(x)$ на интервале $[a, b]$, при $n \to \infty$ и при стремлении наибольшего Δx_i к нулю и даст нам искомый объем

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (*)$$

Если рассматриваемое тело получается вращением криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$, вокруг оси Ox, то поперечным сечением с абсциссой x служит круг, радиус которого равен соответствующей ординате линии $y = f(x)$. (Если $y < 0$, то радиус будет равен $|y|$.) В этом случае

$$S(x) = \pi y^2,$$

и мы приходим к формуле для объема тела вращения

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx, \qquad \text{где} \quad y = f(x).$$

Примеры. 1) Найдем объем V трехосного эллипсоида[1])

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Его плоскими сечениями, перпендикулярными, например, к оси Ox (рис. 123), являются эллипсы с полуосями $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

---

[1]) Если читатель еще не знаком с поверхностями второго порядка, то этот пример следует пропустить.

Площадь $S(x)$ поперечного сечения в точке x нам известна (см. п. **100**):

$$S(x)=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

поэтому

$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{0}^{a},$$

т. е.

$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Если две из полуосей равны между собой, например $c=b$, то для объема этого эллипсоида вращения получаем $V=\frac{4}{3}\pi ab^2$. Если все три полуоси равны между собой, т. е. $a=b=c$, то эллипсоид превращается в шар объема $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

2) Вычислим объем V тора («баранки») — тела, полученного от вращения круга около оси, лежащей в той же плоскости и не пересекающей круга. Пусть круг радиуса a вращается вокруг оси Ox, причем центр его лежит в точке $(0, b)$, $b>a$ (рис. 124). Уравнением вращающейся окружности будет

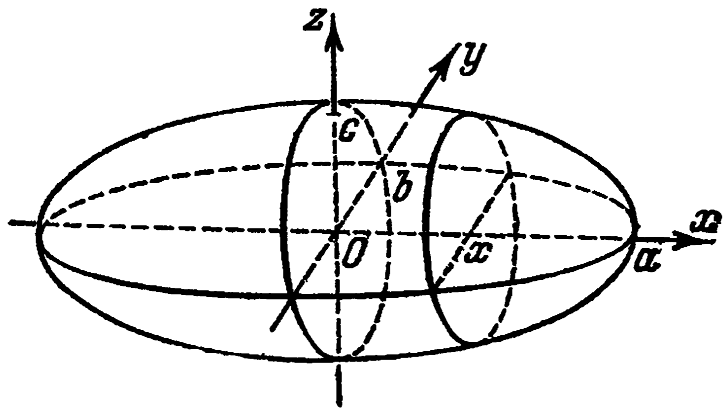

Рис. 123.

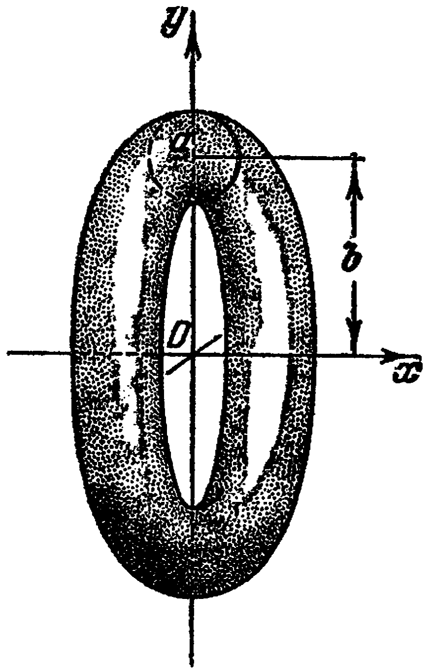

Рис. 124.

$$x^2+(y-b)^2=a^2.$$

Мы, очевидно, найдем искомый объем, если из объема тела, образованного вращением верхней половины окружности $(y=b+\sqrt{a^2-x^2})$, вычтем объем тела, образованного вращением нижней половины окружности $(y=b-\sqrt{a^2-x^2})$. Имеем

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx=$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}\left[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2\right]dx=8\pi b\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

и далее, полагая $x=a\sin t$,

$$V=8\pi ba^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=8\pi ba^2\frac{\pi}{4}=2\pi^2a^2b.$$

102. Длина дуги. Пусть некоторая линия является графиком непрерывной функции $y=f(x)$, производная $f'(x)$ которой тоже непрерывна. Такие линии мы условились (см. п. **66**) называть гладкими. Определение длины дуги такой линии аналогично определению длины окружности, вводимому в геометрии.

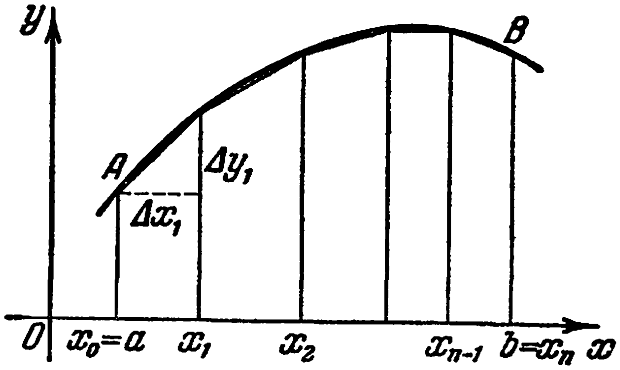

Рис. 125.

Длиной дуги кривой линии назовем предел, к которому стремится длина вписанной в нее ломаной при неограниченном увеличении числа ее сторон и при стремлении наибольшей из этих сторон к нулю.

Итак, пусть линия AB задана уравнением

$$y=f(x).$$

Будем предполагать, что во всем интервале изменения x функция $f(x)$ и ее первая производная $f'(x)$ непрерывны. Разобьем дугу AB на n частей, и пусть точки деления имеют абсциссы $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ b=x_n$ (рис. 125). Проведя через каждые две последовательные точки деления хорду, мы построим вписанную ломаную, длина L_n которой равна

$$L_n=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta y_1^2}+\sqrt{\Delta x_2^2+\Delta y_2^2}+\ldots+\sqrt{\Delta x_n^2+\Delta y_n^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2},$$

или

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ \Delta y_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$.

По формуле Лагранжа (см. п. **57**) имеем

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),$$

где $\xi_i\in(x_{i-1},\ x_i)$. Поэтому

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i.$$

Полученная сумма есть интегральная сумма для функции $\sqrt{1+f'^2(x)}$ [1]) на интервале $[a,\ b]$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ и при условии, что длина наибольшего участка ломаной стремится к нулю (при этом, разумеется, и наибольший из Δx_i стремится к нулю), выразим длину L кривой при помощи интеграла:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

или, коротко [2]),

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (*)$$

Последнюю формулу, внося dx в подынтегральном выражении под знак корня, удобно переписать в виде

$$L=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{dx^2+dy^2},$$

где (A) и (B) условно обозначают начало и конец дуги AB. Вместо (A) и (B) нужно подставить соответствующие им значения выбранной переменной интегрирования.

Если уравнение линии задано параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$ и t_1, t_2 — значения параметра t, соответствующие концам дуги, причем $t_1<t_2$, то

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt. \qquad (**)$$

---

[1]) Так как в выражение функции, для которой составлена интегральная сумма, входит производная $f'(x)$, то $f'(x)$ должна быть н е п р е р ы в н о й, что и предположено с самого начала.

[2]) Заметим, что подынтегральное выражение является дифференциалом длины дуги (см. п. **66**). Иной метод получения формулы $(*)$ будет указан в п. **104**.

Пусть теперь линия задана уравнением в системе полярных координат: $r=r(\varphi)$. Рассматривая в зависимостях

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi$$

полярный угол φ в качестве параметра, получим

$$dx=(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)\,d\varphi,\qquad dy=(r'\sin\varphi+r\cos\varphi)\,d\varphi,$$

что дает

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$$

и, значит,

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi,\qquad \alpha<\beta, \tag{***}$$

где α и β — значения полярного угла соответственно начала A и конца B дуги.

Вычисление длины линии называют *спрямлением* этой линии.

Примеры. 1) Спрямим одну арку циклоиды (п. **46**)

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t).$$

Имеем

$$L=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a,$$

т. е. искомая длина равна восьми радиусам производящего круга.

2) Вычислим периметр эллипса

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t\qquad (a>b).$$

Четверть эллипса, лежащая в первом квадранте, соответствует изменению параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$; поэтому

$$L=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt,$$

где $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Подстановка $t=\frac{\pi}{2}-\varphi$ приводит нас к формуле

$$L=4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Интеграл, стоящий справа, называется *полным эллиптическим ин-*

тегралом второго рода[1]); он не может быть вычислен обычными приемами, так как первообразная подынтегральной функции не выражается через элементарные функции. Поэтому длина эллипса находится при помощи таблиц значений эллиптических интегралов, которые приведены во многих справочниках, например в [13].

3) Вычислим длину логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ от некоторой ее точки $M_0(r_0, \varphi_0)$ до переменной точки $M(r, \varphi)$ (см. п. **49**, рис. 60). Имеем

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{a^2e^{2m\varphi} + a^2m^2e^{2m\varphi}}\, d\varphi = a\sqrt{1+m^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{m\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0}).$$

Здесь L дается как функция конечного полярного угла φ. Ее можно представить как функцию конечного полярного радиуса r:

$$L = a\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(r - r_0).$$

Это выражение показывает, что длина дуги логарифмической спирали пропорциональна приращению полярного радиуса дуги.

Если двигаться по спирали к полюсу, то полярный угол φ стремится к $-\infty$. Интеграл для длины становится несобственным, и мы получаем

$$L = a\sqrt{1+m^2} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{m\varphi}\, d\varphi = a\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} e^{m\varphi} = a\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} r,$$

т. е. длина дуги логарифмической спирали от полюса до произвольной ее точки пропорциональна полярному радиусу этой точки.

Длина дуги пространственной линии, заданной уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, вычисляется по формуле, аналогичной формуле (**):

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра t, соответствующие концам дуги ($t_1 < t_2$).

---

[1]) *Полным эллиптическим интегралом первого рода* называется интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$. Эллиптические интегралы встречаются при решении многих важных задач как в самой математике, так и в ее приложениях.

103. Центр тяжести криволинейной трапеции. В аналитической геометрии в качестве задачи на применение формул деления отрезка в данном отношении обычно рассматривают задачу о координатах центра тяжести системы материальных точек. Если массы m_1, $m_2, \ldots, m_n$ сосредоточены в точках $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ на плоскости, то координаты центра тяжести $M(\xi, \eta)$ этой системы точек даются формулами

$$\xi = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \eta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Заметим, что для однородной системы материальных точек $(m_1 = m_2 = \ldots = m_n)$ координаты центра тяжести

$$\xi = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad \eta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

не зависят от величины массы, а зависят исключительно от расположения точек.

Произведение массы точки на ее расстояние от какой-нибудь оси называется статическим моментом этой точки относительно оси. При этом для точек, лежащих по одну сторону от оси, расстояние берется со знаком плюс, а по другую — со знаком минус. Поэтому произведения $x_i m_i$ и $y_i m_i$ суть статические моменты точки M_i относительно осей Oy и Ox. Сумма статических моментов точек называется статическим моментом системы. Следовательно, координаты центра тяжести системы точек $M_i(x_i, y_i)$ могут быть выражены так:

$$\xi = \frac{M_y}{M}, \qquad \eta = \frac{M_x}{M},$$

где M_x и M_y — статические моменты системы относительно осей Ox и Oy, а M — сумма масс. Отсюда

$$\xi M = M_y, \qquad \eta M = M_x.$$

Таким образом, *центр тяжести можно определить как такую точку, что если в ней сосредоточить всю массу системы, то ее статический момент относительно какой-нибудь оси будет равен соответствующему статическому моменту всей системы.*

Рассмотрим теперь однородную пластинку постоянной толщины. Поверхностную плотность ее, т. е. массу единицы площади пластинки, обозначим через δ *кг/м²*. Центр тяжести такой пластинки будет лежать в ее срединной плоскости, которую мы примем за плоскость Oxy. Ясно, что при наших условиях положение центра тяжести будет зависеть только от геометрической формы пластинки. Мы примем сейчас, что область, занимаемая пластинкой в плоскости Oxy, имеет форму криволинейной трапеции[1]), ограниченной дугой AB линии $y=f(x)$ и с основанием $[a, b]$ на оси Ox. Разобьем эту трапецию на n частичных трапеций с помощью прямых, параллельных оси ординат, пересекающих ось абсцисс в точках $x_0=a$, x_1, x_2, ... $x_n=b$. Заменим каждую частичную трапецию прямоугольником, высотой которого является значение функции $f(x)$ в средней точке ξ_i, частичного интервала: $\xi_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ (рис. 126). Центр тяжести каждого построенного прямоугольника известен: он лежит в его центре, т. е. в точке $M_i\left(\xi_i, \frac{1}{2}f(\xi_i)\right)$; масса соответствующего прямоугольника равна произведению его площади на плотность, т. е. $\delta f(\xi_i)\,\Delta x_i$. Сосредоточим всю массу каждого прямоугольника в его центре тяжести и найдем координаты центра тяжести полученной системы материальных точек:

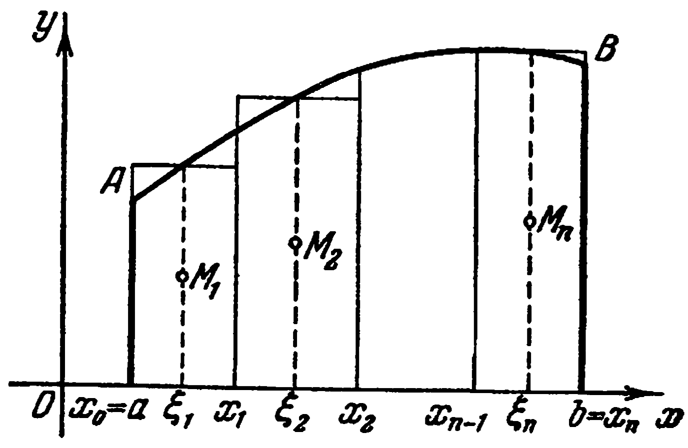

Рис. 126.

$$\xi^{(n)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\delta f(\xi_i)\,\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta f(\xi_i)\,\Delta x_i}, \qquad \eta^{(n)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2}f(\xi_i)\,\delta f(\xi_i)\,\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta f(\xi_i)\,\Delta x_i}.$$

Так как плотность δ — величина постоянная, то, вынося ее за знак суммы и сокращая, получим

$$\xi^{(n)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i f(\xi_i)\,\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i}, \qquad \eta^{(n)}=\frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}f^2(\xi_i)\,\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i}.$$

---

[1]) Отыскание центра тяжести пластинки произвольной формы и переменной плотности будет произведено в гл. VIII, п. 132, II.

Геометрически ясно, что если, как обычно, стремить n к бесконечности и все Δx_i к нулю, то точки с координатами $(\xi^{(n)}, \eta^{(n)})$ будут стремиться к центру тяжести данной пластинки. В знаменателях стоит интегральная сумма для функции $y=f(x)$; пределом ее будет интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, т. е. площадь S пластинки. В числителях стоят интегральные суммы соответственно для функций $xf(x)$ и $f^2(x)$. Поэтому

$$\xi=\frac{\int\limits_a^b xf(x)\,dx}{S};\qquad \eta=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}{S}.$$

Коротко эти формулы записывают так:

$$\xi=\frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{S},\qquad \eta=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx}{S},$$

где $y=f(x)$.

Пример. Найдем координаты центра тяжести однородного полукруга радиуса R.

Выберем систему координат, как указано на рис. 127. Тогда уравнение ограничивающей окружности будет $y=\sqrt{R^2-x^2}$. В силу симметрии относительно оси ординат абсцисса ξ центра тяжести равна нулю: $\xi=0$. Найдем ординату центра тяжести:

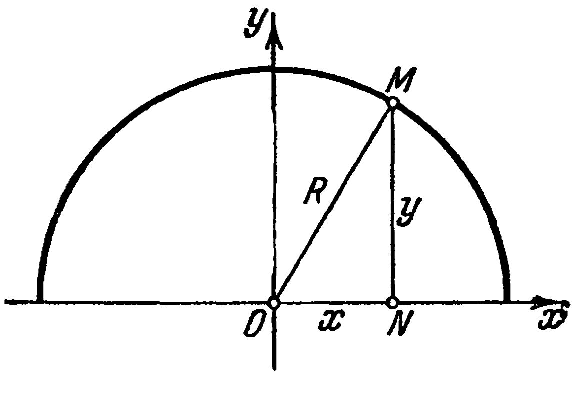

Рис. 127.

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}}{\pi R^2}=\frac{4}{3\pi}R.$$

Метод, примененный для отыскания координат центра тяжести криволинейной трапеции, заключался в том, что трапеция разбивалась на части и положение центра тяжести каждой части отыскивалось приближенно. Затем отыскивались координаты центра тяжести системы точек с последующим переходом к пределу. Этот же метод применим и для отыскания центра тяжести других тел. Найдем, например, центр тяжести тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси абсцисс; объемную плотность тела обозначим через δ *кг/м*^{3}. Пользуясь обозначениями рис. 126, легко получим (рекомендуем читателю провести рассуждения самостоятельно)

$$\xi = \lim \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \delta \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i} = \frac{\int\limits_a^b x y^2\, dx}{\int\limits_a^b y^2\, dx}.$$

Ясно, что центр тяжести лежит на оси вращения, и поэтому величина ξ полностью его определяет.

Пример. Найдем координаты центра тяжести полусферы, образованной вращением четверти окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant R)$ вокруг оси абсцисс:

$$\xi = \frac{\int\limits_0^R x(R^2-x^2)\, dx}{\int\limits_0^R (R^2-x^2)\, dx} = \frac{\left(R^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^R}{\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R} = \frac{\frac{R^4}{4}}{\frac{2R^3}{3}} = \frac{3}{8} R.$$

Предоставляем читателю самостоятельно получить следующие формулы для координат центра тяжести однородной линии, заданной уравнением $y=f(x)$, начальная точка A и конечная точка B которой имеют абсциссы соответственно a и b:

$$\xi = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+y'^2}\, dx}{L} = \frac{\int\limits_a^b x\, ds}{L}, \qquad \eta = \frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, dx}{L} = \frac{\int\limits_a^b y\, ds}{L},$$

где L — длина дуги AB, а ds — дифференциал длины дуги.

§ 2. Общая схема применения интеграла

104. Схема решения задач. Во всех рассмотренных нами задачах на применение определенного интеграла схема рассуждений была одна и та же. Искомая величина (площадь, работа, путь, объем и т. д.) соответствовала некоторому интервалу изменения переменной величины, как раз той, которая в последующем служила переменной интегрирования. Так, площадь трапеции соответствовала интервалу $[a, b]$ изменения абсциссы x, работа — интервалу $[s_0, s]$ изменения пути s, путь — интервалу $[T_0, T]$ изменения времени t и т. д.

Будем в дальнейшем предполагать, что эта переменная величина обозначена через x, а интервал ее изменения через $[a, b]$.

Первым нашим шагом являлось разбиение интервала $[a, b]$ на частичные интервалы $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $x_0 = a$, $x_n = b$. При этом мы исходили из той существенной предпосылки, что определяемая *величина, соответствующая всему интервалу, составляется как сумма из таких же величин, соответствующих всем частичным интервалам* (свойство *аддитивности*). Так, площадь, работа, путь аддитивны относительно интервалов, к которым они отнесены; площадь криволинейной трапеции, имеющей основанием некоторый интервал, равна сумме площадей криволинейных трапеций, имеющих основаниями все частичные интервалы; работа, произведенная силой на некотором участке, равна сумме работ, произведенных этой силой на всех частичных участках, и т. д.

Далее мы составляли сумму (интегральную сумму), выражающую приближенное значение искомой величины, тем более точное, чем меньше наибольший из частичных интервалов (и, значит, чем больше n — число этих интервалов).

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы находили искомую величину I в виде интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx, \qquad (*)$$

где $f(x)$ — данная по условиям задачи функция (ордината линии, ограничивающей трапецию, действующая сила, скорость движения и т. д.).

Точно так же может быть решена и всякая другая задача аналогичного типа. Но мы сейчас покажем, что изложенный путь решения (разбиение интервала на части, суммирование, переход к пределу) эквивалентен более простому и единообразному пути, исходящему из окончательного результата (искомая величина равна интегралу от некоторой данной функции) и опирающемуся на теорию определенного интеграла.

Будем рассматривать интересующую нас величину (площадь, работу, путь) на переменном интервале $[\alpha, x]$ с фиксированным левым концом α $(\alpha \leqslant a)$. Тогда эта величина будет какой-то неизвестной функцией $u = F(x)$ от абсциссы x правого конца интервала. Если бы функция $F(x)$ была известна, то легко было бы найти значение искомой величины, соответствующее данному интервалу $[a, b]$; это значение мы обозначим через I. Так как $F(b)$ соответствует интервалу $[\alpha, b]$, $F(a)$ — интервалу $[\alpha, a]$ и I — интервалу $[a, b]$, то в силу свойства аддитивности

$$F(b)=F(a)+I,$$

т. е.

$$I=F(b)-F(a). \qquad (**)$$

Особенно наглядно это видно на примере площади криволинейной трапеции (рис. 128). Здесь $I=S_{aABb}$, $F(a)=S_{\alpha CAa}$, $F(b)=S_{\alpha CBb}$ и равенство (**) очевидно.

Мы считаем функцию $F(x)$ дифференцируемой; по формуле Ньютона — Лейбница будем иметь

$$I=F(b)-F(a)=\int_a^b dF(x),$$

т. е.

искомая величина I измеряется интегралом от дифференциала функции $u=F(x)$, взятым по интервалу $[a, b]$, которому соответствует эта величина.

Таким образом, подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ в формуле(*) есть не что иное, как дифференциал du функции $u=F(x)$, и стало быть, для решения задачи достаточно знать даже не саму функцию $F(x)$, а только ее дифференциал; тогда искомая величина выразится интегралом от этого дифференциала, взятым по интервалу $[a, b]$.

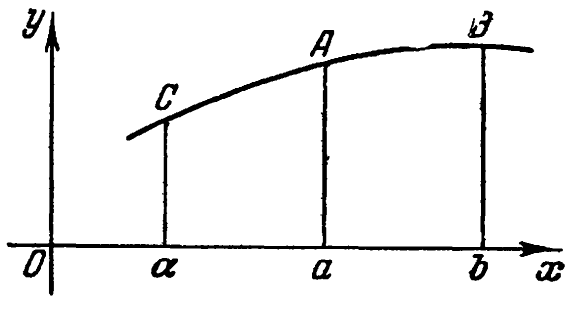

Рис. 128.

Теперь по аналогии с рассмотренными задачами можно дать общую характеристику простейшей задачи, решаемой с помощью определенного интеграла. Эта характеристика состоит в следующем:

1) В задаче ищется значение I некоторой величины u, соответствующее данному интервалу $[a, b]$ изменения независимой переменной x. Величина u обладает свойством аддитивности, т. е. при разбиении интервала на части ее значение, соответствующее всему интервалу, составляется как сумма ее значений, соответствующих частичным интервалам.

2) Если величину u отнести к переменному интервалу с закрепленным, например, левым концом $\alpha\,(\alpha \leqslant a)$ и переменным правым концом x, то u можно рассматривать как функцию независимой переменной x, т. е. $u=F(x)$; функция $F(x)$ предполагается дифференцируемой.

При соблюдении обоих условий величина I будет равна

$$I = F(b) - F(a) = \int_a^b dF(x).$$

Это означает, что весь вопрос сводится к отысканию дифференциала $du = dF(x)$.

Хотя функция $u = F(x)$ и неизвестна, ее дифференциал часто можно найти из условий задачи. Для этого в произвольной точке x заданного интервала $[a, b]$ берется бесконечно малое приращение dx и рассматривается соответствующее ему приращение $\Delta F(x)$. Та часть этого приращения, которая получилась бы, если бы все другие величины, определяющие образование $F(x)$, сохранили в интервале $[x, x+dx]$ свои значения, принятые в точке x, обычно и оказывается дифференциалом $dF(x)$. Всякий раз можно проверить, что составленное выражение действительно является дифференциалом, убедившись в том, что оно, во-первых, пропорционально dx, а во-вторых, отличается от $\Delta F(x)$ на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем dx.

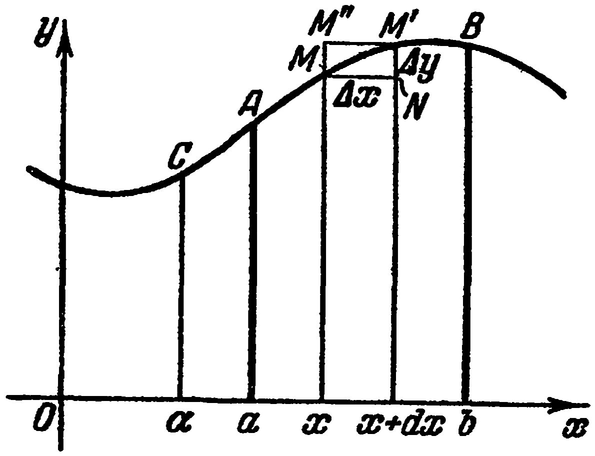

Рис. 129.

Последнее требование эквивалентно тому, что предел отношения полученного выражения к $\Delta F(x)$ при $dx \to 0$ равен единице. Поясним сказанное на примере.

Рассмотрим простейшую задачу о площади криволинейной трапеции и получим ее решение новым, только что описанным методом. Пусть трапеция ограничена линией $y = f(x)$; площадь ее, соответствующую интервалу $[a, b]$ изменения x, обозначим через S. Площадь трапеции αCMx будет функцией от x; обозначим ее $S(x)$. Выберем произвольное значение x и придадим ему приращение dx. Тогда приращение $\Delta S(x)$ выразится площадью трапеции $xMM'(x+dx)$ (рис. 129). Докажем, что дифференциалом функции $S(x)$ будет площадь прямоугольника $xMN(x+dx)$, т. е. та часть приращения $\Delta S(x)$, которая получается, когда мы считаем функцию $f(x)$ на интервале $[x, x+dx]$ постоянной:

$$dS(x) = f(x)dx.$$

Так как написанное выражение для $dS(x)$ пропорционально dx, то остается проверить только, что оно эквивалентно $\Delta S(x)$. Из рис. 129

видно, что их разность не превосходит площади прямоугольника $MM''M'N$, равной произведению $\Delta x\,\Delta y$:

$$\Delta S(x) - dS(x) < \Delta x\,\Delta y.$$

Таким образом, эта разность является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем Δx, что и доказывает справедливость нашего утверждения (см. п. **51**, IV).

Следовательно, в силу доказанного

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Так как раньше, в п. **66** гл. IV, мы нашли, что дифференциал длины дуги ds равен

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

то можно сразу написать (ср. с п. **102**), что длина дуги L равна

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

105*. Площадь поверхности вращения. Выведем формулу для поверхности тела вращения.

Пусть некоторая дуга AB линии $y=f(x)$ вращается вокруг оси Ox (рис. 130). Требуется определить площадь Q поверхности

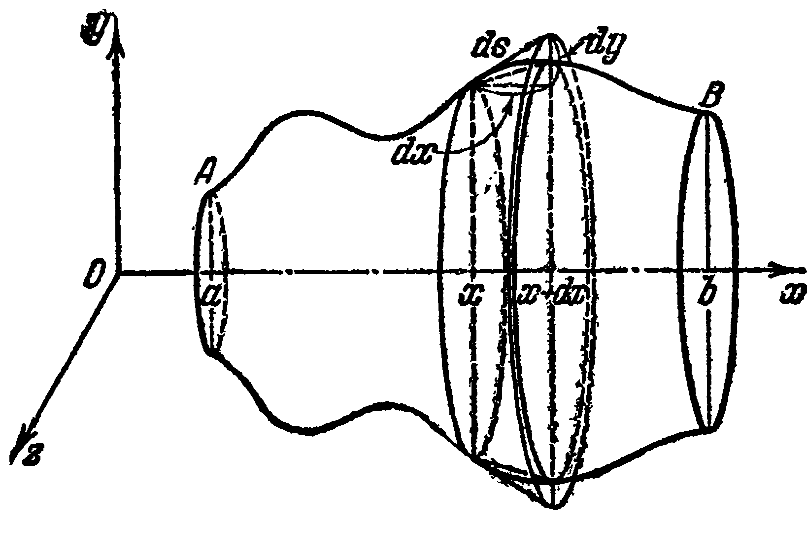

Рис. 130.

вращения в предположении, что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную.

Обозначим через $Q(x)$ площадь, соответствующую интервалу $[a, x]$, и определим **дифференциал** площади. Поступим следующим образом. Проведем через произвольную точку x, $a < x < b$, плоскость, перпендикулярную к оси Ox. Придадим x приращение dx; тогда площадь $Q(x)$ поверхности получит приращение ΔQ, равное площади поверхности, заключенной между плоскостями, перпендикулярными к оси Ox и проходящими через точки x и $x+dx$. Величина ΔQ удовлетворяет следующим неравенствам (мы считаем, что $\Delta y < dy$, как это и изображено на рис. 130):

$$\frac{2\pi y + 2\pi(y+\Delta y)}{2}\sqrt{dx^2+\Delta y^2} < \Delta Q < \frac{2\pi y + 2\pi(y+dy)}{2}\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Действительно, выражение слева измеряет площадь поверхности усеченного конуса, образующей которого служит хорда дуги, а выражение справа дает площадь поверхности усеченного конуса, образующей которого служит отрезок касательной. Деля все члены неравенства на $2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$, находим

$$\frac{4\pi y + 2\pi\Delta y}{4\pi y}\,\frac{\sqrt{dx^2+\Delta y^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2}} < \frac{\Delta Q}{2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}} < \frac{4\pi y+2\pi dy}{4\pi y}.$$

Так как при $dx \to 0$ и левая и правая части стремятся к 1, то и

$$\frac{\Delta Q}{2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}} \to 1.$$

Следовательно, выражение

$$2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2} = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

и является дифференциалом $dQ(x)$. Отсюда

$$Q = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

или, сокращенно,

$$Q = 2\pi\int_a^b y\,ds,$$

где ds — дифференциал длины дуги.

От этих формул легко перейти к случаям, когда вращающаяся линия задана параметрическими уравнениями или уравнением в полярной системе координат.

Рекомендуем читателю самостоятельно написать соответствующие формулы.

Пример. Вычислим площадь сферического пояса. Пусть дуга окружности с центром в начале координат и радиусом r вращается вокруг оси Ox.

Из уравнения окружности $x^2+y^2=r^2$ имеем: $y^2=r^2-x^2$, $yy'=-x$ и, значит,

$$Q=2\pi\int_a^b \sqrt{r^2-x^2}\,\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_a^b r\,dx=2\pi r(b-a)=2\pi rH,$$

где H — высота пояса. При $H=2r$ получаем площадь сферы $Q=4\pi r^2$.

106. Давление жидкости на стенку сосуда. Пусть жидкость (удельный вес ее обозначим через γ *н/м*^{3}) заполняет сосуд прямоугольной формы. Подсчитаем давление P этой жидкости на одну из стенок сосуда, считая, что основание этой стенки равно a, а высота h. Здесь может быть применена общая схема, так как давление на всю стенку складывается из суммы давлений на отдельных ее участках.

Обозначим давление на заштрихованную часть стенки (рис. 131) через $P(x)$. Придадим x приращение dx. Мы найдем главную часть приращения $\Delta P(x)$, пропорциональную dx, считая, что на выделенной полоске глубина жидкости не меняется и постоянно равна x.

Тогда

$$dP(x)=\gamma ax\,dx. \qquad (*)$$

Так как приращение $\Delta P(x)<\gamma a(x+dx)\,dx$, то разность между $\Delta P(x)$ и $dP(x)$ не превосходит

$$\gamma a(x+dx)\,dx-\gamma ax\,dx=\gamma a\,dx^3,$$

т. е. является бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем dx.

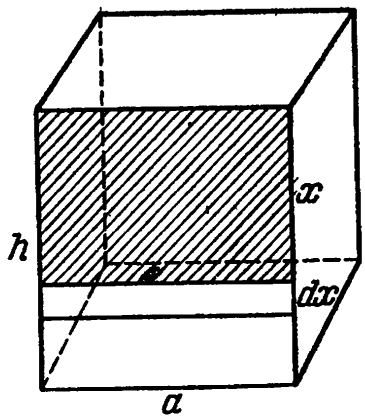

Рис. 131.

Следовательно, мы доказали, что выражение (*) действительно является дифференциалом функции $P(x)$. Интегрируя в пределах от 0 до h, получим

$$P=\int_0^h \gamma ax\,dx=\frac{\gamma ah^2}{2}.$$

Интересно отметить, что это давление равно давлению жидкости на площадку тех же размеров, погруженную горизонтально на глубину своего центра тяжести,

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как вычисляется площадь плоской фигуры в системе декартовых координат? в системе полярных координат? в случае задания линии параметрическими уравнениями?

2. Вывести формулу для вычисления объема тела по площади его параллельных сечений.

3. Вывести формулу для объема тела вращения.

4. Дать определение длины кривой линии. Какова формула для вычисления длины линии в системе декартовых координат? в системе полярных координат? в случае задания линии параметрическими уравнениями?

5. Вывести формулы для координат центра тяжести криволинейной трапеции.

6. В чем состоит схема решения задач с помощью определенного интеграла и какова характеристика этих задач?

7. Привести примеры применения схемы.

8*. Какова формула для вычисления площади поверхности вращения в системе декартовых координат? в случае задания вращающейся линии параметрическими уравнениями?

ГЛАВА VII

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Функции нескольких переменных

107. Функции двух и многих переменных.

I. Случай двух независимых переменных. До сих пор мы изучали функции одной независимой переменной. Но нередко встречаются случаи, когда какая-нибудь величина зависит не от одной независимой переменной, а от двух или большего числа независимых переменных, т. е. когда значения первой величины находятся по значениям не одной, а двух или большего числа других переменных величин. В этих случаях говорят, что указанная величина является функцией двух или соответственно бóльшего числа независимых переменных.

Например, площадь S прямоугольника есть функция двух независимо друг от друга изменяющихся переменных — сторон прямоугольника a и b; выражение для этой функции таково:

$$S = ab.$$

Объем V прямоугольного параллелепипеда является функцией трех независимо друг от друга изменяющихся величин — ребер параллелепипеда a, b, c:

$$V = abc.$$

Работа электрического тока A на участке цепи зависит от разности потенциалов U на концах участка, силы тока I и времени t; эта функциональная зависимость дается формулой

$$A = IUt.$$

Остановимся сначала на случае двух независимых переменных, которые будем обозначать буквами x и y.

Каждой паре значений x и y соответствует точка на плоскости Oxy, координатами которой они служат. Возьмем некоторое множество точек на плоскости Oxy и обозначим его через D.

Определение. **Величина z называется *функцией* переменных величин x и y на множестве D, если каждой точке этого множества соответствует одно определенное значение величины z.**

Множество точек D называется *областью определения функции.* Обычно областью определения функции является некоторая часть плоскости, ограниченная одной или несколькими линиями.

Тот факт, что величина z есть функция величин x и y, записывают так:

$$z=f(x, y).$$

В такой записи за символом функции (которым может быть не только буква f, но и любая другая буква) указываются в скобках те переменные (аргументы), от которых зависит функция.

II. Способы задания функции. Как и функции одной переменной, функции двух переменных могут быть заданы таблицей, аналитически (формулой) и графиком (см. п. 8).

Табличное задание состоит в том, что для некоторого количества пар значений независимых переменных указываются соответствующие им значения функции. Осуществляется это обычно посредством таблицы с двойным входом, устройство которой должно быть понятно из рассмотрения, например, следующей таблицы для коэффициента полезного действия η винтовой передачи как функции от коэффициента трения μ и угла подъема α винтовой линии:

μ \ α	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$
0,01	0,897	0,945	0,961
0,02	0,812	0,895	0,925
0,03	0,743	0,850	0,892

Аналитическое задание функции означает, что дается формула, при помощи которой по заданным значениям независимых переменных отыскиваются значения функции.

Так, например, каждая из формул

$$z=2x+3y-5, \qquad z=\frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad z=\frac{\sin(2x+3y)}{\sqrt{1+(x-y)^2}}$$

задает z как функцию x и y. При аналитическом задании функции за область ее определения принимают (если нет дополнительных условий) множество значений x и y, для которых формула, определяющая функцию, имеет смысл, т. е. когда в результате ее применения для z получаются определенные действительные значения. Так, например, областью определения функции

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

является множество точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$x^2+y^2\leqslant r^2,$$

т. е. круг радиуса r с центром в начале координат. Для функции

$$z=\ln(x^2+y^2-r^2)$$

областью определения служат точки, координаты которых удовлетворяют условию

$$x^2+y^2>r^2,$$

т. е. внешность круга.

Функция $z=\frac{x}{1+x^2+y^2}$ определена на всей плоскости, а функция $z=\frac{\sin(xy)}{x-y}$ на всей плоскости, за исключением прямой $y=x$.

Так же как и для функций одной переменной, можно рассматривать неявные функции двух независимых переменных. Уравнение, связывающее три переменные величины:

$$F(x, y, z)=0,$$

обычно определяет каждую из этих величин как неявную функцию двух остальных; подробнее об этом будет сказано в п. **117**.

Прежде чем перейти к графическому заданию, заметим, что графиком функции z двух независимых переменных x и y (в системе декартовых прямоугольных координат) называется множество точек, абсциссы и ординаты которых являются значениями x и y, а аппликаты — соответствующими значениями z. Графиком функции непрерывных аргументов обычно служит некоторая поверхность.

Так как уравнение $x^2+y^2+z^2=R^2$ есть уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат, то графиками функций

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \quad \text{и} \quad z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

служат верхняя и нижняя половины этой сферы (рис. 132).

Графиком функции

$$z=x^2+y^2$$

является параболоид вращения (рис. 133), а графиком линейной функции

$$z = ax + by + c$$

— плоскость; в частности, графиком константы, т. е. функции $z = C$ ($C = \text{const}$), служит плоскость, параллельная плоскости Oxy. Обратно, всякая поверхность в координатном пространстве $Oxyz$ изображает некоторую функцию двух независимых переменных, именно ту, значения которой равны аппликатам точек

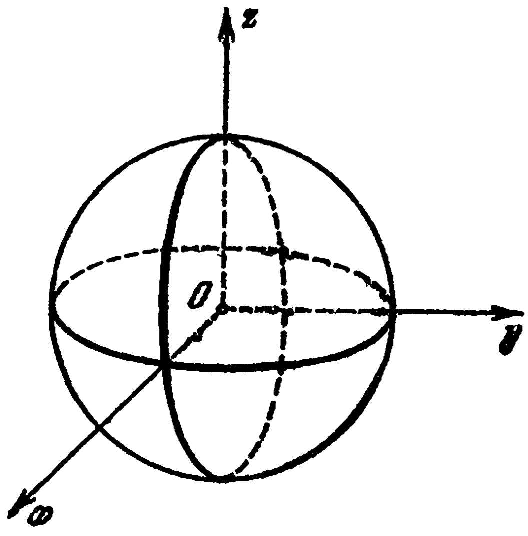

Рис. 132.

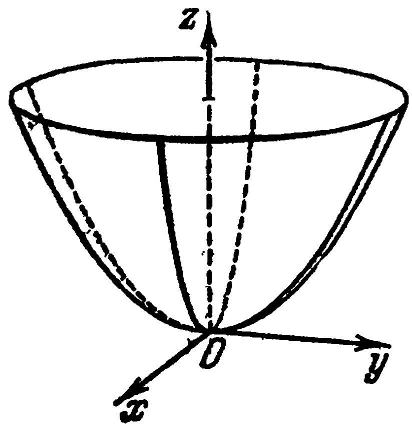

Рис. 133.

поверхности при значениях независимых переменных, равных абсциссам и ординатам.

Графическое задание функции двух переменных как раз состоит в задании графика этой функции.

III. Случай многих независимых переменных. Распространим теперь данные выше определения на случай большего числа независимых переменных.

Пусть $x, y, z, \ldots, t$ — независимые переменные, а u — величина, зависимая от них, т. е. их функция.

Определение. **Величина u называется *функцией* переменных величин $x, y, z, \ldots, t$, если каждой рассматриваемой совокупности этих величин соответствует одно определенное значение величины u.**

То, что величина u и есть функция величин $x, y, z, \ldots, t$, записывают так:

$$u = f(x, y, z, \ldots, t),$$

причем, разумеется, вместо буквы f в качестве символа функции может быть употреблена любая другая буква.

Все другие определения, относящиеся к случаю двух независимых переменных, без существенных изменений переносятся на случай многих независимых переменных, и поэтому на них останавливаться нет нужды. Заметим только, что геометрическая иллюстрация функций от n независимых переменных при $n > 2$ теряет наглядность. Уже при $n = 3$, т. е. для функции $u = f(x, y, z)$, геометрически можно представить только область определения функции в виде части трехмерного пространства. При $n > 3$ даже области определения функции делаются геометрически ненаглядными.

Запись

$$F(x, y, z, \ldots, t, u) = 0 \qquad (*)$$

означает в общем виде наличие функциональной связи между величинами $x, y, z, \ldots, t, u$, т. е. тот факт, что какая-нибудь из этих величин, например u, является *неявной* функцией остальных.

108. Метод сечений. Предел и непрерывность.

I. *Метод сечений. Линии уровня.* Как известно, в аналитической геометрии при изучении поверхностей второго порядка обычно пользуются *методом сечений*, который заключается в том, что определение вида поверхности по ее уравнению производится путем исследования кривых, образованных при пересечении этой поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Этот же метод исследования применим и при изучении любых функций двух переменных. Пусть, например, задана функция

$$z = f(x, y),$$

определяющая некоторую поверхность. Если мы придадим аргументу y постоянное значение y_0 и будем изменять только x, то z станет функцией одной независимой переменной x:

$$z = f(x, y_0).$$

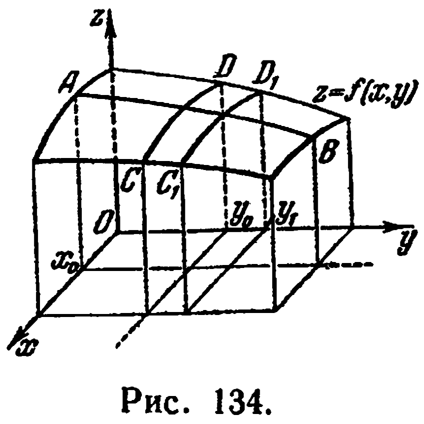

Рис. 134.

Применив к этой функции известные методы исследования функций одной переменной, мы можем выяснить характер изменения величины z в зависимости от изменения x. Геометрически это означает, что мы рассматриваем линию пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$, параллельной плоскости Oxz (линия CD на рис. 134). Придавая теперь y другое постоянное значение y_1, получим линию C_1D_1 и т. д.

Аналогично можно выяснить поведение z в зависимости от изменения y при различных, но постоянных значениях x. Так, на рис. 134 изображена линия AB пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $x = x_0$. Чтобы представить себе эту линию, мы должны исследовать функцию одной переменной $z=f(x_0, y)$. Зная характер расположения полученных линий, мы сможем составить себе представление о всей поверхности, т. е. описать поведение функции z при произвольном изменении ее аргументов.

Но можно изучать функцию $z=f(x, y)$ посредством того же приема сведения функции двух переменных к функции одной переменной, придавая постоянные значения не одной из независимых переменных, а самой функции. Именно положим $z=z_0$; тогда уравнение

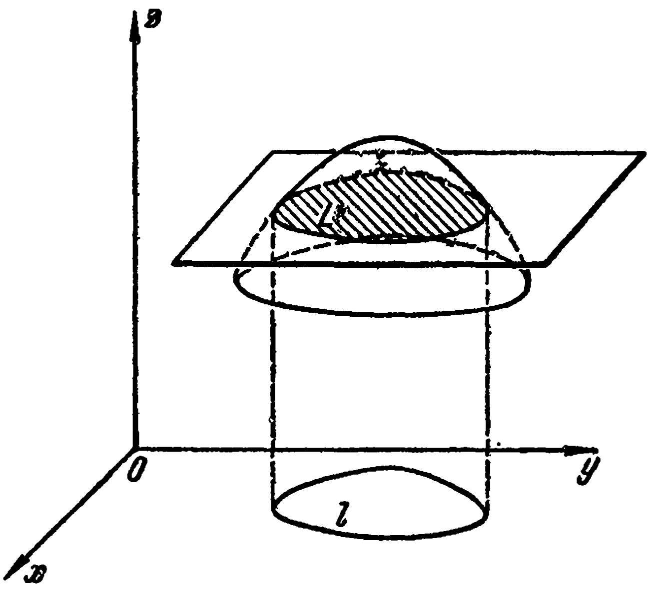

Рис. 135.

$$f(x, y)=z_0 \qquad (*)$$

дает зависимость между переменными x и y (т. е. функцию одной переменной), при которой заданная функция z сохраняет постоянное значение z_0. Геометрически придание z постоянного значения z_0 означает пересечение поверхности $z=f(x, y)$ плоскостью $z=z_0$, параллельной плоскости Oxy.

На плоскости Oxy уравнение (*) есть уравнение проекции l линии пересечения L поверхности $z=f(x, y)$ с плоскостью $z=z_0$ (рис. 135)[1]). При перемещении точки с координатами x, y вдоль линии l функция сохраняет постоянное значение, равное z_0.

Определение. ***Линией уровня* функции $z=f(x, y)$ называется линия на плоскости Oxy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение.**

Совокупность линий уровня, соответствующих различным значениям z, называется *сетью линий уровня* функции $z=f(x, y)$. Сеть эта, при условии, что она проведена для мало отличающихся друг от друга значений z, довольно наглядно характеризует поведение функции.

Придадим z значения $\ldots -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \ldots$, где h — какое-нибудь положительное число. Сеть линий уровня функции $f(x, y)$ для этих значений назовем равномерной. В тех участках плоскости Oxy, где линии уровня равномерной сети сгущаются, функция изменяется «быстро», а в тех, где они разрежаются, функция изменяется «медленно». Действительно, в первом

[1]) В пространстве уравнение $f(x, y)=z_0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей l (или L).

случае небольшому, а во втором случае большому перемещению точки $P(x, y)$ соответствует изменение функции на одну и ту же величину h.

На рис. 136 изображена равномерная сеть ($h=1$) функции $z=x^2+y^2$ (параболоид вращения). Этой сетью служит система концентрических окружностей с центром в точке $O(0, 0)$ и сама эта точка. Ясно видно, что по мере увеличения h окружности сети сближаются, что соответствует увеличению крутизны поверхности.

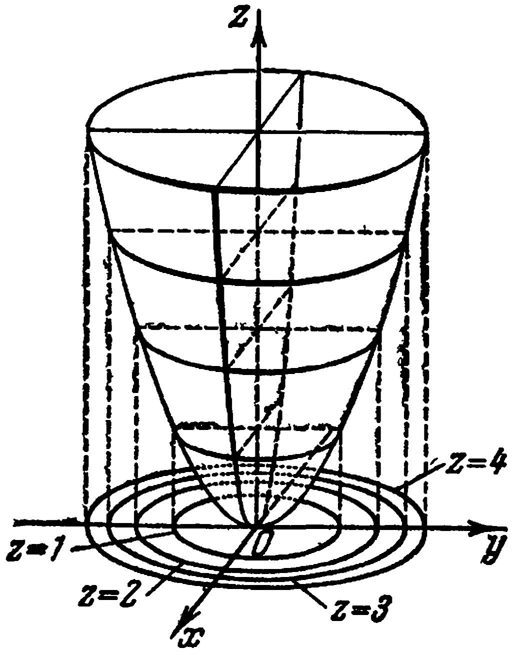

Рис. 136.

В прикладных науках часто употребляют линии уровня для представления изучаемой функции двух независимых переменных. Так, например, рассматривая высоту точки местности над уровнем моря как функцию двух переменных — координат точки, на карты наносят линии уровня этой функции. Они называются в топографии **горизонталями**. С помощью сети горизонталей удобно следить за изменением высоты местности. В метеорологии пользуются сетями **изотерм** и **изобар** (линий одинаковых средних температур и линий равных средних давлений), являющимися линиями уровня температуры и давления как функций координат точки местности.

II. **Предел функции.** Перейдем теперь к определению предела функции двух переменных; оно будет совершенно аналогично определению предела для функций одной переменной[1]).

Определение. **Число A называется *пределом функции* $z=f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, если для всех значений x и y, достаточно мало отличающихся соответственно от чисел x_0 и y_0, соответствующие значения функции $f(x, y)$ как угодно мало отличаются от числа A.**

Записывают

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A. \qquad (*)$$

В этом определении не предполагается, что функция определена в самой точке $P_0(x_0, y_0)$, и поэтому мы считаем, что либо $x \neq x_0$, либо $y \neq y_0$.

[1]) Читателю рекомендуется вспомнить содержание п. 24 гл. II.

Вполне аналогично определяется предел функции n независимых переменных при $n > 2$.

Отметим также, что все правила предельного перехода, рассмотренные в п. **29** гл. II, без всяких изменений переносятся на случай функций многих переменных.

III. Непрерывность функции. Пусть точка $P_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $z=f(x, y)$. Так же как и для функции одной переменной, *приращением* функции $z=f(x, y)$ в данной точке P_0 называется разность

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0),$$

где Δx и Δy — приращения аргументов.

Определение. **Функция $z=f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0), если она определена в некоторой окрестности этой точки и если бесконечно малым приращениям x и y соответствует бесконечно малое приращение z, т. е.**

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0.$$

Обозначив $x_0+\Delta x$ через x и $y_0+\Delta y$ через y, мы можем условие непрерывности функции $f(x, y)$ записать в виде

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Последнее означает, что *функция непрерывна в точке (x_0, y_0), если ее предел равен значению функции в предельной точке.*

Определение. **Функция, непрерывная в каждой точке области, называется *непрерывной в этой области.***

Геометрически непрерывность функции $z=f(x, y)$ означает, что аппликаты точек ее графика, соответствующие двум точкам плоскости Oxy, как угодно мало отличаются друг от друга, если расстояние между точками плоскости достаточно мало. Поэтому график непрерывной функции представляет собой сплошную поверхность без разрывов.

Непрерывные функции двух независимых переменных обладают теми же основными свойствами, что и непрерывные функции одной независимой переменной (см. п. **35** гл. II).

Точка в плоскости Oxy, в которой не выполняется условие непрерывности функции, называется *точкой разрыва функции.* Точки разрыва функции двух переменных могут образовывать целые линии.

Приведем примеры разрывных функций.

Функция $z=\frac{1}{x^2+y^2}$ непрерывна всюду, кроме точки (0, 0), которая является точкой разрыва. Ясно, что когда $x\to 0$ и $y\to 0$, то

$z \to \infty$. Геометрически это означает, что в точке (0, 0) поверхность имеет бесконечный шпиль.

Воспользовавшись известным из аналитической геометрии общим видом уравнения поверхности вращения, заметим, что уравнение $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ определяет поверхность, образованную вращением кривой $z = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, расположенной в плоскости Oxz, вокруг оси Oz.

Для функции $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$ точками разрыва являются все точки, лежащие на биссектрисах координатных углов плоскости Oxy, т. е. точки, в которых $y = x$ или $y = -x$.

Более сложный пример точки разрыва представляет точка (0, 0) для функции

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

В каждой точке прямой $y = kx$, где k — любое число, функция принимает постоянное значение

$$f(x, y) = \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Если точка (x, y) стремится к точке (0, 0) по прямой $y = kx$, то предел функции будет равен $\frac{k}{1 + k^2}$. Придавая k различные значения, т. е. идя к началу координат по разным прямым, мы будем получать разные пределы для функции $f(x, y)$. Это и означает, что при произвольном стремлении x и y к нулю функция не имеет предела и является, следовательно, разрывной.

Совершенно аналогично определяется непрерывность функций любого числа независимых переменных.

§ 2. Производные и дифференциалы. Дифференциальное исчисление

109. Частные производные и дифференциалы.

I. Частные производные. Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух независимых переменных x и y. Будем считать сейчас аргумент y постоянным и рассмотрим получающуюся при этом функцию одной переменной x. Допустим, что эта функция $f(x, y)$ при данном значении x дифференцируема, т. е. имеет производную, равную

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Этот предел мы обозначим через $f'_x(x, y)$, указывая нижним индексом x, что производная берется по переменной x при фиксированном y.

Определение. ***Частной производной* по x от функции $z=f(x, y)$ называется функция переменных x и y, получающаяся при дифференцировании $f(x, y)$ по x в предположении, что y считается постоянным.**

Для частной производной по x от функции $z=f(x, y)$ употребляют следующие обозначения:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)].$$

В отличие от обозначения обыкновенной производной, здесь употребляется не прямое d, а круглое ∂ и кроме верхнего штриха нижним индексом указывается переменная x, по которой производится дифференцирование. (Иногда штрих сверху опускают и пишут просто z_x или $f_x(x, y)$.) Обычно в тексте пишут z'_x, а в формулах $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Обращаем внимание читателя на то, что y считается постоянным только в процессе дифференцирования. После того, как выражение для $f'_x(x, y)$ найдено, x и y могут принимать любые значения. Это и означает, что $f'_x(x, y)$ является функцией обеих переменных. Например, если $z=x^2y$, то $z'_x=2xy$.

Разумеется, в частных случаях $f'_x(x, y)$ может оказаться зависящей от одной переменной или даже быть постоянной. Например, если $z=xy$, то $z'_x=y$, а если $z=2x+y^2$, то $z'_x=2$.

Совершенно аналогично определяется *частная производная по y от функции $z=f(x, y)$*:

$$f'_y(x, y)=\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}.$$

Она обозначается еще так:

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y)].$$

Так как частная производная является обыкновенной производной от данной функции, взятой в предположении, что изменяется только переменная, по которой производится дифференцирование, то **фактическое отыскание частных производных элементарных функций осуществляется по известным правилам дифференцирования функций одной переменной.**

Примеры. 1) Найдем z'_x и z'_y от функции $z=3axy-x^3-y^3$.

Считая y постоянной, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3ay - 3x^2;$$

считая x постоянной, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3ax - 3y^2.$$

2) Найдем z'_x и z'_y от функции $z = x^y$.

При дифференцировании по x функция z является степенной, а при дифференцировании по y — показательной. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Значения частных производных при определенных значениях $x = x_0$ и $y = y_0$ обозначаются посредством символов

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \quad \text{или} \quad f'_x(x_0, y_0), \; f'_y(x_0, y_0).$$

Например, если $z = 3axy - x^3 - y^3$, то

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\ y=0}} = -3a^2, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\ y=0}} = 3a^2, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\ y=a}} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\ y=a}} = 0.$$

Аналогично определяются частные производные от функции любого числа независимых переменных.

Обозначения для частных производных такие же, как и в случае двух переменных, например:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x, y, z, \ldots, t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, \ldots, t) - f(x, y, z, \ldots, t)}{\Delta x}.$$

Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Эта функция выражает, между прочим, расстояние точки $P(x, y, z)$ от начала координат. Для ее частных производных находим выражения

$$r'_x = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} = \cos\alpha,$$

$$r'_y = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \cos\beta,$$

$$r'_z = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы полярного радиуса точки $P(x, y, z)$; эти формулы нам встретятся в дальнейшем.

Абсолютная величина частной производной $z'_x = f'_x(x, y)$ или $z'_y = f'_y(x, y)$ дает величину скорости, с которой происходит изменение функции $z = f(x, y)$ при изменении только x или только y, а знак частной производной f'_x или f'_y указывает характер этого изменения (возрастание, убывание).

Геометрический смысл частных производных от функции $z = f(x, y)$ состоит в следующем: *$f'_x(x_0, y_0)$ есть угловой коэффициент относительно оси Ox, касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$*, т. е. $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 137, *а*). (Видно, что на рисунке $f'_x(x_0, y_0) < 0$.)

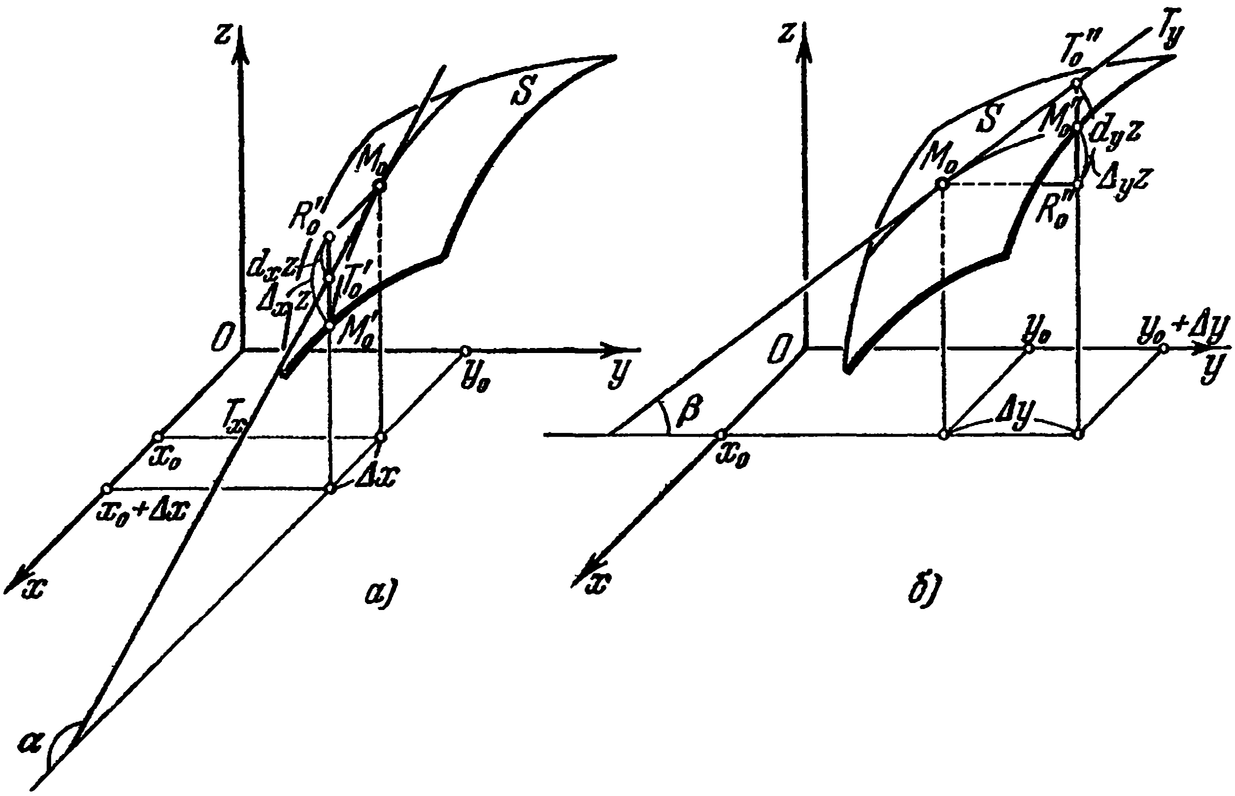

Рис. 137.

Частная производная $f'_y(x_0, y_0)$ есть угловой коэффициент относительно оси Oy, касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = x_0$, т. е. $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$ (рис. 137, *б*). (Видно, что на рисунке $f'_y(x_0, y_0) > 0$.)

II. Частные дифференциалы. Приращение, которое получает функция $z = f(x, y)$, когда изменяется только одна из переменных, называется *частным приращением функции по соответствующей переменной*. Употребляются такие обозначения:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение. ***Частным дифференциалом по x*** **функции $z=f(x, y)$ называется главная часть частного приращения $\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y)$, пропорциональная приращению Δx независимой переменной x.**

Аналогично определяется *частный дифференциал по y.*

Дифференциалы независимых переменных x и y просто равны их приращениям, т. е.

$$dx=\Delta x, \quad dy=\Delta y.$$

Частные дифференциалы обозначаются так: $d_x z$ — частный дифференциал по x, $d_y z$ — частный дифференциал по y.

Так же, как для случая функции одной переменной, доказывается, что если функция $z=f(x, y)$ имеет частный дифференциал по x, то она имеет и частную производную z'_x, и обратно (см. п. **50**). При этом

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx.$$

Аналогично, если функция $z=f(x, y)$ имеет частный дифференциал по y, то она имеет и частную производную z'_y и обратно, причем

$$d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Таким образом, *частный дифференциал функции двух независимых переменных равен произведению соответствующей частной производной на дифференциал этой переменной.*

Геометрический смысл частного приращения $\Delta_x z$ состоит в том, что оно выражает приращение аппликаты точки поверхности при изменении аргумента x на Δx (рис. 137, *а*). На рисунке приращение $\Delta_x z<0$, оно изображено отрезком $R'_0M'_0$. Частный дифференциал $d_x z$ выражает приращение аппликаты точки касательной T_x при том же изменении аргумента. В нашем случае $d_x z<0$, он изображен отрезком $R'_0T'_0$.

Точно так же частное приращение $\Delta_y z$ выражает приращение аппликаты точки поверхности при изменении аргумента y на Δy (рис. 137, *б*). На рисунке приращение $\Delta_y z>0$, оно изображено отрезком $R''_0M''_0$. Частный дифференциал $d_y z$ выражает приращение аппликаты точки касательной T_y. В нашем случае $d_y z>0$, он изображен отрезком $R''_0T''_0$.

Из формул для частных дифференциалов находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d_x z}{dx}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d_y z}{dy}.$$

Отсюда видно, что частные производные можно рассматривать подобно обыкновенным производным как дроби, если только в числителе каждой дроби записывать соответствующий частный дифференциал, а в знаменателе — дифференциал независимой переменной. Единообразные же записи $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ являются слитными, нерасчленяемыми символами, и их ни в коем случае нельзя считать дробями, ибо если даже условиться, что ∂x и ∂y обозначают dx и dy, то ∂z в первом и во втором случаях должно обозначать различные величины ($d_x z$ и $d_y z$).

Возьмем, например, уравнение Менделеева—Клапейрона

$$pv = RT$$

и найдем из него $\frac{\partial p}{\partial v}$, $\frac{\partial v}{\partial T}$, $\frac{\partial T}{\partial p}$. Имеем

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{RT}{v}\right) = -\frac{RT}{v^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{p}\right) = \frac{R}{p},$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{pv}{R}\right) = \frac{v}{R}.$$

Произведение этих трех частных производных дает важное в термодинамике соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{v^2}\frac{R}{p}\frac{v}{R} = -\frac{RT}{pv} = -1.$$

Если бы обозначения частных производных через круглое ∂ были действительно дробями, то в произведении слева мы получили бы 1, а не -1.

Таким же образом, как для функций двух переменных, определяются частные приращения и частные дифференциалы функций любого числа независимых переменных.

При этом, если $u = f(x, y, z, \ldots, t)$, то, как и выше,

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \qquad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}dy, \ \ldots,$$

т. е. *частный дифференциал функции нескольких независимых переменных по какой-нибудь из них равен произведению соответствующей частной производной на дифференциал этой переменной.*

110. Полный дифференциал.

I. Полное приращение и полный дифференциал. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема по x и по y; тогда с помощью частных дифференциалов мы можем находить как угодно точные выражения для приращений функции при достаточно малых изменениях x и y в отдельности. Естественно постараться найти выражение для приращения функции $z=f(x, y)$ при произвольных совместных изменениях ее обоих аргументов. В этом случае приращение функции

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y)$$

называют *полным приращением*. Геометрически приращение функции при переходе от точки $P(x, y)$ к точке $P_1\ (x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ выразится отрезком QM_1 (рис. 138).

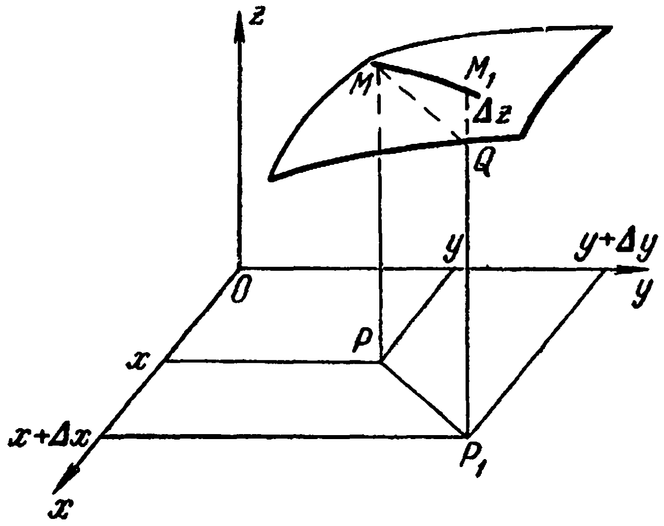

Рис. 138.

Полное приращение функции весьма сложно выражается через приращения независимых переменных; только в одном случае эта зависимость проста, именно в случае, когда функция $f(x, y)$ линейная: $f(x, y) = ax+by+c$; тогда, как легко видеть,

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y.$$

Но оказывается, что для данных значений x и y обычно можно подобрать такие коэффициенты a и b, что выражение $a\Delta x + b\Delta y$ хотя и не будет в точности равно Δz, но будет отличаться от Δz на величину бесконечно малую более высокого порядка, чем расстояние ρ между точками P и P_1 ($\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$):

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + \alpha,$$

причем

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha}{\rho} = 0.$$

Сумма $a\Delta x + b\Delta y$ называется *полным дифференциалом функции* $z=f(x, y)$; она обозначается через dz или $df(x, y)$:

$$dz = a\,dx + b\,dy \qquad (*)$$

(как и раньше, $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$).

Таким образом, при $\rho \to 0$ разность между полным приращением функции Δz и ее полным дифференциалом dz есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем ρ. Коротко будем говорить, что dz есть *главная часть* приращения Δz. В силу сказанного определение полного дифференциала можно сформулировать так:

Определение. ***Полным дифференциалом функции*** **двух независимых переменных называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращений независимых переменных.**

Докажем теорему.

Теорема. **Полный дифференциал функции двух независимых переменных равен сумме произведений частных производных функции на дифференциалы соответствующих независимых переменных.**

Доказательство. Формула (*) для дифференциала справедлива при произвольных dx и dy и, значит, в частности, при $dy=0$. Но тогда полное приращение функции Δz становится частным приращением $\Delta_x z$ и мы получаем

$$d_x z = a\,dx,$$

откуда (см. п. **109**, II)

$$a = \frac{d_x z}{dx} = f'_x(x, y).$$

Аналогично доказывается, что $b = f'_y(x, y)$. Следовательно, выражение для дифференциала при данных значениях x и y записывается так:

$$dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,dx = d_x z \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = d_y z,$$

то

$$dz = d_x z + d_y z,$$

т. е. *дифференциал функции двух независимых переменных равен сумме ее частных дифференциалов.*

Примеры. 1) Пусть $z = 3axy - x^3 - y^3$. Тогда

$$dz = (3ay - 3x^2)\,dx + (3ax - 3y^2)\,dy.$$

2) Для функции $z = x^y$ имеем

$$dz = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy.$$

Определение дифференциала переносится на функции любого числа независимых переменных. Если $u = f(x, y, z, \ldots, t)$, то полное приращение функции u равно

$$\Delta u = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ \ldots,\ t+\Delta t) - f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t),$$

а полный дифференциал du равен

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Связь между приращением и дифференциалом выражается соотношением

$$\Delta u = du + \alpha,$$

где α — бесконечно малая более высокого порядка, чем

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \ldots + \Delta t^2}.$$

Замечание. Пусть $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ — функция независимых переменных $x, y, z, \ldots, t$ и полный дифференциал ее при всех значениях переменных $x, y, z, \ldots, t$ и произвольных dx, dy, dz, $\ldots$, dt тождественно равен нулю:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}dt \equiv 0.$$

Полагая все дифференциалы, кроме dx, равными нулю, получим, что $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$. Точно так же установим, что тождественно равны нулю и все остальные частные производные $\frac{\partial u}{\partial y}, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial t}$. Следовательно, u не зависит от $x, y, z, \ldots, t$, т. е. является величиной постоянной.

111*. Дифференцируемость функций.

Определение. **Функция двух независимых переменных, имеющая в некоторой точке дифференциал, называется дифференцируемой в этой точке.**

Для случая одной независимой переменной наличие у функции дифференциала оказалось эквивалентным существованию у этой функции производной (см. п. **52**). Для случая двух независимых переменных дело обстоит сложнее. Существование у функции частных производных, как оказывается, еще не обеспечивает наличия у этой функции дифференциала, т. е. дифференцируемости.

Поясним сказанное на примере. Возьмем функцию $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ и рассмотрим ее в точке $(0, 0)$. При $y = 0$ функция $z = x$ и $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$. В частности, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\ y=0}} = 1$. Аналогично найдем

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=1$. Итак, обе частные производные в точке (0, 0) существуют и равны 1.

Вместе с тем функция $z=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ в начале координат не имеет дифференциала. В самом деле, если бы дифференциал dz существовал, то он был бы равен

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} dx+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} dy=dx+dy$$

и разность $\Delta z-(dx+dy)$ при любых dx и dy была бы бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Если взять, например, $dy=dx$, т. е. перемещаться из начала координат по биссектрисе координатного угла, то $\Delta z=\sqrt[3]{dx^3+dy^3}=\sqrt[3]{2}\,dx$ и разность $\Delta z-(dx+dy)=(\sqrt[3]{2}-2)\,dx$. Величина $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$ при этом же условии равна $\sqrt{2}\,dx$. Следовательно, величины $\Delta z-(dx+dy)$ и ρ имеют тот же порядок малости, что и dx, т. е. обе эти величины одного порядка.

Полученное противоречие показывает, что рассматриваемая функция в начале координат не имеет полного дифференциала, т. е. недифференцируема. Причина этого, как оказывается, заключается в том, что частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в окрестности начала координат разрывны.

Действительно, производная

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

в начале координат не определена. Выражение для z'_x показывает также, что она не стремится к определенному пределу при произвольном стремлении x и y к нулю. Если, например, стремиться к началу координат по биссектрисе $y=x$, то $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=x}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ и предел будет равен $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Если идти по оси абсцисс, т. е. при $y=0$, то $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=0}=1$, и т. д. При $y=-x$ производная z'_x вообще не существует (обращается в бесконечность). Это и говорит о том, что в окрестности начала координат производная z'_x разрывна (то же можно сказать и о производной z'_y).

Если, помимо существования всех частных производных, добавить еще требование их непрерывности, то из этого уже будет вытекать дифференцируемость функции.

Теорема. **Если функция $z=f(x, y)$ имеет в точке $P(x, y)$ непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, то в этой точке функция дифференцируема.**

Доказательство. Рассмотрим полное приращение функции $z=f(x, y)$:

$$\Delta z=f(x+\Delta x, \quad y+\Delta y)-f(x, y).$$

Если к правой части этого равенства прибавить и отнять величину $f(x, \ y+\Delta y)$, то выражение для Δz запишется в виде

$$\Delta z=[f(x+\Delta x, \ y+\Delta y)-f(x, \ y+\Delta y)]+[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)].$$

Иными словами, приращение функции при переходе от точки P к точке P_1 (рис. 139) мы представили в виде суммы двух приращений: приращения, которое получает функция при постоянном x, т. е. при переходе от точки P к точке N, и приращения при постоянном y, т. е. при переходе от точки N к точке P_1[1]).

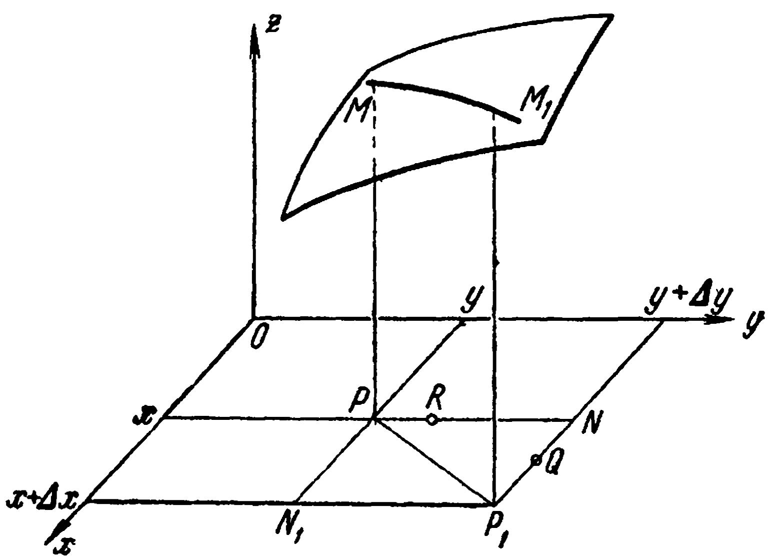

Рис. 139.

Выражение в первой скобке является приращением функции $f(x, y)$ при постоянном втором аргументе $(y+\Delta y)$, когда x получает приращение Δx. Рассматривая это приращение функции одного x, применим формулу Лагранжа (п. **57**). Будем иметь

$$f(x+\Delta x, \ y+\Delta y)-f(x, \ y+\Delta y)=f'_x(\xi_1, \ y+\Delta y)\,\Delta x,$$

где положение точки $Q(\xi_1, \ y+\Delta y)$ показано на рис. 139.

Точно так же, применяя формулу Лагранжа к выражению во второй скобке как к приращению функции одного y, получим

$$f(x, \ y+\Delta y)-f(x, \ y)=f'_y(x, \ \xi_2)\,\Delta y,$$

где точка $R(x, \ \xi_2)$ лежит на отрезке PN.

Таким образом,

$$\Delta z=f'_x(\xi_1, \ y+\Delta y)\,\Delta x+f'_y(x, \ \xi_2)\,\Delta y.$$

Но по условию производные f'_x и f'_y—функции непрерывные. Так

[1]) Рассуждение почти не изменится, если рассматривать приращения функции на участках PN_1 и N_1P_1.

как при $P' \to P$ точки Q и R также стремятся к точке P, то можно положить

$$f'_x(\xi_1, y+\Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_1,$$
$$f'_y(x, \xi_2) = f'_y(x, y) + \varepsilon_2,$$

где ε_1 и ε_2 будут стремиться к нулю вместе с Δx и Δy, а следовательно, вместе с $\rho = PP' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Подставляя эти выражения в формулу для Δz, получим

$$\Delta z = [f'_x(x, y) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [f'_y(x, y) + \varepsilon_2]\,\Delta y,$$

или

$$\Delta z = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y + \alpha, \qquad (*)$$

где $\alpha = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$. В силу неравенств $|\Delta x| \leqslant \rho$, $|\Delta y| \leqslant \rho$ имеем:

$$|\alpha| = |\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y| \leqslant |\varepsilon_1|\,|\Delta x| + |\varepsilon_2|\,|\Delta y| \leqslant \rho\,(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|).$$

Следовательно,

$$\frac{|\alpha|}{\rho} \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|;$$

так как ε_1 и ε_2 при $\rho \to 0$ стремятся к нулю, то стремится к нулю и отношение $\frac{|\alpha|}{\rho}$, т. е. α является бесконечно малой более высокого порядка, чем ρ. Поэтому сумма первых двух слагаемых в правой части равенства (*), линейная относительно Δx и Δy, и представляет собой согласно определению дифференциал функции в точке $P(x, y)$.

Аналогичная теорема имеет место и для случая большего числа независимых переменных.

112. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. Так же как производная и дифференциал функции одной переменной связаны с касательной к линии — графику функции, так и частные производные и полный дифференциал функции двух переменных связаны с касательной плоскостью к поверхности — графику функции.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема при $x = x_0$, $y = y_0$. Рассмотрим сечения поверхности S, изображающей эту функцию, плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$. К полученным плоским линиям на поверхности (рис. 140) проведем касательные M_0T_x и M_0T_y в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Эти две пересекающиеся в точке M_0 прямые определяют плоскость T, которая называется *касательной плоскостью* к поверхности S в точке M_0. Точку M_0 называют *точкой касания* плоскости T с поверхностью S. Найдем уравнение касательной плоскости. Прямая M_0T_x лежит в плоскости $y=y_0$, параллельной плоскости Oxz, причем ее угловой коэффициент относительно оси

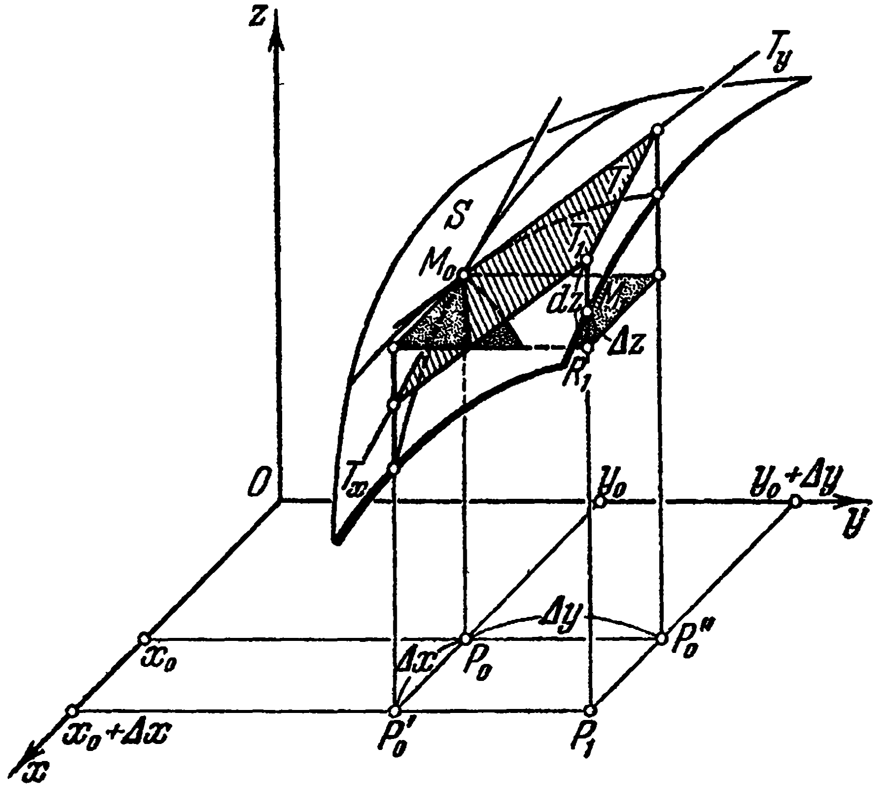

Рис. 140.

Ox равен $f'_x(x_0, y_0)$. Поэтому уравнениями прямой M_0T_x являются

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)(x-x_0), \quad y=y_0.$$

Подобным же образом находим уравнения прямой M_0T_y:

$$z-z_0=f'_y(x_0, y_0)(y-y_0), \quad x=x_0.$$

Так как плоскость T проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то ее уравнение можно записать в форме

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0).$$

Прямые M_0T_x и M_0T_y лежат в плоскости T, значит, координаты точек, лежащих на этих прямых, должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставляя в это последнее выражения для $z-z_0$ и $y-y_0$ из уравнений прямой M_0T_x, получим

$$f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)=A(x-x_0),$$

откуда

$$A=f'_x(x_0, y_0).$$

Точно так же найдем, что

$$B = f'_y(x_0, y_0).$$

Следовательно, искомое уравнение касательной плоскости есть

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (*)$$

Позже, в п. **119**, будет доказано, что касательная, проведенная в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к любой линии на поверхности S, проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости (*).

Геометрический смысл полного дифференциала функции двух независимых переменных вытекает из следующего предложения.

Теорема. **Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ при $x = x_0$, $y = y_0$ изображается приращением аппликаты точки касательной плоскости, проведенной к поверхности $z = f(x, y)$ в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.**

Доказательство. Правая часть уравнения касательной плоскости (*) является выражением для полного дифференциала функции $z = f(x, y)$. Поэтому уравнению касательной плоскости можно придать вид

$$z - z_0 = (dz)_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}};$$

здесь z_0 — аппликата точки касания, z — текущая аппликата точки плоскости, а $(dz)_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$ — полный дифференциал функции $z = f(x, y)$, вычисленный при $x = x_0$, $y = y_0$.

Когда x получает приращение Δx, а y — приращение Δy (рис. 140) функция получает приращение Δz, которое представляется отрезком R_1M_1 — приращением аппликаты точки поверхности S, а дифференциал dz отрезком R_1T_1 — приращением аппликаты точки касательной плоскости T.

Отклонение полного дифференциала от приращения функции, т. е. разность $dz - \Delta z$, изображается отрезком M_1T_1, заключенным между поверхностью S и касательной плоскостью.

113. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. В п. 53 мы видели, как применяется к приближенным вычислениям дифференциал функции одной переменной. Покажем теперь, как к решению аналогичных задач для функций многих переменных применяется полный дифференциал. Будем для простоты записи говорить о функциях двух переменных; все сказанное легко перенесется на функции большего числа переменных.

Исходным для дальнейшего является *замена полного приращения функции ее полным дифференциалом,* т. е. приближенное равенство

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz,$$

справедливое при малых Δx и Δy. Заменив dz его выражением, придадим этому равенству вид

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,\ y_0)+f'_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y.$$

Если положить $x_0+\Delta x=x$, $y_0+\Delta y=y$, то это приближенное равенство можно записать и так:

$$f(x,\ y)\approx f(x_0,\ y_0)+f'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0). \quad (*)$$

Последняя формула показывает, что замена полного приращения функции ее полным дифференциалом привела к замене функции $f(x,\ y)$ в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ линейной функцией. Геометрически это значит, что участок поверхности $z=f(x,\ y)$ заменяется соответствующим участком касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Формула (*) сразу позволяет по известным значениям $f(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0,\ y_0)$, $f'_y(x_0,\ y_0)$ приближенно вычислять значения функции $f(x,\ y)$ при условии, что x мало отличается от x_0, а y от y_0.

Пример. Составим приближенную формулу для вычисления значений функции

$$z=\ln(xy+2y^2-2x)$$

в окрестности точки (1, 1).

Здесь $x_0=1$, $y_0=1$. Последовательно вычисляем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{xy+2y^2-2x}(y-2), \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{xy+2y^2-2x}(x+4y), \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=5.$$

Так как $z_0=0$, то

$$\ln(xy+2y^2-2x)\approx-(x-1)+5(y-1).$$

Советуем читателю вычислить значения данной функции в некоторых точках по приближенной формуле и с помощью таблиц и сравнить результаты.

Покажем теперь, как вычисляется предельная абсолютная ошибка функции двух переменных по заданным предельным абсолютным ошибкам аргументов. Мы сохраним те же обозначения, что и в п. **53** (рекомендуем читателю перед чтением дальнейшего еще раз обратиться к содержанию указанного пункта).

Пусть задана функция $z=f(x,\ y)$ и требуется вычислить ее значение при условии, что известны лишь приближенные значения аргументов x и y:

$$x=x_0+dx, \quad |dx|<\varepsilon_x; \quad y=y_0+dy, \quad |dy|<\varepsilon_y,$$

где x_0 и y_0 приближенные значения, а ε_x и ε_y — предельные абсолютные ошибки. Чтобы найти предельную абсолютную ошибку функции ε_z, нужно оценить модуль разности между истинным значением $f(x, y)$ и приближенным $f(x_0, y_0)$. Из формулы (*) следует

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)| \approx |f'_x(x_0, y_0)\,dx+f'_y(x_0, y_0)\,dy| \leqslant$$
$$\leqslant |f'_x(x_0, y_0)|\,|dx|+|f'_y(x_0, y_0)|\,|dy| <$$
$$< |f'_x(x_0, y_0)|\,\varepsilon_x+|f'_y(x_0, y_0)|\,\varepsilon_y.$$

Таким образом, можно сказать, что

$$\varepsilon_z=|f'_x(x_0, y_0)|\,\varepsilon_x+|f'_y(x_0, y_0)|\,\varepsilon_y. \qquad (**)$$

Деля ε_z на $f(x_0, y_0)$, получим предельную относительную ошибку δ_z.

В качестве примеров найдем относительные ошибки произведения и частного.

1) Пусть $z=xy$ и x_0, y_0 — приближенные значения аргументов. По формуле (**)

$$\varepsilon_z=|y_0|\,\varepsilon_x+|x_0|\,\varepsilon_y.$$

Деля на $|z_0|=|x_0y_0|$, находим δ_z:

$$\delta_z=\frac{\varepsilon_x}{|x_0|}+\frac{\varepsilon_y}{|y_0|}=\delta_x+\delta_y,$$

т. е. *предельная относительная ошибка произведения равна сумме предельных относительных ошибок сомножителей*. Разумеется, это правило справедливо для любого числа сомножителей.

2) Пусть $z=\frac{y}{x}$ и $z_0=\frac{y_0}{x_0}$. Тогда

$$\varepsilon_z=\left|-\frac{y_0}{x_0^2}\right|\varepsilon_x+\left|\frac{1}{x_0}\right|\varepsilon_y,$$

$$\delta_z=\frac{\varepsilon_x}{|x_0|}+\frac{\varepsilon_y}{|y_0|}=\delta_x+\delta_y,$$

т. е. *предельная относительная ошибка частного равна сумме предельных относительных ошибок делимого и делителя*. (Таким образом, предельные относительные ошибки, получающиеся при делении двух величин и при их произведении равны между собой.)

Формула (**) позволяет решать и обратную задачу: по известным приближенным значениям x_0, y_0 и з а д а н н о й допустимой ошибке ε_z в определении функции $f(x, y)$ рассчитать, каковы должны быть ε_x и ε_y. Пользуясь неопределенностью задачи (две величины связаны только одним соотношением), мы можем подбирать величины ε_x и ε_y в зависимости от того, какую из них легче сделать меньше, т. е. какую из величин x и y легче измерить с большей точностью. Если при этом окажется, что приближенные значения x_0, y_0 измерены с недостаточной точностью, то надо заново произвести их измерения уже с требуемой точностью и затем снова вычислить значение функции (см. пример 2 на стр. 166).

114. Производные и дифференциалы высших порядков.

I. Допустим, что функция $z=f(x, y)$ имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y);$$

эти производные в свою очередь являются функциями независимых переменных x и y. Частные производные от этих функций называются *вторыми частными производными* или *частными производными второго порядка* от данной функции $f(x, y)$. Каждая производная *первого порядка* имеет две частные производные; таким образом, мы получаем четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}=z''_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}=z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}=z''_{yx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}=z''_{yy}.$$

Производные f''_{xy} и f''_{yx} называются *смешанными*; одна из них получается дифференцированием функции сначала по x, затем по y, другая, наоборот, — сначала по y, затем по x.

Пример. Для функции $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$ имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=6x^2y-9y^2-1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=6x^2y-9y^2-1.$$

Обращает на себя внимание тот факт, что смешанные производные оказались тождественными. Это обстоятельство не случайно. Имеет место такая общая теорема, которую мы приводим без доказательства:

Теорема. **Если вторые смешанные производные функции $z=f(x, y)$ непрерывны, то они равны между собой:**

$$f''_{xy}(x, y)=f''_{yx}(x, y).$$

Условие непрерывности частных производных является существенным; если оно не выполнено, теорема может оказаться несправедливой.

Таким образом, функция двух переменных $z=f(x, y)$ имеет при указанных условиях фактически не четыре, а только три частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Частные производные от частных производных второго порядка называются *частными производными третьего порядка* (или *третьими частными производными*) и т. д.

Теорема о равенстве вторых смешанных производных позволяет доказать общее предложение:

Результат повторного дифференцирования функции двух независимых переменных не зависит от порядка дифференцирования (предполагается, что рассматриваемые частные производные *непрерывны*).

Докажем, например, что

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x\, \partial y}.$$

Используя теорему о равенстве вторых смешанных производных, находим

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x\, \partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x\, \partial y}.$$

Точно так же сформулированное только что общее предложение может быть доказано во всех других возможных случаях.

Легко проверить, что функция $z=f(x, y)$ имеет $n+1$ частных производных n-го порядка, которые можно обозначить так:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\, \partial y}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\, \partial y^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^2\, \partial y^{n-2}}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

Элементарные функции двух независимых переменных, как правило (за исключением отдельных точек и отдельных линий), имеют в своей области определения частные производные любых порядков.

Частные производные высшего порядка для функций любого числа независимых переменных определяются аналогично. Здесь также имеет место теорема о независимости результата от порядка дифференцирования. Так, например, если $u=f(x, y, z)$, то

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial z\, \partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x\, \partial z}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial x\, \partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial y\, \partial x}.$$

Повторное дифференцирование функции нескольких переменных фактически производится последовательным нахождением одной производной вслед за другой.

II. Полный дифференциал функции $z=f(x, y)$

$$dz=f'_x(x, y)\,dx+f'_y(x, y)\,dy=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

зависит, во-первых, от независимых переменных x, y и, во-вторых, от их дифференциалов dx, dy. Дифференциалы dx и dy являются величинами, не зависящими от x и y (аналогичное замечание для функций одной переменной сделано в п. **55**).

Полным дифференциалом второго порядка называется полный дифференциал от полного дифференциала первого порядка dz *при условии, что* dx *и* dy *считаются постоянными.* Согласно этому определению

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy.$$

Вычислим частные производные от выражений в круглых скобках (напоминаем, что dx и dy считаются постоянными):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dy,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy.$$

Подставляя найденные выражения в формулу для d^2z и приводя подобные члены, окончательно получим

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Совершенно аналогично последовательно определяются полные дифференциалы высших порядков. Предоставляем читателю проверить, что полный дифференциал третьего порядка равен

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy+3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

и подумать над законом образования последующих полных дифференциалов.

115. Отыскание функции по ее полному дифференциалу.

I. Случай двух независимых переменных. Пусть x и y — независимые переменные, а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции от них, непрерывные вместе со своими первыми частными производными.

Говорят, что *дифференциальное выражение* $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ *является полным дифференциалом, если существует такая функция* $u(x, y)$, *полный дифференциал которой равен данному выражению*

$$du = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (*)$$

Выясним, в каком же случае выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ будет являться полным дифференциалом. Заметим, что для функций одной переменной аналогичный вопрос решался всегда утвердительно. Именно, если имелось выражение $f(x)\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная функция, то всегда существовала функция y такая, что $dy = f(x)\,dx$. Этой функцией была любая первообразная от $f(x)$: $y = \int f(x)\,dx$. Для функций двух переменных дело обстоит иначе. Оказывается, что выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ далеко не всегда является полным дифференциалом. Имеет место такая теорема:

Теорема. **Для того чтобы выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ было полным дифференциалом, необходимо и достаточно соблюдение тождества**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (**)$$

Доказательство. Докажем прежде всего необходимость условия. Итак, предположим, что функция $u(x, y)$, для которой имеет место равенство $(*)$, существует.

Так как

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

то из равенства $(*)$ получаем, что

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Продифференцировав первое из этих соотношений по y, а второе по x, будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

В силу теоремы о равенстве вторых смешанных производных заключаем, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к доказательству достаточности условия. При этом мы укажем путь фактического отыскания функции $u(x, y)$. Эта функция должна, как мы видели, удовлетворять двум условиям:

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y); \qquad 2)\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y).$$

Функций, удовлетворяющих первому условию, можно подобрать бесчисленное множество. Все они заключаются в формуле

$$u=\int P(x, y)\,dx+\varphi(y), \tag{***}$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция от y, а интегрирование ведется в предположении, что y — постоянная. В самом деле, дифференцируя полученную формулу по x, сразу получаем $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y)$. Постараемся подобрать теперь функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе условие. Дифференцируем найденное выражение для u по y [1]) и приравниваем $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx+\varphi'(y)=Q(x, y),$$

откуда

$$\varphi'(y)=Q(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx. \tag{****}$$

Однако, чтобы последнее равенство было непротиворечиво и из него действительно можно было интегрированием найти $\varphi(y)$, нужно, чтобы правая его часть не зависела от x. Докажем, что *при соблюдении условия* (**) *так и будет*. Дифференцируем правую часть (****) по x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right]=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P(x, y)\,dx\right]=$$
$$=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0.$$

Здесь мы снова воспользовались независимостью результата смешанного дифференцирования от его порядка [2]). Таким образом, производная по x тождественно равна нулю, а это значит, что

---

[1]) Ясно, что поскольку интегрирование ведется по x, а дифференцирование по y, то эти действия не уничтожают друг друга. Позже, в п. 136, будет показано, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx=\int\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

[2]) Взамен этого можно было бы воспользоваться формулой сноски [1]).

правая часть равенства (****) не зависит от x и является функцией только y. Следовательно, интегрированием можно найти $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=\int\left[Q(x,\ y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,\ y)\,dx\right]dy;$$

в выражение для $\varphi(y)$ войдет произвольное постоянное слагаемое.

Подынтегральное выражение представляет разность двух функций, каждая из которых зависит от x. Поэтому перед интегрированием необходимо произвести преобразования, в результате которых все слагаемые, содержащие x, должны уничтожиться.

Затем, подставив найденное для $\varphi(y)$ выражение в формулу (***), мы получим функцию $u(x,\ y)$, для которой данное дифференциальное выражение $P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy$ будет полным дифференциалом. Теорема доказана.

Замечание. Ясно, что можно было бы обратить порядок действий и сначала подбирать функцию $u(x,\ y)$ так, чтобы она удовлетворяла второму условию, а затем уже и первому.

Примеры. 1) Дано выражение

$$(e^y+x)\,dx+(xe^y-2y)\,dy.$$

Проверим, что данное выражение является полным дифференциалом, и найдем функцию $u(x,\ y)$. Здесь

$$P=e^y+x,\qquad Q=xe^y-2y,\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=e^y,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^y.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

т. е. необходимое и достаточное условие существования функции $u(x,\ y)$ выполняется. Переходим к ее отысканию. Имеем

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial x}=e^y+x,\qquad 2)\ \frac{\partial u}{\partial y}=xe^y-2y.$$

Из 1) интегрированием находим

$$u=\int(e^y+x)\,dx+\varphi(y)=xe^y+\frac{x^2}{2}+\varphi(y).$$

Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xe^y+\varphi'(y)=xe^y-2y.$$

Члены, содержащие x, уничтожаются и остается

$$\varphi'(y)=-2y,$$

откуда

$$\varphi(y) = -y^2 + C.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = xe^y + \frac{x^2}{2} - y^2 + C.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в правильности результата.

2) Выражение $y\,dx - x\,dy$ не является полным дифференциалом, потому что

$$\frac{\partial(y)}{\partial y} = 1, \quad \text{а} \quad \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1.$$

II. Случай трех независимых переменных. Метод отыскания функции двух независимых переменных по ее полному дифференциалу почти без всяких изменений переносится на функции трех переменных. Мы поэтому ограничимся краткими указаниями. Пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — функции независимых переменных x, y, z, непрерывные вместе со своими частными производными. Имеет место теорема.

Теорема. **Для того чтобы выражение**

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \qquad (*)$$

было полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y, z)$, необходимо и достаточно соблюдение тождеств

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (**)$$

Действительно, если функция $u(x, y, z)$, для которой выражение (*) является полным дифференциалом, существует, то

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Поэтому должны выполняться три равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R. \qquad (***)$$

Отсюда сразу следуют тождества (**), как условия равенства вторых смешанных производных функции $u(x, y, z)$. Например,

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}, \text{ т. е. } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \text{ и т. д.}$$

Доказывать достаточность условия в общем виде мы не будем (рассуждение аналогично соответствующему доказательству для случая функций двух переменных), а просто приведем пример отыскания функции трех переменных по ее полному дифференциалу.

Пример. Найдем функцию $u(x, y, z)$, если

$$du = (2xyz + \ln y)\, dx + \left(x^2 z + \frac{x}{y}\right) dy + (x^2 y - 2z)\, dz.$$

Здесь

$$P = 2xyz + \ln y, \qquad Q = x^2 z + \frac{x}{y}, \qquad R = x^2 y - 2z.$$

Выражение для du действительно является полным дифференциалом, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xz + \frac{1}{y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = x^2 = \frac{\partial R}{\partial y},$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2xy = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Перейдем к отысканию функции u. Начнем с третьего из условий (***):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 y - 2z.$$

Функция u, удовлетворяющая этому условию, имеет вид

$$u = \int (x^2 y - 2z)\, dz + \varphi(x, y) = x^2 yz - z^2 + \varphi(x, y),$$

где при интегрировании x и y считаются постоянными; $\varphi(x, y)$ — произвольная функция, которую мы будем подбирать так, чтобы функция u удовлетворяла первым двум условиям (***). Должно быть

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xyz + \ln y,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 z + \frac{x}{y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \ln y, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{y},$$

т. е.

$$d\varphi = \ln y\, dx + \frac{x}{y}\, dy.$$

Так как

$$\frac{\partial (\ln y)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = \frac{1}{y},$$

то мы пришли к отысканию функции двух переменных $\varphi(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

Поступаем далее, как указано в I:

$$\varphi(x, y) = \int \ln y \, dx = x \ln y + \psi(y),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{y} + \psi'(y) = \frac{x}{y}.$$

Видно, что $\psi'(y) = 0$, т. е. $\psi(y) = C$. Окончательно получаем

$$u = x^2yz - z^2 + x \ln y + C.$$

Предоставляем читателю произвести проверку правильности результата.

116. Дифференцирование сложных функций. Правила для отыскания дифференциала функций.

I. Дифференцирование сложных функций. Пусть задана дифференцируемая функция $z = f(u, v)$. Тогда ее приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \alpha, \qquad (*)$$

где α — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$, т. е.

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}} = 0.$$

Предположим теперь, что u и v в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной x, т. е.

$$u = \varphi(x) \quad \text{и} \quad v = \psi(x).$$

Таким образом,

$$z = f[\varphi(x), \psi(x)] = F(x),$$

т. е. z является сложной функцией переменной x. Выразим теперь производную $\frac{dz}{dx}$ через частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ и производные от функций u и v по x. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда u и v получат соответственно приращения Δu и Δv, через которые Δz выразится по формуле (*). Разделим обе части этой формулы на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\alpha}{\Delta x}$$

и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Согласно условию $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$. Отношение $\frac{\alpha}{\Delta x}$ представим в виде

$$\frac{\alpha}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}} \frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}} \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}.$$

Первый множитель, согласно определению α, стремится к нулю, а второй к определенному числу: $\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$. Замечая еще, что значения $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ зависят только от выбранного значения x, определяющего значения u и v, и не зависят от Δx, окончательно получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Ясно, что эта формула является обобщением правила дифференцирования сложной функции одной переменной.

Пример. Пусть

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}.$$

Положим $\operatorname{tg} x = u$, $\sin x = v$. Тогда $y = u^v$. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx} = vu^{v-1} \frac{1}{\cos^2 x} + u^v \ln u \cos x =$$

$$= u^v \left(\frac{v}{u} \frac{1}{\cos^2 x} + \ln u \cdot \cos x \right) = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x \right).$$

Раньше для отыскания производной от такой функции был рекомендован специальный прием — логарифмическое дифференцирование.

Пусть теперь z является сложной функцией двух независимых переменных x и y, т. е.

$$z = f(u, v),$$

где

$$u = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad v = \psi(x, y).$$

Таким образом,

$$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)] = F(x, y).$$

Все функции предполагаются дифференцируемыми.

Чтобы найти z'_x, мы должны считать y постоянным, но тогда и u и v становятся функциями только одной переменной x, и мы приходим к уже рассмотренному случаю. Разница состоит только в том, что обыкновенные производные $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$ заменятся частными производными $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$, и мы получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

и аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Итак,

Частная производная сложной функции равна сумме произведений частных производных заданной функции по промежуточным аргументам (u *и* v) *на частные производные этих аргументов* (u *и* v) *по соответствующей независимой переменной* (x *или* y).

Пример. Возьмем функцию $z=e^{xy}\sin(x+y)$. Полагая $xy=u$, $x+y=v$ и, значит, $z=e^u\sin v$, найдем

$$\begin{aligned} z'_x&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=\\ &=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],\\ z'_y&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot 1=\\ &=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]. \end{aligned}$$

Сформулированное правило дифференцирования сложной функции остается справедливым для функций любого числа независимых переменных и при всяком числе промежуточных аргументов.

Пусть z задана как функция аргументов $u, v, \ldots, w$, которые являются функциями независимых переменных $x, y, \ldots, t$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial z}{\partial t}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned}$$

В частном случае аргументы $u, v, \ldots, w$ могут быть функциями одной независимой переменной x. Значит, фактически z является функцией только x. При этом ее обыкновенная производная — ее называют в этом случае **полной производной** — имеет вид

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Если в этой формуле положить $u=x$, то получим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Обращаем внимание читателя на различие между двумя производными по x, содержащимися в этой формуле. В то время как $\frac{dz}{dx}$ есть полная производная, т. е. обыкновенная производная от z как функции x, $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть частная производная от z по аргументу x, входящему в выражение функции непосредственно, значит, при условии, что остальные аргументы, хотя они также зависят от x, при дифференцировании остаются постоянными.

Примеры. 1) Найдем вторые частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ от функции

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

где r — полярный радиус точки в пространстве: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$$

и дальше:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^3-3r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6}=-\frac{r^3-3rx^2}{r^6}=-\frac{r^2-3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

Можно заметить, что функция $u=\frac{1}{r}$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

2) Пусть $z=x^3e^{u^2}$, где $u=\varphi(x)$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2e^{u^2},\quad \text{а}\quad \frac{dz}{dx}=3x^2e^{u^2}+x^3e^{u^2}2u\varphi'(x).$$

II. Инвариантность формы первого дифференциала и правила для отыскания дифференциала.

Теорема. **Полный дифференциал функции $z=f(u, v)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли ее аргументы u и v независимыми переменными или функциями от независимых переменных.**

Если u и v — независимые переменные, то полный дифференциал равен

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Пусть теперь u и v, а следовательно, и z являются функциями независимых переменных x и y. По определению полного дифференциала имеем

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Заменим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ по формулам, выведенным в I:

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,$$

или перегруппировав члены:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Выражения в скобках равны соответственно du и dv.

Следовательно,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, и для функций двух независимых переменных имеет место свойство инвариантности формы первого дифференциала функции (см. п. **51**, III).

Совершенно аналогично, если $z=f(u, v, \ldots, w)$, то всегда

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}dw$$

независимо от того, являются ли непосредственные аргументы этой функции независимыми переменными или нет. При нахождении дифференциала функции нескольких независимых переменных можно также пользоваться простыми правилами, аналогичными правилам, имеющим место в случае одной независимой переменной (п. **51**).

Пусть $u, v, \ldots, w$ — функции любого числа независимых переменных. Тогда имеют место правила, выраженные следующими формулами:

1) $d(u+v+\ldots+w)=du+dv+\ldots+dw$;

2) $d(uv) = v\,du + u\,dv$, в частности $d(Cu) = C\,du$, C — const;

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

Доказательства этих формул получаются сразу на основании свойства инвариантности формы первого дифференциала.

Докажем для примера второе правило. Так как форма дифференциала не зависит от характера аргументов, предположим, что они — независимые переменные. При этом

$$d(uv) = \frac{\partial}{\partial u}(uv)\,du + \frac{\partial}{\partial v}(uv)\,dv = v\,du + u\,dv,$$

что и требовалось доказать.

Так же доказываются и остальные правила. Эти правила позволяют иногда значительно упростить выкладки.

Пример. Найдем $d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$. Полагая $\frac{y}{x} = u$, имеем

$$d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = (\mathrm{arctg}\,u)'\,du = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пользуясь третьим правилом, окончательно получаем

$$d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Отсюда, между прочим, сразу следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

117. Теорема существования неявной функции. В нашем курсе мы уже неоднократно встречались с неявными функциями, т. е. функциями, определяемыми при помощи уравнений, связывающих переменные величины. Напомним, что неявная функция одного переменного определяется уравнением

$$F(x, y) = 0. \qquad (*)$$

В п. **12** было отмечено, что в некоторых случаях уравнение (*) может и не определять функции: так, например, уравнение $x^2 + y^2 + 5 = 0$ не имеет никаких действительных корней, и, значит, мы не можем рассматривать y как функцию от x. В более сложных случаях вообще очень трудно установить, при каких значениях x уравнение (*) имеет корни и в каком количестве; при этом вопрос о том, определяет ли это уравнение некоторую функцию, остается открытым.

Выясним сейчас, при каких условиях можно утверждать, что заданное уравнение $F(x, y)=0$ действительно определяет одну из переменных как функцию другой. Имеет место теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема существования неявной функции. **Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными в какой-нибудь окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Если**

$$F(x_0, y_0)=0 \quad \text{и} \quad F'_y(x_0, y_0)\neq 0,$$

то уравнение

$$F(x, y)=0$$

при значениях x, близких к x_0, имеет единственное непрерывно зависящее от x решение $y=\varphi(x)$ такое, что $\varphi(x_0)=y_0$. Функция $\varphi(x)$ имеет также непрерывную производную.

Разъясним смысл этой теоремы на примерах.

1) Пусть $F(x, y)=x^2+y^2-R^2$.

Уравнение

$$x^2+y^2-R^2=0$$

является уравнением окружности. В любой точке окружности $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0\neq 0$ (рис. 141), все условия теоремы выполнены:

$$x_0^2+y_0^2-R^2=0, \qquad F'_y(x_0, y_0)=2y_0\neq 0.$$

Функция $y=\sqrt{R^2-x^2}$, где знак у корня выбирается такой же, как у y_0, и является единственной непрерывной функцией, удовлетворяющей заданному уравнению и такой, что $\sqrt{R^2-x_0^2}=y_0$. Выбрав другой знак у корня, мы получим другую непрерывную функцию, также обращающую уравнение в тождество, но уже не равную y_0 при $x=x_0$; она будет равна $-y_0$. Отметим также, что если для разных значений x соответствующие значения y брать то положительными, то отрицательными, то получающаяся функция будет разрывной (ср. со сноской на стр. 37); в теореме же говорится о существовании единственной непрерывной функции.

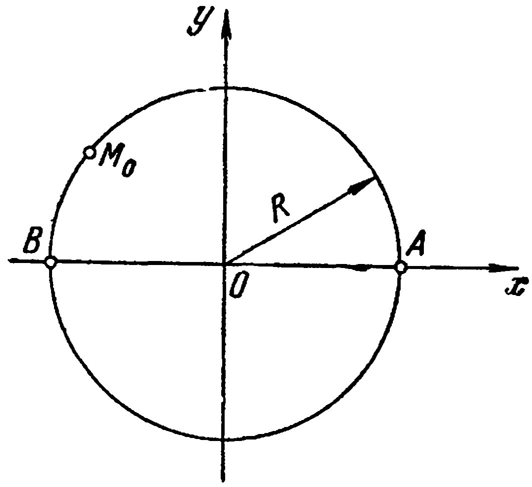

Рис. 141.

Иная картина будет в окрестности точек $A(R, 0)$ и $B(-R, 0)$. В точке A при $x>R$ мы вообще не получим действительного значения для y, а при $x<R$ оба непрерывных решения $y=+\sqrt{R^2-x^2}$ и $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ обращаются в нуль при $x=R$.

Все дело в том, что частная производная $F'_y(R, 0) = 0$, т. е. условия теоремы нарушены. Так как в этой точке $F'_x(R, 0) = 2R \neq 0$, то можно, наоборот, x выразить в виде единственной непрерывной функции от y. Это опять-таки видно из рис. 141.

2) Пусть неявная функция определена уравнением

$$x^3y + \ln y - x = 0. \qquad (*)$$

Здесь $F(x, y) = x^3y + \ln y - x$. В точке $M_0(1, 1)$ имеем $F(1, 1) = 0$. Частные производные $F'_x = 3x^2y - 1$ и $F'_y = x^3 + \frac{1}{y}$ непрерывны в окрестности этой точки и $F'_y(1, 1) = 2 \neq 0$. В силу приведенной теоремы существует функция $y = \varphi(x)$, обращающая данное уравнение в тождество и такая, что $\varphi(1) = 1$. Хотя мы и установили существование функции $\varphi(x)$, фактически выразить ее в виде элементарной функции от x нельзя, так как заданное уравнение алгебраически неразрешимо относительно y. Частные значения функции $\varphi(x)$ приходится отыскивать, задаваясь числовыми значениями x и решая получающиеся уравнения методами п. **77**. Так как функция $y = \varphi(x)$ непрерывна, то при x, близком к 1, соответствующее уравнение имеет корень, близкий к 1.

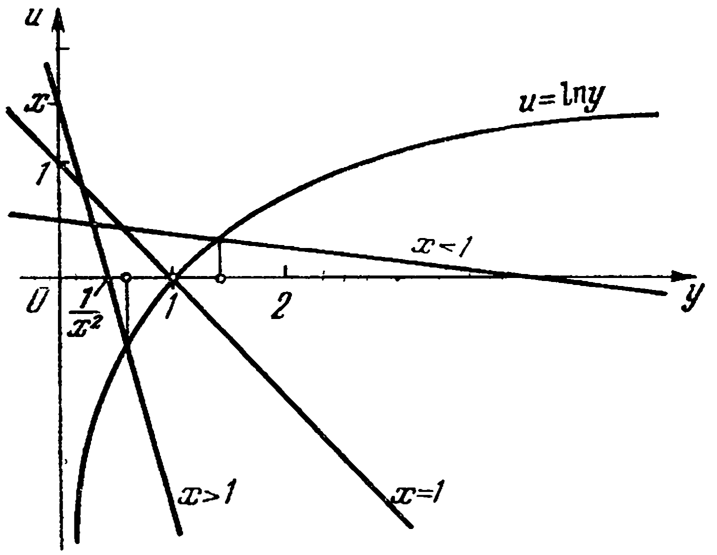

Рис. 142.

В этом примере все высказанные утверждения легко проиллюстрировать геометрически. Запишем уравнение (*) в виде

$$\ln y = x - x^3y$$

и построим график его левой части: $u = \ln y$ — и графики правой части при различных значениях x: это прямые $u = x - x^3y$ (рис. 142). Значения y в точках пересечения этих прямых с логарифмикой и будут являться значениями функции $y = \varphi(x)$. При $x = 1$ прямая $u = 1 - y$ пересекается с логарифмикой на оси Oy в точке $y = 1$. Это соответствует начальной точке M_0. Когда x возрастает, то точка пересечения прямой $u = x - x^3y$ с осью Ou поднимается вверх, а точка пересечения с осью Oy движется к началу координат. Поэтому искомое значение y непрерывно уменьшается и, как легко заметить, стремится к нулю при $x \to \infty$. Если же x уменьшать, то опять-таки из рисунка усматриваем, что значения y будут уже больше 1, причем сначала они увеличиваются, а затем начинают уменьшаться и при $x = 0$ значение y снова равно 1. Пользуясь этим анализом, читатель сможет самостоятельно построить схематический график функции $y=\varphi(x)$ в интервале $[0, \infty)$[1]).

Отметим еще, что в точке $(-1, 1)$ также имеем $F(-1, 1)=0$, но здесь $F'_y(-1, 1)=0$ и условия теоремы не соблюдены. Рекомендуем читателю графически установить, что когда x находится вблизи от -1 слева (т.е. $x<-1$), то уравнение (*) не имеет действительных решений, а при $-1<x<0$ — два непрерывных решения; одно из них непрерывно смыкается с уже исследованным решением в интервале $[0, \infty)$, а другое стремится к ∞ при $x \to 0$.

Неявная функция двух переменных определяется уравнением

$$F(x, y, z)=0,$$

связывающим три переменные величины. На вопрос о существовании такой функции отвечает следующая теорема, аналогичная приведенной выше.

Теорема. **Пусть функция $F(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими частными производными в какой-нибудь окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Если**

$$F(x_0, y_0, z_0)=0 \text{ и } F'_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0,$$

то уравнение $F(x, y, z)=0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет единственное, непрерывно зависящее от x и y решение $z=\varphi(x, y)$ такое, что $\varphi(x_0, y_0)=z_0$. Функция $\varphi(x, y)$ имеет также непрерывные частные производные.

Отметим еще, что если в точке M_0 производная $F'_z=0$, а, скажем, $F'_y\neq 0$, то уравнение $F(x, y, z)=0$ может не определять z как функцию x и y, но определяет y как функцию x и z.

118. Дифференцирование неявных функций. Пусть условия теоремы существования неявной функции, сформулированной в предыдущем пункте, выполнены и уравнение

$$F(x, y)=0$$

определяет y как некоторую функцию $y=\varphi(x)$. Если в уравнение подставить вместо y функцию $\varphi(x)$, то получим тождество

$$F[x, \varphi(x)]=0.$$

Следовательно, производная по x от функции $F(x, y)$, где $y=\varphi(x)$, также должна быть равной нулю. Дифференцируя по правилу дифференцирования сложной функции (п. **116**), найдем

$$F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}=0,$$

[1]) Положение точки экстремума (максимума) этой функции будет уточнено в примере 2 п. **118**.

откуда

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Эта формула выражает производную неявной функции $y = \varphi(x)$ через частные производные заданной функции $F(x, y)$[1]. Производная y' не существует при тех значениях x и y, при которых $F'_y = 0$. Но при этом, как было отмечено, мы и не можем гарантировать существования самой функции $\varphi(x)$.

Примеры. 1) $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Имеем $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$; значит,

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

2) $F(x, y) \equiv x^3 y + \ln y - x = 0$.

Согласно решению примера 2 п. 98

$$y' = -\frac{3x^2y - 1}{x^3 + \frac{1}{y}}.$$

Теперь можно продолжить решение указанного примера и найти точки экстремума функции $y = \varphi(x)$, определенной данным уравнением. В точках экстремума $y' = 0$; поэтому x и y связаны уравнением $3x^2y - 1 = 0$, которое нужно решить совместно с данным $x^3y + \ln y - x = 0$. Выражая y из первого уравнения: $y = \frac{1}{3x^2}$ и подставляя во второе, приходим к трансцендентному уравнению $\ln \frac{1}{3x^2} - \frac{2x}{3} = 0$.

Если $x > 0$, то это уравнение записывается в виде $\ln x = -\frac{x}{3} - \frac{\ln 3}{2}$; оно имеет единственное решение: $x \approx 0{,}49$; при этом $y \approx 1{,}39$. Анализ, проведенный ранее, позволяет сразу сказать, что это максимум функции.

Если $x < 0$, то, полагая $x = -z$, приведем уравнение к виду $\ln z = \frac{z}{3} - \frac{\ln 3}{2}$. При $0 < z < 1$ оно имеет решение $z \approx 0{,}74$, т. е. $x \approx -0{,}74$ и $y \approx 0{,}61$. Предоставляем читателю проверить, что это минимум для той ветви функции, которая ограничена в интервале $[-1, 0]$.

II. Пусть теперь уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

определяет z как некоторую функцию $z = \varphi(x, y)$ независимых переменных x и y. Если в уравнение подставить вместо z

---

[1]) Другой способ дифференцирования неявной функции одной переменной был указан в п. 45, II.

функцию $\varphi(x, y)$, то получим тождество

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0.$$

Следовательно, частные производные по x и по y от функции $F(x, y, z)$, где $z = \varphi(x, y)$, также должны быть равны нулю. Дифференцируя, найдем

$$F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad F'_y + F'_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Эти формулы выражают частные производные неявной функции $z = \varphi(x, y)$ через производные заданной функции $F(x, y, z)$. При $F'_z = 0$ эти формулы теряют смысл.

Примеры. 1) Найдем частные производные функции z, заданной уравнением $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (уравнение сферы). Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

значит,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

В этом примере можно найти явное выражение функции и проверить правильность полученных результатов.

2) $F(x, y, z) \equiv e^{-xy} - 2z + e^z = 0$. Находим

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -ye^{-xy}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -xe^{-xy}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2 + e^z.$$

Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}.$$

Здесь уже явного выражения для z мы получить не можем и значения частных производных находятся по значениям независимых переменных x и y и самой функции z.

В общем случае, когда уравнение

$$F(x, y, z, \ldots, u) = 0$$

определяет u как некоторую функцию от $x, y, z, \ldots$, аналогично предыдущему найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_u},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{F'_z}{F'_u},\quad \ldots$$

§ 3. Геометрические приложения дифференциального исчисления

119. Поверхности. Если уравнение поверхности в пространстве имеет вид

$$z=f(x,\ y),$$

то уравнением касательной плоскости к поверхности в ее точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ служит (см. п. **112**)

$$z-z_0=f'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0).$$

Рассмотрим поверхность S в пространстве $Oxyz$, заданную уравнением общего вида

$$F(x,\ y,z)=0,$$

не разрешенным относительно какой-нибудь координаты. Предположим, что функция $F(x,\ y,\ z)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет условиям теоремы существования неявной функции и уравнение $F(x,\ y,\ z)=0$ определяет z как функцию x и y: $z=f(x,\ y)$, причем $f(x_0,\ y_0)=z_0$. Согласно п. **118**, II производные этой функции в точке $(x_0,\ y_0)$ будут равны

$$f'_x(x_0,\ y_0)=-\frac{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)},\quad f'_y(x_0,\ y_0)=-\frac{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}.$$

Уравнение касательной плоскости можно переписать так:

$$z-z_0=-\frac{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}(x-x_0)-\frac{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}(y-y_0)$$

или

$$F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)(y-y_0)+$$
$$+F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)(z-z_0)=0,$$

что короче записывают так:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(z-z_0)=0.$$

Индекс 0 указывает, что частные производные берутся в точке касания $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, т. е. при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

Записанное в таком виде уравнение касательной плоскости имеет смысл и тогда, когда $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0$. Это будет просто означать, что касательная плоскость в данной точке поверхности параллельна оси Oz. Если в точке M_0 все три частные производные функции $F(x, y, z)$ равны нулю: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0$, то эта точка будет *особой*. Такие точки поверхности мы рассматривать не будем.

Определение. **Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в точке касания, называется *нормалью к поверхности* в этой точке.**

Зная уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, можно на основании известных из аналитической геометрии правил написать уравнения нормали к той же поверхности в той же точке. Они имеют вид

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}.$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнения нормали к этой поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ запишутся в виде

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Зная уравнение касательной плоскости, легко написать выражения для направляющих косинусов нормали; предоставляем это сделать читателю для случаев задания уравнения поверхности в явном и неявном виде (эти выражения понадобятся в дальнейшем).

Примеры. 1) Найдем касательную плоскость и нормаль к сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Имеем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 2x_0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 2y_0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 2z_0,$$

и значит, уравнение касательной плоскости будет

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$$

или

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2.$$

Уравнения нормали имеют вид

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0} \quad \text{или} \quad \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.$$

Отсюда следует, что нормаль к данной сфере проходит через начало координат, т. е. что нормалью служит радиус сферы.

2) Составим уравнение касательной плоскости к эллипсоиду вращения $x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=1$, которая была бы параллельна плоскости $x+y-z=0$.

Так как $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=2x_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=y_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=2z_0$, то уравнение касательной плоскости в неизвестной пока точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0. \qquad (*)$$

Из условия параллельности плоскостей имеем

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{2z_0}{-1}.$$

Добавим к этим уравнениям еще одно уравнение, выражающее условие, что точка M_0 лежит на эллипсоиде:

$$x_0^2+\frac{y_0^2}{2}+z_0^2=1.$$

Получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными. Решениями ее являются координаты двух точек: $M_0'\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ и $M_0''\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$. Подставляя найденные координаты в уравнение (*), получим уравнения двух плоскостей, отвечающих условиям задачи:

$$x+y-z=2 \quad \text{и} \quad x+y-z=-2.$$

В п. **112** мы определили касательную плоскость к поверхности как плоскость, проходящую через касательные прямые к двум плоским сечениям поверхности, параллельным координатным плоскостям Oxz и Oyz. Докажем теперь следующее свойство касательной плоскости, которое, по сути дела, и объясняет ее название.

Если линия L целиком лежит на поверхности, то касательная прямая к этой линии в ее точке M_0 лежит в касательной плоскости к поверхности, проведенной через ту же точку. Иначе говоря, если через точку M_0 поверхности провести всевозможные линии, лежащие на поверхности, то касательные к этим линиям в точке M_0

все лежат в одной плоскости — касательной плоскости к поверхности.

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, а линия L параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$; точке M_0 соответствует значение параметра t_0. Условие, что линия целиком лежит на поверхности, запишется так:

$$F[x(t), y(t), z(t)] = 0.$$

Дифференцируя это равенство, справедливое при всех значениях t, по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' = 0.$$

Если обозначить индексом нуль значения производных в точке M_0, то для этой точки последнее равенство примет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_0' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y_0' + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 z_0' = 0. \qquad (**)$$

Значения частных производных $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0$ зависят только от уравнения самой поверхности и выбранной точки M_0; значения же производных x_0', y_0', z_0' зависят от выбора линии L и представляют проекции направляющего вектора касательной к линии L в точке M_0 (см. п. **68**). Равенство (**) показывает, что любой такой касательный вектор перпендикулярен к одному и тому же вектору $\{(F_x')_0, (F_y')_0, (F_z')_0\}$, который мы назвали нормальным вектором к поверхности. (Равенство (**) есть равенство нулю скалярного произведения этих векторов.) Но это и означает, что все касательные прямые к линиям, лежащим на поверхности и проходящим через точку M_0, лежат в одной плоскости — касательной плоскости к поверхности.

120. Пространственные линии как пересечение двух поверхностей. В п. **68** мы изучали параметрические уравнения пространственных линий. Линия в пространстве может быть также задана как линия пересечения двух поверхностей

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0. \qquad (*)$$

Геометрически ясно, что касательной к этой линии в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будет линия пересечения касательных плоскостей к данным поверхностям, проведенным в той же точке. Составляя уравнение этих плоскостей

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z-z_0) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 (z-z_0) = 0,$$

мы получим уравнение искомой касательной как линии пересечения двух плоскостей. Направляющий вектор **T** этой касательной можно

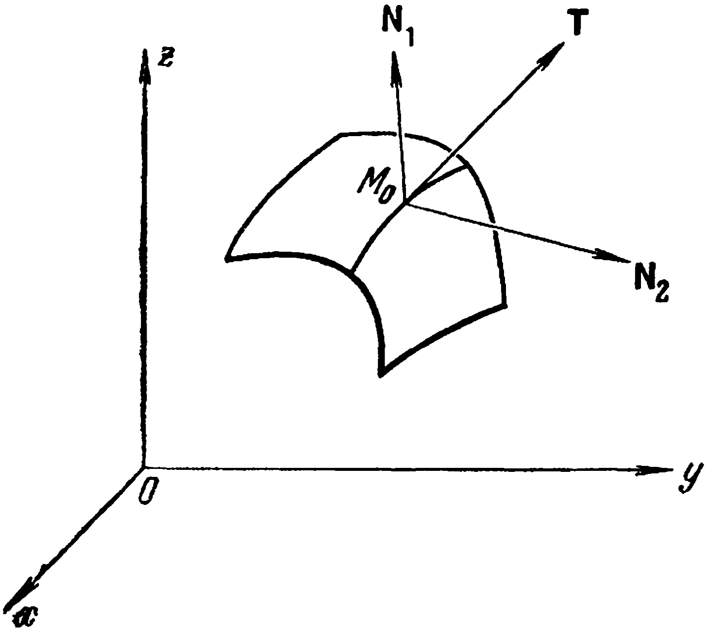

Рис. 143.

найти, взяв векторное произведение нормальных векторов к обеим плоскостям (рис. 143):

$$\mathbf{N}_1\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0\right\} \text{ и } \mathbf{N}_2\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0\right\}.$$

Тогда

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 \end{vmatrix}.$$

Зная направляющий вектор **T** и точку касания M_0, можно переписать уравнения касательной в каноническом виде, а также составить уравнение нормальной плоскости. Записывать эти уравнения в общем виде мы не будем.

Пример. Пусть кривая является линией пересечения двух цилиндров

$$x^2 + y^2 = 10 \quad \text{и} \quad y^2 + z^2 = 25.$$

Составим уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к этой линии в точке (1, 3, 4).

Прежде всего находим проекции векторов $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 2, \ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 6, \ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0$$

и

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 = 0, \ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 = 6, \ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 = 8.$$

Вычислим теперь их векторное произведение:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 48\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.$$

Зная вектор $\mathbf{T}$ и точку касания, составляем искомые уравнения:

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3} \text{ — уравнение касательной,}$$

$$12x - 4y + 3z - 12 = 0 \text{ — уравнение нормальной плоскости.}$$

Чтобы найти длину дуги пространственной линии, заданной уравнениями (*), постараемся разрешить их, например, относительно y и z; тогда эти координаты будут являться некоторыми функциями от x: $y = y(x)$, $z = z(x)$. После этого применим формулу для длины дуги пространственной линии, заданной параметрическими уравнениями (см. п. **102**), положив в ней $t = x$:

$$L = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx,$$

где x_1 и x_2 — абсциссы начальной и конечной точек данной дуги.

Пример. Найти длину дуги линии, заданной уравнениями

$$x^2 - 3y = 0, \qquad 2xy - 9z = 0$$

(линия пересечения параболического цилиндра и гиперболического параболоида), от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(3, 3, 2)$.

Выражая из данных уравнений y и z через x, получим $y = \frac{x^2}{3}$, $z = \frac{2x^3}{27}$. Отсюда

$$L = \int\limits_0^3 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{9} + \frac{4x^4}{81}}\, dx = \int\limits_0^3 \left(1 + \frac{2x^2}{9}\right) dx = \left(x + \frac{2x^3}{27}\right)\Bigg|_0^3 = 5.$$

§ 4. Экстремумы функций нескольких переменных

121. Необходимые условия экстремума. Начнем с рассмотрения функций двух переменных и дадим определение точки экстремума; оно совершенно аналогично соответствующему определению для функций одной переменной (см. п. **60**).

Определение. **Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется *точкой экстремума (максимума или минимума)* функции $z=f(x, y)$, если $f(x_0, y_0)$ есть соответственно наибольшее или наименьшее значение функции $f(x,y)$ в некоторой окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$.**

При этом значение $f(x_0, y_0)$ называется *экстремальным значением* функции (соответственно *максимальным* или *минимальным*). Говорят также, что функция $f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум (или достигает в точке P_0 экстремума).

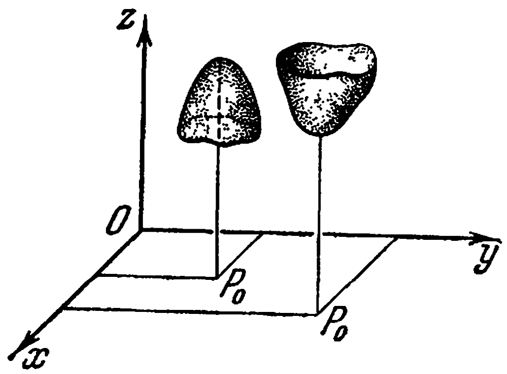

Рис. 144.

Заметим, что в силу определения точка экстремума функции обязательно лежит внутри области определения функции, так что функция определена в некоторой (хотя бы и малой) области, содержащей эту точку. Вид поверхностей, изображающих функции в окрестности точек экстремума, показан на рис. 144.

Установим сначала необходимые условия, при которых функция $z=f(x, y)$ достигает в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремума; будем пока рассматривать дифференцируемые функции.

Необходимый признак экстремума. **Если в точке $P_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:**

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0.$$

Доказательство. Допустим, что функция $z=f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум.

Согласно определению экстремума функция $z=f(x, y)$ при постоянном $y=y_0$, как функция одного x, достигает экстремума при $x=x_0$. Как известно, необходимым условием этого является обращение в нуль производной от функции $f(x, y_0)$ при $x=x_0$, т. е.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0.$$

Аналогично функция $z=f(x, y)$ при постоянном $x=x_0$, как функция одного y, достигает экстремума при $y=y_0$. Значит,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}=0,$$

что и требовалось доказать.

Точка $P_0(x_0, y_0)$, координаты которой обращают в нуль обе частные производные функции $z=f(x, y)$, называется *стационарной точкой функции* $f(x, y)$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x, y)$:

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0(y-y_0)$$

для стационарной точки $P_0(x_0, y_0)$ принимает вид

$$z=z_0.$$

Следовательно, *необходимое условие достижения дифференцируемой функцией $z=f(x, y)$ экстремума в точке $P_0(x_0, y_0)$ геометрически выражается в том, что касательная плоскость к поверхности—графику функции в соответствующей ее точке—параллельна плоскости независимых переменных.*

Для отыскания стационарных точек функции $z=f(x, y)$ нужно приравнять нулю обе ее частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{*}$$

и решить полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Пример. Найдем стационарные точки функции

$$z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2.$$

Система уравнений (*) имеет вид

$$6x^2+y^2+10x=0, \qquad 2xy+2y=0.$$

Из второго уравнения следует, что или $y=0$, или $x=-1$. Подставляя по очереди эти значения в первое уравнение, найдем четыре стационарные точки:

$$M_1(0,\ 0),\ M_2\left(-\frac{5}{3},\ 0\right), \quad M_3(-1,\ 2),\ M_4(-1,\ -2).$$

Какие из найденных точек действительно являются точками экстремума, мы установим в следующем пункте, где будет приведено достаточное условие экстремума.

Иногда удается, и не прибегая к достаточным условиям, выяснить характер стационарной точки функции. Так, если из условия задачи непосредственно следует, что рассматриваемая функция имеет где-то максимум или минимум и при этом системе уравнений (*) удовлетворяет только одна точка (т. е. одна пара значений x, y), то ясно, что эта точка и будет искомой точкой экстремума функции.

Заметим, наконец, что точками экстремума непрерывной функции двух переменных могут быть точки, в которых функция недифференцируема (им соответствуют острия поверхности—графика функции).

Так, например, функция $z=\sqrt{x^2+y^2}$ имеет, очевидно, в начале координат минимум, равный нулю, но в этой точке функция недифференцируема; график этой функции есть круглый конус с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью Oz.

Следовательно, если иметь в виду не только дифференцируемые, но и вообще непрерывные функции, то нужно сказать, что

Точками экстремума могут быть стационарные точки функции и точки, в которых функция недифференцируема.

Вполне аналогично определяется понятие экстремума функции любого числа независимых переменных

$$u=f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)$$

и устанавливаются необходимые условия экстремума. Именно:

Дифференцируемая функция n переменных может иметь экстремумы только при тех значениях x, y, z, ..., t, при которых равны нулю все ее n частных производных первого порядка:

$$f'_x(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0,\quad f'_y(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0,$$
$$f'_z(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0,\ \ldots,\ f'_t(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)=0.$$

Эти равенства образуют систему n уравнений с n неизвестными.

122. Достаточные условия экстремума для функций двух переменных. Так же как и для функций одной переменной, необходимый признак экстремума в случае многих переменных не является достаточным. Это значит, что из равенства нулю частных производных в данной точке вовсе не следует, что эта точка обязательно является точкой экстремума. Возьмем функцию $z=xy$. Ее частные производные $z'_x=y$, $z'_y=x$ равны нулю в начале координат, однако функция экстремума не достигает. В самом деле, функция $z=xy$, будучи равной нулю в начале координат, имеет в любой близости к началу координат как положительные значения (в первом и третьем координатных углах), так и отрицательные (во втором и четвертом координатных углах), и значит, нуль не является ни наибольшим, ни наименьшим значением этой функции.

Достаточные условия экстремума для функций нескольких переменных носят значительно более сложный характер, чем для функций одной переменной. Мы приведем эти условия без доказательства только для функций двух переменных.

Пусть точка $P_0(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $z=f(x, y)$, т. е. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0=0$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0=0$. Вычислим в точке P_0 значения вторых частных производных функции $f(x, y)$ и обозначим их для краткости буквами A, B и C:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0, \qquad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_0, \qquad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0.$$

Если $B^2-AC<0$, то функция $f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум: максимум при $A<0$ и $C<0$ и минимум при $A>0$ и $C>0$ (из условия $B^2-AC<0$ следует, что A и C обязательно имеют одинаковые знаки).

Если $B^2-AC>0$, то точка P_0 не является точкой экстремума.

Если $B^2-AC=0$, то никакого заключения о характере стационарной точки сделать нельзя и требуется дополнительное исследование.

Примеры. 1) В примере п. **121** было установлено, что функция

$$z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$$

имеет четыре стационарные точки:

$$M_1(0,\ 0), M_2\left(-\frac{5}{3},\ 0\right), \quad M_3(-1,\ 2), \quad M_4(-1,\ -2).$$

Вторые частные производные данной функции равны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x+10, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x+2.$$

В точке M_1 имеем: $A=10$, $B=0$, $C=2$. Здесь $B^2-AC=-20<0$; значит, точка M_1 является точкой экстремума, и так как A и C положительны, то точкой минимума.

В точке M_2 соответственно будет $A=-10$, $B=0$, $C=-\frac{4}{3}$; это точка максимума. Предоставляем читателю проверить, что точки M_3 и M_4 не являются точками экстремума (в них $B^2-AC>0$).

2) Найдем точки экстремума функции

$$z=x^2-y^2.$$

Приравнивая частные производные нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y=0,$$

находим одну стационарную точку — начало координат. Здесь $A=2$, $B=0$, $C=-2$. Следовательно, $B^2-AC>0$ и точка $(0, 0)$ не является точкой экстремума.

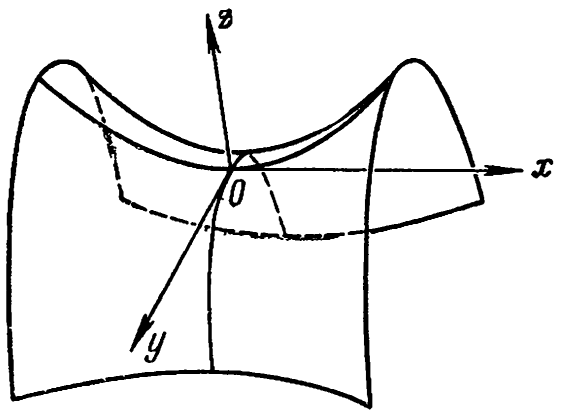

Рис. 145.

Уравнение $z=x^2-y^2$ есть уравнение гиперболического параболоида; из рис. 145 ясно видно, что стационарная точка $(0, 0)$ не является точкой экстремума.

123. Задачи о наибольших и наименьших значениях. Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=f(x, y)$ в некоторой области (рассматриваемой вместе со своей границей). Если какое-либо из этих значений достигается функцией внутри области, то оно, очевидно, является экстремальным. Но может случиться, что наибольшее или наименьшее значение принимается функцией в некоторой точке, лежащей на границе области.

Из сказанного следует правило:

Для того чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции $z=f(x, y)$ в замкнутой области, нужно найти все максимумы или минимумы функции, достигаемые внутри этой области, а также наибольшее или наименьшее значение функции на границе области. Наибольшее из всех этих чисел и будет искомым наибольшим значением, а наименьшее — наименьшим.

Пример. Найдем точку на плоскости Oxy, сумма квадратов расстояний которой до трех точек $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(0, 1)$ имеет наименьшее значение, и точку треугольника с вершинами в P_1, P_2, P_3, сумма квадратов расстояний которой до вершин имеет наибольшее значение.

Возьмем на плоскости какую-нибудь точку $P(x, y)$. Сумма квадратов ее расстояний до заданных точек P_1, P_2, P_3 (обозначим эту сумму через z) выражается так:

$$z=x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+x^2+(y-1)^2$$

или

$$z=3x^2+3y^2-2x-2y+2.$$

Первая часть задачи сводится к нахождению наименьшего значения этой функции во всей плоскости, вторая часть — к нахождению наибольшего значения функции при условии, что точка $P(x, y)$ принадлежит замкнутой области D, ограниченной треугольником $P_1P_2P_3$.

Найдем экстремумы функции $z=3x^2+3y^2-2x-2y+2$. Из уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x-2=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=6y-2=0$$

получаем

$$x=\frac{1}{3}, \quad y=\frac{1}{3}.$$

Значит, существует лишь одна стационарная точка $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Во всей плоскости функция не имеет наибольшего значения, так как ясно, что существуют точки, для которых указанная сумма больше любого наперед заданного числа. А так как, с другой стороны, очевидно, что эта сумма должна достигать наименьшего значения, то именно стационарная точка P только и может быть точкой, в которой функция получает свое наименьшее значение $\left(=1\frac{1}{3}\right)$. Между прочим, точка $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ служит центром тяжести треугольника с вершинами в P_1, P_2, P_3.

Переходим ко второй части задачи. Вследствие того, что заданная функция не имеет максимума, ее наибольшим значением в области D является наибольшее из значений, принимаемых на границе, т. е. на сторонах треугольника.

На стороне P_1P_2 имеем $y=0$ и, значит,

$$z=3x^2-2x+2;$$

эта функция достигает в интервале $[0, 1]$ наибольшего значения $(=3)$ при $x=1$, т. е. в точке P_2.

На стороне P_1P_3 имеем $x=0$ и, значит,

$$z=3y^2-2y+2;$$

наибольшее значение этой функции в интервале $[0, 1]$ также равно 3 и достигается при $y=1$, т. е. в точке P_3.

Наконец, на стороне P_2P_3 имеем $x+y=1$ и, значит,

$$z=3x^2+3(1-x)^2-2x-2(1-x)+2=6x^2-6x+3;$$

эта функция достигает в интервале $[0, 1]$ наибольшего значения $(=3)$ при $x=0$ и при $x=1$, т. е. наибольшее значение на стороне P_2P_3 функция z получает в тех же точках P_2 и P_3. Итак, во второй части задачи искомых точек треугольника имеется две: P_2 и P_3. Среди всех точек треугольника сумма квадратов расстояний этих точек от вершин P_1, P_2, P_3 имеет наибольшее значение.

124*. Условные экстремумы. При отыскании экстремумов функций нескольких переменных часто возникают задачи, связанные с так называемым *условным экстремумом*. Разъясним это понятие на примере функции двух переменных.

Пусть задана функция $z=f(x, y)$ и линия L на плоскости Oxy. Задача состоит в том, чтобы на линии L найти такую точку $P(x, y)$, в которой значение функции $f(x, y)$ является наибольшим или наименьшим по сравнению со значениями этой функции в точках линии L, находящихся вблизи точки P. Такие точки P называются *точками условного экстремума функции* $f(x, y)$ *на линии* L. В отличие от обычной точки экстремума значение функции в точке условного экстремума сравнивается со значениями функции не во всех точках некоторой ее окрестности, а только в тех, которые лежат на линии L.

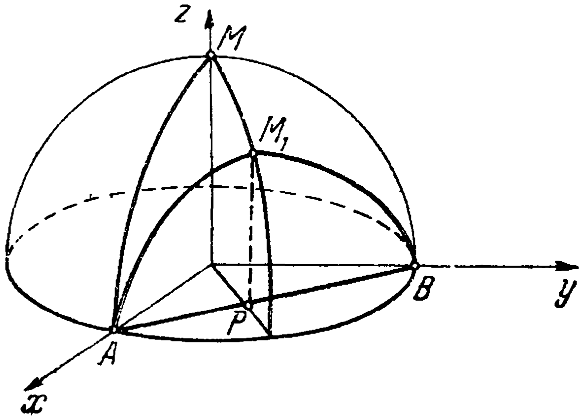

Рис. 146.

Совершенно ясно, что точка обычного экстремума (говорят также безусловного экстремума) является и точкой условного экстремума для любой линии, проходящей через эту точку. Обратное же, разумеется, неверно: точка условного экстремума может и не быть точкой обычного экстремума. Поясним сказанное простым примером. Графиком функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ является верхняя полусфера (рис. 146). Эта функция имеет максимум в начале координат; ему соответствует вершина M полусферы. Если линия L есть прямая, проходящая через точки A и B (ее уравнение $x+y-1=0$), то геометрически ясно, что для точек этой линии наибольшее значение функции достигается в точке $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, лежащей посередине между точками A и B. Это и есть точка условного экстремума (максимума) функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ на данной линии; ей соответствует точка M_1 на полусфере, и из рисунка видно, что ни о каком обычном экстремуме здесь не может быть речи.

Отметим, что в заключительной части задачи об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области (см. п. **123**) нам приходится находить экстремальные значения функции на границе этой области, т. е. на какой-то линии, и тем самым решать задачу на условный экстремум.

Приступим теперь к практическому отысканию точек условного экстремума функции $z=f(x, y)$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y)=0$. Это последнее соотношение будем называть *уравнением связи*. Если из уравнения связи y можно явно выразить через x: $y=\psi(x)$, то, подставляя в выражение функции $z=f(x, y)$ вместо y функцию $\psi(x)$, мы получим функцию одной переменной

$$z=f[x, \psi(x)]=\Phi(x).$$

Найдя значения x, при которых эта функция достигает экстремума, и определив затем из уравнения связи соответствующие им значения y, мы и получим искомые точки условного экстремума.

Так в вышеприведенном примере из уравнения связи $x+y-1=0$ имеем $y=1-x$. Отсюда

$$z=\sqrt{1-x^2-(1-x)^2}=\sqrt{2x-x^2}.$$

Легко проверить, что z достигает максимума при $x=0{,}5$; но тогда из уравнения связи $y=0{,}5$, и мы получаем как раз точку P, найденную из геометрических соображений.

Очень просто решается задача на условный экстремум и тогда, когда уравнение связи можно представить параметрическими уравнениями: $x=x(t)$, $y=y(t)$. Подставляя выражения для x и y в данную функцию, снова приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной.

Если уравнение связи имеет более сложный вид и нам не удается ни явно выразить одну переменную через другую, ни заменить его параметрическими уравнениями, то задача отыскания условного экстремума становится более трудной. Будем по-прежнему считать, что в выражении функции $z=f(x, y)$ переменная y является функцией от x, определенной неявно уравнением связи $\varphi(x, y)=0$. Полная производная от функции $z=f(x, y)$ по x (см. п. **116**, I) равна

$$\frac{dz}{dx}=f'_x(x, y)+f'_y(x, y)\frac{dy}{dx}=f'_x(x, y)-\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)}f'_y(x, y),$$

где производная y' найдена по правилу дифференцирования неявной функции (п. **118**). В точках условного экстремума найденная полная производная должна равняться нулю; это дает одно уравнение, связывающее x и y. Так как они должны удовлетворять еще и уравнению связи, то мы получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$f'_x-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}f'_y=0, \qquad \varphi(x, y)=0.$$

Преобразуем эту систему к гораздо более удобной, записав первое уравнение в виде пропорции и введя новую вспомогательную неизвестную λ:

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda \tag{*}$$

(знак минус перед λ поставлен для удобства). От этих равенств легко перейти к следующей системе:

$$f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \tag{**}$$

которая вместе с уравнением связи $\varphi(x, y) = 0$ образует систему трех уравнений с неизвестными x, y и λ.

Уравнения (**) легче всего запомнить при помощи следующего правила: *для того чтобы найти точки, которые могут быть точками условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при уравнении связи $\varphi(x, y) = 0$, нужно образовать вспомогательную функцию*

$$\Phi(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где λ — некоторая постоянная, и составить уравнения для отыскания точек экстремума этой функции.

Указанная система уравнений доставляет, как обычно, только необходимые условия, т. е. не всякая пара значений x и y, удовлетворяющая этой системе, обязательно является точкой условного экстремума. Достаточные условия для точек условного экстремума мы приводить не будем; очень часто конкретное содержание задачи само подсказывает, чем является найденная точка. Описанный прием решения задач на условный экстремум называется *методом множителей Лагранжа.*

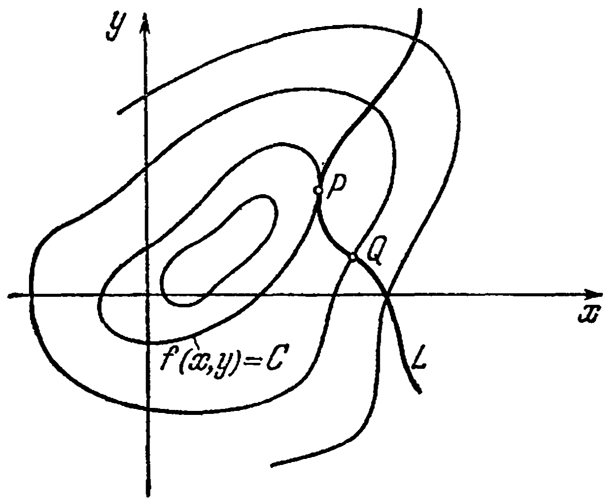

Рис. 147.

Метод Лагранжа имеет наглядный геометрический смысл, который мы сейчас и выясним. Предположим, что на рис. 147 изображены линии уровня функции $z = f(x, y)$ (см. п. **108**) и линия L, на которой отыскиваются точки условного экстремума. Если в точке Q линия L пересекает линию уровня, то эта точка не может быть точкой условного экстремума, так как по одну сторону от линии уровня функция $f(x, y)$ принимает бóльшие значения, а по другую — мéньшие. Если же в точке P линия L не пересекает соответствующую линию уровня и, значит, в некоторой окрестности этой точки лежит по одну сторону от линии уровня, то точка P будет как раз являться точкой условного экстремума. В такой точке линия L и линия уровня $f(x, y)=C$ касаются друг друга (мы предполагаем, что линии гладкие) и угловые коэффициенты касательных к ним должны быть равны. Из уравнения связи $\varphi(x, y)=0$ имеем $y'=-\varphi'_x/\varphi'_y$, а из уравнения линии уровня $y'=-f'_x/f'_y$. Приравнивая производные и произведя простейшее преобразование, мы и получим уравнения (*).

Приведенное рассуждение может потерять силу, если линия уровня такова, что во всех ее точках $f'_x=0$, $f'_y=0$. Советуем рассмотреть, например, функцию $z=4-x^2$ и линию уровня $x=0$, отвечающую значению $z=4$.

Пример. Найти наибольшее значение функции $z=xy$, если x и y положительны и подчиняются уравнению связи $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$. Здесь уравнение связи простое (оно представляет эллипс) и можно было бы сразу прийти к отысканию экстремума функции одной переменной, выразив y через x или взяв параметрические уравнения эллипса. Рекомендуем читателю сделать это самостоятельно; мы же для иллюстрации решим пример методом Лагранжа.

Составим вспомогательную функцию

$$\Phi(x, y)=xy+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}\right).$$

(Постоянное слагаемое в левой части уравнения связи при дифференцировании дает нуль, и поэтому мы его просто не пишем.) Приравнивая частные производные по x и по y нулю, получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=y+\frac{\lambda x}{4}=0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=x+\lambda y=0.$$

Исключая λ, приходим к уравнению $4y^2-x^2=0$, решая которое совместно с уравнением связи находим $x=2$ и $y=1$ (по условию задачи x и y положительны).

Функция $z=xy$ при рассматриваемых значениях x и y положительна и в точках пересечения эллипса с осями координат $(2\sqrt{2}, 0)$ и $(0, \sqrt{2})$ равна нулю. Поэтому найденная единственная точка $P(2, 1)$ будет точкой условного максимума; в этой точке $z_{\max}=2$. Легко проверить, что в точке P эллипс касается линии уровня функции $z=xy$, проходящей через эту точку, т. е. гиперболы $xy=2$.

Задачи на условный экстремум для функций трех переменных допускают большее разнообразие. Пусть задана функция $u=$ $=f(x, y, z)$ и переменные x, y и z связаны одним уравнением

$\varphi(x, y, z) = 0$; это есть уравнение некоторой поверхности. Тогда точка условного экстремума является такой точкой поверхности, в которой функция принимает наибольшее или наименьшее значение по сравнению с ее значениями во всех близлежащих точках этой же поверхности.

Можно искать условный экстремум функции $f(x, y, z)$ и при двух уравнениях связи: $\varphi_1(x, y, z) = 0$ и $\varphi_2(x, y, z) = 0$ [1]. Эти уравнения определяют линию в пространстве. Таким образом, задача сводится к отысканию такой точки линии, в которой функция принимает экстремальное значение, причем сравниваются значения функции только в точках рассматриваемой линии.

Метод множителей Лагранжа в случае двух уравнений связи применяется следующим образом: строим вспомогательную функцию

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) + \lambda_2\varphi_2(x, y, z),$$

где λ_1 и λ_2 — новые дополнительные неизвестные, и составляем систему уравнений для отыскания экстремумов этой функции

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0.$$

Добавляя сюда два уравнения связи, получаем систему пяти уравнений с пятью неизвестными x, y, z, λ_1, λ_2. Искомыми точками условного экстремума могут быть только те, координаты x, y, z которых являются решениями этой системы.

В самом общем виде задача ставится так: требуется найти экстремумы функции n переменных $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ при условии, что эти переменные подчинены m уравнениям связи ($m < n$)

$$\varphi_1(x, y, z, \ldots, t) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_m(x, y, z, \ldots, t) = 0.$$

Вспомогательная функция зависит от n переменных и содержит m дополнительных неизвестных

$$\Phi = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m.$$

Уравнения для отыскания точек экстремума этой функции и уравнения связи составят систему $m + n$ уравнений, из которой определяются координаты $x, y, z, \ldots, t$ возможных точек условного экстремума.

Примеры. 1) Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объема, если его полная поверхность равна заданной величине S.

[1]) Рекомендуем читателю подумать, почему при большем числе уравнений связи задача может потерять смысл.

Обозначим стороны параллелепипеда через x, y, z. Тогда требуется найти наибольшее значение функции $V=xyz$ при условии, что $xy+yz+zx=\frac{S}{2}$.

Вспомогательная функция $\Phi(x, y, z)=xyz+\lambda(xy+yz+zx)$. Уравнения для отыскания точек экстремума этой функции имеют вид

$$yz+\lambda(y+z)=0, \quad xz+\lambda(x+z)=0, \quad xy+\lambda(x+y)=0.$$

Вычитая эти уравнения друг из друга, получим

$$(z+\lambda)(y-x)=0, \ (x+\lambda)(z-y)=0, \ (y+\lambda)(x-z)=0.$$

Отсюда ясно, что $x=y=z$, т. е. что искомый параллелепипед — куб. Размеры его определим из уравнения связи:

$$x=y=z=\sqrt{\frac{S}{6}} \quad \text{и} \quad V=\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}.$$

2) Найти наибольшее расстояние от начала координат до точек линии пересечения параболоида вращения $z=x^2+y^2$ с плоскостью $x+2y-z=0$. (Наименьшее расстояние равно нулю, так как линия пересечения проходит через начало координат.)

Расстояние r от начала координат до точки (x, y, z) равно $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Наибольшие значения корня и подкоренного выражения достигаются в одной и той же точке; поэтому будем искать условный максимум функции $u=x^2+y^2+z^2$ при двух уравнениях связи

$$\varphi_1(x, y, z)\equiv x^2+y^2-z=0 \quad \text{и} \quad \varphi_2(x, y, z)\equiv x+2y-z=0.$$

Составляя вспомогательную функцию

$$\Phi=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+2y-z)$$

и приравнивая нулю ее частные производные, получим

$$2x+2\lambda_1x+\lambda_2=0, \quad 2y+2\lambda_1y+2\lambda_2=0, \quad 2z-\lambda_1-\lambda_2=0.$$

Выразим отсюда координаты x, y, z через вспомогательные неизвестные

$$x=-\frac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}, \quad y=-\frac{\lambda_2}{1+\lambda_1}, \quad z=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}.$$

Подставляя в уравнения связи

$$\frac{5}{4}\left(\frac{\lambda_2}{1+\lambda_1}\right)^2=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \quad -\frac{5}{2}\left(\frac{\lambda_2}{1+\lambda_1}\right)=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$$

и приравнивая левые части обоих уравнений, получаем квадратное уравнение относительно $\frac{\lambda_2}{1+\lambda_1}$. Его первый корень приводит к значениям $\lambda_2=0$ и $\lambda_1=0$; им соответствует начало координат — точка минимума. Второй корень равен $\frac{\lambda_2}{1+\lambda_1}=-2$. Даже не отыскивая λ_1 и λ_2, находим $x=1$, $y=2$ и $z=5$. Ясно, что эта точка наиболее удалена от начала координат и $r_{\max}=\sqrt{30}$.

§ 5. Скалярное поле

125. Скалярное поле. Поверхности уровня. Предположим, что в каждой точке P некоторой области D нам задано значение скалярной физической величины u, т. е. такой величины, которая полностью характеризуется своим числовым значением. Например, это может быть температура точек неравномерно нагретого тела, плотность распределения электрических зарядов в изолированном наэлектризованном теле, потенциал электрического поля и т. д. При этом u называется *скалярной функцией точки*; записывается это так: $u=u(P)$.

Область D, в которой определена функция $u(P)$, может совпадать со всем пространством, а может являться некоторой его частью.

Определение. **Если в области D задана скалярная функция точки $u(P)$, то говорят, что в этой области задано *скалярное поле*.**

Мы будем считать, что скалярное поле *стационарное*, т. е. что величина $u(P)$ не зависит от времени t. Заметим, впрочем, что в будущем (см. п. **157**) читателю придется сталкиваться и с нестационарными полями. Тогда величина u будет зависеть не только от точки P, но и от времени t.

Если физическая величина векторная, то ей будет соответствовать *векторное поле*, например силовое поле, электрическое поле напряженности, магнитное поле и др. Векторные поля будут изучаться в § 3 главы IX.

Если скалярное поле отнесено к системе координат $Oxyz$, то задание точки P равносильно заданию ее координат x, y, z; и тогда функцию $u(P)$ можно записать в обычном виде функции трех переменных: $u(x, y, z)$. Мы пришли, таким образом, к физическому толкованию функций трех переменных.

Определение. **Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция u принимает постоянное значение, т. е.**

$$u(x, y, z)=C.$$

В курсе физики при рассмотрении поля потенциала поверхности уровня называют обычно *эквипотенциальными* поверхностями (т. е. поверхностями равного потенциала).

Уравнение поверхности уровня, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, записывается так:

$$u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0).$$

Если в частном случае скалярное поле плоское, т. е. мы изучаем распределение значений физической величины в какой-то плоской области, то функция u зависит от двух переменных, например x и y. Линиями уровня этого поля будут линии уровня функции $u(x, y)$ (см. п. **108**, I):

$$u(x, y) = C.$$

126. Производная по направлению. Важной характеристикой скалярного поля является скорость изменения поля в заданном направлении.

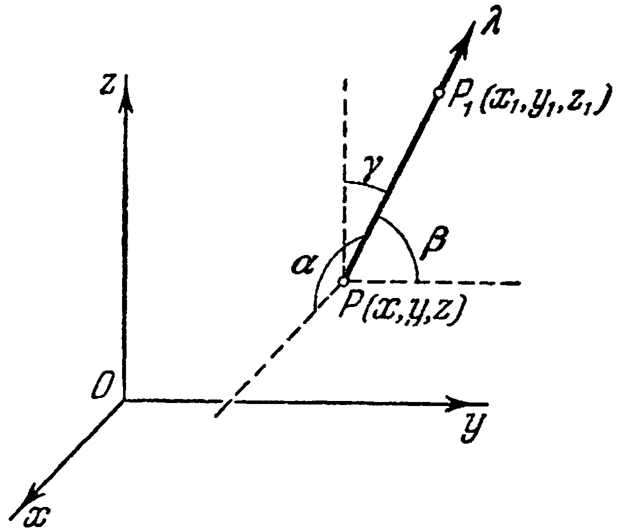

Рис. 148.

Пусть задано скалярное поле, т. е. задана функция $u(x, y, z)$. Возьмем точку $P(x, y, z)$ и какой-нибудь луч λ, из нее выходящий. Направление этого луча зададим углами α, β, γ, которые он образует с направлениями осей Ox, Oy, Oz (рис. 148). Если $\mathbf{e}_\lambda$ — единичный вектор, направленный по лучу λ, то его проекциями будут направляющие косинусы

$$\mathbf{e}_\lambda\{\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma\}.$$

Пусть точка $P_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на луче λ; расстояние PP_1 обозначим через ρ. Проекции вектора $\overline{PP_1}$ на оси координат будут, с одной стороны, равны $\rho\cos\alpha$, $\rho\cos\beta$, $\rho\cos\gamma$, а с другой стороны, — разностям $x_1 - x$, $y_1 - y$ и $z_1 - z$. Следовательно,

$$x_1 = x + \rho\cos\alpha, \quad y_1 = y + \rho\cos\beta, \quad z_1 = z + \rho\cos\gamma.$$

Рассмотрим теперь приращение функции u при переходе из точки P в точку P_1:

$$u(P_1) - u(P) = u(x + \rho\cos\alpha, \quad y + \rho\cos\beta, \ z + \rho\cos\gamma) - u(x, \ y, \ z).$$

Если точка P_1 будет изменять свое положение на луче λ, то в выражении для разности $u(P_1) - u(P)$ будет меняться только величина ρ. Составим отношение

$$\frac{u(P_1) - u(P)}{\rho}$$

и перейдем к пределу при $\rho \to 0$, предполагая, что этот предел существует.

Определение. **Предел**

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u(P_1)-u(P)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{u(x+\rho\cos\alpha,\ y+\rho\cos\beta,\ z+\rho\cos\gamma)-u(x,y,z)}{\rho} \qquad (*)$$

называется производной от функции $u(x, y, z)$ по направлению λ в точке P.

Этот предел будем обозначать символом $\frac{\partial u}{\partial\lambda}$ или $u'_\lambda(x, y, z)$. Величина его зависит от выбранной точки $P(x, y, z)$ и от направления луча λ, т. е. от α, β и γ.

Если точка P фиксирована, то величина производной u'_λ будет зависеть только от направления луча λ.

Из определения производной по направлению следует, что если направление λ совпадает с положительным направлением оси Ox, т. е. $\alpha=0$, $\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$, то предел $(*)$ будет просто равен частной производной от функции $u(x, y, z)$ по x:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u(x+\rho,\ y,\ z)-u(x,\ y,\ z)}{\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогичную картину мы получим, если направление λ будет совпадать с направлениями осей Oy и Oz.

Подобно тому как частные производные u'_x, u'_y и u'_z характеризуют скорость изменения функции u в направлении осей координат (см. п. **109**), так и производная по направлению u'_λ будет являться скоростью изменения функции $u(x, y, z)$ в точке P по направлению луча λ. Абсолютная величина производной u'_λ по направлению λ определяет величину скорости, а знак производной — характер изменения функции u (возрастание или убывание).

Вычисление производной по направлению производится при помощи следующей теоремы:

Теорема. **Если функция $u(x, y, z)$ дифференцируема, то ее производная u'_λ по любому направлению λ существует и равна**

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (**)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы луча λ.

Доказательство. Так как функция $u(x, y, z)$ дифференцируема, то ее полное приращение можно записать в виде (см.

п. 110, I)

$$\Delta u = u(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - u(x,\ y,\ z) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial y}{\partial z}\Delta z + \varepsilon,$$

где ε — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Полагая $\Delta x = \rho\cos\alpha$, $\Delta y = \rho\cos\beta$, $\Delta z = \rho\cos\gamma$, представим разность $u(P_1) - u(P)$ в виде

$$u(P_1) - u(P) = \frac{\partial u}{\partial x}\rho\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\rho\cos\gamma + \varepsilon,$$

причем $\frac{\varepsilon}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$. Отношение $\frac{u(P_1)-u(P)}{\rho}$ будет равно

$$\frac{u(P_1)-u(P)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Так как значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точке P, а также α, β и γ от ρ не зависят, то, переходя к пределу при $\rho \to 0$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \lim_{\rho \to 0} \frac{u(P_1)-u(P)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Из этой формулы непосредственно следует сделанное выше замечание, что если направление λ совпадает с положительным направлением одной из осей координат, то производная по этому направлению равна соответствующей частной производной, например, если $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Из формулы (**) видно, что производная по направлению λ', противоположному направлению λ, равна *производной по направлению λ, взятой с обратным знаком*. Действительно, при перемене направления углы α, β и γ изменятся на π и

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda'} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\alpha+\pi) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\beta+\pi) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\gamma+\pi) = -\frac{\partial u}{\partial \lambda}.$$

Это означает, что при перемене направления на противоположное абсолютная величина скорости изменения функции u не меняется, а изменяется только характер ее изменения; если, например, в направлении λ функция возрастает, то в направлении λ' она убывает, и наоборот.

Пример. Дана функция $u = xyz$. Найдем ее производную в точке $P(5,\ 1,\ 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $Q(7,\ -1,\ 3)$.

Находим частные производные функции $u = xyz$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

и вычисляем их значения в точке P:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P = 2, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = 10, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P = 5.$$

Так как проекции вектора $\overline{PQ}$ равны 2, -2 и 1, то его направляющими косинусами будут

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{-2}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 2\cdot\frac{2}{3} + 10\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 5\cdot\frac{1}{3} = -\frac{11}{3}.$$

Знак минус указывает, что в данном направлении функция u убывает.

Если поле плоское, то направление луча λ вполне определяется углом α его наклона к оси абсцисс. Формулу для производной по направлению в случае плоского поля можно получить из общей формулы, положив $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

Если $\alpha = 0$, то $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}$, а если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial y}$.

127. Градиент. Рассмотрим снова формулу для производной по направлению

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Вторые множители в каждом слагаемом являются, как мы уже отмечали, проекциями единичного вектора $\mathbf{e}_\lambda$, направленного по лучу λ:

$$\mathbf{e}_\lambda\,\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.$$

Возьмем теперь вектор, проекциями которого на оси координат будут служить значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ в выбранной точке $P(x, y, z)$. Назовем этот вектор *градиентом* функции $u(x, y, z)$ и будем обозначать его символами $\operatorname{grad} u$ или ∇u.

Определение. ***Градиентом*** **функции $u(x, y, z)$ называется вектор, проекциями которого служат значения частных производных этой функции, т. е.**

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Подчеркнем, что проекции градиента зависят от выбора точки $P(x, y, z)$ и изменяются с изменением координат этой точки. Таким образом, каждой точке скалярного поля, определяемого функцией поля $u(x, y, z)$, соответствует определенный вектор — градиент этой функции. Отметим, что градиент линейной функции $u = ax + by + cz + d$ есть постоянный вектор: $\operatorname{grad} u = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Пользуясь определением градиента, формуле для производной по направлению можно придать такой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{e}_\lambda. \qquad (*)$$

Следовательно:

Производная функции по данному направлению равна скалярному произведению градиента функции на единичный вектор этого направления.

Так как скалярное произведение равно модулю одного вектора, умноженному на проекцию другого вектора на направление первого, то можно еще сказать, что

Производная функции по данному направаению равна проекции градиента функции на направление дифференцирования, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |\operatorname{grad} u| \cos \varphi,$$

где φ — угол между вектором $\operatorname{grad} u$ и лучом λ (рис. 149). Отсюда сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т. е. при $\varphi = 0$. Это наибольшее значение равно $|\operatorname{grad} u|$.

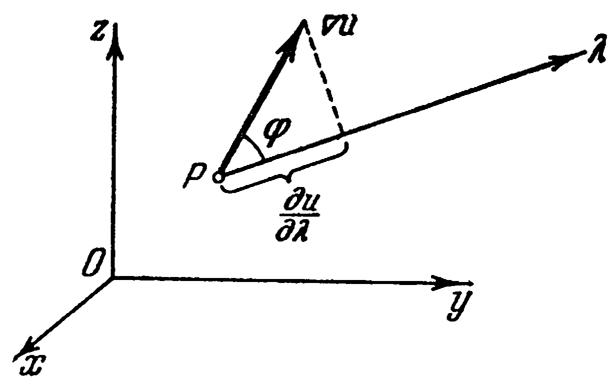

Рис. 149.

Итак, $|\operatorname{grad} u|$ есть наибольшее возможное значение производной u'_λ в данной точке P, а направление $\operatorname{grad} u$ совпадает с направлением луча, выходящего из точки P, вдоль которого функция меняется быстрее всего, т. е. направление градиента есть направление наискорейшего возрастания функции. Ясно, что в противоположном направлении функция u будет быстрее всего убывать.

Докажем теперь теорему, устанавливающую связь между направлением градиента функции и поверхностями уровня скалярного поля.

Теорема. **Направление градиента функции $u(x, y, z)$ в каждой точке совпадает с направлением нормали к поверхности уровня скалярного поля, проходящей через эту точку** (рис. 150).

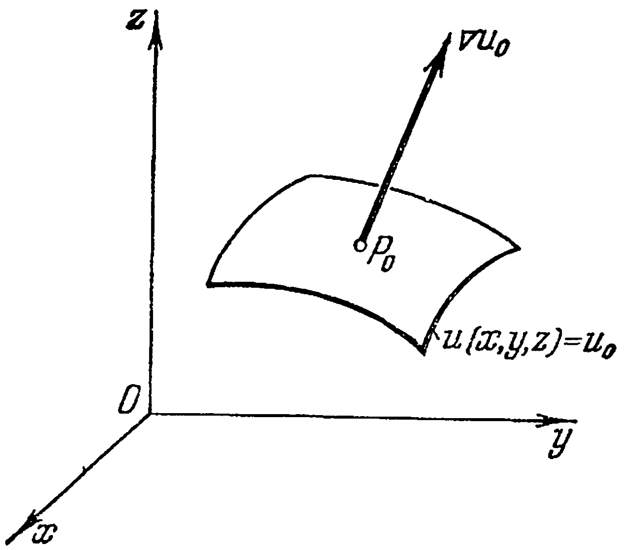

Рис. 150.

Доказательство. Выберем произвольную точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку P_0, запишется в виде $u(x, y, z) = u_0$, где $u_0 = u(x_0, y_0, z_0)$.

Составим уравнение нормали к этой поверхности в точке P_0 (см. п. **119**):

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}.$$

Отсюда и следует, что направляющий вектор нормали, имеющий проекции $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$, является градиентом функции $u(x, y, z)$ в точке P_0, что и требовалось доказать.

Таким образом, градиент в каждой точке перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня, проходящей через данную точку, т. е. его проекция на эту плоскость равна нулю. Следовательно:

Производная по любому направлению, касательному к поверхности уровня, проходящей через данную точку, равна нулю.

Укажем теперь некоторые свойства градиента функции, часто облегчающие его вычисление.

1) $\operatorname{grad}(u_1 + u_2) = \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{grad} u_2$.

2) $\operatorname{grad} Cu_1 = C \operatorname{grad} u_1$, где C — постоянная.

Проверку этих свойств рекомендуем сделать читателю самостоятельно.

3) $\operatorname{grad} u_1 u_2 = u_2 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{grad} u_2$. В самом деле,

$$\operatorname{grad} u_1 u_2 = \frac{\partial (u_1 u_2)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial (u_1 u_2)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial (u_1 u_2)}{\partial z}\mathbf{k} =$$

$$= u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\mathbf{k}\right) + u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\mathbf{k}\right) =$$

$$= u_2 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{grad} u_2.$$

4) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$. Действительно,

$$\operatorname{grad} f(u) = \frac{\partial}{\partial x}[f(u)]\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}[f(u)]\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}[f(u)]\,\mathbf{k} =$$

$$= f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k} = f'(u) \operatorname{grad} u.$$

Перечисленные свойства градиента показывают, что правила его отыскания совпадают с правилами отыскания производной функции.

Примеры. 1) Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от точки до начала координат. Тогда

$$\operatorname{grad} r = \frac{\partial r}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\,\mathbf{k} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

$\operatorname{grad} r$ направлен по радиусу-вектору $\mathbf{r}$, и модуль его равен единице.

2) Пусть скалярное поле определено функцией $\frac{q}{r}$, где r определено в примере 1. Тогда по свойству 4)

$$\operatorname{grad}\frac{q}{r} = -\frac{q}{r^2}\operatorname{grad} r = -\frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

В плоском поле $u = u(x, y)$ градиент

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

лежит в плоскости Oxy и перпендикулярен к линии уровня.

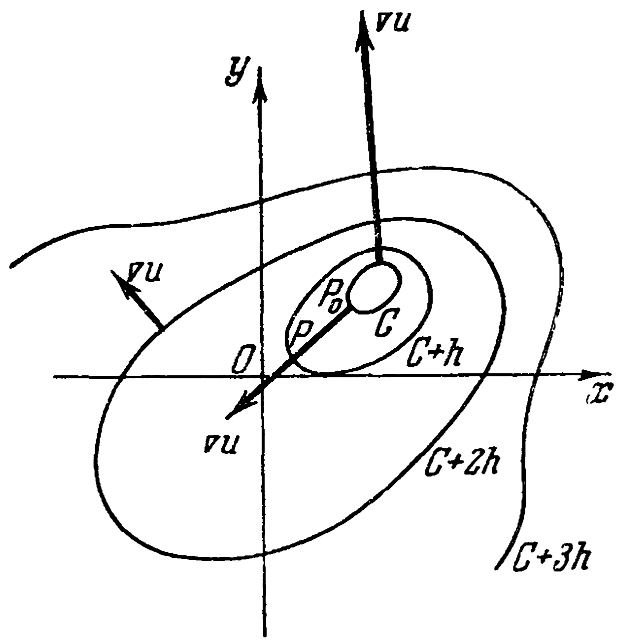

Рис. 151.

Если в плоском поле построена достаточно густая сетка линий уровня (рис. 151), то можно с некоторым приближением графически определить модуль и направление градиента. Направление градиента будет перпендикулярно к линии уровня. Производная в этом направлении будет при достаточно малом h приближенно равна

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} \approx \frac{u(P) - u(P_0)}{P_0P} = \frac{h}{P_0P},$$

где P_0 — точка линии уровня $u(x, y) = C$, а P — точка линии уровня $u(x, y) = C + h$. Величина h известна, а длина отрезка P_0P может быть измерена на чертеже как расстояние по нормали между соседними линиями уровня. Производная же по направлению градиента равна его модулю, и поэтому

$$|\operatorname{grad} u| \approx \frac{h}{P_0P}.$$

Построение $\operatorname{grad} u$ изображено на рис. 151.

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется функцией двух независимых переменных? областью определения такой функции?

2. Описать табличный и аналитический способы задания функции двух независимых переменных.

3. Что называется графиком функции двух независимых переменных? Описать графическое задание такой функции.

4. Описать метод изучения функций двух и многих независимых переменных посредством функций одной независимой переменной. Что называется линией уровня функции $z=f(x, y)$?

5. Что называется пределом функции $z=f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$?

6. Дать определение непрерывности функции двух независимых переменных в точке и в области. Привести примеры разрывных функций.

7. Дать определение частной производной функции двух независимых переменных по одной из них. Распространить на функции многих независимых переменных.

8. Каков геометрический смысл частных производных функции $z=f(x, y)$ в системе декартовых координат?

9. Что называется частным приращением и частным дифференциалом по x функции $z=f(x, y)$? Как выражается частный дифференциал функции через ее частную производную?

10. Каков геометрический смысл частных дифференциалов функции $z=f(x, y)$ в системе декартовых координат?

11. Что называется полным приращением и полным дифференциалом функции $z=f(x, y)$? Как выражается полный дифференциал функции через ее частные производные?

12*. Какая функция нескольких переменных называется дифференцируемой? Сформулировать и доказать достаточное условие дифференцируемости.

13. Что называется касательной плоскостью к поверхности в данной ее точке? Вывести уравнение касательной плоскости.

14. Каков геометрический смысл полного дифференциала функции $z=f(x, y)$ в системе декартовых координат?

15. Как применяется полный дифференциал функции для приближенного вычисления ее значений?

16. Вывести формулу для предельной абсолютной ошибки функции нескольких переменных.

17. Вывести формулы для предельных относительных ошибок произведения и частного.

18. Что называется частной производной n-го порядка функции двух независимых переменных?

19. Сформулировать теорему о равенстве вторых смешанных производных.

20. Распространить определение частной производной n-го порядка и теорему о независимости ее от порядка дифференцирования на функции многих независимых переменных.

21. Дать определение полного дифференциала второго порядка функции двух переменных и указать формулу для его отыскания.

22. Сформулировать необходимое и достаточное условия того, чтобы выражение $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ было полным дифференциалом. Привести доказательства этих условий. Сформулировать соответствующие условия для функции трех переменных.

23. Вывести правило дифференцирования сложной функции.

24. Что называется полной производной?

25. В чем состоит свойство инвариантности вида полного дифференциала функции нескольких переменных?

26. Перечислить основные правила для отыскания дифференциала функции любого числа независимых переменных.

27. Сформулировать теорему существования неявной функции.

28. В чем состоит правило дифференцирования неявно заданной функции?

29. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением в общем виде в системе декартовых координат.

30. Как составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой, заданной пересечением двух поверхностей?

31. Дать определение точки экстремума (максимума и минимума) функции двух переменных.

32. В чем состоит необходимый признак экстремума функции двух независимых переменных? Каков его геометрический смысл?

33. Сформулировать достаточные условия экстремума для функции двух переменных.

34. Описать способ отыскания наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в заданной замкнутой области.

35*. Дать определение точки условного экстремума функции $f(x, y)$ на линии L.

36*. Указать способы отыскания точек условного экстремума. Сформулировать метод множителей Лагранжа и объяснить его геометрический смысл.

37*. Сформулировать задачи на условный экстремум для функций трех и большего числа переменных.

38. Что называется скалярным полем? поверхностью уровня скалярного поля?

39. Вывести формулу для производной по направлению.

40. Дать определение градиента скалярного поля. Как выражается производная по направлению через градиент?

41. Сформулировать и доказать свойства градиента.

ГЛАВА VIII

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойные интегралы

128. Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл. Переходя к изложению интегрального исчисления для функций двух независимых переменных, мы начнем, как обычно, с рассмотрения конкретной задачи — задачи об определении объема цилиндрического тела.

Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное плоскостью Oxy, поверхностью, с которой любая прямая, параллельная оси Oz, пересекается не более чем в одной точке, и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz.

Область D, высекаемая в плоскости Oxy цилиндрической поверхностью, называется основанием цилиндрического тела (рис. 152). В частных случаях боковая цилиндрическая поверхность может и отсутствовать; примером тому служит тело, ограниченное плоскостью Oxy и верхней полусферой $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

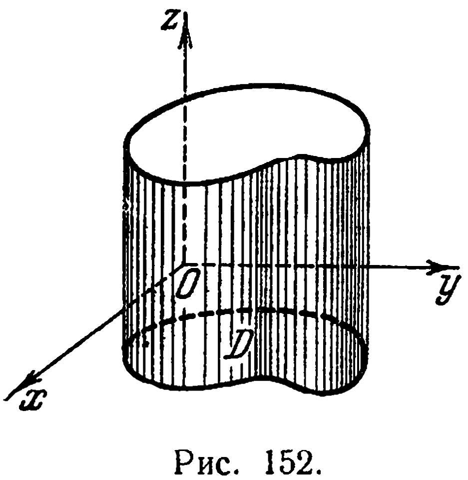

Рис. 152.

Обычно тело можно составить из некоторого числа цилиндрических тел и искомый объем определить как сумму объемов цилиндрических тел, составляющих это тело.

Прежде всего напомним два принципа, из которых мы исходим при определении объема тела:

1) если разбить тело на части, то его объем будет равен сумме объемов всех частей;

2) объем прямого цилиндра, т. е. цилиндрического тела, ограниченного плоскостью, параллельной плоскости Oxy, равен площади основания, умноженной на высоту тела.

Пусть $z=f(x, y)$ есть уравнение поверхности, ограничивающей цилиндрическое тело. Будем считать функцию $f(x, y)$ непрерывной в области D и сначала предположим, что поверхность целиком лежит над плоскостью Oxy, т. е. что $f(x, y)>0$ всюду в области D.

Обозначим искомый объем цилиндрического тела через V. Разобьем основание цилиндрического тела — область D — на некоторое число n областей произвольной формы; будем называть их частичными областями. Пронумеровав частичные области в каком-нибудь порядке, обозначим их через σ_1, σ_2, ..., σ_n, а их площади — через $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. Через границу каждой частичной области проведем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz. Эти цилиндрические поверхности разрежут поверхность на n кусков, соответствующих n частичным областям. Таким образом, цилиндрическое тело окажется разбитым на n частичных цилиндрических тел (рис. 153). Выберем в каждой частичной области σ_i произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и заменим соответствующее частичное цилиндрическое тело прямым цилиндром с тем же основанием и высотой, равной $z_i=f(x_i, y_i)$. В результате получим n-ступенчатое тело, объем которого равен

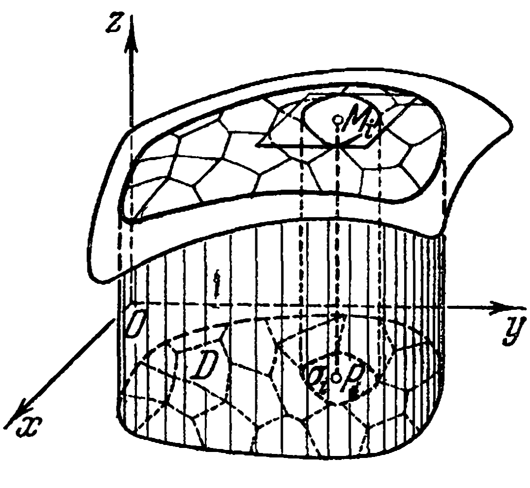

Рис. 153.

$$V_n=f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1+f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2+\ldots+f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i.$$

Принимая объем V данного цилиндрического тела приближенно равным объему построенного n-ступенчатого тела, будем считать, что V_n тем точнее выражает V, чем больше n и чем меньше каждая из частичных областей. Переходя к пределу при $n\to\infty$, мы будем требовать, чтобы не только площадь каждой частичной области стремилась к нулю, но чтобы стремились к нулю все ее размеры. Если назвать *диаметром области* наибольшее расстояние между точками ее границы[1]), то высказанное требование будет означать, что каждый из диаметров частичных областей должен

---

[1]) Например, диаметр прямоугольника равен его диагонали, диаметр эллипса — его большой оси. Для круга приведенное определение диаметра равносильно обычному.

стремиться к нулю; при этом сами области будут стягиваться в точку [1]).

В соответствии со сказанным мы принимаем искомый объем V равным пределу, к которому стремится V_n при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей (при этом $n \longrightarrow \infty$):

$$V = \lim V_n = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

К отысканию предела подобных сумм для функций двух переменных приводят самые разнообразные задачи, а не только задача об объеме.

Рассмотрим этот вопрос в общем виде. Пусть $f(x, y)$ — любая функция двух переменных (не обязательно положительная), непрерывная в некоторой области D, ограниченной замкнутой линией. Разобьем область D на частичные, как указано выше, выберем в каждой частичной области по произвольной точке $P_i(x_i, y_i)$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i, \qquad (*)$$

где $f(x_i, y_i)$ — значение функции в точке P_i и $\Delta\sigma_i$ — площадь частичной области.

Сумма (*) называется *n-й интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ в области D, соответствующей данному разбиению этой области на n частичных областей.

Определение. ***Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D* называется предел, к которому стремится n-я интегральная сумма (*) при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей.**

Записывается это так:

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma.$$

Читается: «двойной интеграл от $f(x, y)$ на $d\sigma$ по области D». Выражение $f(x, y)\, d\sigma$, показывающее вид суммируемых слагаемых, называется *подынтегральным выражением*; функция $f(x, y)$ называется *подынтегральной функцией*, $d\sigma$ — *элементом площади*, область D — *областью интегрирования*, наконец, переменные x и y называются *переменными интегрирования*.

---

[1]) Если известно только, что площадь области стремится к нулю, то эта область может и не стягиваться в точку. Например, площадь прямоугольника с постоянным основанием и высотой, стремящейся к нулю, стремится к нулю, а прямоугольник стягивается к своему основанию, т. е. к отрезку.

Таким образом, можно сказать, что объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостью Oxy, поверхностью $z=f(x,y)(f(x,y)>0)$ и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, выражается двойным интегралом от функции $f(x, y)$, взятым по области, являющейся основанием цилиндрического тела:

$$V=\iint_D f(x, y)\,d\sigma.$$

Аналогично теореме существования обыкновенного интеграла (п. 87) имеет место следующая теорема.

Теорема существования двойного интеграла. **Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, ограниченной замкнутой линией, то ее n-я интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел, т. е. двойной интеграл $\iint_D f(x, y)\,d\sigma$, не зависит от способа разбиения области D на частичные области σ_i и от выбора в них точек P_i.**

Двойной интеграл, разумеется, представляет собой число, зависящее только от подынтегральной функции и области интегрирования и вовсе не зависящее от обозначений переменных интегрирования, так что, например,

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma=\iint_D f(u, v)\,d\sigma.$$

Далее мы убедимся в том, что вычисление двойного интеграла может быть произведено посредством двух обыкновенных интегрирований.

129. Свойства двойных интегралов. Читатель, наверное, уже обратил внимание на то, что конструкции определенного интеграла для функций одной переменной и двойного интеграла совершенно аналогичны. Вследствие этого свойства двойного интеграла, а также доказательства этих свойств почти повторяют соответствующие свойства определенного интеграла. Мы приведем поэтому свойства двойных интегралов без доказательств.

I. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых функций:

$$\iint_D [f(x, y)+\varphi(x, y)+\ldots+\psi(x, y)]\,d\sigma=$$
$$=\iint_D f(x, y)\,d\sigma+\iint_D \varphi(x, y)\,d\sigma+\ldots+\iint_D \psi(x, y)\,d\sigma.$$

II. Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за символ двойного интеграла:

$$\iint_D cf(x, y)\,d\sigma = c\iint_D f(x, y)\,d\sigma.$$

III. Если область интегрирования D разбита на две части D_1 и D_2, то

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\,d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\,d\sigma.$$

IV. Если во всех точках области D функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют условию $f(x, y) \geqslant \varphi(x, y)$, то

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma > \iint_D \varphi(x, y)\,d\sigma.$$

Знак неравенства может перейти в знак равенства только тогда, когда обе функции совпадают.

Из свойства IV, в частности, следует, что

Если подынтегральная функция в области интегрирования не меняет знака, то двойной интеграл есть число того же знака, что и функция.

Свойство III и следствие из свойства IV позволяют уточнить геометрический смысл двойного интеграла. Условимся объему цилиндрического тела, расположенного над плоскостью Oxy, приписывать знак плюс, а расположенного под плоскостью Oxy — знак минус. Тогда, если $z = f(x, y)$ — уравнение ограничивающей поверхности, то двойной интеграл $\iint_D f(x, y)\,d\sigma$ является алгебраической суммой объемов тел, соответствующих положительным и отрицательным значениям функции $f(x, y)$.

Если в двойном интеграле подынтегральная функция тождественно равна 1, то двойной интеграл равен площади S области интегрирования, т. е.

$$\iint_D d\sigma = S.$$

В этом случае двойной интеграл выражает объем прямого цилиндра с высотой, равной единице; ясно, что этот объем численно равен площади основания цилиндра.

V. Если функция $f(x, y)$ во всех точках области интегрирования D удовлетворяет неравенствам

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

то

$$mS < \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma < MS,$$

где S — площадь области D.

VI. Двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования, т. е.

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = f(\xi, \eta)\, S.$$

Значение $f(\xi, \eta)$, находимое из последнего равенства, называется *средним значением функции* $f(x, y)$ *в области* D (ср. с п. **90**).

Геометрически теорему о среднем для двойного интеграла можно сформулировать так: существует цилиндр, основание которого совпадает с основанием D данного цилиндрического тела, высота равна аппликате поверхности $z = f(x, y)$ в некоторой точке основания, а объем равен объему цилиндрического тела. Указанная аппликата и изображает среднее значение функции $f(x, y)$ в области D.

130. Вычисление двойных интегралов. При вычислении двойного интеграла $\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma$ элемент площади $d\sigma$ нам удобно представить в ином виде. Будем разбивать область интегрирования D в плоскости Oxy на частичные области посредством двух систем координатных линий: $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Этими линиями служат прямые, параллельные соответственно оси Oy и оси Ox, а частичными областями — прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат. Ясно, что площадь каждой частичной области $\Delta\sigma$ будет равна произведению соответствующих Δx и Δy. Поэтому элемент площади $d\sigma$ мы запишем в виде

$$d\sigma = dx\, dy,$$

т. е. *элемент площади в декартовых координатах является произведением дифференциалов независимых переменных*. Мы имеем

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (*)$$

При вычислении двойного интеграла $(*)$ мы будем опираться на тот факт, что он выражает объем V цилиндрического тела с основанием D, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$. Напомним, что мы уже занимались задачей об объеме тела, когда рассматривали применения определенного интеграла к задачам геометрии. **В п. 101** была получена формула

$$V=\int_a^b S(x)\,dx, \qquad (**)$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, а $x=a$ и $x=b$ — уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело (см. рис. 122 на стр. 343). Применим теперь эту формулу к вычислению двойного интеграла

$$\iint_D f(x,\,y)\,dx\,dy.$$

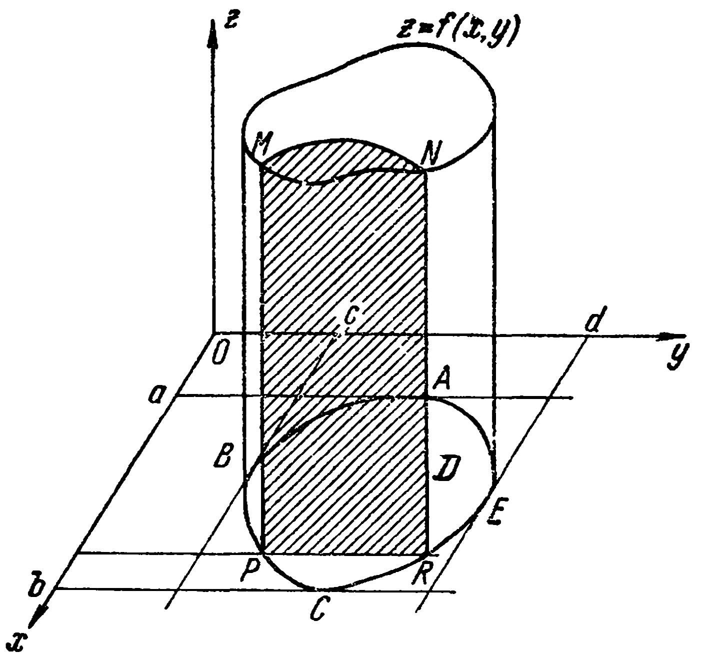

Рис. 154.

Предположим сначала, что область интегрирования D удовлетворяет следующему условию: любая прямая, параллельная оси Ox или оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках. Соответствующее цилиндрическое тело изображено на рис. 154.

Область D заключим внутрь прямоугольника

$$a\leqslant x\leqslant b,$$
$$c\leqslant y\leqslant d,$$

стороны которого касаются границы области в точках A, B, C, E. Интервал $[a,\ b]$ является ортогональной проекцией области D на ось Ox, а интервал $[c,\ d]$ — ортогональной проекцией области D на ось Oy. На рис. 155 область D показана в плоскости Oxy.

Точками A и C граница разбивается на две линии: ABC и AEC, каждая из которых пересекается с любой прямой, параллельной оси Oy, в одной точке. Поэтому их уравнения можно записать в форме, разрешенной относительно y:

$$y=y_1(x) \quad (ABC),$$
$$y=y_2(x) \quad (AEC).$$

Аналогично точками B и E граница разбивается на линии BAE

и BCE, уравнения которых можно записать так:

$$x=x_1(y) \quad (BAE),$$
$$x=x_2(y) \quad (BCE).$$

Рассечем рассматриваемое цилиндрическое тело произвольной плоскостью, параллельной плоскости Oyz, т. е. $x=\mathrm{const}$, $a\leqslant x\leqslant b$ (рис. 154). В сечении мы получим криволинейную трапецию $PMNR$, площадь которой выражается интегралом от функции $f(x, y)$, рассматриваемой как функция одной переменной y, причем y изменяется от ординаты точки P до ординаты точки R. Точка P есть точка входа прямой $x=\mathrm{const}$ (в плоскости Oxy) в область D, а R — точка ее выхода из этой области. Из уравнений линий ABC и AEC следует, что ординаты этих точек при взятом x соответственно равны $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

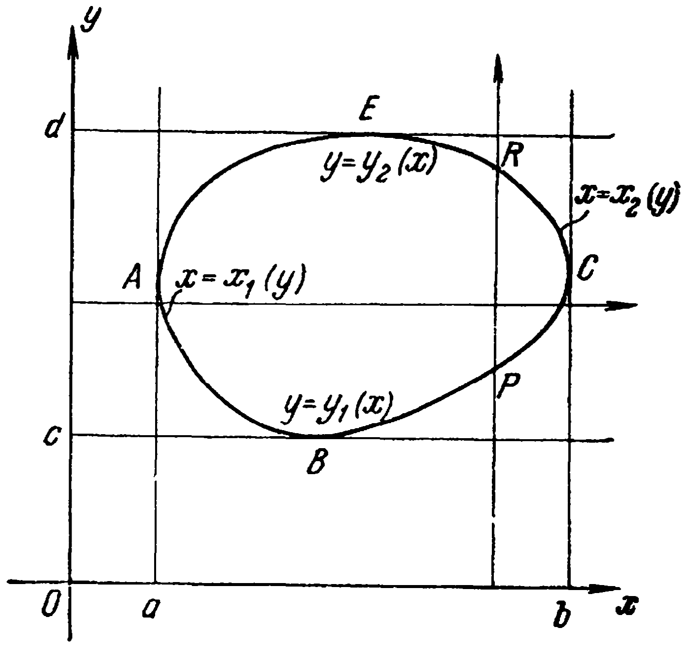

Рис. 155.

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

дает выражение для площади плоского сечения $PMNR$. Ясно, что величина этого интеграла зависит от выбранного значения x; другими словами, площадь рассматриваемого поперечного сечения является некоторой функцией от x, мы обозначим ее через $S(x)$:

$$S(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Согласно формуле (**) объем всего тела будет равен интегралу от $S(x)$ в интервале изменения x $(a\leqslant x\leqslant b)$[1]).

---

[1]) При выводе формулы (**) мы считали, что $S(x)$ есть геометрическая площадь поперечного сечения. Поэтому дальнейшие рассуждения справедливы, строго говоря, лишь для случая $f(x, y)\geqslant 0$. Основываясь на уточненном геометрическом смысле двойного интеграла, нетрудно доказать, на чем мы не будем останавливаться, что получающаяся формула для вычисления двойного интеграла будет верна для любых функций.

Заменяя в этой формуле $S(x)$ ее выражением, окончательно получим

$$V=\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx$$

или в более удобной форме

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy. \qquad \text{(А)}$$

Пределы внутреннего интеграла переменные; они указывают границы изменения переменной интегрирования y при постоянном значении второго аргумента x. Пределы внешнего интеграла постоянны; они указывают границы, в которых может изменяться аргумент x.

Меняя роли x и y, т. е. рассматривая сечения тела плоскостями $y=\text{const}$ $(c\leqslant y\leqslant d)$, мы найдем сначала, что площадь $Q(y)$ такого сечения равна $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\ y)\,dx$, где y при интегрировании считается величиной постоянной. Интегрируя затем $Q(y)$ в пределах изменения y, т. е. от c до d, мы придем ко второму выражению для двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\ y)\,dx. \qquad \text{(Б)}$$

Здесь интегрирование совершается сначала по x, а потом по y.

Формулы (А) и (Б) показывают, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух обыкновенных определенных интегралов; нужно только помнить, что во внутреннем интеграле одна из переменных принимается при интегрировании за постоянную. Для краткости правые части формул (А) и (Б) называют *повторными* (или *двукратными*) интегралами, а сам процесс расстановки пределов интегрирования — *приведением двойного интеграла к повторному*.

Формулы приведения двойного интеграла к повторному приобретают особенно простой вид, когда область D является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат (рис. 156). В этом случае становятся постоянными пределы не только внешнего, но и внутреннего интегралов:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,d\sigma=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,\ y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx.$$

В других случаях для сведения двойного интеграла к повторному необходимо прежде всего построить область интегрирования; лучше всего изобразить эту область прямо в плоскости Oxy, как это сделано на рис. 155. Затем нужно установить порядок интегрирования, т. е. наметить, по какой переменной будет производиться внутреннее интегрирование, а по какой — внешнее, и расставить пределы интегрирования.

Поясним на примерах, как производится расстановка пределов интегрирования.

Примеры. 1) Приведем к повторному двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, если область D — треугольник, ограниченный

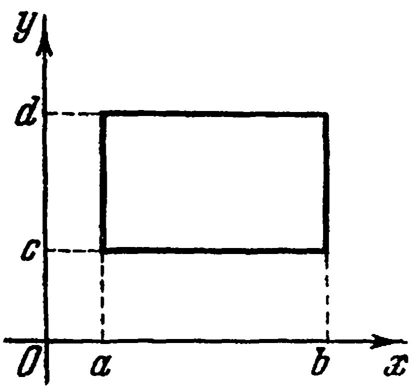

Рис. 156.

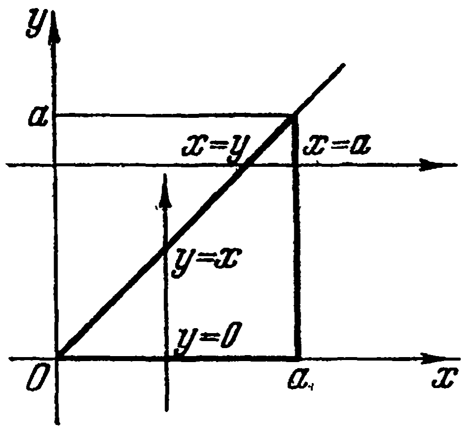

Рис. 157.

прямыми $y=0$, $y=x$ и $x=a$ (рис. 157). Если интегрировать сначала по y, а потом по x, то внутреннее интегрирование производится от линии $y=0$ до линии $y=x$, а внешнее — от точки $x=0$ до точки $x=a$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x, y)\,dy.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x, y)\,dx.$$

2) Приведем к повторному интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $y=0$, $y=x^2$ и $x+y=2$.

Область D, а также координаты крайних ее точек показаны на рис. 158. Вид области указывает на то, что удобнее интегрировать сначала по x, а потом по y:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y)\,dx.$$

Если мы изменим порядок интегрирования, то результат уже

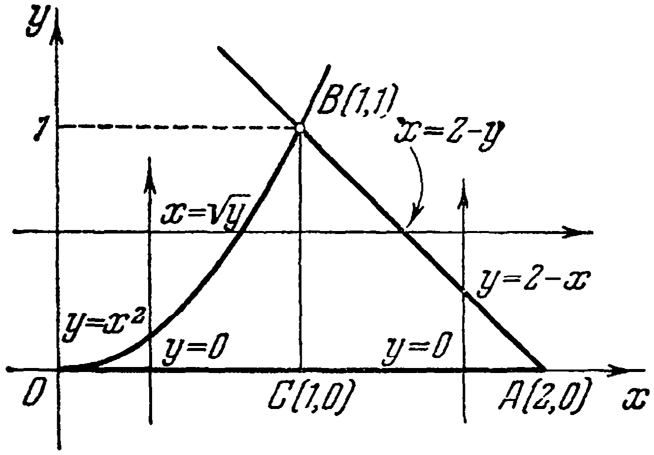

Рис. 158.

не удастся записать в виде **одного** повторного интеграла, так как линия OBA имеет на разных участках разные уравнения.

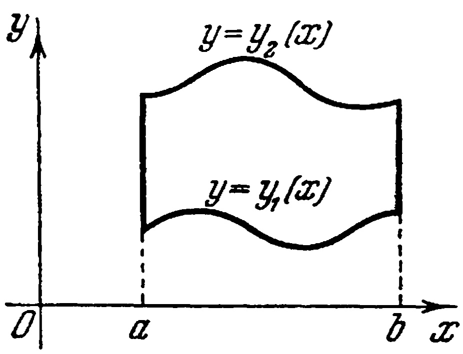

Рис. 159.

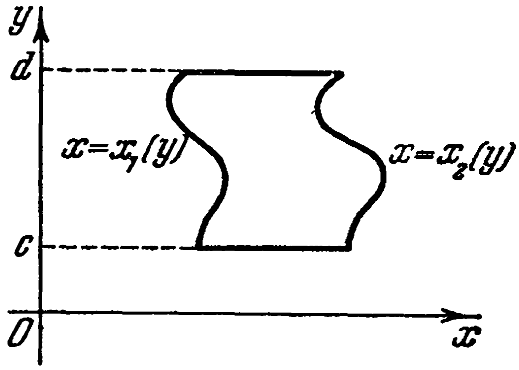

Рис. 160.

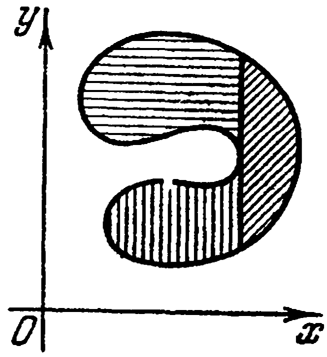

Рис. 161.

Разбивая область D на две: OBC и CBA, получим

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy.$$

Этот пример показывает, как важно с самого начала продумать порядок интегрирования.

Формулы (А) и (Б) сведения двойного интеграла к повторному справедливы и для случая областей более общего вида. Так, формула (А) применима к области, указанной на рис. 159, а формула (Б) — к области, изображенной на рис. 160. В случае области еще более общего вида (рис. 161) двойной интеграл следует разбить на сумму интегралов по более простым областям, а затем каждый из них сводить отдельно к повторному, пользуясь формулами (А) или (Б).

Рассмотрим теперь несколько примеров, связанных с вычислением двойных интегралов.

Примеры. 1) Найдем двойной интеграл от функции

$$z = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y$$

по прямоугольной области $D(-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 2)$

$$I = \iint_D \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dx\, dy.$$

Геометрически I выражает объем четырехугольной призмы

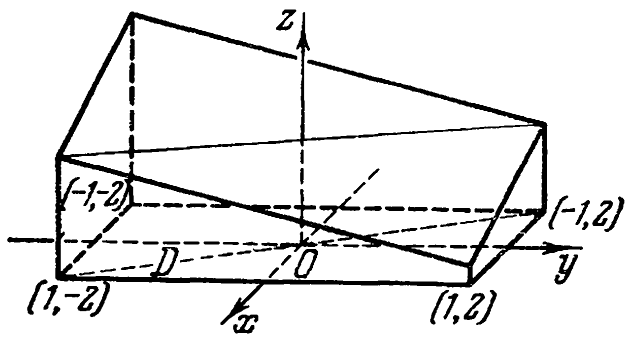

Рис. 162.

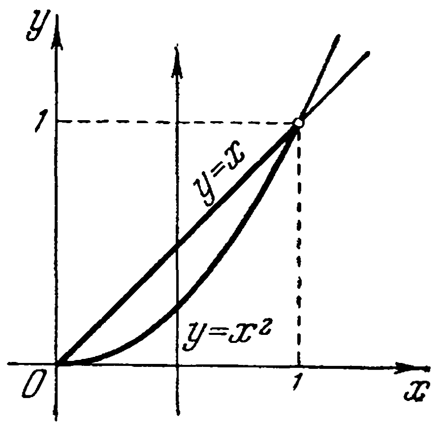

Рис. 163.

(рис. 162), основанием которой служит прямоугольник D, усеченной плоскостью

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + z = 1.$$

Возьмем повторный интеграл сначала по y, затем по x:

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dy = \int_{-1}^{1} \left(y - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{8}y^2\right)\Big|_{-2}^{2} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(4 - \frac{4}{3}x\right) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = 8.$$

То же самое получим, интегрируя сначала по x, а затем по y:

$$I = \int_{-2}^{2} dy \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}yx\right)\Big|_{-1}^{1} dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{1}{2}y\right) dy = \left(2y - \frac{1}{4}y^2\right)\Big|_{-2}^{2} = 8.$$

2) Вычислим двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$$

по области D, ограниченной линиями $y=x$ и $y=x^2$. Область D

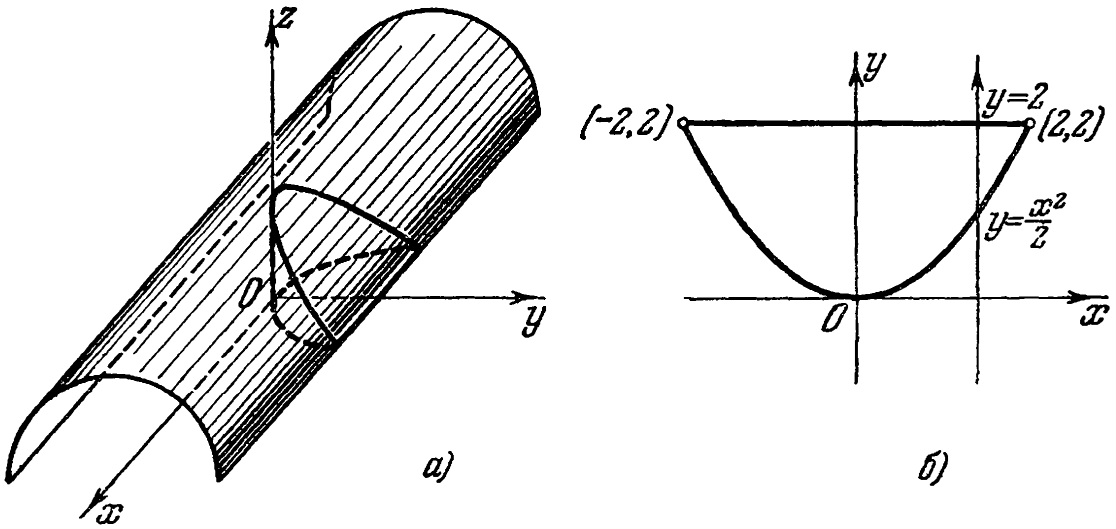

Рис. 164.

изображена на рис. 163. Интегрируя сначала по y, а потом по x, получаем

$$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x+y)\,dy = \int\limits_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Правильность результата можно проверить, изменив порядок интегрирования:

$$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} (x+y)\,dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_y^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} - y^2\right) dy = \left(\frac{y^2}{4} + \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

3) Вычислим объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями $z=4-y^2$, $y=\frac{x^2}{2}$ и плоскостью $z=0$ (рис. 164, *а*).

Поверхность, ограничивающая тело сверху, имеет уравнение $z=4-y^2$. Область интегрирования D получается в результате пересечения параболы $y=\frac{x^2}{2}$ с линией пересечения цилиндра $z=4-y^2$ и плоскости $z=0$, т. е. с прямой $y=2$ (рис. 164, *б*). Ввиду симметрии тела относительно плоскости Oyz вычисляем половину искомого объема:

$$\frac{1}{2}V=\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{2}(4-y^2)\,dy=\int_0^2\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{x^2}{2}}^{2}dx=$$

$$=\int_0^2\left(8-\frac{8}{3}-2x^2+\frac{x^6}{24}\right)dx=\left(\frac{16}{3}x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^7}{168}\right)_0^2=\frac{128}{21}.$$

Следовательно,

$$V=\frac{256}{21}\approx 12{,}2 \text{ куб. ед.}$$

Рекомендуем читателю провести вычисления при измененном порядке интегрирования.

4) Вычислим объем V тела, ограниченного поверхностью

$$z=1-4x^2-y^2$$

и плоскостью Oxy.

Заданное тело представляет собой сегмент эллиптического параболоида, расположенный над плоскостью Oxy (рис. 165). Параболоид пересекается с плоскостью Oxy по эллипсу

$$4x^2+y^2=1.$$

Следовательно, задача состоит в отыскании объема цилиндрического тела, имеющего своим основанием внутренность указанного эллипса и ограниченного параболоидом

$$z=1-4x^2-y^2.$$

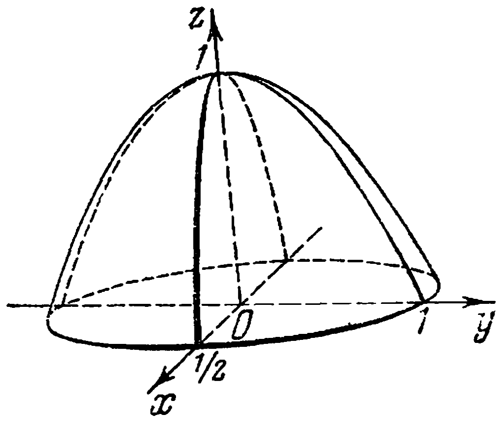

Рис. 165.

В силу симметрии тела относительно плоскостей Oxz и Oyz можно вычислить объем четвертой его части, заключенной в первом координатном угле. Этот объем равен двойному интегралу, распространенному по области, заданной условиями $4x^2+y^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, т. е. по четверти эллипса. Интегрируя сначала по y, затем по x, получим

$$\frac{1}{4}V=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}(1-4x^2-y^2)\,dy=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Подстановка $2x = \sin t$ дает (см. п. 94)

$$\frac{1}{4} V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} \pi,$$

откуда $V = \frac{\pi}{4}$.

131. Двойной интеграл в полярных координатах. Для вычисления двойного интеграла

$$I = \iint\limits_D f(x, y) \, d\sigma$$

мы пользовались до сих пор системой декартовых координат. Отнесем теперь плоскость к системе полярных координат r, φ и предположим, как обычно, что полюс лежит в начале координат и полярная ось совпадает с осью абсцисс. Тогда декартовы координаты точки выражаются через полярные по формулам

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi.$$

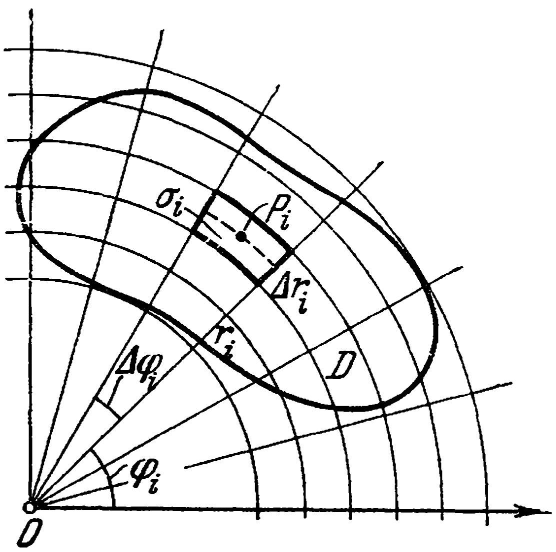

Рис. 166.

Разобьем область интегрирования D на частичные области σ_i двумя системами **координатных линий**: $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Этими линиями будут соответственно концентрические окружности с центром в полюсе и лучи, исходящие из полюса (рис. 166). При этом частичными областями σ_i будут криволинейные четырехугольники, ограниченные дугами концентрических окружностей и их радиусами. Площадь $\Delta\sigma_i$ области σ_i будет

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2} (r_i + \Delta r_i)^2 \Delta\varphi_i - \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i = \left(r_i + \frac{\Delta r_i}{2}\right) \Delta r_i \Delta\varphi_i,$$

или

$$\Delta\sigma_i = r_i' \Delta r_i \Delta\varphi_i,$$

где

$$r_i' = r_i + \frac{\Delta r_i}{2}$$

есть средний радиус между r_i и $r_i + \Delta r_i$.

Пусть дана функция $f(x, y)$, непрерывная в области D. Составим для нее интегральную сумму, разбивая область D на частичные области σ_i и выбирая в качестве произвольных точек $P_i(x_i, y_i)$ областей σ_i точки, лежащие на средних окружностях радиуса r_i, т. е. полагая

$$x_i = r_i' \cos\varphi_i, \qquad y_i = r_i' \sin\varphi_i.$$

Тогда [1])

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(r_i'\cos\varphi_i, r_i'\sin\varphi_i)\, r_i'\,\Delta r_i\,\Delta\varphi_i.$$

Так как в правой части стоит интегральная сумма для функции $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r$ по переменным r и φ, то, переходя к пределу, получим

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Это равенство является формулой преобразования двойного интеграла от декартовых координат к полярным. Выражение

$$d\sigma = r\,dr\,d\varphi$$

называется *элементом площади в полярных координатах.*

Правило преобразования двойного интеграла к полярным координатам. **Для того чтобы преобразовать двойной интеграл в декартовых координатах в двойной интеграл в полярных координатах, нужно x и y в подынтегральной функции заменить соответственно через $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$, а произведение $dx\,dy$ заменить произведением $r\,dr\,d\varphi$.**

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, так же как и в декартовой, сводится к последовательному интегрированию по переменным r и φ. Укажем правила расстановки пределов.

1. Пусть полюс не содержится внутри области интегрирования D, заключенной между лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, и координатные линии $\varphi = \text{const}$ встречают ее границу не более чем в двух точках (рис. 167, *а*. Область может также иметь вид, изображенный на рис. 167, б.).

Полярные уравнения кривых ADC и ABC пусть будут $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$.

---

[1]) Следует заметить, что площади частичных областей σ_i, примыкающих к границе области D, могут быть и не равны $r_i'\,\Delta r_i\,\Delta\varphi_i$. Можно, однако, доказать, что получающаяся при такой замене суммарная ошибка стремится к нулю при последующем переходе к пределу.

Интегрируя сначала по r в пределах его изменения при постоянном φ, т. е. от $r_1(\varphi)$ до $r_2(\varphi)$, а затем по φ от φ_1 до φ_2, получим

$$I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

Интегрирование в обратном порядке, т. е. сначала по φ, а потом по r, обычно не встречается.

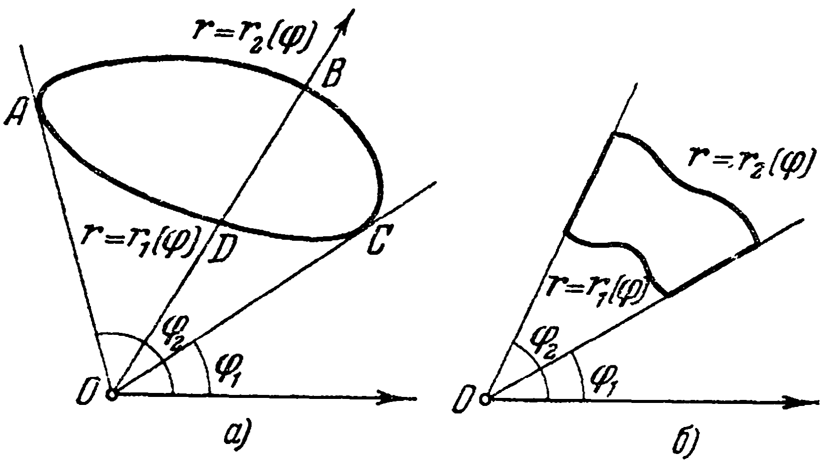

Рис. 167.

В частном случае, когда областью интегрирования служит часть кругового кольца $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, пределы интегрирования постоянны по обеим переменным:

$$I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

2. Пусть полюс содержится внутри области интегрирования и любой полярный радиус пересекает границу в одной точке (так называемая звездная относительно полюса область). Интегрируя сначала по r, а затем по φ, получим

$$I=\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr,$$

где $r=r(\varphi)$ есть полярное уравнение границы области.

В частности, при $r=r(\varphi)=R=\text{const}$, т. е. когда область интегрирования есть круг с центром в полюсе, будем иметь,

$$I=\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

Примеры. 1) Расставим пределы интегрирования в полярных координатах, если область D — круг $x^2+y^2 \leqslant ax$ (рис. 168). Переходя к полярным координатам, получим уравнение окружности в виде $r = a\cos\varphi$. Здесь $r_1(\varphi) = 0$ и $r_2(\varphi) = a\cos\varphi$. Пределы изменения по φ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr.$$

2) Вычислим объем V общей части шара радиуса a и кругового цилиндра радиуса $\frac{a}{2}$ при условии, что центр шара лежит на

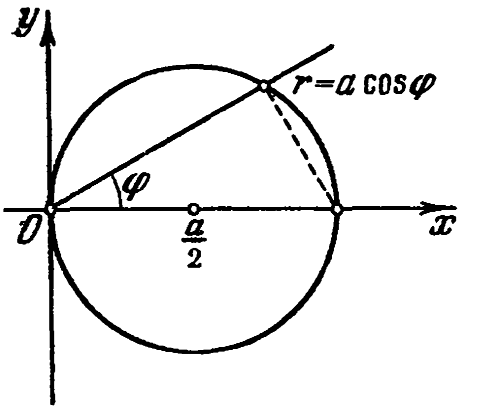

Рис. 168.

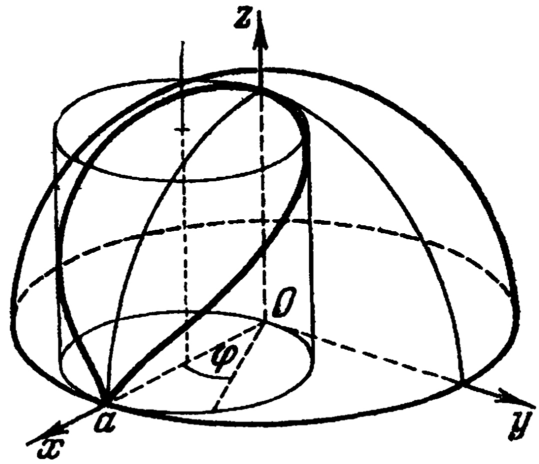

Рис. 169.

поверхности цилиндра. Систему координат расположим, как показано на рис. 169. В силу симметрии измеряемого тела относительно плоскостей Oxy и Oxz мы можем вычислить четвертую часть объема, заключенную в первом координатном угле.

Имеем

$$\frac{1}{4}V = \iint\limits_{D} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

где D — полукруг, являющийся половиной основания цилиндра.

Здесь очень удобно преобразовать двойной интеграл к полярным координатам. В соответствии с правилом преобразования имеем

$$\frac{1}{4}V = \iint\limits_{D} \sqrt{a^2-r^2}\, r\, dr\, d\varphi.$$

Так как полярное уравнение полуокружности, ограничивающей область D, есть $r = a\cos\varphi$ (см. пример 1), то, интегрируя сначала по r, а затем по φ, найдем

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr.$$

Находя внутренний интеграл, получаем

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_0^{a\cos\varphi} \right] d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\varphi)\, d\varphi = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Отсюда

$$V = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Вычислим с помощью преобразования двойного интеграла к полярным координатам один несобственный интеграл — *интеграл Пуассона* (см. п. **98**)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

(Этот интеграл играет важную роль в теории вероятностей.) Для вычисления рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

где D — четверть круга радиуса R, расположенная в первом квадранте. Преобразуем этот интеграл к полярным координатам:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \Bigg|_0^R \right] = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}).$$

Предположим, что радиус R неограниченно увеличивается. Тогда область D, расширяясь, будет стремиться заполнить весь первый квадрант. По аналогии с несобственным интегралом от функции одной переменной (см. п. **97**) запишем это так:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}\lim_{R\to\infty}(1 - e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4}. \qquad (*)$$

Примем теперь в качестве области интегрирования D квадрат $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$. Тогда

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a e^{-x^2-y^2}\,dy = \int\limits_0^a e^{-x^2}\,dx \int\limits_0^a e^{-y^2}dy.$$

Так как величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то полученное выражение равно

$$\left(\int\limits_0^a e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Если a стремится к бесконечности, то квадрат D стремится заполнить весь первый квадрант.

Оставляя без доказательства тот факт, что при любом расширении области D до полного квадранта интеграл $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ будет стремиться к одному и тому же пределу, запишем

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{a\to\infty}\left(\int\limits_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2. \qquad (**)$$

Сравнивая выражения (*) и (**), получаем $\left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$, т. е.

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Так как подынтегральная функция четная, то

$$\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

132. Приложения двойных интегралов к задачам механики. I. Масса плоской пластинки переменной плотности. Рассмотрим тонкую пластинку, расположенную на плоскости Oxy и занимающую область D. Толщину этой пластинки считаем настолько малой, что изменением плотности по толщине ее можно пренебречь.

Поверхностной плотностью такой пластинки в данной точке называется предел отношения массы площадки к ее площади при условии, что площадка стягивается к данной точке.

Определенная таким образом поверхностная плотность будет зависеть только от положения данной точки, т. е. являться функцией ее координат:

$$\delta = \delta(x, y).$$

Если бы плотность была постоянной ($\delta = \text{const}$), то масса всей пластинки равнялась бы $M = \delta S$, где S — площадь пластинки. Найдем теперь массу неоднородной пластинки, считая, что ее плотность является заданной функцией $\delta(x, y)$. Для этого разобьем область, занимаемую пластинкой, на частичные области $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ с площадями $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ (рис. 170). Выбирая в каждой частичной области произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$, будем считать, что плотность во всех точках частичной области постоянна и равна плотности $\delta(x_i, y_i)$ в выбранной точке. Составим приближенное выражение для массы пластинки в виде интегральной суммы

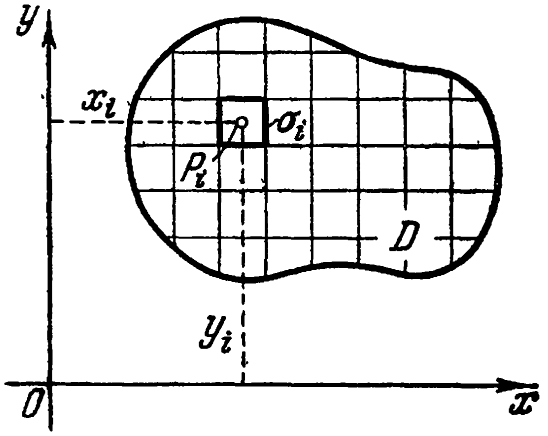

Рис. 170.

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i. \qquad (*)$$

Для точного выражения массы следует найти предел суммы (*) при условии, что $n \to \infty$ и каждая частичная область стягивается к точке. Тогда

$$M = \iint_D \delta(x, y)\,d\sigma.$$

II. Статические моменты и центр тяжести пластинки. Перейдем теперь к вычислению статических моментов рассматриваемой пластинки относительно осей координат. Для этого сосредоточим в точках $P_i(x_i, y_i)$ массы соответствующих частичных областей и найдем статические моменты полученной системы материальных точек (см. п. **103**):

$$M_x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} y_i \delta(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i, \qquad M_y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta(x_i, y_i)\,\Delta\sigma_i.$$

Переходя к пределу при обычных условиях и заменяя интегральные суммы интегралами, получим

$$M_x = \iint_D y\delta(x, y)\,d\sigma, \quad M_y = \iint_D x\delta(x, y)\,d\sigma.$$

Опираясь на результаты п. **103**, находим координаты центра тяжести

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\delta(x, y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \delta(x, y)\,d\sigma}, \qquad \eta = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\delta(x, y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \delta(x, y)\,d\sigma}.$$

Если пластинка однородна, т. е. $\delta(x, y) = \text{const}$, то формулы упрощаются:

$$\xi = \frac{\iint\limits_D x\,d\sigma}{S}, \quad \eta = \frac{\iint\limits_D y\,d\sigma}{S},$$

где S — площадь пластинки.

Предоставляем читателю проверить, что если пластинка имеет форму криволинейной трапеции, то, приводя двойные интегралы, стоящие в числителях, к повторным, мы получим формулы, выведенные в п. **103**.

III. Моменты инерции пластинки.

Моментом инерции материальной точки P с массой m относительно какой-либо оси называется произведение массы на квадрат расстояния точки P от этой оси.

Метод составления выражений для моментов инерции пластинки относительно осей координат совершенно такой же, какой мы применяли для вычисления статических моментов. Приведем поэтому только окончательные результаты, считая, что $\delta(x, y) \equiv 1$:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\,d\sigma, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\,d\sigma.$$

Отметим еще, что интеграл $\iint\limits_D xy\,d\sigma$ называется центробежным моментом инерции; он обозначается I_{xy}.

В механике часто рассматривают полярный момент инерции точки, равный произведению массы точки на квадрат ее расстояния до данной точки — полюса. Полярный момент инерции пластинки относительно начала координат будет равен

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,d\sigma = I_x + I_y.$$

§ 2. Тройные интегралы

133. Масса неоднородного тела. Тройной интеграл. К определению двойного интеграла нас привела задача отыскания объема цилиндрического тела. В п. **132**, I мы видели, что к этому же самому определению можно прийти, отыскивая массу неоднородной пластинки. В настоящем пункте мы дадим определение тройного интеграла, исходя из задачи отыскания массы неоднородного тела [1]. Ввиду полной аналогии между определениями двой-

[1]) Мы уже отмечали (п. **107**), что функция трех переменных не допускает геометрического изображения. Потому мы и приходим к тройным интегралам, исходя не из задачи геометрии, а из задачи механики.

ного и тройного интегралов будем вести изложение по возможности кратко. Рассмотрим тело, занимающее пространственную область Ω (рис. 171), и предположим, что плотность распределения массы в этом теле является непрерывной функцией координат точек тела:

$$\delta=\delta(x,\ y,\ z).$$

Единица измерения плотности — *кг/м*^{3}.

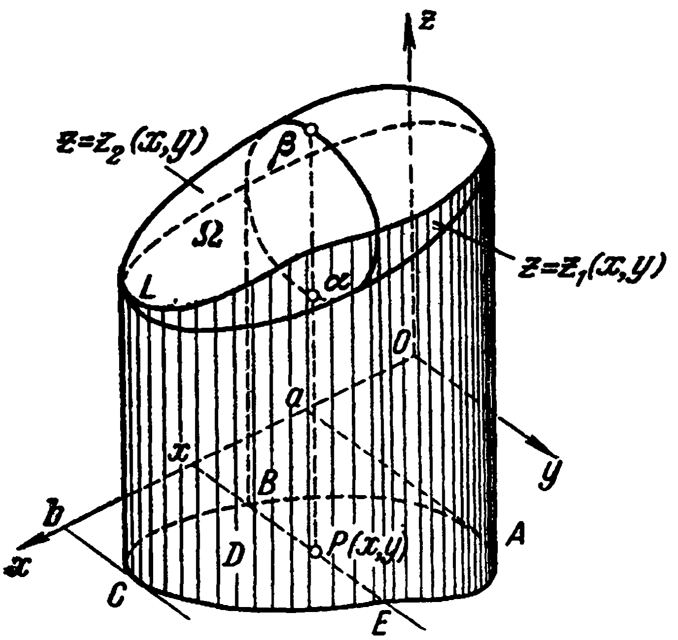

Рис. 171.

Разобьем тело произвольным образом на n частей; объемы этих частей обозначим $\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \ldots,\ \Delta v_n$. Выберем затем в каждой части по произвольной точке $P_i\ (x_i,\ y_i,\ z_i)$. Полагая, что в каждой частичной области плотность постоянна и равна ее значению в точке P_i, мы получим приближенное выражение для массы всего тела в виде суммы

$$M_n=\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta v_i. \qquad (*)$$

Предел этой суммы при условии, что $n\longrightarrow\infty$ и каждое частичное тело стягивается в точку (т. е. что его диаметр [1]) стремится к нулю), и даст массу M тела

$$M=\lim\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta v_i=\iiint\limits_{\Omega}\delta(x,\ y,\ z)\,dv.$$

Сумма $(*)$ называется n-*й интегральной суммой*, а ее предел — *тройным интегралом от функции* $\delta(x,\ y,\ z)$ *по пространственной области* Ω.

К вычислению тройного интеграла, помимо определения массы тела, приводят и другие задачи. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,\ y,\ z)\,dv=\lim\sum_{i=1}^{n}f(x_i,\ y_i,\ z_i)\,\Delta v_i,$$

где $f(x,\ y,\ z)$ — произвольная непрерывная в области Ω функция.

---

[1]) Определение диаметра тела такое же, как и определение диаметра плоской области (см. стр. 433). Если стремится к нулю диаметр тела, то стремится к нулю и его объем.

Терминология для тройных интегралов совпадает с соответствующей терминологией для двойных интегралов. Точно так же формулируется и теорема существования тройного интеграла (предоставляем это сделать читателю самостоятельно).

Свойства двойных интегралов, перечисленные в п. **129**, полностью переносятся на тройные интегралы. Заметим только, что если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ тождественно равна 1, то тройной интеграл выражает объем V области Ω:

$$\iiint\limits_{\Omega} dv = V.$$

Потому свойства V и VI надо теперь сформулировать следующим образом.

V′. Если функция $f(x, y, z)$ во всех точках области интегрирования Ω удовлетворяет неравенствам

$$m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M,$$

то

$$mV < \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dv < MV,$$

где V — объем области Ω.

VI′. Тройной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на объем области интегрирования, т. е.

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dv = f(\xi, \eta, \zeta)\, V.$$

Рекомендуем читателю самостоятельно сформулировать физический смысл этого свойства.

134. Вычисление тройных интегралов. Вычисление тройного интеграла $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dv$, так же как и двойного, может быть осуществлено посредством ряда последовательных интегрирований. Мы ограничимся описанием соответствующих правил.

I. Декартовы координаты. Пусть дан тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dv,$$

причем область Ω отнесена к системе декартовых координат $Oxyz$. Разобьем область интегрирования Ω плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда частичными областями будут параллелепипеды с гранями, параллельными плоскостям Oxy, Oxz, Oyz. Элемент объема будет равен произведению дифференциалов переменных интегрирования

$$dv = dx\, dy\, dz.$$

В соответствии с этим будем писать

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\, dx\, dy\, dz.$$

Установим теперь правило для вычисления такого интеграла. Будем считать, что область интегрирования Ω имеет вид, изображенный на рис. 171[1]).

Опишем около Ω цилиндрическую поверхность с образующей, перпендикулярной к плоскости Oxy. Она касается области Ω вдоль некоторой линии L, которая делит поверхность, ограничивающую область, на две части: верхнюю и нижнюю. Уравнением нижней поверхности пусть будет $z = z_1(x, y)$, уравнением верхней $z = z_2(x, y)$.

Построенная цилиндрическая поверхность высекает из плоскости Oxy плоскую область D, которая является ортогональной проекцией пространственной области Ω на плоскость Oxy; при этом линия L проектируется в границу области D.

Будем производить интегрирование сначала по направлению оси Oz. Для этого функция $f(x, y, z)$ интегрируется по заключенному в Ω отрезку прямой, параллельной оси Oz и проходящей через некоторую точку $P(x,\ y)$ области D (на рис. 171 отрезок $\alpha\beta$). При данных x и y переменная интегрирования z будет изменяться от $z_1(x,\ y)$ — аппликаты точки „входа" (α) прямой в область Ω, до $z_2(x,\ y)$ — аппликаты точки „выхода" (β) прямой из области Ω.

Результат интегрирования представляет собой величину, зависящую от точки $P(x,\ y)$; обозначим ее через $F(x,\ y)$:

$$F(x,\ y) = \int\limits_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)\, dz.$$

При интегрировании x и y рассматриваются здесь как постоянные.

Мы получим значение искомого тройного интеграла, если возьмем интеграл от функции $F(x,\ y)$ при условии, что точка $P(x,\ y)$ изменяется по области D, т. е. если возьмем двойной интеграл

$$\iint\limits_{D} F(x,\ y)\, dx\, dy.$$

[1]) Если область интегрирования Ω более сложного вида, то ее надо разбить на части указанного вида и вычислить данный интеграл как сумму интегралов, взятых по составляющим областям.

Таким образом, тройной интеграл I может быть представлен в виде

$$I=\iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Приводя, далее, двойной интеграл по области D к повторному и интегрируя сначала по y, а затем по x, получим

$$I=\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz, \qquad (*)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — ординаты точек «входа» в область D и «выхода» из нее прямой $x=\text{const}$ (в плоскости Oxy), а a и b — абсциссы конечных точек интервала оси Ox, на который проектируется область D.

Мы видим, что вычисление тройного интеграла по области Ω производится посредством трех последовательных интегрирований.

Формула $(*)$ сохраняется и для областей, имеющих цилиндрическую форму, т. е. ограниченных цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, а снизу и сверху поверхностями, уравнения которых соответственно $z=z_1(x, y)$ и $z=z_2(x, y)$ (рис. 172).

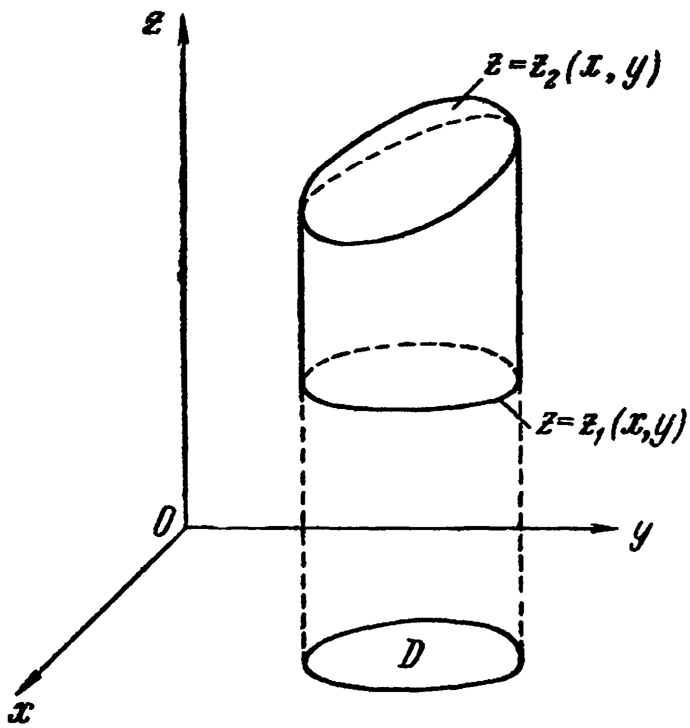

Рис. 172.

Если областью интегрирования служит внутренность параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 173), то пределы интегрирования постоянны во всех трех интегралах:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x, y, z)\,dz.$$

В этом случае интегрирование можно производить в любом порядке, пределы интегрирования будут при этом сохраняться.

Если же в общем случае менять порядок интегрирования (т. е., скажем, интегрировать сначала по направлению оси Oy, а затем по области плоскости Oxz), то это приведет к изменению порядка

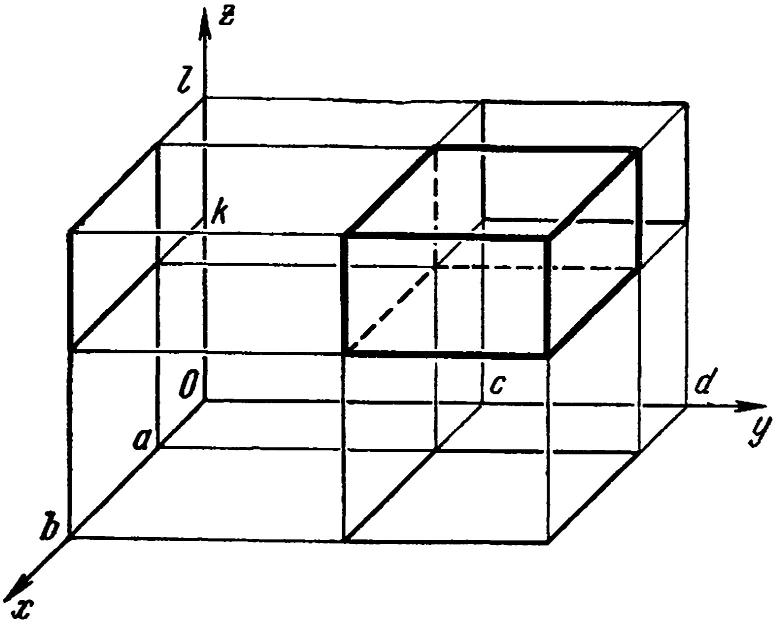

Рис. 173.

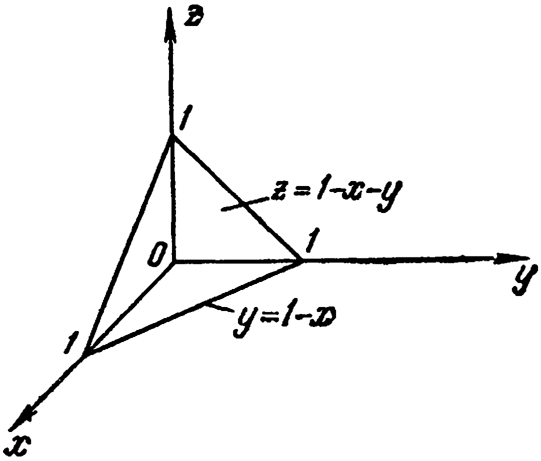

Рис. 174.

интегрирования в тройном интеграле и к изменению пределов интегрирования по каждой переменной.

Пример. Вычислим тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz,$$

где Ω — область, ограниченная координатными плоскостями

$$x=0, \qquad y=0, \qquad z=0$$

и плоскостью $x+y+z=1$ (пирамида, изображенная на рис. 174).

Интегрирование по z совершается от $z=0$ до $z=1-x-y$. Поэтому, обозначая проекцию области Ω на плоскость Oxy через D, получим

$$I = \iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{0}^{1-x-y} (x+y+z)\,dz = \iint\limits_{D} \left[(x+y)\,z + \frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-x-y} dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left[(x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]\,dx\,dy.$$

Расставим теперь пределы интегрирования по области D — треугольнику, уравнения сторон которого $x=0$, $y=0$, $x+y=1$:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[(x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]dy=$$

$$=\int_0^1 dx\left[\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right]\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\right]dx=\frac{1}{8}.$$

II. Цилиндрические координаты. Отнесем область Ω к системе цилиндрических координат (r, φ, z), в которой положение точки M в пространстве определяется полярными координатами (r, φ) ее проекции P на плоскость Oxy и ее аппликатой (z). Выбирая взаимное расположение осей координат, как указано на рис. 175, установим связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки M, именно:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z. \qquad (*)$$

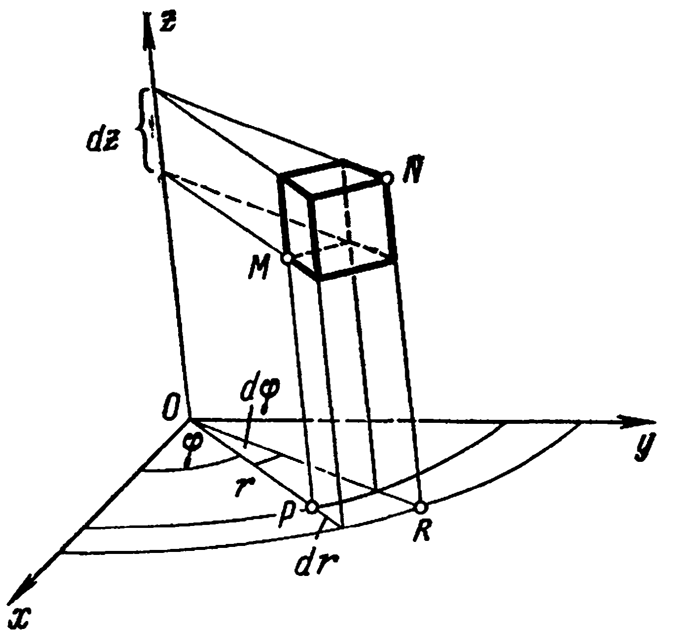

Рис. 175.

Разобьем область Ω на частичные области v_i тремя системами координатных поверхностей: $r=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$, $z=\text{const}$, которыми будут соответственно круговые цилиндрические поверхности, осью которых является ось Oz, полуплоскости, проходящие через ось Oz, и плоскости, параллельные плоскости Oxy. Частичными областями v_i служат прямые цилиндры MN (рис. 175). Так как объем цилиндра MN равен площади основания, умноженной на высоту, то для элемента объема получаем выражение

$$dv=r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Преобразование тройного интеграла $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dv$ к цилиндрическим координатам производится совершенно аналогично преобразованию двойного интеграла к полярным. Для этого нужно в выражении подынтегральной функции $f(x, y, z)$ переменные x, y, z

заменить по формулам (*) и взять элемент объема равным $r\,dr\,d\varphi\,dz$. Получим

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Если, в частности, $f(x, y, z) = 1$, то интеграл выражает объем V области Ω

$$V = \iiint_{\Omega} r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах приводится к интегрированиям по r, по φ и по z на основании тех же принципов, что и в случае декартовых координат. В частности, если областью интегрирования служит внутренность цилиндра $r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant h$, то пределы трехкратного интеграла постоянны и не меняются при перемене порядка интегрирования:

$$I = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr.$$

III. Сферические координаты. Отнесем теперь область интегрирования Ω к системе сферических координат (r, θ, φ). В этой системе координат положение точки M в пространстве определяется ее расстоянием r от начала координат (длина радиуса-вектора точки), углом θ между радиусом-вектором точки и осью Oz и углом φ между проекцией радиуса-вектора точки на плоскость Oxy и осью Ox (рис. 176). При этом θ может изменяться от 0 до π, а φ — от 0 до 2π [1]).

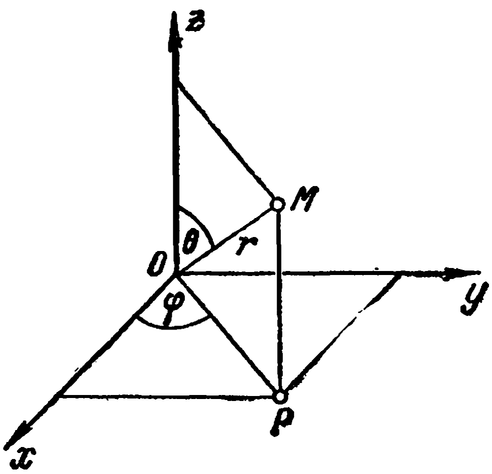

Рис. 176.

Связь между сферическими и декартовыми координатами легко устанавливается. Из рис. 176 имеем

$$MP = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r\cos\theta, \quad OP = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r\sin\theta,$$
$$x = OP\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = OP\sin\varphi.$$

Отсюда

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \qquad (**)$$

[1]) В картографии положение точки на земной поверхности определяется углом φ (долгота точки) и углом $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ (широта точки). При этом долгота меняется от 0 до 2π (или от $-\pi$ до π), а широта от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Разобьем область Ω на частичные области v_i тремя системами координатных поверхностей: $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, которыми будут соответственно сферы с центром в начале координат, полуплоскости, проходящие через ось Oz, и конусы с вершиной в начале координат и с осями, совпадающими с одной из полуосей Oz. Частичными областями v_i служат «шестигранники» (рис. 177). Отбросив бесконечно малые высших порядков, будем рассматривать шестигранник MN как прямоугольный параллелепипед с измерениями, равными: dr по направлению полярного радиуса, $r\,d\theta$ по направлению меридиана, $r \sin\theta\, d\varphi$ по направлению параллели. Для элемента объема мы получим тогда выражение

$$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi d\theta.$$

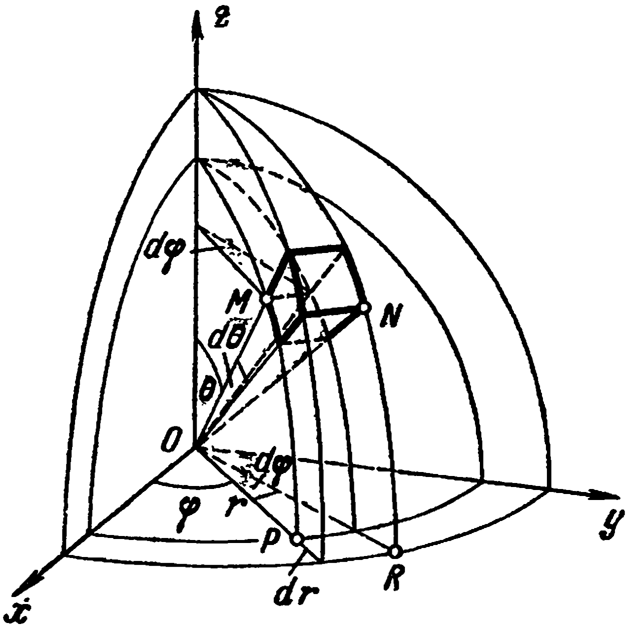

Рис. 177.

Заменив в тройном интеграле x, y, z по формулам (**) и взяв элемент объема равным полученному выражению, будем иметь

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\, dv =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

Особенно удобно применение сферических координат в случае, когда область интегрирования Ω — шар с центром в начале координат или шаровое кольцо. Например, в последнем случае, если радиус внутреннего шара R_1, а внешнего R_2, пределы интегрирования следует расставить так:

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} f(r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r \cos\theta)\, r^2\, dr.$$

Если Ω — шар, то нужно положить $R_1 = 0$.

Пример. Вычислим объем шара радиуса R. В этом случае подынтегральную функцию надо взять равной 1, и мы получим

$$V = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

В заключение отметим, что трудно дать общее указание, когда следует применять ту или иную систему координат. Это зависит и от области интегрирования, и от вида подынтегральной функции. Иногда следует написать интеграл в разных системах координат и только потом решить, в какой из них вычисление будет наиболее простым.

135. Применение тройных интегралов. Применение тройных интегралов к вычислению статических моментов и моментов инерции пространственных тел основано на тех же принципах, что и применение двойных интегралов к вычислению соответствующих моментов плоских пластинок (см. п. **132**). Для вычисления координат центра тяжести тела нужны статические моменты относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz; обозначим их соответственно M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}. Повторяя рассуждения п. **132**, II (рекомендуем читателю провести их самостоятельно), получим следующие формулы для координат ξ, η, ζ центра тяжести неоднородного тела, плотность которого задается функцией $\delta(x, y, z)$, занимающего область Ω:

$$\xi=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\delta\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} \delta\,dv},\quad \eta=\frac{M_{xz}}{M}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\delta\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} \delta\,dv},\quad \zeta=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\delta\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} \delta\,dv}.$$

Если тело однородно, т. е. $\delta=\text{const}$, то формулы упрощаются:

$$\xi=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\,dv}{V},\quad \eta=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\,dv}{V},\quad \zeta=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\,dv}{V},$$

где V — объем тела.

Пример. Найдем центр тяжести однородного полушара Ω:

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\qquad z\geqslant 0.$$

Две координаты центра тяжести (ξ и η) равны нулю, ибо полушар симметричен относительно оси Oz (тело вращения с осью Oz). Интеграл $\iiint\limits_{\Omega} z\,dv$ удобно вычислить, перейдя к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\iiint\limits_{\Omega} r\cos\theta\, r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^3dr=$$

$$=\frac{1}{2}\,2\pi\,\frac{R^4}{4}=\frac{1}{4}\pi R^4.$$

Так как объем полушара равен $\frac{2}{3}\pi R^3$, то

$$\zeta=\frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{3}{8}R.$$

Перейдем к вычислению моментов инерции тела относительно координатных осей (см. п. **132**, III). Так как квадраты расстояний от точки $P(x, y, z)$ до осей Ox, Oy, Oz соответственно равны y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2, то полагая для простоты $\delta\equiv 1$, получим следующие формулы:

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\,dv,\qquad I_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\,dv,\qquad I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv.$$

Аналогично плоскому случаю интегралы

$$I_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}xy\,dv,\qquad I_{yz}=\iiint\limits_{\Omega}yz\,dv,\qquad I_{zx}=\iiint\limits_{\Omega}zx\,dv$$

называются центробежными моментами инерции.

Для полярного момента инерции формула имеет вид

$$I_0=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv.$$

Если тело неоднородное, то в каждой формуле под знаком интеграла будет находиться дополнительный множитель $\delta(x, y, z)$ — плотность тела в точке P.

Пример. Вычислим полярный момент инерции однородного шара радиуса R. В этом случае очень удобно перейти к сферическим координатам. Будем иметь

$$I_0=\delta\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2r^2\,dr=\frac{4\pi\delta R^5}{5}=\frac{3}{5}MR^2,$$

где M — масса шара.

Так как для сферы моменты инерции относительно осей координат, очевидно, равны между собой, то, учитывая, что $I_x+I_y+I_z=2I_0$, получим

$$I_x=I_y=I_z=\frac{2}{5}MR^2.$$

Моменты инерции тела относительно оси играют важную роль при вычислении кинетической энергии тела при его вращении около соответствующей оси. Пусть тело Ω вращается около оси Oz

с постоянной угловой скоростью ω. Найдем кинетическую энергию J_z тела. Как известно, кинетическая энергия точки измеряется величиной $\frac{1}{2}mv^2$, где m — масса точки, а v — величина ее скорости. Кинетическая энергия системы точек определяется как сумма кинетических энергий отдельных точек, а кинетическая энергия тела — как сумма кинетических энергий всех частей, на которые оно разбито. Это обстоятельство позволяет применить для вычисления кинетической энергии интеграл.

Возьмем какую-нибудь окрестность dv точки $P(x, y, z)$ тела Ω. Величина линейной скорости v точки P при вращении около оси Oz равна $\omega\sqrt{x^2+y^2}$, и значит, кинетическая энергия части dv тела Ω выразится так:

$$\frac{1}{2}\delta(P)\,dv\,\omega^2(x^2+y^2),$$

где $\delta(P)=\delta(x, y, z)$ — плотность тела в точке P. Для кинетической энергии всего тела Ω получаем

$$J_z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)\,\delta(P)\,dv=\frac{1}{2}\omega^2\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\delta(P)\,dv,$$

т. е.

$$J_z=\frac{1}{2}\omega^2 I_z.$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося около некоторой оси с постоянной угловой скоростью, равна половине квадрата угловой скорости, умноженной на момент инерции тела относительно оси вращения.

§ 3*. Интегралы, зависящие от параметра

136*. Интегралы с конечными пределами. Ранее нам уже встречались интегралы, в которых подынтегральная функция зависит от двух переменных, а интегрирование совершается по одной из них в предположении, что вторая переменная считается постоянной. Так было в п. **115** при отыскании функции по ее полному дифференциалу и в п. **130** при вычислении двойного интеграла с помощью последовательного интегрирования. В виду того, что такие интегралы встретятся и в дальнейшем, как в курсе анализа, так и в различных дополнительных разделах (например, при изучении уравнений математической физики и операционного исчисления), рассмотрим их более подробно.

Итак, пусть задана функция $f(x, \lambda)$, которая определена и непрерывна при всех значениях x и λ, удовлетворяющих условиям

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{и} \quad \alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta.$$

Если вычислять интеграл $\int_a^b f(x, \lambda)\,dx$ при различных значениях $\lambda \in [\alpha, \beta]$, то каждому значению λ будет соответствовать свое значение интеграла, являющегося, таким образом, некоторой функцией от λ; обозначим ее через $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda)\,dx. \qquad (*)$$

Интервал интегрирования $[a, b]$ предполагается к о н е ч н ы м (случай бесконечного интервала интегрирования будет рассмотрен позднее). Интервал $[\alpha, \beta]$ — область определения функции $F(\lambda)$ — может быть как конечным, так и бесконечным.

П р и м е р ы. 1) $\int_0^1 e^{\lambda x}\,dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^1 = \frac{e^{\lambda}-1}{\lambda}$, если $\lambda \neq 0$. При $\lambda = 0$ интеграл равен 1. Здесь функция $F(\lambda)$ определена и непрерывна при всех значениях λ (проверить непрерывность при $\lambda = 0$ предоставляем читателю).

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lambda}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{\lambda}$. Интеграл определен, если $|\lambda| > 1$; при $\lambda = \pm 1$ интеграл становится несобственным (подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$), но сходящимся.

3) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \lambda^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - \lambda^2}\right)\Big|_1^2 = \ln\frac{2 + \sqrt{4 - \lambda^2}}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}$. Интеграл определен при $\lambda \in [-1, 1]$.

Лишний раз подчеркнем, что если функция $f(x, \lambda)$ и интервал интегрирования $[a, b]$ заданы, то интеграл $(*)$ зависит только от λ. Наша ближайшая задача изучить свойства функции $F(\lambda)$ — *интеграла, зависящего от параметра.* В основе лежит следующая

Т е о р е м а I. **Если функция $f(x, \lambda)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, то функция $F(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda)\,dx$ непрерывна в интервале $[\alpha, \beta]$.**

Доказательство. Чтобы не усложнять доказательство, дополнительно предположим, хотя это и не дано в условии теоремы, что функция $f(x, \lambda)$ имеет частную производную $f'_\lambda(x, \lambda)$, ограниченную при всех рассматриваемых значениях x и λ: $|f'_\lambda(x, \lambda)| \leqslant M$.

Пусть λ и $\lambda+\Delta\lambda$ лежат в интервале $[\alpha, \beta]$. По определению

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x, \lambda)\,dx, \qquad F(\lambda+\Delta\lambda)=\int_a^b f(x, \lambda+\Delta\lambda)\,dx.$$

Приращение функции $F(\lambda)$ равно

$$F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)=\int_a^b [f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)]\,dx. \qquad (**)$$

Подынтегральное выражение преобразуем по теореме Лагранжа

$$f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)=f'_\lambda(x, \xi)\,\Delta\lambda,$$

где $\xi \in (\lambda, \lambda+\Delta\lambda)$. Учитывая предполагаемое условие ограниченности производной f'_λ, придем к неравенству

$$|f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)| \leqslant M|\Delta\lambda|.$$

Так как модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции (см. п. **90**, II), то

$$|F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)|=\left|\int_a^b [f(x, \lambda+\Delta\lambda)-f(x, \lambda)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b M|\Delta\lambda|\,dx = M(b-a)|\Delta\lambda|.$$

Отсюда следует, что если $\Delta\lambda \to 0$, то и $F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda) \to 0$, т. е. что функция $F(\lambda)$ непрерывна. Мы будем пользоваться теоремой в том виде, в каком она сформулирована, хотя ее доказательство проведено в упрощающем предположении. Отметим еще, что в ходе доказательства существенно использовалась конечность интервала интегрирования $[a, b]$.

Часто условие непрерывности интеграла, зависящего от параметра, записывают в виде

$$\lim_{\xi \to \lambda}\int_a^b f(x, \xi)\,dx = \int_a^b f(x, \lambda)\,dx, \qquad (***)$$

выражающем тот факт, что предел непрерывной функции $F(\xi)$ при $\xi \to \lambda$ равен значению этой функции при $\xi=\lambda$.

При пользовании этой теоремой нужно внимательно следить за выполнением всех ее условий. Так, например, пусть

$$F(\lambda)=\int_0^1 \frac{\lambda\,dx}{x^2+\lambda^2}=\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\Big|_0^1=\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda}.$$

Эта функция непрерывна при всех значениях λ, кроме $\lambda=0$; дело в том, что подынтегральная функция $f(x,\ \lambda)=\frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}$ разрывна при $\lambda=0$ и $x=0$.

Чтобы функция $F(\lambda)$ была дифференцируемой, нужно предъявить дополнительные требования к функции $f(x,\ \lambda)$.

Теорема II. **Если функция $f(x,\ \lambda)$ и ее частная производная $f'_\lambda(x,\ \lambda)$ непрерывны при $a\leqslant x\leqslant b$ и $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$, то функция $F(\lambda)$ имеет непрерывную производную $F'(\lambda)$ и справедлива формула**

$$F'(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\int_a^b f(x,\ \lambda)\,dx=\int_a^b f'_\lambda(x,\ \lambda)\,dx.$$

Доказательство. Вернемся к формуле (**), выражающей приращение функции $F(\lambda)$, и разделим обе ее части на $\Delta\lambda$; преобразовывая затем подынтегральное выражение по теореме Лагранжа, получим

$$\frac{F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_a^b f'_\lambda(x,\ \xi)\,dx.$$

Так как $\xi\in(\lambda,\ \lambda+\Delta\lambda)$, то при $\Delta\lambda\to 0$ значение $\xi\to\lambda$. Поэтому, переходя к пределу при $\Delta\lambda\to 0$, запишем

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)}{\Delta\lambda}=\lim_{\xi\to\lambda}\int_a^b f'_\lambda(x,\ \xi)\,dx.$$

По условию теоремы производная $f'_\lambda(x,\ \lambda)$ непрерывна; поэтому предел правой части существует (см. формулу (***)); значит, существует предел и левой части равенства, а это и есть как раз производная $F'(\lambda)$, и эти пределы равны между собой:

$$F'(\lambda)=\int_a^b f'_\lambda(x,\ \lambda)\,dx.$$

Теорема доказана. Коротко ее формулируют так: *производная от интеграла по параметру равна интегралу от производной подынтегральной функции по этому параметру.* Это предложение называется правилом Лейбница; именно на него мы ссылались в сноске на стр. 389.

Правило Лейбница иногда применяется для отыскания сложных определенных интегралов.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\Big|_0^1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$. Дифференцируя обе части равенства по параметру a, причем дифференцирование интеграла совершается по правилу Лейбница, т. е. путем дифференцирования подынтегрального выражения, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{-2a\,dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2} \left(-\frac{1}{a^2}\right),$$

откуда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2(a^2+1)}.$$

Продолжая дифференцирование, мы сможем вычислить интегралы $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ для $n=3, 4, \ldots$ Вычисление их без применения правила Лейбница привело бы к гораздо более громоздким выкладкам.

До сих пор мы рассматривали интегралы, у которых пределы интегрирования были постоянны. Встречаются, однако, и такие интегралы, у которых пределы интегрирования сами являются некоторыми функциями того параметра, от которого зависит подынтегральная функция. Как раз это имеет место при вычислении внутреннего интеграла при сведении двойного интеграла к повторному.

Пусть

$$F(\lambda) = \int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \lambda)\,dx.$$

Будем считать, что подынтегральная функция $f(x, \lambda)$ и ее частная производная $f'_\lambda(x, \lambda)$ непрерывны при всех рассматриваемых значениях x и λ, и пределы интегрирования $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ вместе со своими производными — тоже непрерывные функции от λ. Тогда функция $F(\lambda)$ непрерывна, дифференцируема и ее производная равна

$$F'(\lambda) = \int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f'_\lambda(x, \lambda)\,dx + f[b(\lambda), \lambda]\, b'(\lambda) - f[a(\lambda), \lambda]\, a'(\lambda)$$

(общее правило Лейбница).

Доказывать эту формулу мы не будем; отметим только, что приведенная выше формула для случая постоянных пределов интегрирования, а также теорема о дифференцировании интеграла по его верхнему пределу (см. п. **91**) являются ее частными случаями.

137. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Приведенные выше теоремы относятся, как уже было отмечено, к интегралам с конечными пределами и с непрерывной подынтегральной функцией. Для несобственных интегралов дело обстоит значительно сложнее. Мы ограничимся рассмотрением наиболее часто встречающихся несобственных интегралов вида

$$F(\lambda)=\int_a^\infty f(x,\ \lambda)\,dx. \tag{$*$}$$

Областью определения функции $F(\lambda)$ служит совокупность значений λ, при которых интеграл $(*)$ сходится. Как правило, это некоторый интервал, конечный или бесконечный.

Начнем с примера. Пусть

$$F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x}\,dx=\left.\frac{e^{-\lambda^2 x}}{-\lambda^2}\right|_0^\infty=\frac{1}{\lambda^2}$$

($e^{-\lambda^2 x}\longrightarrow 0$ при $x\longrightarrow+\infty$). Подынтегральная функция непрерывна при всех значениях x и λ; функция же $F(\lambda)$ имеет бесконечный разрыв при $\lambda=0$.

Чтобы установить, при каких условиях теоремы п. **136** останутся справедливыми для несобственных интегралов вида $(*)$, введем следующее определение.

Определение. **Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,\ \lambda)\,dx$, зависящий от параметра λ, называется *правильно сходящимся*, если можно указать такую положительную функцию $\varphi(x)$, что при всех рассматриваемых значениях x и λ соблюдается неравенство $|f(x,\ \lambda)|\leqslant\varphi(x)$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ сходится**[1]**.**

Пример. Интегралы $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{1+x^2}dx$ и $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}dx$ сходятся правильно при всех значениях λ, так как модули подынтегральных функций не превосходят положительной функции $\frac{1}{1+x^2}$, интеграл от которой сходится.

Для правильно сходящихся несобственных интегралов $(*)$ имеют место следующие свойства, которые мы приводим без доказательства.

[1]) В более подробных курсах анализа вводится более общее, но и более трудное понятие *равномерной* сходимости интегралов, зависящих от параметра.

1. *Если функция* $f(x, \lambda)$ *непрерывна при* $x \geqslant a$ *и* $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ *и интеграл* $F(\lambda) = \int\limits_a^\infty f(x, \lambda)\, dx$ *сходится правильно, то он является непрерывной функцией параметра* λ.

2. *Если при этом функция* $f(x, \lambda)$ *имеет непрерывную частную производную* $f'_\lambda(x, \lambda)$ *и интеграл от этой производной тоже сходится правильно, то функция* $F(\lambda)$ *дифференцируема и справедлива формула*

$$F'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int\limits_a^\infty f(x, \lambda)\, dx = \int\limits_a^\infty f'_\lambda(x, \lambda)\, dx.$$

В качестве примера применения указанных свойств вычислим один важный интеграл Пуассона, встречающийся при решении задач математической физики

$$I(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos \lambda x\, dx. \qquad (*)$$

Заметим, что при $\lambda = 0$ получаем интеграл $I(0) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, вычисленный в п. **131**. Интеграл (*) правильно сходится, так как $|e^{-x^2} \cos \lambda x| \leqslant e^{-x^2}$. Дифференцируя интеграл (*), получим

$$I'(\lambda) = -\int\limits_0^\infty x e^{-x^2} \sin \lambda x\, dx.$$

Это действие законное, так как последний интеграл тоже сходится правильно. Действительно $|x e^{-x^2} \sin \lambda x| \leqslant x e^{-x^2}$, а интеграл $\int\limits_0^\infty x e^{-x^2}\, dx = -\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}$.

Интеграл, выражающий $I'(\lambda)$, проинтегрируем по частям, полагая $x e^{-x^2}\, dx = dv$, $\sin \lambda x = u$. Тогда $v = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$, $du = \lambda \cos \lambda x$ и

$$I'(\lambda) = -\int\limits_0^\infty x e^{-x^2} \sin \lambda x\, dx = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin \lambda x \Big|_0^\infty - \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos \lambda x\, dx.$$

Внеинтегральный член равен нулю и при $x = 0$, и при $x = \infty$, а последний интеграл есть снова $I(\lambda)$. В результате мы приходим к соотношению $I'(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} I(\lambda)$, которое перепишем в виде

$$\frac{I'(\lambda)}{I(\lambda)} = [\ln I(\lambda)]' = -\frac{\lambda}{2}.$$

Интегрируя, найдем, что $\ln I(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{4} + C$. При $\lambda = 0$ интеграл $I(0)$ равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; поэтому $C = \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Окончательно $\ln I(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{4} + \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ и

$$I(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как определяется объем цилиндрического тела?

2. Что называется двойным интегралом от данной функции по данной области?

3. В чем состоит теорема существования двойного интеграла?

4. Перечислить свойства двойного интеграла.

5. Вывести правило вычисления двойного интеграла в случае области, ограниченной линией, пересекающейся с прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках. Привести соответствующую формулу.

6. Как вычисляется двойной интеграл с помощью повторных в случае произвольной области интегрирования в системе декартовых координат?

7. Как выражается элемент площади в полярных координатах?

8. Вывести правило преобразования двойного интеграла от декартовых координат к полярным. Привести соответствующую формулу.

9. Как вычисляется двойной интеграл в полярных координатах с помощью повторного интегрирования?

10. Как определяется масса неоднородной пластинки по заданной плотности?

11. Вывести формулы для вычисления статических моментов и моментов инерции пластинки.

12. Как определяется масса неоднородного тела по заданной плотности?

13. Что называется тройным интегралом от данной функции по данной области?

14. Перечислить свойства тройного интеграла.

15. Как вычисляются тройные интегралы в декартовой системе координат?

16. Как вычисляются тройные интегралы в цилиндрической системе координат?

17. Как вычисляются тройные интегралы в сферических координатах?

18. Вывести формулы для вычисления координат центра тяжести пространственного тела.

19. Вывести формулы для вычисления моментов инерции тел.

20*. Дать определение интеграла, зависящего от параметра. Привести примеры.

21*. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.

22*. Сформулировать и доказать теорему о дифференцировании интеграла по параметру (правило Лейбница).

23*. Дать определение правильно сходящихся интегралов и сформулировать их свойства.

ГЛАВА IX

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

§ 1. Криволинейный интеграл

138. Задача о работе силового поля. Криволинейный интеграл. В п. **86**, II была рассмотрена задача о работе переменной силы при движении тела по прямой линии, причем направление силы совпадало с направлением движения. Мы рассмотрим сейчас задачу, значительно более общую.

Предположим, что в области D плоскости Oxy задано плоское силовое поле. Это означает, что на материальную точку, помещенную в области D, действует сила $\mathbf{F}$[1]), определенная в каждой точке D и расположенная в плоскости Oxy[2]). Область D может совпадать со всей плоскостью Oxy или составлять некоторую ее часть.

Тот факт, что сила $\mathbf{F}$ зависит от точки ее приложения, записывают в виде

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}(x, y),$$

где x и y — координаты точки приложения силы. Чтобы задать силу $\mathbf{F}(x, y)$, зададим ее проекции на оси координат, которые будут также являться функциями переменных x и y. Обозначим их $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Тогда

$$\mathbf{F}=P(x, y)\,\mathbf{i}+Q(x, y)\,\mathbf{j}.$$

---

[1]) Часто в физике, чтобы охарактеризовать силовое поле независимо от помещенной в него материальной точки, вводят вектор напряженности поля, понимая под ним силу взаимодействия поля с некоторым «единичным» телом, т. е., например, с телом единичной массы, если речь идет о поле тяготения, с единичным зарядом, если речь идет об электростатическом поле, и т. д. В этом случае сила взаимодействия поля с данным телом будет равна произведению вектора напряженности поля соответственно на массу или заряд данного тела.

Отметим еще, что силовое поле является частным случаем *векторного поля* (см. п. **151**).

[2]) Пространственное силовое поле будет рассмотрено в п. **146**.

Пусть под действием сил поля материальная точка движется по некоторой линии L, расположенной в области D и соединяющей точки B и C (рис. 178). Найдем работу, совершаемую силами поля $\mathbf{F}(x, y)$ при этом перемещении точки.

Разобьем линию L на n частей точками $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, B_{n+1}$ (точка B_1 совпадает с B, а B_{n+1} — с C), координаты точек деления B_k обозначим через x_k и y_k $(k=1, 2, \ldots, n+1)$. Заменим теперь

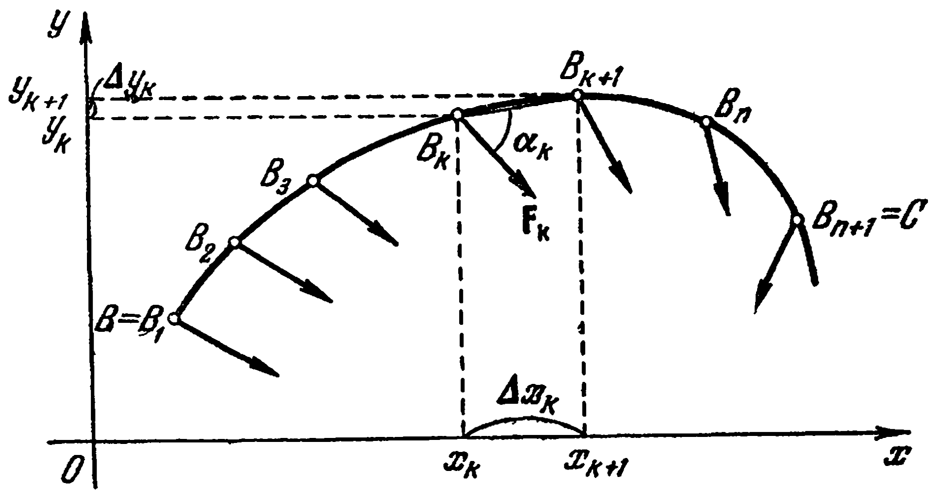

Рис. 178.

каждый криволинейный участок B_kB_{k+1} прямолинейным вектором перемещения B_kB_{k+1}. Условимся считать, что при движении материальной точки по отрезку B_kB_{k+1} на нее действует постоянная сила, равная силе, приложенной в точке B_k:

$$\mathbf{F}_k = P(x_k, y_k)\,\mathbf{i} + Q(x_k, y_k)\,\mathbf{j}.$$

Тогда работа на этом участке будет равна

$$\Delta A_k = |\mathbf{F}_k| \cdot |\overline{B_kB_{k+1}}| \cos\alpha_k,$$

где α_k — угол между векторами $\mathbf{F}_k$ и $\overline{B_kB_{k+1}}$. Написанное выражение представляет собой скалярное произведение векторов $\mathbf{F}_k$ и $\overline{B_kB_{k+1}}$, т. е.

$$\Delta A_k = \mathbf{F}_k \cdot \overline{B_kB_{k+1}}.$$

Так как проекции вектора $\overline{B_kB_{k+1}}$ на оси координат равны соответственно $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$ и $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, то

$$\overline{B_kB_{k+1}} = \Delta x_k\,\mathbf{i} + \Delta y_k\,\mathbf{j}.$$

В силу известной формулы для скалярного произведения работа на рассматриваемом участке будет равна

$$\Delta A_k = P(x_k, y_k)\,\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\,\Delta y_k.$$

Суммируя полученные выражения по всем участкам, найдем приближенное значение искомой работы:

$$A_n=\sum_{k=1}^{n} P(x_k,\ y_k)\,\Delta x_k+Q(x_k,\ y_k)\,\Delta y_k. \qquad (*)$$

Переходя к пределу при $n\longrightarrow\infty$ и считая, что длина наибольшего участка стремится к нулю, мы и получим истинную величину работы.

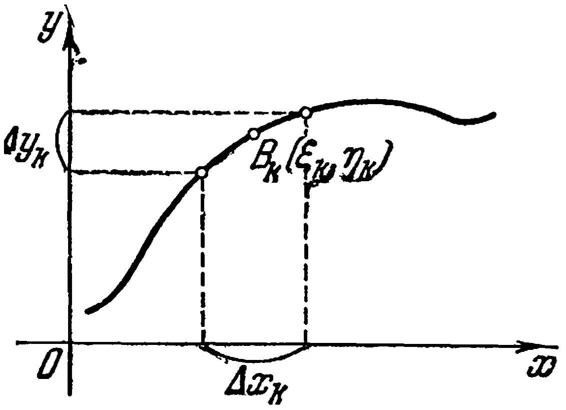

Рис. 179.

К составлению сумм вида $(*)$ с последующим переходом к пределу приводит не только задача о работе, и поэтому совсем не обязательно всегда считать, что $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ — проекции сил.

Рассмотрим этот вопрос в общем виде. Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции двух переменных, непрерывные в некоторой области D, и L — гладкая линия, целиком расположенная в этой области. Разобьем линию L на n участков и в каждом таком участке выберем по произвольной точке $B_k(\xi_k,\ \eta_k)$ (в частности, эти точки могут совпадать с концами участков, как на рис. 178). Обозначим проекции k-го участка на оси координат через Δx_k и Δy_k (рис. 179) и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\ \eta_k)\,\Delta x_k+Q(\xi_k,\ \eta_k)\,\Delta y_k. \qquad (**)$$

Сумма $(**)$ называется *n-й интегральной суммой по линии L*, а ее предел

$$\lim\sum_{k=1}^{n} P(x_k,\ y_k)\,\Delta x_k+Q(x_k,\ y_k)\,\Delta y_k=\int_L P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy$$

— *криволинейным интегралом по линии L* [1]).

Определение. ***Криволинейным интегралом по линии L* называется предел n-й интегральной суммы $(*)$ при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой L.**

Линия L называется *линией* или *контуром интегрирования*. Точка B называется *начальной*, а точка C — *конечной точками интегрирования*.

---

[1]) Этот интеграл называют часто *криволинейным интегралом по координатам* или *второго рода*. Криволинейный интеграл по длине кривой (первого рода) будет рассмотрен в п. **145**.

В частности, если $Q(x, y) \equiv 0$, то интеграл имеет вид

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx$$

и называется *криволинейным интегралом по координате* x.

Аналогично, если $P(x, y) \equiv 0$, то

$$\int\limits_L Q(x, y)\, dy$$

называется *криволинейным интегралом по координате* y.

Возвращаясь к задаче о работе, можно сказать, что работа силового поля при перемещении материальной точки по кривой L выражается криволинейным интегралом

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — проекции сил поля на оси координат.

139. Вычисление криволинейных интегралов. Интегралы по замкнутому контуру. Вычисление криволинейных интегралов, как мы сейчас покажем, приводится к вычислению обыкновенных определенных интегралов. Рассмотрим, например, интеграл

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx$$

и предположим, что уравнение линии интегрирования L дано в параметрическом виде:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Начальной точке линии (B) соответствует значение параметра t_B, а конечной (C) — t_C. Возьмем интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k,$$

пределом которой является данный криволинейный интеграл, и преобразуем ее к переменной t. Так как

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k),$$

то, применяя формулу Лагранжа (см. п. **57**, I), получим

$$\Delta x_k = x'(\theta_k)\, \Delta t_k,$$

где θ_k лежит в интервале $[t_k, t_{k+1}]$, а $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. В качестве промежуточной точки (ξ_k, η_k) выберем как раз ту, которая соответствует значению параметра θ_k. Тогда

$$\xi_k = x(\theta_k), \quad \eta_k = y(\theta_k).$$

Преобразованная сумма

$$\sum_{k=1}^{n} P[x(\theta_k),\ y(\theta_k)]\,x'(\theta_k)\,\Delta t_k$$

будет обыкновенной интегральной суммой для функции одной переменной $P[x(t),\ y(t)]\,x'(t)$, а ее предел — определенным интегралом

$$\int_{t_B}^{t_C} P[x(t),\ y(t)]\,x'(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$\int_L P(x,\ y)\,dx = \int_{t_B}^{t_C} P[x(t), y(t)]\,x'(t)\,dt.$$

Совершенно аналогично получим, что

$$\int_L Q(x,\ y)\,dy = \int_{t_B}^{t_C} Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\,dt.$$

Отсюда и вытекает правило вычисления криволинейного интеграла.

Для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int_L P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy,$$

взятый по линии $x = x(t)$, $y = y(t)$, преобразовать в обыкновенный, нужно в подынтегральном выражении заменить x, y, dx и dy их выражениями через t и dt и вычислить получившийся интеграл по интервалу изменения параметра t:

$$\int_L P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy =$$
$$= \int_{t_B}^{t_C} \{P[x(t),\ y(t)]\,x'(t) + Q[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\}\,dt,$$

где t_B и t_C — значения параметра t, соответствующие точкам B и C линии L.

Из приведенного правила вытекает, что криволинейный интеграл всегда существует, если функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ непрерывны, а $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными. Последнее условие означает, что линия L гладкая, т. е. имеет непрерывно меняющуюся касательную. Впрочем, линия L может состоять и из нескольких участков, на каждом из которых это условие выполняется. Тогда при переходе к обыкновенному интегралу надо линию L разбить на эти участки и рассматривать весь интеграл как сумму интегралов по отдельным участкам.

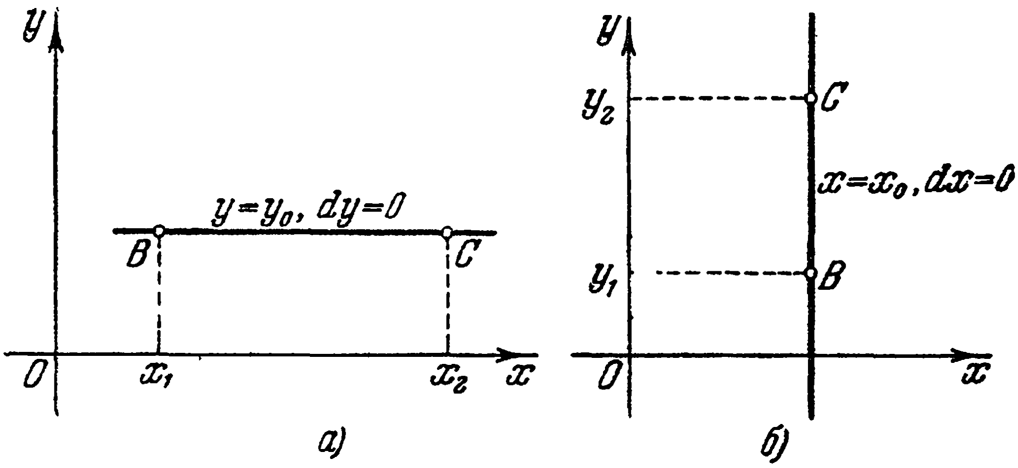

Рис. 180.

Если уравнение линии L может быть задано в виде $y=y(x)$, то, полагая в общей формуле преобразования $t=x$, получим

$$\int_L P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int_{x_B}^{x_C}\{P[x, y(x)]+Q[x, y(x)]\,y'(x)\}\,dx,$$

где x_B и x_C — абсциссы точек B и C.

Читателю предлагается записать самостоятельно формулу преобразования криволинейного интеграла, если уравнение кривой задано в виде $x=x(y)$.

Если отдельные участки контура интегрирования заданы уравнениями различных видов, то этот контур нужно разбить на части и интеграл вычислять как сумму интегралов по отдельным участкам.

Отметим для дальнейшего важные частные случаи.

Если контур интегрирования L — отрезок прямой, параллельной оси абсцисс (рис. 180, a), то криволинейный интеграл сразу превращается в обыкновенный. Так как $y=y_0$ и $dy=0$, то

$$\int_L P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int_{x_1}^{x_2} P(x, y_0)\,dx.$$

Если L — отрезок прямой, параллельной оси ординат (рис. 180, $б$), то $x=x_0$, $dx=0$ и

$$\int_L P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int_{y_1}^{y_2} Q(x_0, y)\,dy.$$

Примеры. 1) Вычислим интеграл

$$I=\int_L xy\,dx+(x+y)\,dy,$$

принимая за линию L (рис. 181):

а) отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,\ 0)$ и $A(1,\ 1)$;

б) дугу параболы $y=x^2$, соединяющую эти же точки;

в) ломаную OBA.

В случае а) уравнение линии интегрирования $y=x$. Следовательно, $dy=dx$ и

$$I=\int_0^1 (x^2+2x)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3}.$$

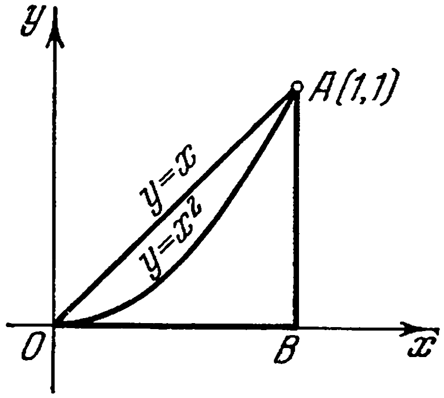

Рис. 181.

В случае б) $y=x^2$, $dy=2x\,dx$ и

$$I=\int_0^1 [x^3+(x+x^2)\,2x]\,dx=\frac{17}{12}.$$

В случае в) контур интегрирования разбиваем на два. На участке OB $y=0$ и $dy=0$, а на участке BA $x=1$ и $dx=0$. Поэтому

$$I=\int_0^1 (1+y)\,dy=\frac{(1+y)^2}{2}\Big|_0^1=\frac{3}{2}.$$

Как видим, во всех трех случаях мы получили различные значения интеграла, несмотря на то что начальная и конечная точки контура интегрирования были одни и те же. Это показывает, что криволинейный интеграл зависит не только от начальной и конечной точек интегрирования, но и от линии, их соединяющей. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в п. **141**.

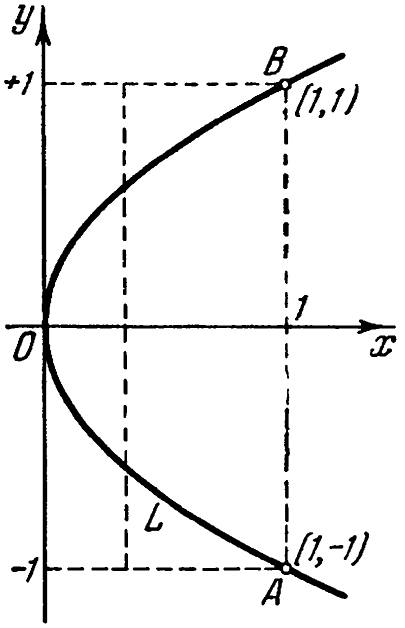

Рис. 182.

2) Вычислим интеграл

$$I=\int_L xy\,dx,$$

где L — дуга параболы $x=y^2$ от ее точки $A(1,\ -1)$ до точки $B(1,\ 1)$ (рис. 182). Так как в уравнении контура x является однозначной функцией от y, то, подставив в интеграл $x=y^2$,

$dx=2y\,dy$, получим

$$I=\int_{-1}^{1} y^2y\cdot 2y\,dy=\frac{2y^5}{5}\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}.$$

Если бы мы захотели уравнение контура записать в форме, разрешенной относительно $y: y=\pm\sqrt{x}$, то для вычисления интеграла нам пришлось бы разбить контур L на две части: AO и OB, уравнения которых суть $y=-\sqrt{x}$ и $y=+\sqrt{x}$. Тогда

$$I=\int_{AO} xy\,dx+\int_{OB} xy\,dx=-\int_{1}^{0} x\sqrt{x}\,dx+\int_{0}^{1} x\sqrt{x}\,dx=2\int_{0}^{1} x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}.$$

3) Вычислим интеграл

$$I=\int_{L} y\,dx-x\,dy,$$

где L — дуга циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ от точки $O(0,\ 0)$ до точки $A(4\pi,\ 0)$. Пользуясь общим правилом, приходим к интегралу (точке O соответствует значение $t=0$, а точке A — значение $t=2\pi$)

$$I=\int_{0}^{2\pi} [4(1-\cos t)^2-4(t-\sin t)\sin t]\,dt=$$

$$=4\int_{0}^{2\pi} (2-2\cos t-t\sin t)\,dt=4\left[2t\,\Big|_{0}^{2\pi}-2\sin t\,\Big|_{0}^{2\pi}-\int_{0}^{2\pi} t\sin t\,dt\right].$$

Интегрируя последний интеграл по частям, окончательно получим

$$I=16\pi-4(-t\cos t+\sin t)\Big|_{0}^{2\pi}=24\pi.$$

До сих пор мы все время рассматривали случаи, когда контур интегрирования был незамкнутым, т. е. когда его начальная и конечная точки были различны. Заданием этих точек определялось и направление интегрирования. Ясно, что *если направление интегрирования изменить на противоположное, то криволинейный интеграл изменит знак на противоположный.* Это следует хотя бы из общего правила приведения его к определенному интегралу. Записывают это так (для сокращения записи мы пишем P и Q вместо $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$):

$$\int_{-L} P\,dx+Q\,dy=-\int_{+L} P\,dx+Q\,dy,$$

где через $-L$ и $+L$ обозначена линия L при двух ее взаимно противоположных направлениях.

Очень часто встречаются случаи, когда криволинейный интеграл вычисляется по замкнутому контуру (рис. 183); часто такие криволинейные интегралы обозначают символом $\oint\limits_L$. При этом, разумеется, выбор начальной точки интегрирования (она же является и конечной) на контуре интегрирования никакой роли не играет.

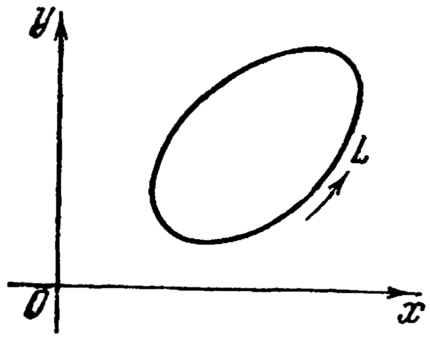

Рис. 183

В случае замкнутого контура на плоскости направление обхода, при котором область, ограниченная контуром, остается слева, называют *положительным*. Перемещение в противоположном направлении называют *отрицательным*. В первом случае обход контура совершается против часовой стрелки, а во втором наоборот.

Условимся считать в дальнейшем, что если L — замкнутый контур, то направление интегрирования в интеграле $\int\limits_L P\,dx+Q\,dy$ всегда будет положительным; интегрирование же в отрицательном направлении будем обозначать так:

$$\int\limits_{-L} P\,dx+Q\,dy.$$

В силу сказанного выше эти интегралы отличаются только знаком.

Имеет место такое специфическое свойство криволинейных интегралов:

Теорема. **Если область D, ограниченную замкнутой линией L, разбить на две части D_1 и D_2, то криволинейный интеграл по всей линии L равен сумме интегралов, взятых в том же направлении по линиям L_1 и L_2, ограничивающим области D_1 и D_2.**

Доказательство. Пусть область D ограничена замкнутой линией $L(AECBA)$, а области D_1 и D_2 — соответственно линиями $L_1(AECA)$ и $L_2(ACBA)$ (рис. 184). Имеем

$$\int\limits_{L_1} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{AEC} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{CA} P\,dx+Q\,dy$$

и

$$\int\limits_{L_2} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{AC} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{CBA} P\,dx+Q\,dy.$$

Интегралы по CA и AC берутся по одной и той же линии, но в противоположных направлениях; поэтому их сумма равна нулю. Складывая почленно два последних равенства, получим

$$\int_{L_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{L_2} P\,dx+Q\,dy=$$
$$=\int_{AEC} P\,dx+Q\,dy+\int_{CBA} P\,dx+Q\,dy=\int_{L} P\,dx+Q\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема, как читатель сам легко убедится, справедлива при любом числе областей, на которые разбивается область D.

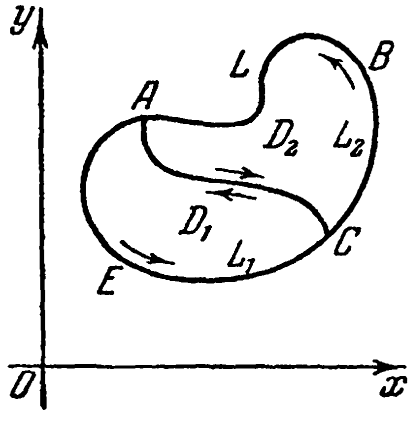

Рис. 184.

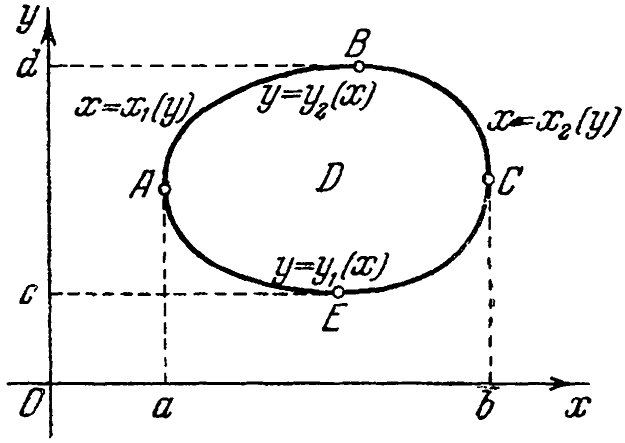

Рис. 185.

140. Формула Грина[1]**.** Важную роль в дальнейшем исследовании будет играть формула, связывающая криволинейный интеграл по замкнутому контуру с двойным интегралом, распространенным по области, ограниченной этим контуром.

Теорема. **Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области D, то имеет место формула**

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy=\int_L P\,dx+Q\,dy, \qquad (*)$$

где L — граница области D и интегрирование вдоль L производится в положительном направлении.

Формула (*) называется *формулой Грина*.

Доказательство. Сначала возьмем в плоскости Oxy область D, ограниченную линией L, пересекающейся с прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках

[1]) Д. Грин (1793—1841) — известный английский физик и математик.

(рис. 185). Преобразуем двойной интеграл

$$I=\iint\limits_{D}\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Интегрируя сначала по y, а потом по x, получим

$$I=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dy,$$

где $y=y_2(x)$ — уравнение линии ABC, $y=y_1(x)$ — уравнение линии AEC. Выполнив внутреннее интегрирование, будем иметь

$$I=\int\limits_{a}^{b}P(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx=\int\limits_{a}^{b}\{P[x, y_2(x)]-P[x, y_1(x)]\}\,dx=$$
$$=\int\limits_{a}^{b}P[x, y_2(x)]\,dx+\int\limits_{b}^{a}P[x, y_1(x)]\,dx.$$

Во втором интеграле мы изменили пределы интегрирования, соответственно этому изменился и знак.

Первый интеграл есть не что иное, как криволинейный интеграл $\int\limits_{ABC}P(x, y)\,dx$, а второй — криволинейный интеграл $\int\limits_{CEA}P(x, y)\,dx$. Сумма этих интегралов будет криволинейным интегралом по всему контуру L, обходимому в о т р и ц а т е л ь н о м направлении. Следовательно,

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=-\int\limits_{L}P\,dx. \tag{**}$$

Совершенно аналогично

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx=\int\limits_{c}^{d}\{Q[x_2(y), y]-Q[x_1(y), y]\}\,dy,$$

где $x_1(y)$ и $x_2(y)$ — уравнения линий EAB и ECB в форме, разрешенной относительно x. Рассуждая так же, как и в первом случае, получим

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int\limits_{ECB}Q(x, y)\,dy+\int\limits_{BAE}Q(x, y)\,dy.$$

Сумму интегралов, стоящих в правой части последнего равенства, заменим одним интегралом по всему контуру L, обходимому уже в положительном направлении:

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_L Q\,dy. \qquad (***)$$

Вычитая из равенства (***) почленно равенство (**), получим

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_L P\,dx + Q\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь область D, ограниченная контуром L, имеет более сложный вид. Разобьем ее предварительно на ряд областей, каждая из которых удовлетворяет поставленным выше условиям, т. е. пересекается с прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках. Например, область, изображенную на рис. 186, мы разбили пунктирными линиями на три области D_1, D_2 и D_3, ограниченные соответственно контурами L_1, L_2 и L_3. Для каждой из таких областей напишем формулу Грина и сложим полученные равенства. Сумма двойных интегралов по областям D_1, D_2 и D_3 даст двойной интеграл по всей области D, а сумма криволинейных интегралов по контурам L_1, L_2 и L_3 в силу теоремы, доказанной в п. 139, будет равна криволинейному интегралу по контуру L. Тем самым теорема Грина будет доказана для любой области D.

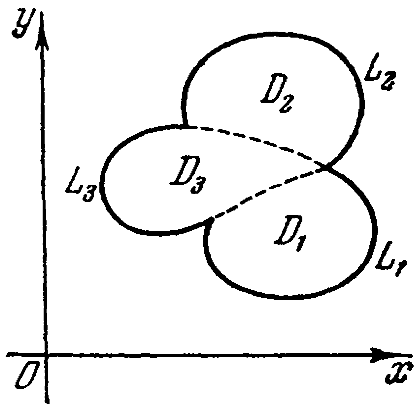

Рис. 186.

141. Условие независимости интеграла от линии интегрирования. Как мы уже отмечали при решении примера 1) в п. **139**, величина криволинейного интеграла

$$\int\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \qquad (*)$$

при заданном подынтегральном выражении и заданных начальной и конечной точках линии интегрирования может зависеть от линии, соединяющей эти точки.

Возникает вопрос: *при каких условиях интеграл* (*) *не зависит от линии, по которой производится интегрирование, а зависит исключительно от начальной и конечной точек линии интегрирования?*

С точки зрения механики независимость интеграла (*) от линии интегрирования означает, что величина работы в силовом поле, определяемом силой $\mathbf{F} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$, не зависит от формы пути, а зависит только от его начальной и конечной точек. То, что работа в поле тяжести не зависит от формы пути, хорошо известно из курса физики; решение же вопроса, поставленного выше, позволит выяснить, как будет обстоять дело в других, более сложных, силовых полях.

Прежде всего докажем простое вспомогательное предложение, которое позволит нам заменить рассматриваемый вопрос другим, решение которого мы получим, опираясь на результаты п. **140**. Для сокращения записи интеграл $\int\limits_L P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ будем обозначать символом I_L.

Лемма. **Для того чтобы криволинейный интеграл (*) не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, был равен нулю.**

Доказательство. Пусть известно, что интеграл (*) не зависит от линии интегрирования; покажем, что он равен нулю по любому замкнутому контуру. Возьмем какой-нибудь замкнутый контур L. Отметим на нем две точки B и C (рис. 187). Так как по условию интеграл по линии BMC равен интегралу по линии BNC:

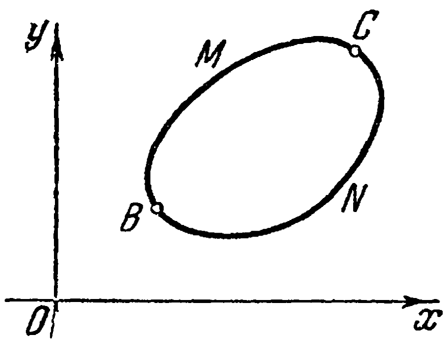

Рис. 187.

$$I_{BMC}=I_{BNC},$$

то интеграл по всему контуру L равен

$$I_L=I_{BNC}+I_{CMB}=I_{BNC}-I_{BMC}=0.$$

Обратно, пусть известно, что интеграл (*) обращается в нуль по всякому замкнутому контуру; покажем, что он не зависит от линии интегрирования. Возьмем какие-нибудь две линии BNC и BMC (рис. 187), соединяющие две заданные точки B и C. Так как по условию интеграл по замкнутому контуру $BNCMB$ равен нулю:

$$I_{BNCMB}=0, \text{ т. е. } I_{BNC}+I_{CMB}=0,$$

то

$$I_{BMC}=-I_{CNB}=I_{BNC}.$$

Таким образом, лемма полностью доказана.

Для дальнейшего существенно уточнить, с какими областями мы будем иметь дело. Условимся называть *односвязной областью* часть плоскости, ограниченную одной замкнутой линией[1]). Например, односвязными областями будут внутренности окружности, эллипса, многоугольника и т. п. Примером неодносвязной области служит кольцо; его граница состоит из двух непересекающихся замкнутых линий.

Перейдем теперь к основной теореме нашего исследования.

---

[1]) Предполагается, что эта линия не имеет самопересечений, т. е. не может, например, быть «восьмеркой».

Теорема. **Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл**

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{*}$$

не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D соблюдалось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{**}$$

Если указанные свойства функций P и Q соблюдаются при любых x и y, то область D совпадает со всей плоскостью Oxy.

Так как равенство (**) является необходимым и достаточным условием того, чтобы подынтегральное выражение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

было полным дифференциалом (см. п. **115**, I), основную теорему можно сформулировать в следующем виде.

Для того чтобы криволинейный интеграл (*) не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы его подынтегральное выражение было полным дифференциалом.

Доказательство. Как было отмечено в лемме, условие независимости интеграла от линии интегрирования равносильно равенству нулю интеграла (*) по любому замкнутому контуру, содержащемуся целиком в области D. Докажем сначала достаточность условия (**) для равенства нулю интеграла по любому замкнутому контуру. Возьмем произвольный замкнутый контур L^*, ограничивающий область D^* и целиком лежащий внутри области D, и применим к нему формулу Грина:

$$\int_{L^*} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Так как по условию $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то двойной интеграл равен нулю. Следовательно, равен нулю и криволинейный интеграл по контуру L^*, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству необходимости условия (**). Так как нам дано теперь, что интеграл (*) по любому замкнутому контуру равен нулю, то, опять-таки в силу формулы Грина, заключаем, что равен нулю и двойной интеграл

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0, \tag{***}$$

где G—любая область, заключенная внутри D. Допустим, что равенство $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ не выполняется. Возьмем какую-либо точку M, в которой это равенство нарушается, и вычислим разность $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ в этой точке.

Допустим, что эта разность положительна[1]), т. е.

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M > 0.$$

В силу предположенной непрерывности частных производных отсюда следует, что разность $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ будет положительна в некоторой достаточно малой области G, окружающей точку M, т. е.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} > 0$$

во всех точках области G. Но тогда по свойству двойных интегралов (п. 129)

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy > 0,$$

и мы пришли к противоречию с равенством (***). Это означает, что наше предположение о несоблюдении условия (**) было неверным, т. е. мы доказали, что $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ во всей области D. Теорема полностью доказана.

Обращаем еще раз внимание читателя на то, что все условия теоремы существенны. Возьмем, например, интеграл

$$I=\int\limits_L \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},$$

где L—окружность радиуса R с центром в начале координат. Здесь

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$Q=\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Несмотря на то, что условия независимости интеграла от линии интегрирования выполнены, интеграл нулю не равен Действительно, взяв уравнение окружности в параметрическом виде $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, получим

$$I=\int\limits_0^{2\pi} \frac{-R\sin t\,(-R\sin t)+R\cos t\cdot R\cos t}{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}\,dt=\int\limits_0^{2\pi} dt=2\pi.$$

---

[1]) Нетрудно убедиться в том, что если $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M < 0$, то ход доказательства не изменится.

Никакого противоречия с доказанной теоремой здесь нет. Просто не выполнены условия теоремы: функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ разрывны в начале координат, т. е. в точке, лежащей в н у т р и контура интегрирования. Если бы L был замкнутый контур, не содержащий в н у т р и себя начала координат, то условия теоремы выполнялись бы и тогда I_L был бы равен нулю.

Рассмотрим этот же пример еще и с другой точки зрения. Возьмем кольцо, изображенное на рис. 188. В этом кольце функции P и Q, а также их производные н е п р е р ы в н ы, но несмотря на это нельзя утверждать, что интегралы I_{L_1} и I_{L_2} равны между собой. Так как $I_{L_1}+I_{-L_2}=2\pi$, т. е. $I_{L_1}-I_{L_2}=2\pi$, то

$$I_{L_2}=I_{L_1}-2\pi.$$

Все дело в том, что кольцо ограничено двумя контурами и не является о д н о с в я з н о й областью, как это требуется в основной теореме.

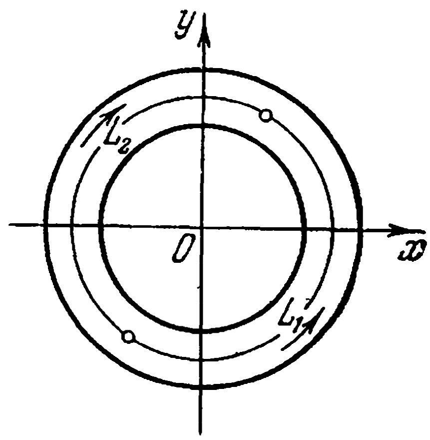

Рис. 188.

Подводя итоги нашего исследования, можно сказать, что если область D односвязна и функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными непрерывны в этой области, то все ч е т ы р е следующих утверждения равносильны, т. е. если выполняется одно из них, то выполняются и все остальные.

1. *Криволинейный интеграл* $\int P\,dx+Q\,dy$, *взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области* D, *равен нулю.*

2. *Криволинейный интеграл* $\int P\,dx+Q\,dy$ *не зависит от линии интегрирования.*

3. *Выражение* $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ *является полным дифференциалом.*

4. *Во всех точках области* D *имеет место равенство* $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

142. Интегрирование полных дифференциалов. Первообразная функция. Если подынтегральное выражение в криволинейном интеграле

$$\int\limits_L P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy \qquad (*)$$

является полным дифференциалом, то при соблюдении всех условий, сформулированных в основной теореме п. **141**, величина этого интеграла зависит исключительно от начальной и конечной точек линии интегрирования. Поэтому интеграл $(*)$ записывается обычно в виде

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x_1,\, y_1)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

где (x_0, y_0) — координаты начальной точки линии интегрирования, а (x_1, y_1) — конечной. Каков же наиболее целесообразный способ вычисления такого интеграла? Казалось бы, проще всего интегрировать по отрезку прямой, соединяющей данные точки. Однако это не так. Мы воспользуемся замечанием, сделанным на стр. 477, и будем интегрировать по ломаной $M_0M_2M_1$ (или $M_0M_3M_1$), звенья которой параллельны осям координат (рис. 189). Так как на участке M_0M_2 $y=y_0$ и $dy=0$, а на участке M_2M_1 $x=x_1$ и $dx=0$, то

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dx=\int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)\,dy. \quad (**)$$

Аналогичную формулу для интегрирования по ломаной $M_0M_3M_1$ предоставляем написать читателю самостоятельно.

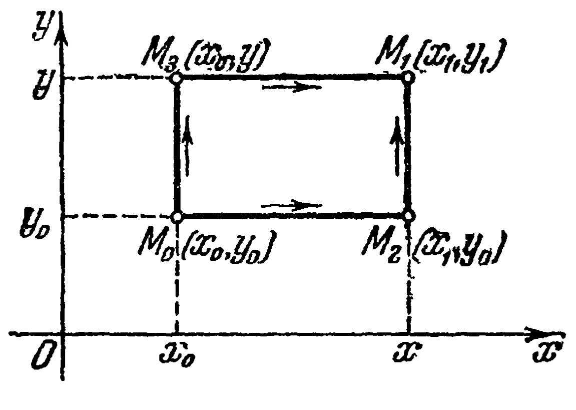

Рис. 189.

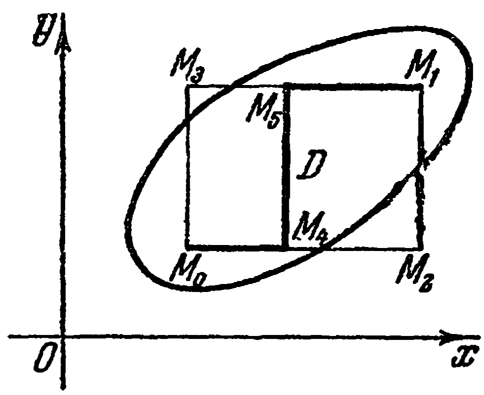

Рис. 190.

Если окажется, что ломаные $M_0M_2M_1$ и $M_0M_3M_1$ выходят из области D, где выполняются условия основной теоремы (рис. 190), то можно производить интегрирование, например, по ломаной $M_0M_4M_5M_1$.

Пример. Вычислим интеграл

$$I=\int\limits_{(0, 0)}^{(2, 1)} 2xy\,dx+x^2dy.$$

Здесь на звене ломаной, совпадающем с отрезком оси абсцисс, подынтегральное выражение равно нулю и

$$I=\int\limits_0^1 2^2\,dy=4.$$

Рассмотрим теперь интеграл с фиксированной начальной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и переменной конечной $M(x, y)$:

$$I(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy. \quad (***)$$

Величина этого интеграла будет зависеть только от координат конечной точки, т. е. являться *функцией переменных* x и y.

Выясним связь функции $I(x, y)$ с функцией $u(x, y)$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом

$$du = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Для этого будем вычислять интеграл (***) по формуле (**):

$$I(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy,$$

причем во втором интеграле x считается в процессе интегрирования постоянным. Так как $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ и $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, то

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(x, y_0)}{\partial x}\,dx = u(x, y_0)\Big|_{x_0}^{x} = u(x, y_0) - u(x_0, y_0)$$

и

$$\int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\,dy = u(x, y)\Big|_{y_0}^{y} = u(x, y) - u(x, y_0).$$

Следовательно,

$$I(x, y) = u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + u(x, y) - u(x, y_0),$$

или

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

Если функцию $u(x, y)$ мы назовем *первообразной* для полного дифференциала $P\,dx + Q\,dy$, то полученная формула является *формулой Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов*.

Пользуясь полученными результатами, мы можем указать способ отыскания функции $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу, во многих случаях более удобный, чем рассмотренный в п. **115**, а именно:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy + u(x_0, y_0).$$

Величина $u(x_0, y_0)$ играет роль произвольной постоянной. Это и понятно, потому что сама функция $u(x, y)$ определена с точностью до постоянного слагаемого. Воспользовавшись способами вычисления криволинейного интеграла (***), указанными выше, и заменяя

$u(x_0, y_0)$ через C, получим две равносильные формулы для отыскания $u(x, y)$:

$$u(x, y)=\begin{cases}\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy+C,\\ \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy+C.\end{cases}$$

Если в обоих формулах положить $C=0$, то получим функцию $u(x, y)$, обращающуюся в нуль в точке (x_0, y_0).

Начальную точку (x_0, y_0) следует выбирать так, чтобы подынтегральные функции были по возможности более простыми.

Пример. Найдем первообразную функцию $u(x, y)$ для полного дифференциала

$$(e^y+x)\,dx+(xe^y-2y)\,dy.$$

Выбирая в качестве начальной точки начало координат, получим

$$u(x, y)=\int\limits_0^x (1+x)\,dx+\int\limits_0^y (xe^y-2y)\,dy+C=$$

$$=\left.\frac{(1+x)^2}{2}\right|_0^x+\left.(xe^y-y^2)\right|_0^y+C=\frac{(1+x)^2}{2}+xe^y-x-y^2+C.$$

Обозначив $\frac{1}{2}+C$ одной буквой, получим окончательно

$$u(x, y)=\frac{x^2}{2}+xe^y-y^2+C.$$

Этот пример был уже рассмотрен нами в п. **115**, I. Рекомендуем читателю сравнить оба метода решения.

143. Криволинейные интегралы по пространственным линиям. До сих пор мы рассматривали криволинейные интегралы от функции двух независимых переменных x и y и линией интегрирования служила кривая, расположенная в плоскости Oxy.

Перейдем теперь к рассмотрению криволинейных интегралов от функции трех переменных. С физической точки зрения это будет означать, что материальная точка находится под действием сил пространственного силового поля. Такое поле определяется силой $\mathbf{F}(x, y, z)$ или, иначе, ее проекциями на оси координат, которые также будут являться функциями переменных x, y и z. Запишем это так:

$$\mathbf{F}=P(x, y, z)\,\mathbf{i}+Q(x, y, z)\,\mathbf{j}+R(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$

Рассуждая точно так же, как и в п. **138**, мы придем к выражению работы в виде интеграла[1])

$$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz, \qquad (*)$$

где L — пространственная линия, соединяющая начальную точку (B) и конечную (C). В дальнейшем под функциями P, Q и R мы будем понимать любые непрерывные функции трех переменных. Интегралы $\int\limits_L P\,dx$, $\int\limits_L Q\,dy$ и $\int\limits_L R\,dz$ называются соответственно *интегралами по координатам* x, y и z.

Пусть линия L задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{и} \quad z = z(t),$$

причем начальной точке линии (B) соответствует значение параметра t_B, а конечной (C) — t_C. Тогда интеграл (*) преобразуется в обыкновенный определенный интеграл по переменной t

$$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{t_B}^{t_C} \{P[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]\,y'(t) + $$

$$+ R[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\}\,dt.$$

Рекомендуем читателю записать эту общую формулу для частных случаев, когда линия L является отрезком прямой, параллельной одной из координатных осей.

В случае интегралов по пространственным линиям также имеет место основная теорема о независимости от пути интегрирования.

Теорема. **Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области Ω. Тогда для того чтобы криволинейный интеграл**

$$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \qquad (*)$$

не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области Ω соблюдались равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (**)$$

---

[1]) Рекомендуем читателю провести самостоятельно соответствующие рассуждения.

Под односвязной областью в пространстве мы понимаем часть пространства, ограниченную одной замкнутой поверхностью, причем такую, что любая замкнутая линия в области может быть стянута в точку, не выходя из области. Односвязными областями будут, например, куб, шар, эллипсоид и т. д. Не является односвязной областью, например, тор («баранка») (см. рис. 124 на стр. 345), ибо окружность, описанная любой точкой круга, вращением которого был образован тор, не может быть стянута в точку. Область Ω может также совпадать со всем пространством или полупространством.

Доказательство теоремы отложим до п. **148**, где оно явится простым следствием формулы Стокса.

Согласно п. **115**, II соотношения (**) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы подынтегральное выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y, z)$. Поэтому приведенную теорему можно сформулировать так:

Для того чтобы криволинейный интеграл (*) не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы его подынтегральное выражение было полным дифференциалом.

Если условия независимости интеграла (*) от линии интегрирования выполняются, то его обычно записывают в виде

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}^{(x_1,\, y_1,\, z_1)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

где (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) — координаты начальной и конечной точек интегрирования.

Этот интеграл легко выразить через первообразную функцию $u(x, y, z)$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Имеем [1])

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}^{(x_1,\, y_1,\, z_1)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}^{(x_1,\, y_1,\, z_1)} du(x, y, z)=$$
$$=u(x_1, y_1, z_1)-u(x_0, y_0, z_0).$$

Фактическое отыскание функции по ее полному дифференциалу при помощи криволинейных интегралов производится так же, как и в плоском случае. Наиболее удобные формулы получаются при интегрировании по ломаной, соединяющей начальную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с конечной точкой $M(x, y, z)$ и имеющей звенья, параллельные осям координат.

[1]) Доказательство полностью совпадает с соответствующим доказательством для плоского случая, и мы его повторять не будем.

Примем за контур интегрирования, например, ломаную $M_0M_1M_2M$ (рис. 191). Вдоль M_0M_1 имеем: $y=y_0$, $z=z_0$ и $dy=0$, $dz=0$; вдоль M_1M_2 имеем: $z=z_0$ и $dx=0$, $dz=0$; наконец, вдоль M_2M имеем: $dx=0$, $dy=0$. Значит,

$$u(x, y, z)-u(x_0, y_0, z_0)=\int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy+\int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz.$$

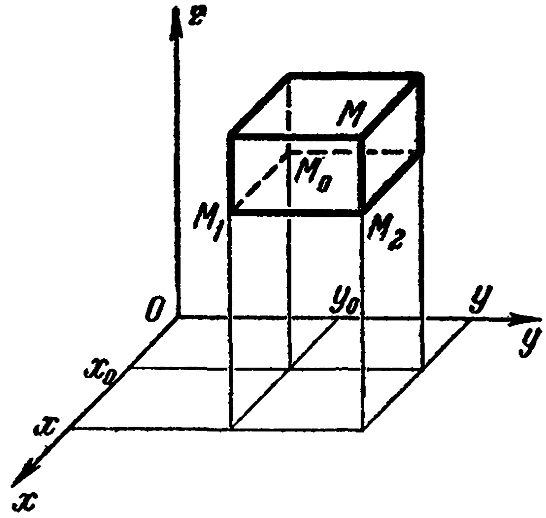

Рис. 191.

Мы придем к аналогичным формулам, если будем интегрировать по другим ребрам параллелепипеда M_0M, ведущим из точки M_0 к точке M.

Таким образом, если $du=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$, то общее выражение для первообразной можно записать, например, так:

$$u(x, y, z)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy+\int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz+C,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — какая-нибудь точка области, C — произвольная постоянная.

Пример. Найдем первообразную для полного дифференциала

$$du=(2xyz+\ln y)\,dx+\left(x^2z+\frac{x}{y}\right)dy+(x^2y-2z)\,dz.$$

Условия (**) здесь выполняются. Выбирая в качестве начальной точки интегрирования, например, точку $M_0(0, 1, 0)$, получим

$$u(x, y, z)=\int\limits_{1}^{y} \frac{x}{y}\,dy+\int\limits_{0}^{z}(x^2y-2z)\,dz+C=x\ln y+x^2yz-z^2+C.$$

Этот пример иным путем мы решили в п. **115**, II. Предложенный здесь путь значительно короче и удобнее. Заметим, что нельзя выбирать в качестве начальной точки (0, 0, 0), так как P и Q в этой точке не определены.

144. Приложения криволинейных интегралов к задачам механики и термодинамики.

I. Вернемся снова к задаче о работе силового поля, заданного силой

$$\mathbf{F}=P(x, y, z)\mathbf{i}+Q(x, y, z)\mathbf{j}+R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Если проекции P, Q, R силы $\mathbf{F}$ на оси координат удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{*}$$

то работа в этом силовом поле, выражаемая криволинейным интегралом

$$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz,$$

не зависит от формы пути. Такое силовое поле называется *потенциальным* или *консервативным*. Функция $u(x, y, z)$, для которой выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ является полным дифференциалом, называется *потенциалом* силового поля. В соответствии с результатами пп. **138** и **143** можно сказать, что *работа в потенциальном силовом поле равна разности потенциалов в конце и в начале пути.*

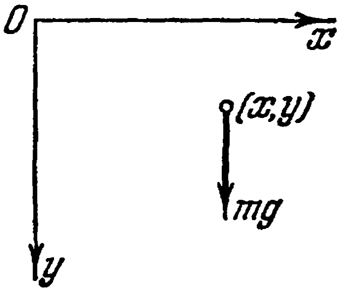

Рис. 192.

Рассмотрим два простых примера.

1) Поле тяжести. Выберем в плоскости движения материальной точки массы m координатные оси, причем ось Oy направим вертикально вниз (рис. 192). Проекции силы тяжести на оси координат будут равны соответственно

$$P(x, y)=0, \quad Q(x, y)=mg,$$

где g — ускорение силы тяжести. Так как функции P и Q постоянны, то они, очевидно, удовлетворяют условию (*) (и левая и правая части его обращаются в нуль), и следовательно, работа при перемещении материальной точки из точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M(x, y)$ выразится интегралом

$$A=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} mg\,dy=mg\int\limits_{y_0}^{y} dy=mgy-mgy_0.$$

Эта работа положительна, если $y>y_0$, т. е. если материальная точка падает, и отрицательна, если точка поднимается. Потенциальная функция $u(x, y)$ имеет вид

$$u(x, y)=mgy+C.$$

Обычно произвольную постоянную C выбирают так, чтобы $u(x, y)=0$ при $y=0$. Тогда потенциалом поля тяжести будет функция mgy.

2) Электрическое поле, создаваемое точечным зарядом. Поместим заряд $+q_1$ в начале координат. Тогда сила $\mathbf{E}$, с которой этот заряд действует на единичный положительный заряд, помещенный в точку $M(x, y, z)$, определится по закону Кулона[1]):

$$|\mathbf{E}|=\frac{q_1}{r^2},$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — расстояние точки M от начала координат (закон Кулона записан в системе единиц CGSE для вакуума). Направление силы $\mathbf{E}$ совпадает с направлением радиуса-вектора $\overline{OM}$. Поэтому (рис. 193)

$$P=|\mathbf{E}|\cdot\cos\alpha=\frac{q_1}{r^2}\frac{x}{r}=\frac{q_1x}{r^3},$$

$$Q=|\mathbf{E}|\cdot\cos\beta=\frac{q_1}{r^2}\frac{y}{r}=\frac{q_1y}{r^3},$$

$$R=|\mathbf{E}|\cdot\cos\gamma=\frac{q_1}{r^2}\frac{z}{r}=\frac{q_1z}{r^3}.$$

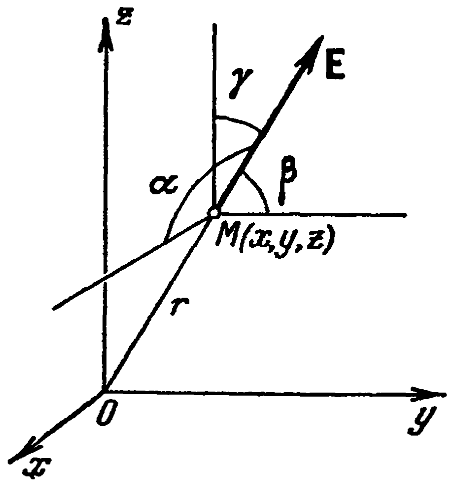

Рис. 193.

Учитывая, что

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},$$

легко найдем по правилу дифференцирования сложной функции все частные производные функций P, Q и R:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{3q_1x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{3q_1xy}{r^5},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{3q_1y}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{3q_1xy}{r^5}$$

и т. д.

Мы видим, что $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Читатель может проверить, что выполняются и остальные два условия (*). Следовательно, рассматриваемое поле потенциально. Найдем его потенциал $u(x, y, z)$. Чтобы избежать утомительного интегрирования,

[1]) Ш. Кулон (1736—1806) — выдающийся французский физик.

заметим, что

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=q_1\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{r^3}=$$

$$=q_1\frac{\frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial r}{\partial y}dy+\frac{\partial r}{\partial z}dz}{r^2}=q_1\frac{dr}{r^2}=d\left(-\frac{q_1}{r}\right).$$

Поэтому функция $-\frac{q_1}{r}+C$ и является потенциалом. Выбирая C так, чтобы потенциал на бесконечности равнялся нулю, получим

$$u(x, y, z)=-\frac{q_1}{r}=-\frac{q_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Следовательно, работа сил электрического поля при перемещении единичного заряда из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в точку $M(x, y, z)$ будет равна

$$A=-\frac{q_1}{r}+\frac{q_1}{r_0},$$

где r_0 и r — длины радиусов-векторов точек M_0 и M. Так как заряды одноименны, то работа положительна при их удалении друг от друга ($r>r_0$) и отрицательна при их сближении ($r<r_0$).

II. Рассмотрим теперь приложение криволинейных интегралов к задачам термодинамики.

Будем под состоянием вещества понимать совокупность величин, характеризующих его физическое состояние. В термодинамике обычно этими величинами служат: давление p, объем v и абсолютная температура T. Следовательно, состояние задается указанием трех величин: p, v, T. Но они связаны между собой одним уравнением — так называемым уравнением состояния. Поэтому состояние фактически определяется двумя величинами, например p и v (третья, T, есть функция p и v).

Геометрически каждому состоянию соответствует точка $M(p, v)$ в плоскости Opv, а каждому процессу (состоящему в последовательном изменении состояния тела) — линия. Она называется *диаграммой процесса*. В том случае, когда происходит возвращение к исходному состоянию, процесс называют *круговым* или *циклическим*; его диаграммой будет замкнутая линия.

Пусть дан идеальный газ, т. е. газ, который подчиняется уравнению состояния Менделеева—Клапейрона[1]):

$$pv=RT \quad (R=\text{const}).$$

---

[1]) Д. И. Менделеев (1834—1907) — великий русский ученый. Б. Клапейрон (1799—1864) — французский физик и инженер.

Поставим перед собой задачу — найти количество тепла Q, поглощенного (или выделенного) газом при процессе, изображенном данной диаграммой L. На линии L выделим произвольный ее участок от точки $M(p, v)$ до точки $M_1(p+dp, v+dv)$, представляющий «бесконечно малый процесс»; соответствующее ему количество тепла обозначим через ΔQ. Это тепло идет на приращение механической энергии частиц газа, т. е. в конечном счете на приращение dT температуры, и на работу, производимую при изменении объема dv. Мы найдем элемент dQ (главную часть ΔQ, линейную относительно dT и dv), если допустим, что поглощаемое тепло есть сумма двух количеств тепла: 1) затрачиваемого на приращение температуры dT при постоянном объеме v, 2) затрачиваемого на работу расширения dv при постоянной температуре T. Первое равно $c_v\,dT$, где c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме, а второе $p\,dv$.

Следовательно, при соответствующем выборе единиц измерения

$$dQ = c_v\,dT + p\,dv.$$

Согласно уравнению Менделеева—Клапейрона

$$dT = \frac{v}{R}\,dp + \frac{p}{R}\,dv;$$

внося это в выражение для dQ, получим

$$dQ = \frac{c_v}{R}\,v\,dp + \frac{c_v+R}{R}\,p\,dv.$$

Выясним смысл выражения c_v+R. Из двух последних формул при постоянном давлении p, $dp=0$ находим

$$dT = \frac{p}{R}\,dv, \qquad dQ = (c_v+R)\,\frac{p}{R}\,dv,$$

т. е.

$$dQ = (c_v+R)\,dT,$$

откуда видно, что коэффициент при dT есть просто теплоемкость c_p при постоянном давлении:

$$c_v + R = c_p \tag{*}$$

(c_p и c_v считаем постоянными).

Итак, окончательно:

$$dQ = \frac{c_v}{R}\,v\,dp + \frac{c_p}{R}\,p\,dv.$$

Для того чтобы найти искомое количество тепла Q, остается проинтегрировать выражение для dQ по диаграмме процесса L:

$$Q=\int\limits_L \frac{c_v}{R}\,v\,dp+\frac{c_p}{R}\,p\,dv.$$

Здесь условия независимости интеграла от пути интегрирования не выполняются. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c_v}{R}\,v\right)=\frac{c_v}{R},\qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{c_p}{R}\,p\right)=\frac{c_p}{R},$$

но $c_p\neq c_v$, как это следует из соотношения (*). Таким образом, величина Q существенно зависит от контура L, т. е. Q не является функцией p и v. Наше рассуждение показывает, что количество поглощаемого (выделяемого) тепла не есть функция состояния газа, оно зависит не только от конечного состояния, но и от того, каким способом газ пришел к этому состоянию, другими словами, от совокупности всех промежуточных состояний. В частности, круговой процесс *(цикл)* может приводить к поглощению или выделению тепла.

В термодинамике вводится величина S, характеризующая процесс,— так называемая *энтропия*. Определяется энтропия интегралом

$$S=\int\limits_L \frac{dQ}{T},$$

где L — диаграмма процесса.

Для идеального газа находим

$$S=\int\limits_L \frac{dQ}{T}=\int\limits_L \frac{c_v}{RT}\,v\,dp+\frac{c_p}{RT}\,p\,dv,$$

и так как $RT=pv$, то

$$S=\int\limits_L \frac{c_v}{p}\,dp+\frac{c_p}{v}\,dv.$$

Подынтегральное выражение есть полный дифференциал, ибо

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c_v}{p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{c_p}{v}\right)=0,$$

и, стало быть, энтропия является функцией состояния газа; ее величина не зависит от того, как газ изменяется от начального состояния к конечному.

Интегрируя, получаем

$$S=\ln Cp^{c_v}v^{c_p}.$$

Если процесс адиабатический ($Q = \text{const}$, $dQ = 0$, значит, и $dS = 0$, т. е. $S = \text{const}$), то

$$p^{c_v} v^{c_p} = \text{const},$$

откуда

$$pv^k = \text{const},$$

где $k = \frac{c_p}{c_v} > 1$. Это — уравнение диаграммы адиабатического процесса (так называемой адиабаты) в идеальном газе.

145. Криволинейный интеграл по длине (первого рода). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D и L — линия, целиком расположенная в этой области. Разобьем кривую L на n участков; возьмем на каждом из участков произвольную точку (ξ_k, η_k) и построим следующую интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta s_k, \tag{*}$$

где Δs_k — длина соответствующего участка линии L. Отличие этой суммы от сумм, приводящих к криволинейным интегралам по координатам (см. п. **138**), состоит в том, что здесь значение функции умножается на длину участка разбиения, а там на проекцию этого участка на соответствующую ось координат.

Определение. ***Криволинейным интегралом по длине*** **называется предел n-й интегральной суммы (*) при условии, что длина наибольшего участка разбиения стремится к нулю.**

Записывается это так:

$$\lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta s_k = \int_L f(x, y)\, ds.$$

Свойства криволинейного интеграла по длине совершенно аналогичны свойствам определенного интеграла, и поэтому мы их даже не формулируем. Вычисление криволинейных интегралов по длине производится путем преобразования их в обыкновенные определенные интегралы. Поскольку правила такого приведения совершенно аналогичны приведенным в п. **139**, мы сформулируем только конечный результат.

Правило вычисления криволинейного интеграла по длине. **Для того чтобы криволинейный интеграл**

$$\int_L f(x, y)\, ds,$$

где линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и

$y=y(t)$, преобразовать в обыкновенный, нужно в подынтегральном выражении положить

$$x=x(t),\ y=y(t),\ ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

и взять интеграл по интервалу изменения t, соответствующему линии интегрирования.

Если параметрические уравнения различны для различных участков контура интегрирования L, то его нужно разбить на отдельные части и весь интеграл вычислить как сумму интегралов, взятых по этим частям.

Из общего правила преобразования интеграла по длине линии вытекают правила преобразования в частных случаях, когда уравнение линии задано в виде $y=y(x)$ или в виде $x=x(y)$. В первом случае в общем правиле надо положить $t=x$, а во втором $t=y$.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_L y\,ds,$$

где L — дуга параболы $y^2=2x$ от точки $(0,\ 0)$ до точки $(4,\ \sqrt{8})$. Здесь линию удобно задать в форме, разрешенной относительно x: $x=\frac{y^2}{2}$. Тогда $x'=y$ и интеграл преобразовывается к виду

$$\int_L y\,ds=\int_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+y^2}\,dy=\left.\frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{\sqrt{8}}=\frac{26}{3}.$$

С помощью криволинейных интегралов по длине особенно удобно решать задачу об отыскании массы материальной линии, если линейная плотность δ задана не как функция длины линии (см. п. 78, III), а как функция координат x и y точки M линии L: $\delta=\delta(x,\ y)$. Тогда масса линии равна $\int_L \delta(x,\ y)\,ds$ (советуем читателю самостоятельно это обосновать).

Укажем одну геометрическую задачу, просто решаемую с помощью криволинейного интеграла по длине. Пусть дана цилиндрическая поверхность G, направляющей которой служит линия L в плоскости Oxy и образующие которой перпендикулярны к этой плоскости (рис. 194). Вычислим площадь Q части поверхности, заключенной между линией L и какой-нибудь линией L_1 на той же поверхности, лежащей выше L. Аппликата точки M линии L_1 является функцией координат точки P линии L:

$$z=f(x,\ y).$$

В произвольной точке P основания возьмем бесконечно малый элемент дуги ds. Ему соответствует площадь поверхности Δq, главной частью которой, пропорциональной ds, будет площадь прямоугольника с основанием ds и высотой, равной высоте поверхности в точке P. Следовательно, дифференциал dq искомой величины равен

$$dq = f(x, y)\,ds.$$

Интегрируя это выражение по линии L, получим

$$Q = \int\limits_L f(x, y)\,ds.$$

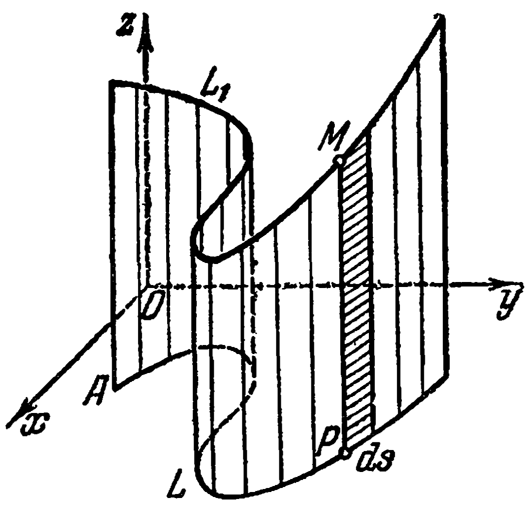

Рис. 194.

Пример. Найдем площадь Q боковой поверхности половины эллиптического цилиндра $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, усеченного плоскостью $z = y$ (рис. 195).

Имеем

$$Q = \int\limits_L z\,ds = \int\limits_L y\,ds,$$

где L — дуга эллипса $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y \geqslant 0$.

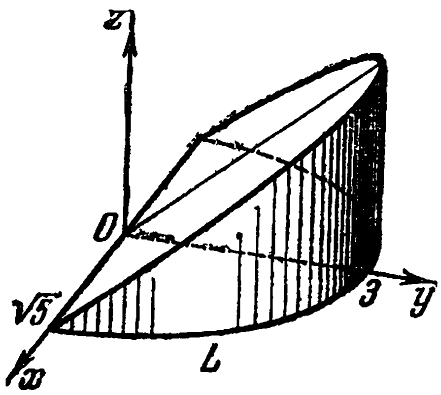

Рис. 195.

Вычислим интеграл. Параметрические уравнения контура интегрирования: $x = \sqrt{5}\cos t$, $y = 3\sin t$. Следовательно,

$$Q = \int\limits_0^\pi 3\sin t\sqrt{9\cos^2 t + 5\sin^2 t}\,dt = 3\int\limits_0^\pi \sin t\sqrt{4\cos^2 t + 5}\,dt.$$

Полагая $\cos t = u$, находим

$$Q = 3\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4u^2+5}\,du = 6\int\limits_0^1 \sqrt{4u^2+5}\,du.$$

Воспользовавшись табличным интегралом 34 ($a = 2$, $b = \sqrt{5}$), получим

$$Q = 3\left[u\sqrt{4u^2+5} + \frac{5}{2}\ln\left|2u + \sqrt{4u^2+5}\right|\right]\Bigg|_0^1 = 3\left(3 + \frac{5}{4}\ln 5\right).$$

Мы не будем останавливаться на определении интеграла по длине для пространственной кривой

$$\int\limits_L f(x,\ y,\ z)\,ds,$$

так как оно аналогично рассмотренному.

Отметим, что криволинейный интеграл, рассмотренный в п. **143**,

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

всегда можно записать в виде интеграла по длине. Для этого вспомним, что, согласно формулам, приведенным в конце п. **68**,

$$dx=ds\cos\alpha,\quad dy=ds\cos\beta,\quad dz=ds\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора **T**, касательного к линии L, а ds — дифференциал длины дуги; направление вектора **T** определяется выбранным направлением интегрирования вдоль линии L. Заменяя dx, dy, dz их выражениями, мы и производим преобразование интеграла:

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds.$$

§ 2*. Интегралы по поверхности

146*. Поток жидкости через поверхность. Интеграл по поверхности. Изучение интегралов по поверхности мы начнем снова с физической задачи. Пусть имеется некоторое течение жидкости. Говорят, что течение установилось, если скорость частиц жидкости, протекающих через данную точку, зависит только от этой точки и не зависит от времени. В каждой точке $M(x,\ y,\ z)$ области, в которой происходит течение, задан, следовательно, вектор $\mathbf{v}(x,\ y,\ z)$ — скорость частицы жидкости в этой точке. Таким образом, нам задано *векторное поле* — поле скоростей жидкости[1]). Проекции вектора $\mathbf{v}$ на оси координат будут являться функциями координат точки M. Запишем это так:

$$\mathbf{v}=P(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i}+Q(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j}+R(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k}.$$

Плотность жидкости считаем постоянной и равной единице. Будем

---

[1]) Поле скоростей текущей жидкости является конкретным примером *векторного* поля; другой пример такого поля — *силовое* поле, которое мы рассматривали в п. 138 в связи с задачей о работе при движении точки. Общей теорией векторных полей мы будем заниматься в § 3 этой главы.

искать количество жидкости, протекающее за единицу времени через заданную поверхность; разумеется, при этом считается, что жидкость может свободно протекать через эту поверхность. Указанное количество жидкости назовем *потоком жидкости через поверхность*.

Начнем с рассмотрения простейшего случая. Пусть скорость течения жидкости во всех точках одна и та же:

$$\mathbf{v} = \mathrm{const}.$$

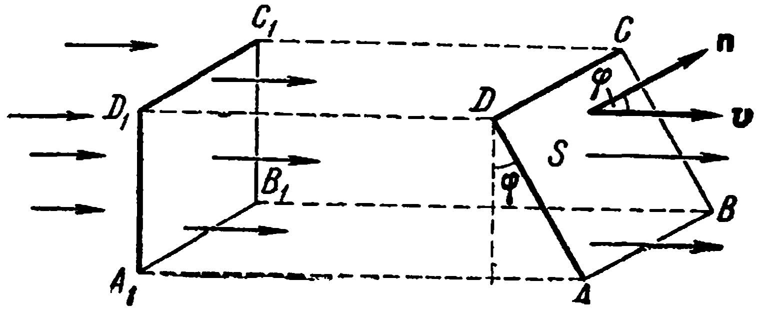

Рис. 196.

Поток жидкости K через прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, расположенный в плоскости, перпендикулярной к скорости $\mathbf{v}$ (рис. 196), будет равен произведению площади прямоугольника на величину скорости:

$$K = S_{A_1B_1C_1D_1} \,|\, \mathbf{v} \,|\,.$$

Ясно, что это же количество жидкости K протекает и через прямоугольник $ABCD$, расположенный в плоскости, нормаль к которой $\mathbf{n}$ образует со скоростью $\mathbf{v}$ угол φ (рис. 196). Если обозначить через S площадь прямоугольника $ABCD$, то из соотношений $D_1C_1 = DC$ и $A_1D_1 = AD\cos\varphi$ следует, что $S_{A_1B_1C_1D_1} = S\cos\varphi$. Поэтому можно записать:

$$K = S\,|\,\mathbf{v}\,|\cos\varphi = S\mathbf{v}_n,$$

где $\mathbf{v}_n$ — проекция скорости $\mathbf{v}$ на нормаль $\mathbf{n}$. Эта формула для потока жидкости K верна не только для прямоугольника, но и для любой площадки, расположенной в плоскости, нормаль к которой образует тот же угол φ со скоростью $\mathbf{v}$ (рис. 197). Если площадь этой площадки равна σ, то площадь ее проекции на плоскость, перпендикулярную к скорости $\mathbf{v}$, равна $\sigma\cos\varphi$ [1]). Поток же жидкости через площадку, перпендикулярную к скорости течения, равен произведению ее площади на величину скорости.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть в некоторой области задано поле скоростей жидкости, определяемое векторной функцией

$$\mathbf{v} = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$

Возьмем некоторую поверхность S. Подсчитаем поток жидкости через эту поверхность. Для этого разобьем данную поверхность

[1]) Эту площадку можно представить себе разбитой на маленькие прямоугольники; так как для каждого такого прямоугольника формула верна, то она верна и для всей площадки.

произвольным образом на n частей; площади получившихся участков обозначим $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. На каждой площадке выберем по произвольной точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$ (рис. 198). Считая эти площадки плоскими и предполагая, что в пределах каждой площадки скорость жидкости остается постоянной, а именно равной скорости в точке M_i, мы можем написать приближенное выражение для потока жидкости

$$K_n = \Delta\sigma_1 |\mathbf{v}_1| \cos\varphi_1 + \Delta\sigma_2 |\mathbf{v}_2| \cos\varphi_2 + \ldots + \Delta\sigma_n |\mathbf{v}_n| \cos\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i |\mathbf{v}_i| \cos\varphi_i.$$

Здесь $\mathbf{v}_i$ — скорость в точке M_i, а φ_i — угол между нормалью $\mathbf{n}_i$ к поверхности S в точке M_i и скоростью $\mathbf{v}_i$.

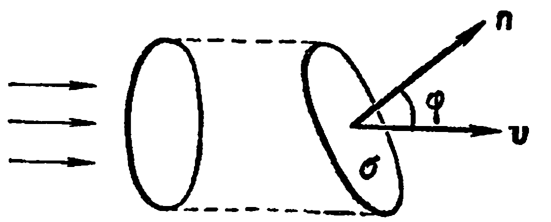

Рис. 197

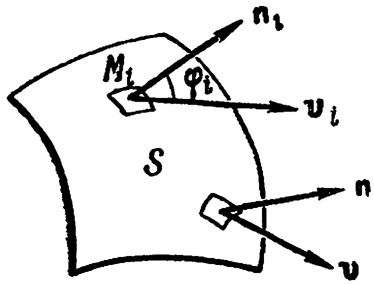

Рис. 198.

Чтобы преобразовать полученное выражение, заметим, что $|\mathbf{v}_i| \cos\varphi_i$ есть скалярное произведение вектора $\mathbf{v}_i$ на единичный вектор нормали.

Обозначим через α_i, β_i и γ_i углы, образованные нормалью $\mathbf{n}_i$ с осями координат (величины этих углов зависят, конечно, от точки M_i). Единичный вектор нормали имеет своими проекциями направляющие косинусы $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$. Поэтому

$$|\mathbf{v}_i| \cos\varphi_i = P_i \cos\alpha_i + Q_i \cos\beta_i + R_i \cos\gamma_i,$$

где P_i, Q_i, R_i — значения соответствующих функций в точке M_i. Следовательно,

$$K_n = \sum_{i=1}^{n} (P_i \cos\alpha_i + Q_i \cos\beta_i + R_i \cos\gamma_i) \Delta\sigma_i. \qquad (*)$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$ и при условии, что каждая площадка стягивается в точку, мы получим выражение для потока жидкости K

$$K = \lim K_n = \lim \sum_{i=1}^{n} (P_i \cos\alpha_i + Q_i \cos\beta_i + R_i \cos\gamma_i) \Delta\sigma_i.$$

Этот предел запишем в виде

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma$$

и будем называть *интегралом по поверхности*. В подынтегральном выражении P, Q, R и направляющие косинусы нормали $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ являются функциями координат точки $M(x, y, z)$ поверхности S. В том частном случае, когда S — кусок плоскости, направляющие косинусы будут постоянными.

В дальнейшем часто будем сокращенно обозначать

$$P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = f(M),$$

где $f(M)$ — функция точки M поверхности S.

Дадим теперь общее определение интеграла по поверхности, уже не связанное с рассматриваемой конкретной задачей. Пусть S — некоторая поверхность и $f(M)$ — непрерывная функция точки M на поверхности S. Функцию $f(M)$ можно записать в виде $f(x, y, z)$, где x, y, z — координаты точки M. Разобьем поверхность S на части, как указано выше, и образуем n-ю интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta\sigma_i.$$

Определение. ***Интегралом по поверхности*** **(или *поверхностным интегралом*) называется предел n-й интегральной суммы при стремлении к нулю диаметра каждой площадки разбиения.**

Записывается это так:

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta\sigma_i = \iint\limits_S f(M)\, d\sigma = \iint\limits_S f(x, y, z)\, d\sigma.$$

Если, например, функция $f(x, y, z)$ является поверхностной плотностью массы, распределенной по поверхности, то интеграл выражает массу всей поверхности; если $f(x, y, z)$ — плотность распределения электрических зарядов, то интеграл выражает суммарный заряд поверхности. В том частном случае, когда $f(x, y, z) \equiv 1$, интеграл $\iint\limits_S d\sigma$ просто равен площади поверхности S.

147*. Свойства интегралов по поверхности. Определение интеграла по поверхности, по сути дела, аналогично определению двойного интеграла. Поэтому свойства двойных интегралов, перечисленные в п. **129**, без всяких изменений переносятся на интегралы по поверхности.

Однако интегралы вида

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma, \qquad (*)$$

где α, β и γ — углы, образованные нормалью к поверхности S с осями координат, обладают некоторыми специфическими особенностями, связанными с самой постановкой физической задачи, и мы их рассмотрим подробнее.

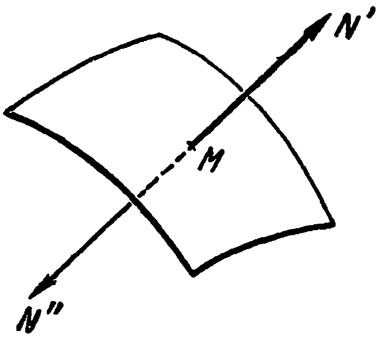

Рис. 199.

Дело в том, что нормаль к поверхности имеет два направления (рис. 199). При составлении приближенного выражения для потока жидкости в п. **146** мы считали, впрочем точно не формулируя это, что все нормали $\mathbf{n}_i$ направлены в одну сторону от поверхности S.

В дальнейшем всегда будем различать две стороны поверхности S, скажем, представлять, что одна ее сторона закрашена красной краской, а другая синей. В соответствии с этим будут различаться два противоположных направления нормали (MN' и MN'' на рис. 199). Таким образом, мы должны различать поверхностные интегралы $(*)$ в зависимости от направления нормали; как говорят, будем рассматривать поверхностные интегралы, взятые по определенной стороне поверхности («красной» или «синей»). Ясно, что с изменением направления нормали на противоположное направляющие косинусы ($\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$) переменят знаки, а это повлечет за собой изменение знака всего интеграла. Следовательно, *интегралы $(*)$, взятые по разным сторонам поверхности, отличаются друг от друга только знаком.* Сокращенно обозначая подынтегральное выражение в интеграле $(*)$ через $f(M)$, запишем последнее замечание так:

$$\iint_{-S} f(M)\, d\sigma = -\iint_{+S} f(M)\, d\sigma, \qquad (**)$$

где через $+S$ и $-S$ обозначены две стороны поверхности S.

Отметим, что физические задачи, приводящие к интегралам по поверхности, могут быть двух типов. В первом типе подынтегральная функция $f(M)$ не связана с направлением нормали к поверхности S, и поэтому выбор стороны поверхности интегрирования роли не играет; таковы, например, задачи об отыскании массы или заряда, распределенных по поверхности. Во втором типе задач функция $f(M)$ существенно зависит от направления нормали; так в задаче об отыскании потока жидкости $f(M)=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$ является линейной функцией направляющих косинусов нормали. Разумеется, при этом обязательно нужно указывать, по какой стороне поверхности происходит интегрирование; изменение этой стороны приводит к изменению знака интеграла[1]).

Остановимся еще на физическом смысле знака поверхностного интеграла (*) с точки зрения задачи о вычислении потока жидкости. На разных участках поверхности S жидкость может протекать как в направлении выбранной нормали, так и в противоположном. Если поток K положителен, то в выбранном направлении жидкости протекает больше, чем в противоположном, а если отрицателен, то наоборот.

Примечание. Мы все время рассматриваем поверхности, у которых можно различить две стороны; такие поверхности называются *двусторонними*. С одной стороны двусторонней поверхности можно перейти на другую сторону, только пройдя через ее край. Однако не всякая поверхность является двусторонней. Примером односторонней поверхности может служить так называемый лист Мёбиуса[2]). Модель его легко сделать из прямоугольного листка бумаги. Для этого нужно полоску склеить так же, как и при изготовлении модели цилиндра, только предварительно перекрутив бумагу (рис. 200). Выйдя из какой-нибудь точки листа Мёбиуса с определенным направлением нормали, можно непрерывным движением, нигде не пересекая границы листа, прийти в ту же точку с противоположным направлением нормали. Это значит, что, начав закрашивать лист Мёбиуса, скажем, красной краской, мы закрасим его целиком, не оставив места для синей. В дальнейшем мы будем иметь в виду исключительно двусторонние поверхности.

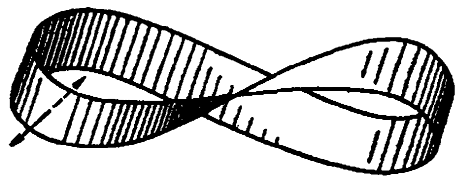

Рис. 200.

Укажем, дополнительно, некоторые свойства интегралов, взятых по определенной стороне поверхности, т. е. удовлетворяющих условию (**). Теорема о разбиении поверхности интегрирования на части должна для них, очевидно, формулироваться следующим образом.

---

[1]) Советуем читателю обратить внимание, что подобное же обстоятельство имело место и при изучении криволинейных интегралов. Задача о работе при движении точки в силовом поле существенно связана с направлением касательной к линии интегрирования, а задача об отыскании массы линии или площади цилиндрической поверхности (п. 145) не связана.

[2]) Мёбиус (1790—1868) — немецкий математик.

Если поверхность S разбить на части S_1, S_2, ..., S_n и направления нормалей на всех отдельных частях поверхности считать совпадающими с направлением, выбранным на S, то интеграл по всей поверхности будет равен сумме интегралов по отдельным ее частям

$$\iint\limits_S f(M)\,d\sigma = \iint\limits_{S_1} f(M)\,d\sigma + \ldots + \iint\limits_{S_n} f(M)\,d\sigma.$$

В дальнейшем нам часто придется рассматривать поверхностные интегралы типа (*) по замкнутым поверхностям. В этом случае различают внешнюю сторону поверхности и внутреннюю. Внешнюю сторону поверхности обычно называют положительной стороной. Для интегралов по замкнутым поверхностям имеет место теорема, аналогичная теореме о криволинейных интегралах по замкнутым контурам, приведенной на стр. 480.

Теорема. **Если область Ω пространства, ограниченную замкнутой поверхностью S, разбить на части при помощи замкнутых поверхностей S_1, S_2, ..., S_n, то интеграл, взятый по всей поверхности S** (например, по положительной стороне), **равен сумме интегралов, взятых по соответствующим** (положительным) **сторонам поверхностей S_1, S_2, ..., S_n:**

$$\iint\limits_S f(M)\,d\sigma = \iint\limits_{S_1} f(M)\,d\sigma + \iint\limits_{S_2} f(M)\,d\sigma + \ldots + \iint\limits_{S_n} f(M)\,d\sigma.$$

Доказательство. В правой части равенства каждая лежащая внутри области Ω часть поверхности проходится при интегрировании два раза по двум ее сторонам и сумма соответствующих интегралов равна нулю. В результате останутся только интегралы по частям границы области Ω, в сумме дающие интеграл по всей поверхности S, что и требовалось доказать.

148*. Вычисление интегралов по поверхности. Пусть дан поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,d\sigma.$$

Предположим, что поверхность S такова, что она с любой прямой, параллельной оси Oz, пересекается не более чем в одной точке; тогда ее уравнение можно записать в виде

$$z = z(x, y).$$

Покажем, что в этом случае вычисление интеграла по поверхности S приводится к вычислению двойного интеграла по области D — проекции поверхности S на плоскость Oxy (рис. 201).

Возьмем элемент площади $dx\,dy$ области D и проектирующийся в него элемент площади $d\sigma$ поверхности S. Проведем нормаль $\mathbf{n}$ к площадке $d\sigma$ так, чтобы она образовывала острый угол γ с осью Oz. Будем считать, что в пределах площадки направление нормали $\mathbf{n}$ не меняется; это значит, что площадка $d\sigma$ считается куском плоскости, касательной к поверхности в точке проведения нормали. Тогда, как уже отмечалось в п. **146**, при рассмотрении рис. 197

$$\cos\gamma\, d\sigma = dx\, dy.$$

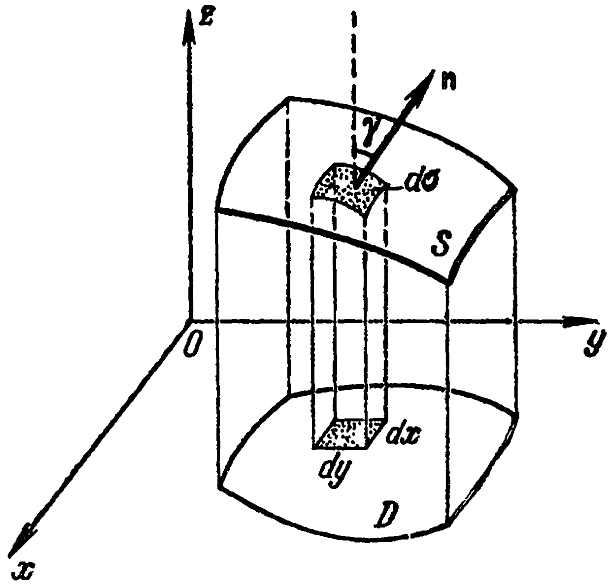

Рис. 201.

Согласно результатам п. **119** нормаль к поверхности, заданной уравнением

$$z = z(x, y),$$

имеет проекции z'_x, z'_y, -1. Поэтому косинус острого угла γ между нормалью и осью Oz равен

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}.$$

Значит, $d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy$ и

$$f(x, y, z)\, d\sigma = f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy.$$

Из последнего равенства следует, что «суммирование» выражений, стоящих слева, т. е. интегрирование по поверхности S, равносильно «суммированию» выражений справа, т. е. интегрированию по области D:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy. \quad (*)$$

Может случиться, что уравнение поверхности нельзя записать в виде, разрешенном относительно z, но можно записать в виде $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$. Тогда ход наших рассуждений будет совершенно такой же, но только нужно будет проектировать поверхность S соответственно на плоскость Oxz или Oyz. Если обозначить через β и α острые углы, образованные нормалью к поверхности с осями Oy и Ox, то получим формулы

$$\cos\beta\, d\sigma = dx\, dz \quad \text{и} \quad \cos\alpha\, d\sigma = dy\, dz.$$

Соответствующие формулы для приведения интеграла по поверхности к двойным интегралам читатель напишет самостоятельно.

Наконец, если уравнение всей поверхности S нельзя записать в виде единой функции одного из указанных типов, то такую поверхность нужно разбить на части, для которых это сделать можно, и вычислять интеграл как сумму интегралов по отдельным частям.

Если в равенстве (*) функция $f(x, y, z)$ тождественно равна 1, то получается формула для вычисления площади поверхности (обозначим эту площадь той же буквой S, что и саму поверхность)

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy.$$

В этой формуле $z=z(x, y)$ — уравнение поверхности, а D — ее проекция на плоскость Oxy.

Пример. Найдем площадь части поверхности параболоида вращения $2z=x^2+y^2$ заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

Здесь $z_x'=x$ и $z_y'=y$; поэтому

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

где область D — проекция интересующей нас части поверхности на плоскость Oxy — есть круг радиуса R с центром в начале координат. Переходя к полярным координатам, получим

$$S=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{1+r^2}\,r\,dr=\frac{2\pi}{3}\left[(1+R^2)^{3/2}-1\right].$$

Перейдем теперь к вычислению интегралов вида

$$\iint\limits_S [P(x, y, z)\cos\alpha+Q(x, y, z)\cos\beta+R(x, y, z)\cos\gamma]\,d\sigma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали, проведенной к той стороне поверхности, по какой происходит интегрирование.

Сама форма записи подынтегрального выражения подсказывает, что этот интеграл удобно вычислять как сумму трех интегралов. Начнем с интеграла от последнего слагаемого

$$\iint\limits_S R(x, y, z)\cos\gamma\,d\sigma.$$

Пусть поверхность S задана уравнением $z=z(x, y)$, т. е. имеет вид, изображенный на рис. 201. Тогда будем различать у этой поверхности верхнюю сторону (именно к ней пр ведена нормаль **n** на рисунке) и нижнюю сторону. Для верхней стороны поверхности угол γ острый и, как уже отмечено выше, $\cos\gamma\, d\sigma = dx\, dy$. Следовательно,

$$R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma = R[x, y, z(x, y)]\, dx\, dy,$$

и поэтому

$$\iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma = \iint_D R[x, y, z(x, y)]\, dx\, dy, \qquad (**)$$

где D — по-прежнему проекция поверхности S на плоскость Oxy.

Совершенно ясно, что, беря интеграл по нижней стороне поверхности, мы придем к интегралу

$$-\iint_D R[x, y, z(x, y)]\, dx\, dy.$$

Аналогично вычисляются и интегралы от остальных слагаемых. Нужно только помнить, что в формулах

$$\cos\alpha\, d\sigma = dy\, dz \quad \text{и} \quad \cos\beta\, d\sigma = dx\, dz$$

под α и β понимаются острые углы, образованные нормалью к поверхности соответственно с осями Ox и Oy. Это означает, что, разрешая уравнение поверхности относительно x или y: $x = x(y, z)$ или $y = y(x, z)$ и записывая формулы, аналогичные формуле $(**)$,

$$\iint_S Q(x, y, z)\cos\beta\, d\sigma = \iint_{D_1} Q[x, y(z, x), z]\, dx\, dz,$$

$$\iint_S P(x, y, z)\cos\alpha\, d\sigma = \iint_{D_2} P[x(y, z), y, z]\, dy\, dz,$$

где D_1 и D_2 — проекции поверхности S соответственно на плоскости Oxz и Oyz, мы каждый раз берем интеграл по той стороне поверхности S, которая обращена в сторону положительного направления осей Oy или Ox. Если нам нужно взять интеграл по противоположной стороне поверхности, то следует просто изменить знак у двойного интеграла.

Если при вычислении какого-либо из трех интегралов, уравнение поверхности не удается записать в нужной форме, то предварительно разбиваем данную поверхность на части, для которых это сделать можно, и берем сумму интегралов по этим частям. Заметим только, что если в состав поверхности S входит участок цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны, например, оси Oz, то интеграл $\iint R\cos\gamma\, d\sigma$, взятый по этому участку, равен нулю, так как нормаль будет перпендикулярна к образующей, и поэтому $\gamma=\frac{\pi}{2}$ и $\cos\gamma=0$. В то же время для этого участка будет равна нулю и правая часть формулы (**), так как проекция рассматриваемого участка на плоскость Oxy является не областью, а линией. Аналогичное замечание можно сделать, если образующие цилиндрического участка поверхности параллельны какой-либо другой оси.

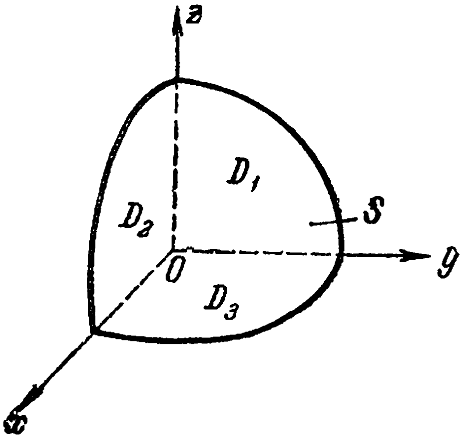

Рис. 202.

В соответствии со сказанным интегралы по поверхности очень часто записывают так:

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma = \iint_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy\ ^{1)}.$$

В такой записи сразу видно, на какую координатную плоскость производится проектирование поверхности S при интегрировании каждого слагаемого.

Примеры: 1) Вычислим интеграл

$$\iint_S x\,dy\,dz+dx\,dz+xz^2\,dx\,dy,$$

где S — внешняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной в первом октанте.

Обозначим проекции поверхности интегрирования на координатные плоскости соответственно через D_1, D_2 и D_3 (рис. 202). Это будут четверти кругов радиуса 1. Тогда

$$I_1=\iint_S x\,dy\,dz=\iint_{D_1}\sqrt{1-y^2-z^2}\,dy\,dz,$$

$$I_2=\iint_S dx\,dz=\iint_{D_2} dx\,dz,$$

$$I_3=\iint_S xz^2\,dx\,dy=\iint_{D_3} x(1-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Второй интеграл равен просто площади области D_2, т. е. $\frac{\pi}{4}$. Первый и третий интегралы вычислим, перейдя к полярным

1) В более подробных курсах интеграл, стоящий справа, определяется при помощи специальных интегральных сумм; тогда он называется *интегралом по поверхности второго рода*. Ради краткости изложения такие интегралы отдельно мы изучать не будем.

координатам:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\,dr=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^1\right)=\frac{\pi}{6},$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 r(1-r^2)\, r\,dr=1\cdot\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{15}.$$

Итак,

$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+\frac{2}{15}=\frac{5\pi}{12}+\frac{2}{15}.$$

2) Вычислим интеграл

$$I=\iint_S z\cos\gamma\, d\sigma,$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

Здесь аппликату z нельзя выразить однозначной функцией от x и y для всей поверхности интегрирования S. Разобьем поверхность на две части: S_1, лежащую над плоскостью Oxy, и S_2, лежащую под ней. Их уравнениями соответственно будут

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{и} \quad z=-\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Имеем

$$I=\iint_S z\cos\gamma\, d\sigma=\iint_{S_1} z\cos\gamma\, d\sigma+\iint_{S_2} z\cos\gamma\, d\sigma.$$

Перейдем к двойным интегралам: S_1 — внешняя сторона части сферы, расположенной над плоскостью Oxy, — является в е р х н е й стороной полусферы, и поэтому

$$\iint_{S_1} z\cos\gamma\, d\sigma=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

где D — круг $x^2+y^2\leqslant 1$;

S_2 — внешняя сторона полусферы, расположенной под плоскостью Oxy, — является, наоборот, ее н и ж н е й стороной, значит,

$$\iint_{S_2} z\cos\gamma\, d\sigma=-\iint_D -\sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

где D — тот же круг.

В результате получаем

$$I=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy+\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy=$$

$$=2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

Так как интеграл $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$ выражает объем полусферы радиуса 1, то он равен 2/3 π. Поэтому $I=4/3\pi$.

149*. Формула Стокса[1]. Для поверхностных интегралов имеет место формула, аналогичная формуле Грина (см. п. **140**), позволяющая свести вычисление интеграла по поверхности S к вычислению криволинейного интеграла по контуру L, ограничивающему эту поверхность (рис. 203).

Теорема. **Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка, то имеет место формула**

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma=$$

$$=\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \qquad (*)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S, а L — граница поверхности.

Формула (*) называется *формулой Стокса*.

Направление интегрирования по контуру L согласовывается с выбранной стороной поверхности S при помощи следующего наглядного правила: если человек идет по контуру L в направлении интегрирования и направление от его ног к голове совпадает с направлением нормали к выбранной стороне поверхности, то эта поверхность должна оставаться от него слева.

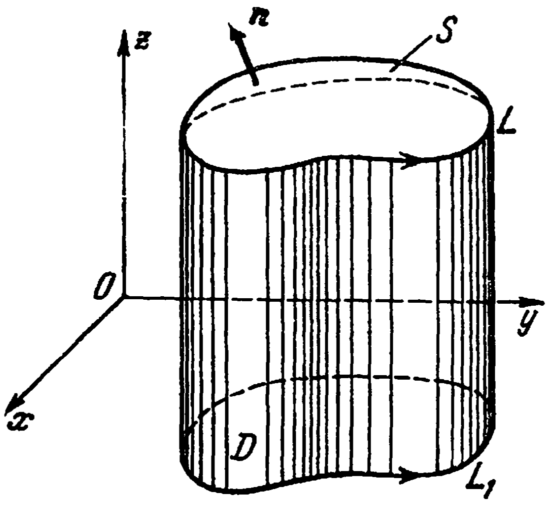

Рис. 203.

Доказательство. Доказательство теоремы производится путем сведения интеграла по поверхности сначала к двойному интегралу, а затем при помощи формулы Грина к криволинейному. Предположим сначала, что поверхность S пересекается с любой прямой, параллельной оси Oz, не более чем в одной точке, и пусть $z=z(x, y)$ — уравнение этой поверхности. Преобразуем поверхностный интеграл

$$I=\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma,$$

[1]) Д. Стокс (1819—1903) — английский математик и механик.

считая, что S — верхняя сторона поверхности; при этом условии $\cos\gamma > 0$. Нормальный вектор к верхней стороне поверхности имеет проекции $-z'_x$, $-z'_y$, 1. Так как направляющие косинусы пропорциональны соответствующим проекциям, то

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{-z'_y}{1} = -z'_y.$$

Поэтому $\cos\beta = -z'_y\cos\gamma$, и

$$I = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y\right)\cos\gamma\, d\sigma.$$

Приведем этот поверхностный интеграл к двойному. Для этого нужно в подынтегральной функции заменить переменную z ее выражением через x и y согласно уравнению поверхности $z = z(x, y)$. Но при этом подынтегральная функция окажется равной частной производной по y от сложной функции, получающейся из $P(x, y, z)$ после подстановки $z(x, y)$ вместо z. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y} P[x, y, z(x, y)] = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y.$$

Таким образом, интеграл I равен

$$I = -\iint\limits_D \frac{\partial P[x, y, z(x, y)]}{\partial y}\, dx\, dy,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость Oxy (рис. 203). Применяя формулу Грина (п. **140**), перейдем к криволинейному интегралу по контуру L_1 — границе области D:

$$I = \int\limits_{L_1} P[x, y, z(x, y)]\, dx.$$

Контур L_1 является проекцией пространственной линии L — границы поверхности S — на плоскость Oxy, и интегрирование производится в положительном направлении контура L_1. Для завершения рассуждения осталось заметить, что так как контур L принадлежит поверхности S, то координаты его точек удовлетворяют уравнению $z = z(x, y)$, и поэтому значения функции $P(x, y, z)$ в точках контура L равны значениям $P[x, y, z(x, y)]$ в соответствующих точках контура L_1. Проекции же соответствующих участков разбиения контуров L и L_1 на ось Ox, очевидно, совпадают. Значит, совпадают интегральные суммы, построенные для определения криволинейных интегралов по координате x от функции P

по контурам L и L_1, а значит, равны интегралы

$$\int_{L_1} P[x, y, z(x, y)]\,dx = \int_L P(x, y, z)\,dx.$$

Итак,

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma = \int_L P\,dx. \qquad \text{(A)}$$

Рассуждая точно так же, как и на стр. 483, можно показать, что полученная формула верна и для поверхностей более сложного вида. Для этого нужно разбить ее на более простые поверхности и к каждой из них применить полученную формулу.

Аналогично доказывается справедливость еще двух соотношений (рекомендуем читателю доказать их самостоятельно, выбирая каждый раз уравнение поверхности в подходящем виде):

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) d\sigma = \int_L Q\,dy, \qquad \text{(Б)}$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) d\sigma = \int_L R\,dz. \qquad \text{(В)}$$

Сложив почленно равенства (А), (Б) и (В), мы получим доказываемую формулу.

Формула Стокса позволяет интеграл по поверхности заменить соответствующим криволинейным интегралом по границе поверхности и, наоборот, криволинейный интеграл по замкнутой пространственной линии заменить интегралом по поверхности, «натянутой» на контур интегрирования.

Подобно тому как при помощи формулы Грина была доказана основная теорема о независимости криволинейного интеграла в плоскости от пути интегрирования (см. п. **141**), так при помощи формулы Стокса можно дать доказательство (пропущенное в п. **143**) основной теоремы для криволинейных интегралов по пространственным линиям.

Пусть мы имеем интеграл

$$\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \qquad (*)$$

Предположим, что равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

тождественно выполняются в односвязной области Ω; тогда, натянув на замкнутую линию L поверхность S, лежащую в области Ω, в силу формулы Стокса заключаем, что криволинейный интеграл (*) равен нулю, каков бы ни был этот замкнутый путь L.

Обратно, пусть криволинейный интеграл (*) обращается в нуль для любого замкнутого контура, и пусть, однако, в какой-нибудь точке

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ области Ω указанные равенства не имеют места, скажем,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mu>0.$$

Проведем через точку M_0 плоскость $z=z_0$, параллельную плоскости Oxy. Тогда в этой плоскости можно взять такую окрестность точки M_0, что в каждой ее точке будет $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0$. В плоскости $z=z_0$ справедливы равенства $dz=0$, $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$. Рассуждая, как на стр. **486**, придем к выводу, что в противоречии с предположением в Ω существует замкнутый путь, по которому интеграл (*) не равен нулю. Теорема доказана.

150*. Формула Остроградского[1]. Рассмотрим теперь связь между интегралом по замкнутой поверхности и некоторым тройным интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью.

Теорема. **Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Ω, то имеет место формула**

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S}[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]\,d\sigma, \tag{*}$$

где S — граница области Ω и интегрирование по S производится по ее внешней стороне.

Формула (*) называется *формулой Остроградского*.

Доказательство. Сначала возьмем в пространстве $Oxyz$ область Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S, пересекающейся с любой координатной линией не более чем в двух точках (рис. 204).

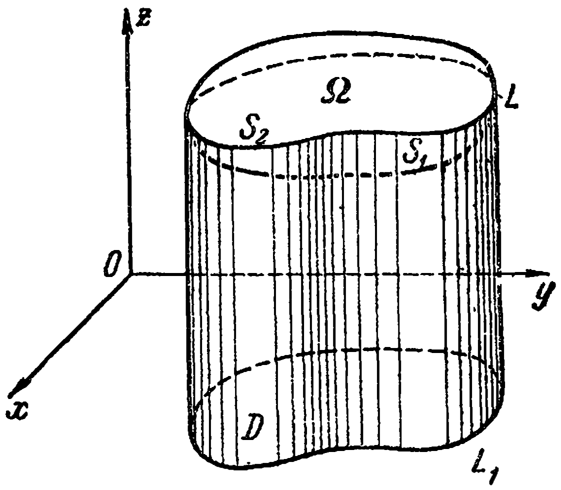

Рис. 204.

Преобразуем тройной интеграл

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Для этого проведем цилиндрическую поверхность, ортогонально проектирующую область Ω на плоскость Oxy; она касается поверхности S по линии L, разбивающей ее на две поверхности S_2 и S_1, каждая из которых пересекается с любой прямой, параллельной оси Oz, не более чем в одной

[1]) М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик и механик.

точке. Пусть область D есть проекция поверхностей S_2 и S_1 (и области Ω) на плоскость Oxy, а $z=z_2(x, y)$ и $z=z_1(x, y)$ суть уравнения поверхностей S_2 и S_1. Интегрируя сначала по z, получим

$$I=\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz.$$

Выполняя внутреннее интегрирование, получаем

$$I=\iint\limits_{D} R[x,\ y,\ z_2(x,\ y)]\,dx\,dy-\iint\limits_{D} R[x,\ y,\ z_1(x,\ y)]\,dx\,dy.$$

Так как плоская область D является проекцией на плоскость Oxy и поверхности S_2, и поверхности S_1, то двойные интегралы в правой части служат выражениями для интегралов $\iint R(x, y, z)\cos\gamma\,d\sigma$, взятых по верхним сторонам этих поверхностей (см. формулу (**) п. **148**). Значит,

$$I=\iint\limits_{+S_2} R\cos\gamma\,d\sigma-\iint\limits_{+S_1} R\cos\gamma\,d\sigma=\iint\limits_{+S_2} R\cos\gamma\,d\sigma+\iint\limits_{-S_1} R\cos\gamma\,d\sigma.$$

Так как верхняя сторона S_2 и нижняя сторона S_1 являются внешними сторонами всей поверхности S, то

$$I=\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S} R\cos\gamma\,d\sigma. \tag{A}$$

Граница области Ω — поверхность S — может содержать участки цилиндрической поверхности с образующей, перпендикулярной к плоскости Oxy; формула остается при этом верной.

Как во всех предыдущих случаях, разбивая область Ω на части и опираясь на свойства тройных и поверхностных интегралов, освобождаемся от наложенного на поверхность ограничения встречать любую координатную линию не более чем в двух точках.

Так же доказываются формулы

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S} Q\cos\beta\,d\sigma, \tag{Б}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S} P\cos\alpha\,d\sigma. \tag{В}$$

Складывая почленно равенства (А), (Б), (В), мы и приходим к формуле Остроградского (*). Теорема доказана.

Формула Остроградского позволяет заменить тройной интеграл соответствующим интегралом по поверхности, ограничивающей область интегрирования, и, наоборот, интеграл по замкнутой поверхности заменить тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью.

Пример. Вычислим интеграл $I=\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,d\sigma$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

По формуле Остроградского

$$I=\iiint\limits_\Omega (1+1+1)\,dx\,dy\,dz=3V=4\pi R^3,$$

так как объем шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

§ 3*. Теория поля

151*. Векторное поле и векторные линии.

I. Векторное поле. Определение векторного поля во многом напоминает определение скалярного поля, которое мы изучали в п. **125** (кстати, советуем читателю вспомнить содержание всего § 4 гл. VII).

Определение. **Если в каждой точке P области D задан определенный вектор, то будем говорить, что в этой области задано *векторное поле*.**

С конкретными физическими примерами векторных полей мы уже встречались. Так, в § 1 было рассмотрено силовое поле и решена задача о вычислении работы при движении материальной точки под действием сил поля. В § 2 рассматривалось поле скоростей текущей жидкости и ставилась задача о вычислении потока жидкости через заданную поверхность. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые общие задачи, относящиеся к любым векторным полям. При этом в качестве примеров таких полей чаще всего будут рассматриваться силовые поля (поле тяготения, электрическое и электромагнитное поля) или поле скоростей текущей жидкости. Рассмотрение этих полей придаст вводимым математическим понятиям ясный физический смысл.

Векторное поле задано, если в каждой точке P поля указан соответствующий этой точке вектор $\mathbf{A}(P)$. Мы будем сначала рассматривать стационарные поля, в которых вектор $\mathbf{A}(P)$ зависит только от точки P и не зависит от времени. Проекции вектора $\mathbf{A}(P)$ на оси координат обозначим через A_x, A_y, A_z. Если точка P имеет координаты x, y и z, то и сам вектор $\mathbf{A}(P)$, и его проекции будут функциями этих координат [1]), и мы можем записать

$$\mathbf{A}(P)=A_x(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i}+A_y(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j}+A_z(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k}.$$

Дальше всюду предполагается, что функции A_x, A_y, A_z непрерывны вместе со своими частными производными.

---

[1]) В п. **70** рассматривалась векторная функция одного скалярного аргумента. Здесь мы изучаем векторную функцию трех скалярных аргументов.

Рассмотрим некоторые частные случаи векторных полей.

1. Однородное поле. Векторное поле называется *однородным*, если $\mathbf{A}(P)$ — постоянный вектор, т. е. A_x, A_y и A_z — постоянные величины.

Примером однородного поля может служить, например, поле тяжести (см. пример 1 п. **144**).

2. Плоские поля. Если в выбранной системе координат проекции вектора не зависят от одной из трех переменных x, y, z и одна из проекций равна нулю, например:

$$\mathbf{A}(P) = A_x(x, y)\mathbf{i} + A_y(x, y)\mathbf{j},$$

то поле называется *плоским*. С плоскими полями очень часто приходится встречаться в гидродинамике при изучении плоских течений жидкости, т. е. таких течений, когда все частицы жидкости движутся параллельно некоторой плоскости, причем скорости частиц, расположенных на одной и той же прямой, перпендикулярной к этой плоскости, одинаковы.

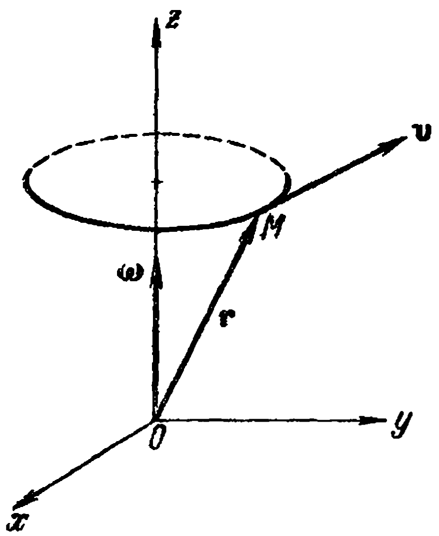

Рис. 205.

Рассмотрим еще один важный физический пример.

Пусть твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найдем поле линейных скоростей точек этого тела.

Как известно из кинематики, линейная скорость $\mathbf{v}$ равна векторному произведению

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости (т. е вектор, отложенный на оси вращения и численно равный величине угловой скорости; этот вектор направлен так, что если смотреть из его конца, вращение кажется происходящим против часовой стрелки), а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M вращающегося тела относительно какой-либо точки оси вращения. Выбрав эту неподвижную точку за начало координат и направив ось вращения по оси Oz (рис. 205), найдем проекции вектора $\mathbf{v}$.

Имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

тогда

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}.$$

Таким образом,

$$v_x = -\omega y, \; v_y = \omega x, \; v_z = 0,$$

т. е. поле является плоским.

II. Векторные линии.

Определение. ***Векторной линией* векторного поля называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора, соответствующего этой точке** (рис. 206).

Векторные линии в конкретных полях имеют ясный физический смысл. Так, если мы рассматриваем поле скоростей текущей жидкости, то векторные линии суть линии тока этой жидкости, т. е. линии, по которым движутся частицы жидкости.

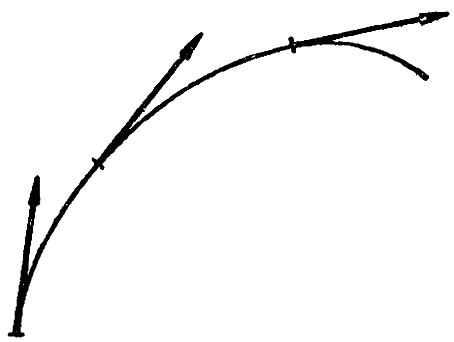

Рис. 206.

В электрическом поле векторные линии суть силовые линии этого поля. Например, в поле точечного заряда такими линиями будут лучи, выходящие из заряда. Для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном. Изучение расположения силовых линий в электрических, магнитных и электромагнитных полях очень важно в физике.

Выведем уравнения векторных линий.

Пусть векторное поле определено функцией

$$\mathbf{A}(P) = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

(для краткости аргументы функций A_x, A_y, A_z не выписаны). Если векторная линия имеет параметрические уравнения

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t),$$

то проекции направляющего вектора касательной к этой линии пропорциональны производным $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, или, что то же самое, дифференциалам dx, dy, dz (см. п. **68**). Записывая условия параллельности вектора $\mathbf{A}(P)$ и вектора, направленного по касательной к векторной линии, получим

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \qquad (*)$$

Система уравнений (*) представляет систему дифференциальных уравнений семейства векторных линий поля $\mathbf{A}(P)$. Такие системы уравнений будут рассмотрены позже (см. п. **176**), а сейчас мы сможем определять векторные линии поля лишь в самых простых случаях, опираясь на их физический смысл. Отметим еще, что если поле плоское (см. I, 2), т. е. $A_z = 0$, то векторные линии лежат в плоскостях, параллельных плоскости Oxy, и их уравнения имеют вид $\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y}$.

Пример. Найдем векторные линии поля линейных скоростей тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz.

Это поле определено функцией (см. пример 1)

$$\mathbf{A}(P) = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}.$$

На рис. 205 видно, что векторными линиями такого поля служат окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости Oxy с центром на оси Oz. Уравнения таких окружностей имеют вид

$$x^2 + y^2 = R, \quad z = z_0 = \text{const}.$$

Легко проверить, что равенство $\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x}$ соблюдается. Продифференцировав уравнение окружности, получим $2x\,dx + 2y\,dy = 0$, т. е. $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$. Умножив знаменатели этого равенства на ω, мы и придем к доказываемому равенству.

152*. Поток вектора. Дивергенция.

1. Поток вектора. Пусть векторное поле образовано вектором

$$\mathbf{A}(P) = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}.$$

Возьмем в этом поле некоторую поверхность S и выберем на ней определенную сторону[1]). Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор нормали к рассматриваемой стороне поверхности в произвольной ее точке; проекциями вектора $\mathbf{n}$ служат направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Рассмотрим интеграл по поверхности S от скалярного произведения вектора поля $\mathbf{A}(P)$ на единичный вектор нормали $\mathbf{n}$:

$$\iint\limits_S \mathbf{A}(P)\mathbf{n}\,d\sigma = \iint\limits_S (A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma)\,d\sigma. \qquad (*)$$

Если $\mathbf{A}(P)$ — поле скоростей текущей жидкости, то интеграл (*) выражает поток жидкости через поверхность S. В произвольном векторном поле интеграл (*) будем называть потоком вектора через поверхность S и обозначать буквой K.

---

[1]) Поверхность S предполагается двусторонней (см. стр. 507).

Определение. ***Потоком вектора*** **через поверхность называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности:**

$$K = \iint_S \mathbf{A}(P)\,\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Таким образом, вычисление потока вектора сводится к вычислению интеграла по поверхности. Из самого определения следует, что поток вектора K — величина скалярная. Если изменить направление нормали $\mathbf{n}$ на противоположное, т. е. переменить сторону поверхности S, то поток K изменит знак. Так как скалярное произведение вектора $\mathbf{A}(P)$ на единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ равно $A_n(P)$ — проекции вектора $\mathbf{A}(P)$ на направление $\mathbf{n}$, то поток K можно представить в виде

$$K = \iint_S A_n(P)\,d\sigma.$$

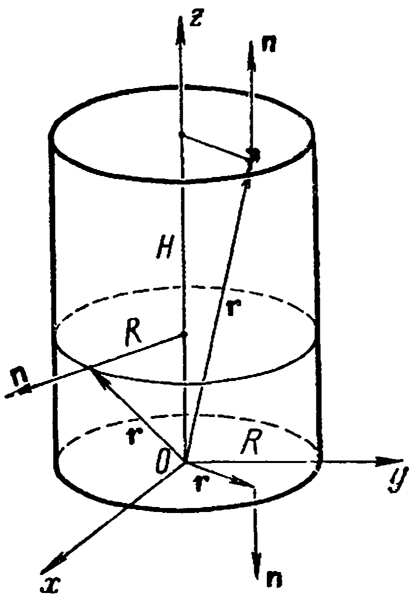

Рис. 207.

Отсюда, в частности, следует, что если на некотором участке поверхности проекция вектора $\mathbf{A}(P)$ на нормаль постоянна: $A_n(P) = A_n = \text{const}$, то поток через такой участок просто равен A_nQ, где Q — площадь участка поверхности.

Пример. Найдем поток радиуса-вектора $\mathbf{r}$ через боковую поверхность (S_1), верхнее основание (S_2) и нижнее основание (S_3) прямого цилиндра радиуса R и высоты H, если начало координат лежит в центре нижнего основания цилиндра, а ось цилиндра совпадает с осью Oz (рис. 207). На всех поверхностях $\mathbf{n}$ имеет направление внешней нормали. На боковой поверхности S_1 внешняя нормаль $\mathbf{n}$ параллельна плоскости Oxy и проекция r_n равна R. Поэтому

$$K_1 = \iint_{S_1} R\,d\sigma = R \cdot 2\pi RH = 2\pi R^2 H.$$

На верхнем основании S_2 нормаль $\mathbf{n}$ направлена параллельно оси Oz и $r_n = H$. Следовательно,

$$K_2 = \iint_{S_2} H\,d\sigma = \pi R^2 H.$$

Наконец, на нижнем основании S_3 проекция $r_n = 0$ и $K_3 = 0$.

Особый интерес представляет случай, когда S — замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область Ω. Если берется *внешняя* нормаль, то мы будем говорить о *потоке изнутри* поверхности S. Он обозначается так:

$$K = \oint\!\!\!\oint_S A_n(P)\,d\sigma.$$

Вообще в векторном анализе и в его приложениях интегралы по замкнутым поверхностям и по замкнутым контурам принято обозначать соответственно символами $\oint\!\!\oint_S$ и $\oint_L$.

Отметим также, что в курсах физики и прикладных дисциплин интегралы по поверхности (в частности, двойные) и даже тройные интегралы очень часто обозначают при помощи одного знака интеграла $\int$. При таком способе записи интегралы различаются по обозначениям дифференциала и области интегрирования: $\int_L f(M)\,ds$ означает интеграл по линии, $\int_S f(M)\,d\sigma$ — интеграл по поверхности, $\int_\Omega f(M)\,dv$ — интеграл по объему.

Когда векторное поле $\mathbf{A}(P)$ представляет поле скоростей жидкости, величина потока K дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области Ω, и количеством жидкости, втекающей в эту область.

Если $K=0$, то в область Ω жидкости втекает столько же, сколько и вытекает. Так, например, будет для любой области, расположенной в потоке воды, текущей в реке.

Если же величина K отлична от нуля, например, положительна, то из области Ω жидкости вытекает больше, чем втекает. Это означает, что в области Ω имеются *источники*, питающие поток жидкости. Наоборот, если величина K отрицательна, то это указывает на наличие *стоков* — мест, где жидкость удаляется из потока.

II. Дивергенция. Рассмотрим некоторую точку P векторного поля $\mathbf{A}(P)$ и окружим ее замкнутой поверхностью S, целиком содержащейся в поле. Вычислим поток вектора через поверхность S и возьмем отношение этого потока к объему V области Ω, ограниченной поверхностью S:

$$\frac{\oint\!\!\!\oint_S A_n(P)\,d\sigma}{V}.$$

В поле скоростей жидкости это отношение определяет количество жидкости, возникающее в единицу времени в области Ω, отнесенное к единице объема, т. е., как говорят, среднюю объемную мощность источника; если поток изнутри поверхности S меньше нуля, то соответственно говорят о мощности стока.

Найдем теперь предел отношения

$$\lim \frac{\oint\!\!\oint_S A_n(P)\,d\sigma}{V}$$

при условии, что область Ω стягивается в точку P, т. е. что V стремится к нулю.

Если этот предел положителен, то точка P называется *источником*, а если отрицателен, то *стоком*. Сама величина предела характеризует *мощность* источника или стока. В первом случае в любом бесконечно малом объеме, окружающем точку P, жидкость возникает, а во втором случае исчезает. Предел этот называется дивергенцией или расходимостью векторного поля в точке P.

Определение. ***Дивергенцией, или расходимостью,* векторного поля A (*P*) в точке *P* называется предел отношения потока вектора через поверхность, окружающую точку *P*, к объему, ограниченному этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку *P*.**

Дивергенцию поля обозначают символом div **A** (P). Таким образом,

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(P) = \lim \frac{\oint\!\!\oint_S A_n(P)\,d\sigma}{V},$$

где предел вычисляется при условии, что поверхность S стягивается к точке P.

Мы докажем сейчас, что при принятых нами условиях непрерывности функций A_x, A_y, A_z и их производных дивергенция поля существует в любой его точке (т. е. существует указанный предел), а также найдем ее величину. Подчеркнем тут же, что дивергенция векторного поля есть величина скалярная.

Теорема. **Дивергенция векторного поля**

$$\mathbf{A}(P) = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

выражается формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(P) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

где значения частных производных берутся в точке *P*.

Доказательство. По формуле Остроградского (см. п. **150**) поток вектора K можно представить в виде

$$\oint\!\!\oint_S A_n(P)\,d\sigma = \oint\!\!\oint_S (A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma)\,d\sigma =$$

$$= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Тройной интеграл по теореме о среднем (см. п. **133**) равен произведению объема V на значение подынтегральной функции в некоторой точке P_1 области Ω, т. е.

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_{P_1}V.$$

Если область Ω стягивается в точку P, то точка P_1 стремится к точке P, и мы получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(P)=\lim_{P_1\to P}\frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_{P_1}V}{V}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z},$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь выражением для дивергенции, теорему Остроградского можно сформулировать в векторной форме:

$$\oiint\limits_{S} A_n(P)\,d\sigma=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{A}(P)\,dv.$$

Поток вектора изнутри замкнутой поверхности равен тройному интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции поля.

Векторная форма теоремы Остроградского[1]) выражает в поле текущей жидкости тот очевидный факт, что поток жидкости через поверхность равен суммарной мощности всех источников и стоков, т. е. количеству жидкости, возникающей в рассматриваемой области за единицу времени. (Если мощность стоков больше, чем источников, то жидкость в объеме исчезает.) Если, в частности, дивергенция во всех точках равна нулю, то равен нулю и поток через любую замкнутую поверхность.

Примеры. 1) Пусть дано однородное поле

$$\mathbf{A}(P)=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k},$$

где a, b и c — постоянные. Ясно, что дивергенция этого поля равна нулю:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(P)=0.$$

Если все частицы жидкости имеют одну и ту же скорость, т. е. жидкость движется поступательно, как твердое тело, то в таком потоке не должно быть ни источников, ни стоков. Поток такой жидкости через любую замкнутую поверхность равен нулю.

---

[1]) Ее часто называют также теоремой Гаусса.

К. Гаусс (1777—1855) — крупнейший немецкий математик, автор выдающихся работ по математике, астрономии и физике.

2) Вычислим дивергенцию поля линейных скоростей вращающегося тела (см. пример 1 п. 151)

$$\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}.$$

Здесь

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0.$$

Если представить себе жидкость, вращающуюся, как твердое тело, то ясно, что в таком потоке нет ни источников, ни стоков.

3) Вычислим дивергенцию поля радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Имеем

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Каждая точка поля является как бы источником постоянной мощности. Пользуясь векторной формой теоремы Остроградского, сразу получаем, что поток радиуса-вектора через любую замкнутую поверхность равен утроенному объему, ограниченному этой поверхностью:

$$K = \iiint\limits_{\Omega} 3\,dV = 3V.$$

III. Свойства дивергенции. При вычислении дивергенции часто пользуются следующими ее свойствами:

1. $\operatorname{div}[C_1\mathbf{A}_1(P) + C_2\mathbf{A}_2(P)] = C_1 \operatorname{div} \mathbf{A}_1(P) + C_2 \operatorname{div} \mathbf{A}_2(P)$, где C_1 и C_2 — скалярные постоянные.

В самом деле, если обозначить проекции вектора $\mathbf{A}_1(P)$ через A_{1x}, A_{1y}, A_{1z} и вектора $\mathbf{A}_2(P)$ через A_{2x}, A_{2y}, A_{2z}, то

$$C_1\mathbf{A}_1(P) + C_2\mathbf{A}_2(P) = \\ = (C_1A_{1x} + C_2A_{2x})\mathbf{i} + (C_1A_{1y} + C_2A_{2y})\mathbf{j} + (C_1A_{1z} + C_2A_{2z})\mathbf{k}.$$

Поэтому

$$\operatorname{div}[C_1\mathbf{A}_1(P) + C_2\mathbf{A}_2(P)] = C_1\frac{\partial A_{1x}}{\partial x} + C_2\frac{\partial A_{2x}}{\partial x} + C_1\frac{\partial A_{1y}}{\partial y} + \\ + C_2\frac{\partial A_{2y}}{\partial y} + C_1\frac{\partial A_{1z}}{\partial z} + C_2\frac{\partial A_{2z}}{\partial z} = C_1 \operatorname{div} \mathbf{A}_1(P) + C_2 \operatorname{div} \mathbf{A}_2(P).$$

2. Пусть $\mathbf{A}(P)$ — функция, определяющая векторное поле, а $u(P)$ — скалярное. Тогда

$$\operatorname{div}[u(P)\,\mathbf{A}(P)] = u(P) \operatorname{div} \mathbf{A}(P) + \mathbf{A}(P) \operatorname{grad} u(P).$$

Действительно,

$$u(P)\,\mathbf{A}(P) = uA_x\mathbf{i} + uA_y\mathbf{j} + uA_z\mathbf{k}.$$

Значит,

$$\operatorname{div}\left[u(P)\,\mathbf{A}(P)\right] = \frac{\partial (uA_x)}{\partial x} + \frac{\partial (uA_y)}{\partial y} + \frac{\partial (uA_z)}{\partial z} =$$

$$= u\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \left(A_x\frac{\partial u}{\partial x} + A_y\frac{\partial u}{\partial y} + A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Поскольку $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$, то выражение во второй скобке есть скалярное произведение вектора поля $\mathbf{A}(P)$ на градиент функции $u(P)$; формула доказана.

В частности (см. пример 3),

$$\operatorname{div} u\mathbf{r} = 3u + \mathbf{r}\operatorname{grad} u.$$

153*. Циркуляция и ротор векторного поля.

I. Циркуляция. Пусть векторное поле образовано вектором

$$\mathbf{A}(P) = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}.$$

Возьмем в этом поле некоторую линию L и выберем на ней определенное направление. Обозначим через $d\mathbf{s}$ вектор, имеющий направление касательной к линии и по модулю равный дифференциалу длины дуги. Направление касательной считается совпадающим с выбранным направлением на линии. Тогда (см. п. **68**)

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.$$

Рассмотрим криволинейный интеграл по линии L от скалярного произведения векторов $\mathbf{A}(P)$ и $d\mathbf{s}$:

$$\int_L \mathbf{A}(P)\,d\mathbf{s} = \int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz. \qquad (*)$$

В силовом поле интеграл (*) выражает работу при перемещении материальной точки вдоль линии L (см. п. **143**).

Если $\mathbf{A}(P)$ — произвольное векторное поле, а L — замкнутый контур, то интеграл (*) носит специальное название — циркуляция вектора.

Определение. ***Циркуляцией вектора*** $\mathbf{A}(P)$ **вдоль замкнутого контура L называется криволинейный интеграл по этому контуру от скалярного произведения вектора $\mathbf{A}(P)$ на вектор $d\mathbf{s}$ касательной к контуру.**

Так как скалярное произведение $\mathbf{A}(P)\,d\mathbf{s} = A_s(P)\,ds$, где $A_s(P)$ — проекция вектора поля на направление касательной, а ds — дифференциал длины дуги, то циркуляцию можно записать в виде криволинейного интеграла по длине дуги кривой (см. п. **145**):

$$\oint_L A_s(P)\,ds.$$

Напомним читателю, что если подынтегральное выражение интеграла (*) является полным дифференциалом и векторное поле занимает односвязную область Ω (см. стр. 492), то такой интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю (см. п. **143**). Векторные поля, в которых это условие соблюдается, мы назвали потенциальными. Следовательно, в *потенциальном поле циркуляция всегда равна нулю.*

В произвольном векторном поле циркуляция есть некоторое число, зависящее от контура L. Пусть, например, в поле имеются замкнутые векторные линии (см. пример на стр. 522). Выберем линию интегрирования, совпадающую с векторной линией. Тогда

$A_s(P) = |\mathbf{A}(P)|$ и, следовательно, циркуляция, т. е. $\int\limits_L |\mathbf{A}(P)|\, ds$,

как интеграл от положительной функции, есть число заведомо положительное. Если направление интегрирования изменить на противоположное, то циркуляция станет отрицательной. Если L не является векторной линией, то циркуляция будет тем больше, чем ближе направление векторов поля $\mathbf{A}(P)$ к направлениям соответствующих касательных.

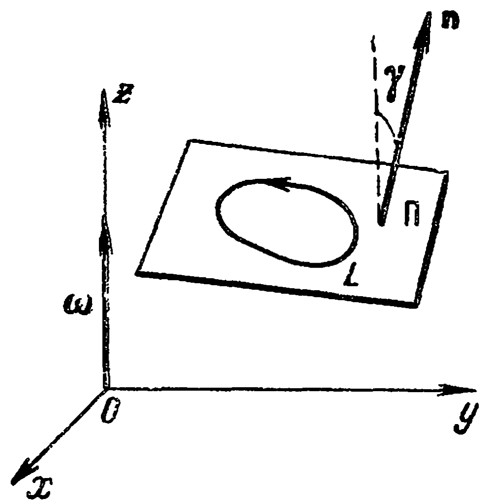

Рис. 208.

Пример. Вычислим циркуляцию вектора поля линейных скоростей вращающегося тела (см. п. **151**)

$$\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$$

вдоль контура L, лежащего целиком в плоскости Π (рис. 208), нормаль $\mathbf{n}$ к которой образует с осями координат углы α, β, γ. Направление обхода контура L и направление нормали $\mathbf{n}$ согласованы между собой так же, как в теореме Стокса (см. п. **148**). Согласно определению циркуляция равна

$$\oint\limits_L -\omega y\, dx + \omega x\, dy.$$

Применим для вычисления этого интеграла теорему Стокса

$$\omega \oint\limits_L -y\, dx + x\, dy = \omega \iint\limits_D 2dx\, dy,$$

где D — область, ограниченная контуром L. Интегрирование ведется по верхней стороне плоскости Π, и поэтому $dx\, dy = \cos\gamma\, d\sigma$ (см.

п. **148**). Так как $\cos\gamma = \text{const}$, то циркуляция равна

$$2\omega\cos\gamma \iint_D d\sigma = 2\omega\cos\gamma S,$$

где S — площадь области, ограниченной контуром L. Заметим еще, что $\omega\cos\gamma = \omega_n$ — проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на направление вектора $\mathbf{n}$. Поэтому окончательно выражение для циркуляции примет вид

$$\oint_L -\omega y\,dx + \omega x\,dy = 2\omega_n S.$$

(Если L — окружность радиуса R, то циркуляция равна $2\omega_n\pi R^2$.)

Из этой формулы вытекает, что если плоскость Π поворачивать, т. е. менять угол γ, то величина циркуляции будет меняться. Наибольшей она будет, когда $\gamma = 0$, т. е. когда плоскость Π параллельна плоскости Oxy и нормаль $\mathbf{n}$ к ней параллельна вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Если же $\gamma = \frac{\pi}{2}$, т. е. нормаль к плоскости перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{\omega}$, то циркуляция равна нулю.

Ясно также, что если переменить сторону плоскости Π, то вектор $\mathbf{n}$ переменит направление и проекция ω_n станет отрицательной. Поэтому и циркуляция также будет величиной отрицательной.

Установим теперь физический смысл циркуляции вектора в случае, когда $\mathbf{A}(P)$ — поле скоростей текущей жидкости. Примем для простоты, что контур L — окружность, расположенная в некоторой плоскости. Предположим, что окружность является периферией колесика с радиальными лопатками, могущего вращаться вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Если циркуляция будет равна нулю, то колесико будет оставаться неподвижным: силы, действующие на лопатки, уравновешивают друг друга. Если циркуляция не равна нулю, то колесико будет вращаться, причем тем быстрее, чем больше величина циркуляции. Если, например, жидкость вращается, как твердое тело, вокруг оси Oz и если ось колесика совпадает с направлением этой оси, то, как мы только что видели, циркуляция равна $2\omega S$, где S — площадь колесика. Таким образом, отношение циркуляции к площади колесика равно удвоенной угловой скорости и не зависит от размеров колесика.

Если ось колесика наклонить к оси Oz, то указанное отношение уменьшится и станет равным $2\omega_n$, где ω_n — проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на направление оси колесика. Наконец, если ось колесика станет перпендикулярной к оси вращения жидкости, то, очевидно, колесико будет неподвижным.

В случае произвольного векторного поля отношение циркуляции по плоскому контуру L к площади S, ограниченной этим контуром, будет величиной переменной. Чтобы охарактеризовать вращательное свойство векторного поля в какой-либо его точке P, рассмотрим предел отношения циркуляции по плоскому контуру L, окружающему точку P, к площади S, ограниченной этим контуром, при условии, что контур L стягивается в точку P, оставаясь в одной и той же плоскости:

$$\lim \frac{\oint\limits_L A_s ds}{S}.$$

Как мы сейчас покажем, этот предел будет зависеть только от выбранной точки P и от направления нормали к плоскости, в которой лежит контур L. После того как нормаль проведена к определенной стороне плоскости, направление обхода контура L вполне определено: именно обход совершается против часовой стрелки, если смотреть из конца нормали. Чтобы вычислить указанный предел, преобразуем выражение для циркуляции, воспользовавшись формулой Стокса:

$$\oint\limits_L A_s ds = \oint\limits_L A_x dx + A_y dy + A_z dz =$$
$$= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$, а D — область, ограниченная контуром L. Последний интеграл по теореме о среднем равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке P_1 области D на величину S площади этой области.

При стягивании контура L в точку P значение подынтегральной функции будет стремиться к ее значению в точке P. Поэтому

$$\lim \frac{\oint\limits_L A_s ds}{S} =$$
$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma,$$

где значения всех частных производных берутся в точке P. Правая часть равенства представляет собой как бы скалярное произведение двух векторов: единичного вектора $\mathbf{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — нормали к плоскости, в которой лежит контур L, и вектора, проекции которого равны

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Последний вектор называется *ротором* или *вихрем* векторного поля и обозначается $\operatorname{rot} \mathbf{A}(P)$.

II. Ротор и его свойства.

Определение. ***Ротором* векторного поля**

$$\mathbf{A}(P)=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$$

называется вектор

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(P)=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Проекция $\operatorname{rot}_n \mathbf{A}(P)$ этого вектора на любое направление дает предел отношения циркуляции вектора поля по контуру, лежащему в плоскости, проходящей через точку P, для которой вектор $\mathbf{n}$ является нормалью, к площади, ограниченной этим контуром. Этот предел будет наибольшим в том случае, когда направление нормали $\mathbf{n}$ совпадает с направлением $\operatorname{rot} \mathbf{A}(P)$.

С помощью определения ротора теорему Стокса можно сформулировать в векторной форме:

$$\iint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{A}(P)\,d\sigma=\oint_L A_s(P)\,ds.$$

Поток ротора поля через поверхность S равен циркуляции вектора по границе этой поверхности.

Направление интегрирования по контуру L и направление нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S согласованы между собой так же, как в теореме Стокса. Отсюда следует, что если две поверхности S имеют одну и ту же границу L, то потоки ротора через эти поверхности равны между собой.

Предоставляем читателю проверить следующее свойство ротора поля:

$$\operatorname{rot}[C_1\mathbf{A}_1(P)+C_2\mathbf{A}_2(P)]=C_1\operatorname{rot}\mathbf{A}_1(P)+C_2\operatorname{rot}\mathbf{A}_2(P),$$

где C_1 и C_2 — скалярные постоянные.

Докажем еще, что если $u(P)$ — скалярная функция, а $\mathbf{A}(P)$ — векторная, то

$$\operatorname{rot} u\mathbf{A}=u\operatorname{rot}\mathbf{A}+(\operatorname{grad} u\times\mathbf{A}).$$

Чтобы избежать громоздкости выкладок, докажем только равенство проекций на ось Ox векторов в левой и правой частях формулы. Так как вектор $u\mathbf{A}$ имеет проекции uA_x, uA_y, uA_z, то

$$\operatorname{rot}_x u\mathbf{A}=\frac{\partial uA_z}{\partial y}-\frac{\partial uA_y}{\partial z}=u\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\left(A_z\frac{\partial u}{\partial y}-A_y\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Первое слагаемое есть как раз $u\,\mathrm{rot}_x\,\mathbf{A}$. Так как

$$\mathrm{grad}\,u\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix},$$

то

$$(\mathrm{grad}\,u\times\mathbf{A})_x=A_z\frac{\partial u}{\partial y}-A_y\frac{\partial u}{\partial z}.$$

А это и есть вторая пара слагаемых в доказываемой формуле.

Доказательство равенства проекций на остальные координатные оси проводится аналогично.

154*. Оператор Гамильтона[1]) и векторные дифференциальные операции второго порядка. Введенные нами основные понятия векторного анализа: градиент, дивергенция, ротор — удобно представлять с помощью символического вектора ∇ («набла-вектор»):

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Перечислим правила действий с этим вектором:

1. *Произведение набла-вектора ∇ на скалярную функцию $u(P)$ дает градиент этой функции:*

$$\nabla u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}=\mathrm{grad}\,u.$$

2. *Скалярное произведение набла-вектора ∇ на векторную функцию $\mathbf{A}(P)$ дает дивергенцию этой функции:*

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(P)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})=$$
$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\mathrm{div}\,\mathbf{A}(P).$$

3. *Векторное произведение набла-вектора ∇ на векторную функцию $\mathbf{A}(P)$ дает ротор этой функции:*

$$\nabla\times\mathbf{A}(P)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=$$
$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(P).$$

---

[1]) У. Гамильтон (1805—1865) — английский математик.

Таким образом, действия с набла-вектором производятся по обычным правилам действий векторной алгебры, а затем умножение, скажем, $\frac{\partial}{\partial x}$ на скалярную функцию заменяется производной этой функции по x. Набла-вектор называют еще *оператором Гамильтона.*

Действия взятия градиента, дивергенции и ротора будут векторными дифференциальными операциями первого порядка. В них участвуют только первые производные от скалярных функций.

Перейдем теперь к векторным дифференциальным операциям второго порядка.

Пусть имеется скалярное поле $u(P)$ и мы нашли градиент этого поля $\operatorname{grad} u$. Поле градиента является векторным полем, и мы можем искать его дивергенцию и ротор: $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$.

Если имеется векторное поле $\mathbf{A}(P)=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$, то оно порождает два поля: скалярное поле $\operatorname{div}\mathbf{A}(P)$ и векторное поле $\operatorname{rot}\mathbf{A}(P)$. Следовательно, мы можем находить градиент первого поля: $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}(P)$ и дивергенцию и ротор второго поля: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(P)$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}(P)$. Всего мы имеем пять векторных дифференциальных операций второго порядка. Особенно важными являются три из них, которые мы рассмотрим подробнее.

а) $\boldsymbol{\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$.

Действительно, $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$. Образуя дивергенцию этого вектора, мы и получаем написанное равенство. Правая часть его называется *оператором Лапласа* [1]) от функции u и обозначается Δu:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Выражение $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$ можно с помощью набла-вектора записать еще и так:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u=\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2 u.$$

Это обозначение оператора Лапласа тоже часто употребляется.

б) $\boldsymbol{\operatorname{rot}\operatorname{grad} u \equiv 0}$.

Соотношение это проверяется совсем просто. Каждая скобка в выражении для ротора представляет в этом случае разность вторых смешанных производных функции u, отличающихся лишь порядком дифференцирования, например:

$$\operatorname{rot}_x\operatorname{grad} u=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

---

[1]) П. Лаплас (1749—1827) — выдающийся французский математик и физик.

Это соотношение легко запоминается, если записать его с помощью набла-вектора:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla)\, u = 0,$$

так как векторное произведение одинаковых «векторов» равно нулю.

в) $\mathbf{div\,rot\,A}\,(P) \equiv 0$.

Образуя дивергенцию от $\operatorname{rot}\mathbf{A}(P)$, получим

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(P) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\,\partial z},$$

что в силу равенства вторых смешанных производных равно нулю.

Если бы мы записали доказываемое соотношение с помощью набла-вектора:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(P) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}),$$

то получили бы смешанное произведение трех «векторов», из которых два вектора одинаковы. Но такое произведение равно нулю.

Остальные две векторные операции второго порядка: $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}(P)$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}(P)$ — встречаются реже. Мы не будем записывать их выражения через проекции вектора $\mathbf{A}(P)$, а только укажем связь между ними:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}(P) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}(P) - \Delta\mathbf{A}(P),$$

где $\Delta\mathbf{A}(P) = \Delta A_x\mathbf{i} + \Delta A_y\mathbf{j} + \Delta A_z\mathbf{k}$ (Δ — оператор Лапласа).

155*. Свойства простейших векторных полей. Простейшими векторными полями являются такие, для которых либо $\operatorname{div}\mathbf{A}(P) = 0$, либо $\operatorname{rot}\mathbf{A}(P) = 0$, либо, наконец, равны нулю и дивергенция и ротор. Рассмотрим такие поля подробнее.

I. Трубчатое (соленоидальное[1]) поле. Векторное поле, для всех точек которого дивергенция равна нулю, называется *трубчатым* или *соленоидальным*. Поясним смысл этого названия. Возьмем в этом поле какую-нибудь площадку S_0 и проведем через каждую точку ее границы векторные линии (см. п. **151, II**). Эти линии ограничивают часть пространства, называемую *векторной трубкой* (рис. 209). Жидкость при своем течении все время движется по такой трубке, не пересекая ее стенок. Рассмотрим часть такой трубки, ограниченную площадкой S_0 и каким-нибудь сечением S_1 (рис. 209). Так как по условию $\operatorname{div}\mathbf{A}(P) = 0$, то поток вектора

---

[1]) Термин «соленоидальное» происходит от латинского слова «solen» — трубка.

через любую замкнутую поверхность равен нулю. Следовательно,

$$\iint_S A_n d\sigma + \iint_{S_0} A_n d\sigma + \iint_{S_1} A_n d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{A}(P)\, dv = 0,$$

где S — боковая поверхность трубки, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль. Так как на боковой поверхности трубки нормали $\mathbf{n}$ перпендикулярны к векторам поля, то

$$\iint_S A_n d\sigma = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\iint_{S_1} A_n d\sigma = -\iint_{S_0} A_n d\sigma.$$

Переменив направление нормали на площадке S_0, т. е. взяв внутреннюю нормаль $\mathbf{n}'$, получим

$$\iint_{S_1} A_n d\sigma = \iint_{S_0} A_{n'} d\sigma.$$

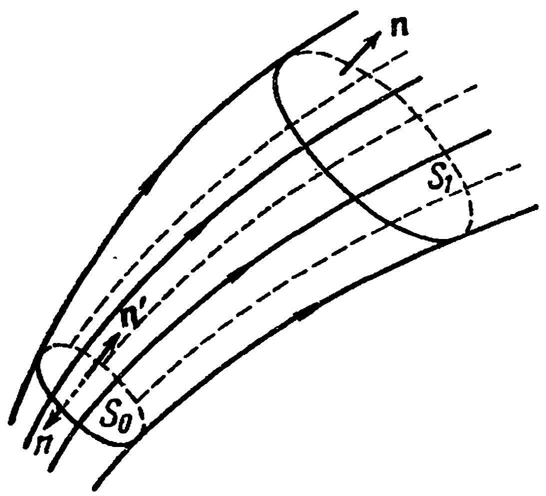

Рис. 209.

Это значит, что *поток вектора в направлении векторных линий через каждое сечение векторной трубки один и тот же*, т. е. в поле без источников через каждое сечение векторной трубки протекает одно и то же количество жидкости.

Согласно формуле в) п. **154**

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A}(P) = 0,$$

т. е. *поле ротора любого векторного поля — трубчатое*.

Справедливо и обратное предложение, которое мы приводим без доказательства.

Каждое трубчатое поле является полем ротора некоторого векторного поля, т. е. если $\operatorname{div} \mathbf{A}(P) = 0$, *то существует такое векторное поле* $\mathbf{B}(P)$, *что*

$$\mathbf{A}(P) = \operatorname{rot} \mathbf{B}(P).$$

Вектор $\mathbf{B}(P)$ называют *вектором-потенциалом* данного поля.

II. Потенциальное, или безвихревое, поле. Если во всех точках поля ротор равен нулю: $\operatorname{rot} \mathbf{A}(P) = 0$, то поле называется *безвихревым* или *потенциальным*. Из равенства нулю $\operatorname{rot} \mathbf{A}(P)$ вытекает, что

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Написанные равенства представляют условие того, что выражение

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y, z)$ (см. п. **115**, II).

При этом

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad A_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad A_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Это значит, что *вектор* $\mathbf{A}(P)$ *потенциального поля является градиентом скалярного поля*:

$$\mathbf{A}(P) = \operatorname{grad} u.$$

Функция u называется *потенциальной функцией векторного поля* или, коротко, *потенциалом*. Потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Из формулы б) п. **154** следует обратное предложение:

Поле градиента любой функции $u(x, y, z)$ *является потенциальным, а сама функция* u — *его потенциалом.*

В потенциальном поле циркуляция по любому контуру равна нулю. При этом предполагается, что контур L можно заключить в односвязную область, во всех точках которой функции A_x, A_y, A_z и их производные непрерывны. С точки зрения течения жидкости равенство нулю циркуляции означает, что в потоке нет замкнутых струек жидкости, т. е. нет водоворотов.

Работа в силовом потенциальном поле (см. п. **144**) равна разности потенциалов в конечной и начальной точках линии L, т. е.

$$\int_{(A)}^{(B)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = u(B) - u(A).$$

Изучение потенциального поля значительно облегчается тем, что это поле вполне определяется заданием одной скалярной функции — его потенциала. Проекции вектора поля $\mathbf{A}(P)$ будут при этом частными производными этой функции по соответствующим координатам. Произвольное же векторное поле требует задания трех скалярных функций — проекций вектора на оси координат.

III. Гармоническое поле. Векторное поле, являющееся одновременно и потенциальным и трубчатым, называется *гармоническим*. Поскольку поле потенциально, его можно записать в виде

$$\mathbf{A}(P) = \operatorname{grad} u,$$

где u — потенциал поля. Условие трубчатости поля означает, что

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(P) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0.$$

Согласно формуле а) п. **154**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Функции u, подчиняющиеся этому условию, называются *гармоническими*. Они играют важную роль в различных разделах теоретической физики. На их свойствах мы останавливаться не будем.

156*. Электромагнитное поле. Одним из важнейших приложений введенных нами понятий векторного анализа является изучение электромагнитных полей. Мы рассмотрим несколько простых примеров.

I. Электрическое поле. Пусть $\mathbf{E}$ — поле напряженности точечного заряда q, помещенного в начало координат. Согласно примеру 2 п. **144** напряженность поля в точке $P(x, y, z)$ равна

$$\mathbf{E} = \frac{qx}{r^3}\mathbf{i} + \frac{qy}{r^3}\mathbf{j} + \frac{qz}{r^3}\mathbf{k},$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — расстояние от точки P до начала координат. Векторными линиями такого поля служат лучи, выходящие из начала координат, т. е. из заряда.

Поле напряженности $\mathbf{E}$ является полем потенциальным (см. п. **144**, пример 2). Обычно за потенциал φ поля $\mathbf{E}$ берут найденную в п. **144** функцию $u = -\frac{q}{r}$, взятую с противоположным знаком: $\varphi = \frac{q}{r}$.

Таким образом, разность потенциалов между двумя точками поля равна *взятой с противоположным знаком работе*, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из первой точки во вторую. Легко проверить, что

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\left(-\frac{q}{r}\right) = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Это значит также, что $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$.

Найдем дивергенцию поля напряженности. Имеем

$$\frac{\partial\left(\frac{qx}{r^3}\right)}{\partial x} = q\,\frac{r - 3x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^4} = q\,\frac{r^2-3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial\left(\frac{qy}{r^3}\right)}{\partial y} = q\,\frac{r^2-3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial\left(\frac{qz}{r^3}\right)}{\partial z} = q\,\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

Отсюда

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{q}{r^5}\left[3r^2 - 3(x^2+y^2+z^2)\right] = 0.$$

Следовательно,

Поток вектора $\mathbf{E}$ через любую замкнутую поверхность, не содержащую внутри себя начала координат, равен нулю.

Если же начало координат, т. е. заряд, содержится внутри поверхности, то такого вывода сделать уже нельзя, так как в начале координат поле не определено.

Вычислим поток вектора **E** через сферу радиуса R с центром в начале координат. На поверхности этой сферы направление вектора **E** совпадает с направлением нормали, т. е. радиуса-вектора. Поэтому

$$E_n = |\mathbf{E}| = \frac{q}{R^2}.$$

Отсюда поток K равен

$$K = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q.$$

Мы видим, что величина потока не зависит от радиуса сферы R. Легко показать, что величина потока остается неизменной для *любой* замкнутой поверхности, окружающей начало координат.

Возьмем такую произвольную поверхность[1]) и поместим внутрь нее какую-либо сферу с центром в начале координат (рис. 210). Разобьем теперь тело, ограниченное поверхностью, на несколько конусов с вершиной в начале координат. Каждый такой конус имеет вид, изображенный на рис. 211. Так как часть конуса, заключенная между участком сферы и данной поверхностью, является векторной трубкой (см. п. **155**, I), а дивергенция поля равна нулю, то потоки через участки сферы и поверхности равны между собой. Складывая потоки через все такие участки поверхности, мы и получаем, что поток вектора **E** через *любую* поверхность, окружающую начало координат,

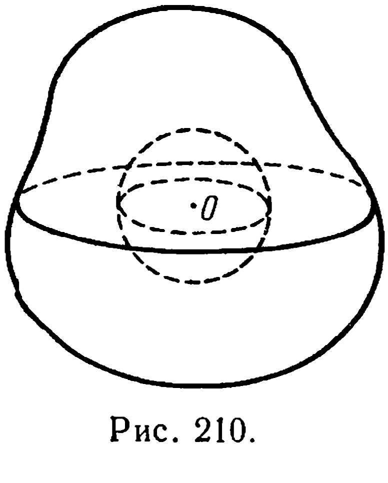

Рис. 210.

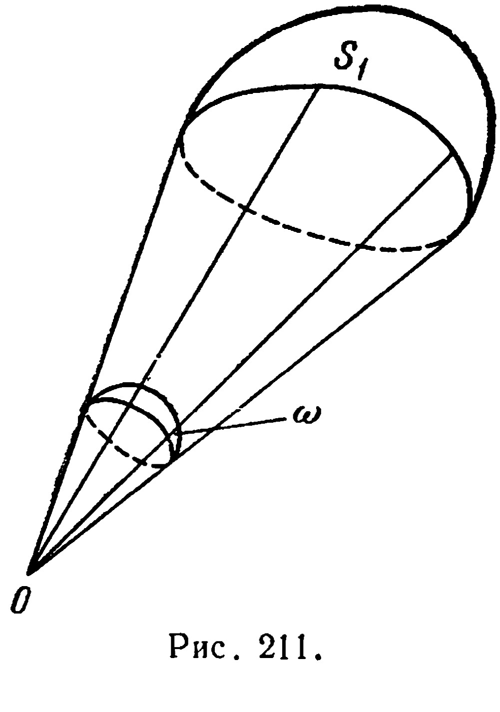

Рис. 211.

[1]) На рис. 210 изображена поверхность, звездная относительно начала координат, т. е. пересекающаяся с любым радиусом-вектором только в одной точке. Можно доказать, что рассуждение сохраняет силу для любой поверхности.

равен потоку через сферу, т. е. $4\pi q$. Будем считать, что внутренняя сфера имеет радиус, равный единице. Тогда поток через участок поверхности S_1 (рис. 211) будет равен $q\omega$, где ω — площадь поверхности сферы единичного радиуса, в которую проектируется участок поверхности. Величину ω называют *телесным углом,* под которым поверхность S_1 видна из начала координат.

Пусть теперь поле создано системой электрических зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Обозначим через $\mathbf{E}_i$ напряженность поля, создаваемого зарядом q_i, а через $\mathbf{E}$ — результирующую напряженность. Тогда

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}_i.$$

Проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление нормали $\mathbf{n}$ к любой поверхности равна

$$E_n = \sum_{i=1}^{m} E_{in}.$$

Стало быть, поток через поверхность равен

$$K = \oiint\limits_S E_n dS = \sum_{i=1}^{m} \oiint\limits_S E_{in} dS = 4\pi \sum q_i,$$

причем *последняя сумма распространена только на те заряды* q_i, *которые лежат внутри рассматриваемой поверхности.*

Эта формула, играющая важную роль в изучении электрических полей, называется *электростатической теоремой Гаусса.*

Пусть, наконец, мы имеем дело с непрерывным распределением заряда. Обозначим через ρ плотность распределения заряда[1]). Если плотность заряда непостоянна, то ρ является функцией точки поля P, т. е. ее координат. Суммарный заряд в данном объеме Ω будет равен

$$\iiint\limits_{\Omega} \rho \, dv.$$

Применив к этому заряду теорему Гаусса, мы получим

$$\iint\limits_S E_n dS = 4\pi \iiint\limits_{\Omega} \rho \, dv,$$

где S — граница области Ω.

---

[1]) Определение плотности распределения электрического заряда аналогично определению обычной плотности (см. п. 133).

Преобразуем первый интеграл, вводя $\operatorname{div}\mathbf{E}$:

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{E}\,dv = 4\pi \iiint\limits_{\Omega} \rho\,dv.$$

Отсюда

$$\iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\mathbf{E} - 4\pi\rho)\,d\Omega = 0.$$

Поскольку интеграл равен нулю для любой области интегрирования Ω, то рассуждая так же, как на стр. 486, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (*)$$

Примем без доказательства, что свойство электрического поля быть потенциальным сохраняется при непрерывном распределении зарядов.

Обозначим его потенциал через φ; тогда $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Согласно формуле а) п. **154**

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\Delta\varphi. \qquad (**)$$

Из равенств (*) и (**) получим

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Полученное соотношение называется *уравнением Пуассона*. В тех точках поля, где плотность заряда ρ равна нулю, оно превращается в *уравнение Лапласа*: $\Delta\varphi = 0$.

Изучением этих уравнений мы в нашем курсе заниматься не будем

II. Магнитное поле прямолинейного тока. Пусть магнитное поле создано постоянным током I, текущим по бесконечному прямолинейному проводнику. Найдем вектор напряженности магнитного поля, создаваемого этим током. Согласно закону Био — Савара[1]) элемент тока создает в данной точке напряженность магнитного поля, равную по величине $k\frac{I\sin\alpha\,ds}{r^2}$, где I — ток, ds — элемент длины проводника, r — расстояние от элемента тока до рассматриваемой точки, α — угол между направлением тока и прямой, соединяющей точку, в которой ищется поле, и элемент тока, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. Вектор напряженности направлен по нормали к плоскости, содержащей элемент тока и точку наблюдения; направление напряженности устанавливается правилом Ампера[2]) (правило «буравчика»). В векторной форме закон Био — Савара записывается так:

$$d\mathbf{H} = k\frac{I}{r^3}(d\mathbf{s}\times\mathbf{r}),$$

---

[1]) Ж. Био (1775—1862) и Ф. Савар (1791—1841) — французские физики.

[2]) А. Ампер (1775—1836) — выдающийся французский физик и математик.

где $d\mathbf{H}$ — вектор напряженности поля, создаваемого элементом тока, $d\mathbf{s}$ — вектор, направленный по проводнику, а $\mathbf{r}$ — вектор, проведенный из элемента тока в точку M, в которой ищется напряженность.

Пусть ток течет по проводу, совпадающему с осью Oz, в направлении снизу вверх (рис. 212). Обозначим переменное расстояние от элемента тока до начала координат через ξ, а координаты точки M через x, y и z. Тогда

$$d\mathbf{s}=d\xi\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-\xi)\mathbf{k},$$

$$r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+(z-\xi)^2}=\sqrt{\rho^2+(z-\xi)^2},$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние от точки M до провода. Вычисляя векторное произведение, находим $d\mathbf{H}$:

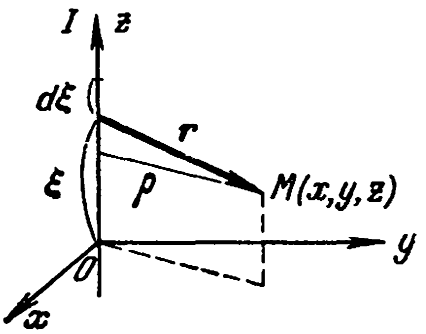

Рис. 212.

$$d\mathbf{H}=\frac{kI}{r^3}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & d\xi\\ x & y & z-\xi\end{vmatrix}=\frac{kI}{r^3}(-y\,d\xi\mathbf{i}+x\,d\xi\mathbf{j}).$$

Отсюда

$$dHx=-\frac{kIy\,d\xi}{(\sqrt{\rho^2+(z-\xi)^2})^3},$$

$$dH_y=-\frac{kIx\,d\xi}{(\sqrt{\rho^2+(z-\xi)^2})^3}, \quad dH_z=0.$$

Чтобы найти H_x и H_y, проинтегрируем выражения для их дифференциалов в пределах от $-\infty$ до ∞. Для этого вычислим несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(\sqrt{\rho^2+(z-\xi)^2})^3}.$$

Подстановка $\xi-z=\rho\operatorname{tg}t$, $d\xi=\frac{\rho}{\cos^2 t}dt$ приводит к интегралу

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho\,dt}{\cos^2 t\,(\sqrt{\rho^2(1+\operatorname{tg}^2 t)})^3}=\frac{1}{\rho^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\frac{2}{\rho^2}.$$

Поэтому

$$H_x=-\frac{2kIy}{\rho^2}=-\frac{2kIy}{x^2+y^2}, \qquad H_y=\frac{2kIx}{\rho^2}=\frac{2kIx}{x^2+y^2}, \qquad H_z=0.$$

В точках оси Oz поле не определено. Таким образом, вектор напряженности $\mathbf{H}$ имеет то же направление, что и вектор линейной скорости при вращении тела вокруг оси Oz (см. п. **151**, I), если направление тока совпадает с направлением вектора угловой скорости. Модуль вектора $\mathbf{H}$ равен

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \frac{2kI}{\rho}.$$

Легко проверить, что дивергенция поля равна нулю. Имеем

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{4Ixy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial y} = -\frac{4Ixy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Ротор этого поля также во всех точках равен нулю. Для этого надо только проверить равенство

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = 2kI \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = 2kI \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

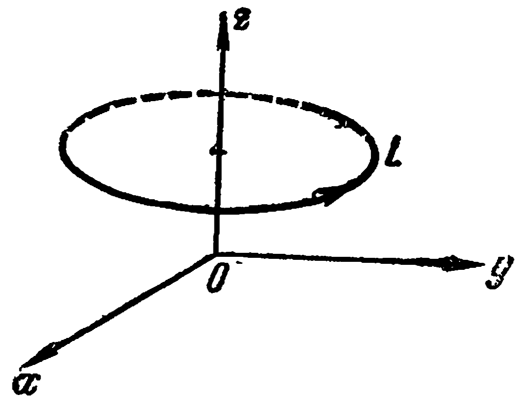

Рис. 213.

Следовательно, циркуляция поля по любому контуру, не окружающему ось Oz, равна нулю. Если же контур окружает ось Oz (рис. 213), то такого вывода сделать нельзя, поскольку такой контур невозможно заключить в односвязную область, не содержащую точек оси Oz, в которых поле не определено.

Вычислим циркуляцию по окружности радиуса R, лежащей в плоскости Oxy, с центром в начале координат

$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t.$$

Тогда

$$2kI\int_L \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2kI\int_0^{2\pi} \frac{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}{R^2}\,dt = 4k\pi I.$$

Величина циркуляции не зависит от радиуса окружности R. Можно доказать, что она остается одной и той же для любого контура, окружающего ось Oz.

157*. Нестационарные поля. В этом пункте мы сделаем несколько кратких замечаний о нестационарных полях, т. е. о полях, определяющие функции которых зависят не только от пространственных координат x, y, z, но и от времени t. Скалярное поле в этом случае определяется функцией $u(x, y, z, t)$; частная производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ представляет скорость изменения величины u в данной фиксированной точке $M(x, y, z)$ с течением времени t.

Если поле векторное

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t)\,\mathbf{i} + A_y(x, y, z, t)\,\mathbf{j} + A_z(x, y, z, t)\,\mathbf{k},$$

то производной $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ будет вектор

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial A_x}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial A_y}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\mathbf{k}.$$

Производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ называют *частными* или *локальными* производными; они характеризуют изменение поля в данной точке.

Если скалярное поле нестационарное, то соответствующее ему векторное поле градиента также будет нестационарным. Так как $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$, то

$$\frac{\partial (\operatorname{grad} u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{k}.$$

С другой стороны, градиент скалярного поля $\frac{\partial u}{\partial t}$ равен

$$\operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathbf{k}.$$

Из равенства вторых смешанных производных немедленно следует, что

$$\frac{\partial (\operatorname{grad} u)}{\partial t} = \operatorname{grad}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Аналогично, если векторное поле нестационарно, то его основные характеристики — дивергенция и ротор — зависят от t. Легко проверить, что

$$\frac{\partial (\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t} = \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial (\operatorname{rot} \mathbf{A})}{\partial t} = \operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

В первой формуле слева и справа стоят скалярные величины, а во второй — векторные. При выводе этих формул, разумеется, предполагается, что выполнены условия равенства вторых смешанных производных по пространственным координатам и по времени; согласно теореме, приведенной в п. **114**, для этого требуется их непрерывность.

Приведенные выше формулы играют важную роль при изучении переменных электромагнитных полей с помощью *уравнений Максвелла* [1]).

---

[1]) Д. Максвелл (1831—1879) — знаменитый английский физик.

Перейдем теперь к задачам, возникающим при изучении движущихся сред. Пусть, например, рассматривается распределение температуры в движущейся жидкости. В нестационарном случае эта температура будет зависеть от точки, в которой она измеряется, и от времени $T=T(x, y, z, t)$. Если измерять температуру в фиксированной неподвижной точке $M(x, y, z)$, то скорость изменения этой температуры со временем будет равна, как уже сказано выше, частной производной $\frac{\partial T}{\partial t}$.

Если же следить за температурой движущейся частицы жидкости, то она будет меняться еще и потому, что сама частица в своем движении может попасть в более теплую или более холодную область течения. Пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — уравнения траектории движущейся частицы; тогда проекции скорости $\mathbf{v}$ этой частицы на оси координат равны

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \quad v_y=\frac{dy}{dt}, \quad v_z=\frac{dz}{dt}.$$

Температура $T(x, y, z, t)$ является теперь сложной функцией от t и скорость ее изменения равна полной производной по t (см. п. 116):

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial T}{\partial x}v_x+\frac{\partial T}{\partial y}v_y+\frac{\partial T}{\partial z}v_z.$$

Сумма последних трех слагаемых в правой части равна скалярному произведению $\operatorname{grad} T$ и скорости $\mathbf{v}$; поэтому

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+\operatorname{grad} T\cdot\mathbf{v}.$$

Таким образом, полная производная $\frac{dT}{dt}$ (ее называют еще *материальной производной*) слагается из частной производной $\frac{\partial T}{\partial t}$ и скалярного произведения $\operatorname{grad} T\cdot\mathbf{v}$, которое называют также *производной переноса*.

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как определяется работа при движении точки в силовом поле?

2. Что называется криволинейным интегралом $\int\limits_L P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ по данной линии?

3. Как вычисляется криволинейный интеграл с помощью обыкновенного интеграла, если уравнение линии интегрирования дано в параметрическом виде? Привести соответствующую формулу.

4. Как вычисляется криволинейный интеграл, если уравнение линии интегрирования задано в виде $y=y(x)$ или $x=x(y)$?

5. Как влияет направление интегрирования на величину криволинейного интеграла? Как устанавливается положительное направление в случае замкнутого контура интегрирования?

6. Сформулировать и доказать теорему Грина.

7. Что означает независимость криволинейного интеграла от линии интегрирования?

8. Показать, что независимость интеграла от контура интегрирования эквивалентна равенству его нулю по любому замкнутому контуру.

9. Сформулировать и доказать теорему о необходимом и достаточном условии независимости криволинейного интеграла от линии интегрирования.

10. Указать наиболее удобный способ вычисления криволинейного интеграла от полного дифференциала. Привести соответствующие формулы.

11. Что называется первообразной от полного дифференциала? Записать общее выражение для первообразных.

12. Как определяется криволинейный интеграл по пространственной линии?

13. Сформулировать теорему о независимости криволинейного интеграла от линии интегрирования для пространственного случая.

14. Какое силовое поле называется потенциальным? Что называется потенциалом такого поля?

15. Дать определение криволинейного интеграла по длине и указать способы его вычисления.

16*. Как определяется поток жидкости через заданную поверхность?

17*. Что называется интегралом по поверхности?

18*. Какие поверхности называются двусторонними? Привести пример односторонней поверхности.

19*. Указать задачи, приводящие к интегралам по поверхности, у которых подынтегральная функция не связана с выбором направления нормали к поверхности и у которых она связана. Что значит взять интеграл по определенной стороне поверхности?

20*. Как вычисляется интеграл по поверхности?

21*. Сформулировать и доказать теорему Стокса.

22*. Доказать, опираясь на формулу Стокса, теорему о необходимом и достаточном условии независимости криволинейного интеграла по пространственной линии от линии интегрирования.

23*. Сформулировать и доказать теорему Остроградского.

24*. Что называется векторным полем? Привести конкретные примеры векторных полей.

25*. Что называется векторной линией? Вывести уравнения (дифференциальные) векторных линий.

26*. Что называется потоком вектора через поверхность?

27*. Дать определение дивергенции векторного поля. Вывести формулу для выражения дивергенции.

28*. Сформулировать в векторной форме теорему Остроградского и указать ее физический смысл.

29*. Что называется циркуляцией вектора?

30*. Вывести формулу для предела отношения циркуляции вектора по плоскому контуру L к площади, ограниченной этим контуром.

31*. Дать определение ротора векторного поля. Сформулировать в векторной форме теорему Стокса.

32*. Указать правила действий с оператором Гамильтона.

33*. Перечислить все возможные дифференциальные векторные операции второго порядка.

34*. Дать определение трубчатого поля и указать его основные свойства.

35*. Указать основные свойства потенциального поля.

36*. Какое поле называется гармоническим? Какому условию удовлетворяет потенциал такого поля?

ГЛАВА X

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

158. Общие понятия. Теорема существования. При изучении интегрального исчисления функций одной переменной мы сталкивались с необходимостью отыскивать неизвестную функцию y по ее производной или дифференциалу.

Уравнение

$$y' = f(x) \quad \text{или} \quad dy = f(x)\,dx, \tag{*}$$

где y — неизвестная функция от x, а $f(x)$ — заданная функция, является простейшим *дифференциальным уравнением*. Для его решения, т. е. для отыскания неизвестной функции y, нужно проинтегрировать данную функцию $f(x)$. При этом, как известно, мы получим бесчисленное множество функций, каждая из которых будет удовлетворять условию (*). В этой главе нам удобнее будет под интегралом $\int f(x)\,dx$ понимать какую-либо о д н у п е р в о о б р а з н у ю. Тогда любое решение уравнения (*) запишется в виде

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Вскоре мы увидим, что гораздо чаще приходится иметь дело с уравнениями более сложного вида. Именно в эти уравнения, помимо производной y' и независимой переменной x, может входить и сама неизвестная функция y. Примером тому служат уравнения

$$y' + x^2 y = 0, \quad y' = \frac{y}{x}, \quad xy' = y + x \quad \text{и т. д.}$$

Заменяя y' через $\frac{dy}{dx}$, можно эти самые уравнения переписать в д и ф ф е р е н ц и а л ь н о й форме:

$$dy + x^2 y\,dx = 0, \quad x\,dy - y\,dx = 0, \quad x\,dy - (y + x)\,dx = 0.$$

Определение. ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** **называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производную.**

Так как производную можно представить в виде отношения дифференциалов, то уравнение может содержать не производную, а дифференциалы неизвестной функции и независимой переменной.

Дифференциальные уравнения *второго* и *высших* порядков будут рассмотрены в § 2.

Мы будем рассматривать только такие уравнения, в которых неизвестная функция зависит от одного аргумента[1]).

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем виде записывается так:

$$F(x, y, y') = 0.$$

В частных случаях в левую часть уравнения могут не входить x или y, но всегда обязательно входит y'. Нам придется в основном иметь дело с уравнениями, разрешенными относительно производной, т. е. вида

$$y' = f(x, y).$$

Определение. ***Решением дифференциального уравнения*** **называется функция, которая при подстановке ее вместе с производной в это уравнение превращает его в тождество.**

Простейшие примеры показывают, что дифференциальное уравнение может иметь бесчисленное множество решений. Мы наблюдали это уже на примере уравнения (*). Простой проверкой легко убедиться также, что уравнение[2]) $y' = \frac{y}{x}$ имеет решениями функции $y = Cx$, а уравнение $y' = -\frac{y}{x}$ — функции $y = \frac{C}{x}$, где C — любое число.

Уравнение $y' = \frac{y+x}{x}$ имеет решениями функции $y = x \ln x + Cx$.

В самом деле, найдя производную $y' = \ln x + 1 + C$ и подставив ее в уравнение, получим тождество

$$\ln x + 1 + C = \frac{x \ln x + Cx + x}{x}.$$

---

[1]) Такие уравнения называются *обыкновенными*. Дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция зависит от нескольких аргументов, называются уравнениями с *частными производными*. Они рассматриваются в курсе уравнений математической физики.

[2]) Если нет опасности смешения, мы вместо «дифференциальное уравнение» коротко будем говорить «уравнение».

Как мы видим, в решения приведенных дифференциальных уравнений входит произвольная постоянная C; придавая ей различные значения, мы будем получать разные решения.

Несмотря на то, что рассмотренные примеры носят частный характер, мы все-таки, не приводя доказательства, сделаем следующий общий вывод.

Любое дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ имеет бесчисленное множество решений, которые определяются формулой, содержащей одну произвольную постоянную. Эту совокупность решений будем называть *общим решением* дифференциального уравнения первого порядка и записывать так:

$$y=\varphi(x, C).$$

Придавая произвольной постоянной C определенные числовые значения, мы будем получать *частные решения*.

В дальнейшем при решении конкретных задач нас будут интересовать преимущественно частные решения. Необходимо выяснить, каким же образом из общего решения можно выделить требуемое решение. Зададим для этого начальное условие. *Задать начальное условие дифференциального уравнения первого порядка это значит указать пару соответствующих друг другу значений независимой переменной* (x_0) *и функции* (y_0). *Записывают это так:*

$$y\,|_{x=x_0}=y_0.$$

Покажем на примере, как по общему решению и заданному начальному условию можно отыскивать соответствующее этому условию частное решение.

Выше мы видели, что уравнение $y'=\frac{y}{x}$ имеет общее решение $y=Cx$. Зададим начальное условие $y\,|_{x=2}=6$. Подставив эти значения x и y в общее решение, получим $6=2C$, откуда $C=3$. Следовательно, функция $y=3x$ удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и начальному условию.

Вопрос о том, в каком случае можно утверждать, что частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, существует, а также что оно будет единственным, выясняется теоремой, которую мы приведем без доказательства.

Теорема существования и единственности решения. **Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области, содержащей точку $P_0(x_0, y_0)$, то уравнение $y'=f(x, y)$ имеет решение $y=y(x)$ такое, что $y(x_0)=y_0$.**

Если, кроме того, непрерывна и частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$, то это решение уравнения единственно.

Интересно отметить, что в условии теоремы не требуется существования производной $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Теорема эта впервые была сформулирована и доказана Коши. Поэтому часто задачу отыскания частного решения по начальным условиям называют *задачей Коши*.

Перейдем теперь к геометрической иллюстрации введенных понятий.

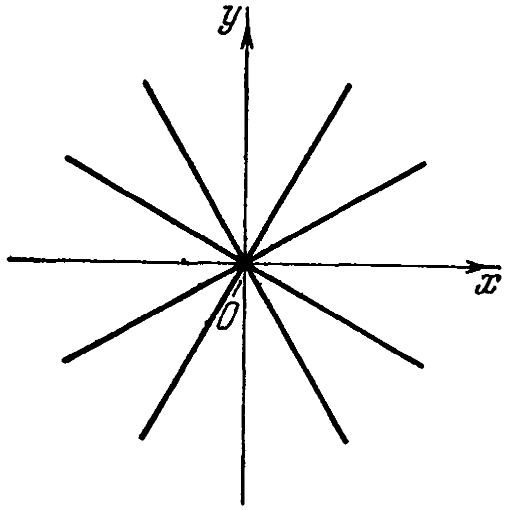

Рис. 214.

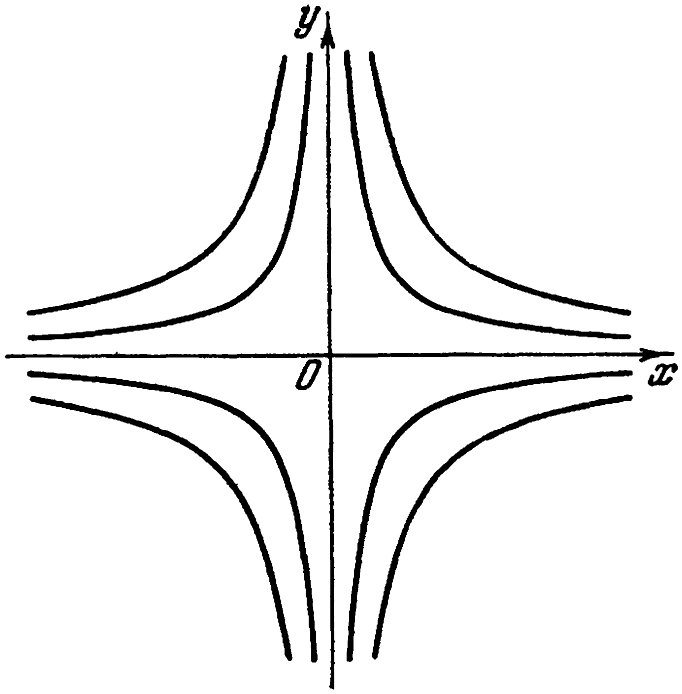

Рис. 215.

График любого частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*. Общему решению соответствует *семейство интегральных кривых*. Так как мы уже проверили, что уравнение $y' = \frac{y}{x}$ имеет общее решение $y = Cx$, то соответствующее ему семейство интегральных кривых — пучок прямых, проходящих через начало координат (рис. 214). Уравнение $y' = -\frac{y}{x}$ имеет общее решение $y = \frac{C}{x}$. Ему соответствует семейство равнобочных гипербол, асимптотами которых являются оси координат (рис. 215), а также прямая $y = 0$.

Задание начального условия $y|_{x=x_0} = y_0$ означает задание точки $P_0(x_0, y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая, соответствующая искомому частному решению. Таким образом, отыскание частного решения по начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$ геометрически означает, что из семейства интегральных кривых мы выбираем ту, которая проходит через точку $P_0(x_0, y_0)$. Согласно теореме существования и единственности решения через каждую точку, в которой функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, проходит одна-единственная интегральная кривая. Если в данной точке эти условия нарушены, то это означает, что через эту точку либо вообще не проходит ни одна интегральная кривая, либо проходит несколько. Возьмем, например, уравнение $y'=\frac{y}{x}$; из рис. 214 видно, что через начало координат проходит бесчисленное множество его интегральных кривых. Это не противоречит теореме, так как в точке (0, 0) условия теоремы существования нарушены: правая часть уравнения становится неопределенной.

Точки, в которых условия теоремы существования и единственности решения нарушаются, называются *особыми точками*. Вопрос о том, как ведут себя интегральные кривые в окрестности особой точки, будет вкратце рассмотрен в п. **164**; пока же предполагается, что если мы отыскиваем частное решение уравнения $y'=f(x, y)$ по заданному начальному условию $y|_{x=x_0}=y_0$, то в точке (x_0, y_0) выполняются условия теоремы существования и единственности. Такие начальные условия будем называть *возможными*.

Теперь мы можем указать основное свойство общего решения:

Общее решение $y=\varphi(x, C)$ дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ обладает тем свойством, что из него по любому заданному возможному начальному условию $y|_{x=x_0}=y_0$ может быть найдено частное решение, удовлетворяющее этому условию.

Это означает, что, подставляя в общее решение значения x_0 и y_0, мы получаем уравнение относительно C: $y_0=\varphi(x_0, C)$, из которого всегда может быть найдено одно-единственное значение $C=C_0$. Функция $y=\varphi(x, C_0)$ и будет искомым частным решением.

Отметим еще, что отыскание решения дифференциального уравнения часто называют интегрированием уравнения. При этом действие интегрирования функций называют *квадратурой*.

Перейдем теперь к приемам решения отдельных типов дифференциальных уравнений.

159. Уравнения с разделяющимися переменными. Рассмотрим уравнение вида

$$f_1(y)\,dy=f_2(x)\,dx, \qquad (*)$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — заданные функции. В этом дифференциальном уравнении переменные разделены, т. е. каждая из переменных содержится только в той части уравнения, где находится ее дифференциал. Уравнение $dy=f(x)\,dx$ является частным случаем рассматриваемого уравнения.

В обеих частях уравнения (*) стоят дифференциалы некоторых функций; справа этот дифференциал выражен прямо через независимую переменную x, а слева через промежуточный аргумент y, который является функцией от x. Именно эта зависимость y от x

и является искомой. Произведя интегрирование, мы получим связь между переменными x и y, освобожденную от их дифференциалов:

$$\int f_1(y)\,dy = \int f_2(x)\,dx + C.$$

Напомним, что под символом $\int$ мы в этой главе условились понимать какую-то одну первообразную. Ясно также, что произвольную постоянную C можно писать в любой части равенства.

Если задано начальное условие $y|_{x=x_0} = y_0$, то, определяя постоянную C, получим частное решение, удовлетворяющее данному условию. Воспользовавшись определенными интегралами, можно сразу записать искомое частное решение:

$$\int_{y_0}^{y} f_1(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f_2(x)\,dx.$$

При этом значения x_0 и y_0 действительно соответствуют друг другу, так как обе части равенства обращаются в нуль при замене верхних пределов y и x на y_0 и x_0.

Выполняя фактически интегрирование, мы обычно получаем неизвестную функцию y в неявном виде. Иногда, если решение уравнения дано не в явном виде: $y = \varphi(x)$, а в неявном: $\Phi(x, y) = 0$, то его называют *интегралом уравнения*.

Пример 1. Найдем решение уравнения

$$\frac{dy}{y} = 3x^2\,dx,$$

удовлетворяющее условию $y|_{x=0} = 2$.

Интегрируя и записывая для удобства потенцирования произвольную постоянную в виде $\ln|C|$, получим $\ln|y| = x^3 + \ln|C|$, откуда $|y| = |C|\,e^{x^3}$ или

$$y = Ce^{x^3}.$$

Если бы мы взяли произвольную постоянную в виде $\ln C$, то было бы $C > 0$, и общее решение пришлось бы записать так: $y = \pm Ce^{x^3}$.

На вопрос, можно ли считать решением функцию $y = 0$, ответ будет дан ниже (на стр. 554).

Подставляя в общее решение начальное условие, найдем C:

$$2 = C.$$

Таким образом, функция $y = 2e^{x^3}$ является искомым частным решением данного уравнения. Если бы мы воспользовались определенными интегралами, то получили бы

$$\int\limits_{2}^{y}\frac{dy}{y}=\int\limits_{0}^{x}3x^2\,dx,$$

т. е.

$$\ln y\,\Big|_2^y=x^3\Big|_0^x,\quad \text{или}\quad \ln y-\ln 2=x^3.$$

Потенцируя, приходим к тому же частному решению

$$y=2e^{x^3}.$$

Очень часто встречаются уравнения, в которых переменные еще не разделены, но их можно разделить, производя простые арифметические операции.

Определение. **Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.***

Таким будет, например, уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_2(x)}{f_1(y)}.$$

В нем переменные еще не разделены, однако, умножив обе его части на $f_1(y)\,dx$, мы приходим к уравнению с разделенными переменными.

Легко также разделить переменные, если уравнение записано в дифференциальной форме и имеет вид

$$f_1(x)f_2(y)\,dx+f_3(x)f_4(y)\,dy=0. \qquad (**)$$

Деля обе части уравнения на произведение $f_2(y)f_3(x)$, получим

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}\,dx+\frac{f_4(y)}{f_2(y)}\,dy=0.$$

Нам теперь даже не обязательно переносить одно из слагаемых в правую часть. Интегрируя, запишем

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}\,dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}\,dy=C.$$

Следует заметить, что при делении на $f_2(y)f_3(x)$ может произойти потеря некоторых частных решений. Пусть, например, при $y=y_0$ имеем $f_2(y_0)=0$. Тогда функция $y=y_0$ (постоянная) является решением уравнения. Действительно, $dy=0$ и подстановка в уравнение (**) приводит к тождеству. Считая x и y равноправными и рассуждая аналогично, получим, что если $f_3(x_0)=0$, то $x=x_0$ тоже является решением уравнения [1]).

В связи со сказанным сделаем еще такое замечание. Уравнение $y'=\frac{y}{x}$ имеет, как уже отмечено выше, общее решение $y=Cx$, т. е. совокупность прямых, проходящих через начало координат, за исключением прямой $x=0$ — оси ординат. Записав это же самое уравнение в виде $x\,dy-y\,dx=0$, мы получим и решение $x=0$. Поэтому общим решением считают всю совокупность указанных прямых, включая и ось ординат. Такое же замечание можно сделать и при решении многих других примеров; например, уравнение $y'=-\frac{y}{x}$, семейство интегральных кривых которого изображено на рис. 215, имеет еще решения $y=0$ и $x=0$, т. е. оси координат, а уравнение примера 1 — решение $y=0$.

Пример 2. Найдем общее решение уравнения

$$x(y+1)\,dx-(x^2+1)\,y\,dy=0.$$

Разделяя переменные, приведем его к виду

$$\frac{x\,dx}{x^2+1}-\frac{y\,dy}{y+1}=0.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=C,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-y+\ln|y+1|=C.$$

Итак, мы нашли общее решение, причем y является неявной функцией от x. Заменяя C на $\ln|C|$, мы можем представить решение в таком виде:

$$\frac{Ce^y}{y+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

Кроме этого, есть еще частное решение $y=-1$, графиком которого является горизонтальная прямая $y=-1$. При $C>0$ любая интегральная кривая лежит выше прямой $y=-1$, а при $C<0$ — ниже этой прямой (предоставляем читателю это проверить).

160. Некоторые задачи физики. Хотя дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными являются весьма частными случаями уравнений первого порядка, к ним приводят многие различные задачи из области физики и механики.

---

[1]) Обычно в ответах к задачам, приведенным в задачниках, указанные частные решения не отмечаются.

Заметим сразу же, что при решении задач физического характера, приводящих к дифференциальным уравнениям, основную трудность представляет, как правило, составление самих дифференциальных уравнений. Здесь нет общего метода, и каждая задача требует своего подхода, основанного на знании соответствующего закона физики. Рассмотрим некоторые из этих задач, чтобы показать на примерах, как составляются дифференциальные уравнения. Приведенные примеры помогут читателю уяснить суть дела и перейти к самостоятельному решению подобных задач.

1) Радиоактивный распад. Экспериментальным путем установлено, что *скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству нераспавшегося вещества*. Считая, что начальное количество вещества равно M_0, найдем зависимость между количеством нераспавшегося вещества M и временем t.

Скорость радиоактивного распада равна производной от количества вещества M по времени t, т. е. $\frac{dM}{dt}$. Но по условию

$$\frac{dM}{dt} = -kM,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Знак минус берется потому, что с возрастанием t количество вещества M уменьшается. Разделим переменные в полученном уравнении:

$$\frac{dM}{M} = -k\,dt.$$

Интегрируя, получим

$$\ln M = -kt + \ln C,$$

откуда

$$M = Ce^{-kt}.$$

Обращаем внимание читателя на то, что в дифференциальное уравнение не входит величина M_0; она войдет в начальное условие, которое имеет вид $M|_{t=0} = M_0$. Из этого условия следует, что $C = M_0$. Следовательно, частное решение, отвечающее условиям задачи, имеет вид

$$M = M_0 e^{-kt}.$$

Константу k можно определить экспериментально, установив количество нераспавшегося вещества в какой-то момент времени[1]). Пусть, например, половина начального количества $M_0 = 1$ *г* распадется в течение 26,7 минуты. Здесь при $t = 26{,}7$ $M = 0{,}5$. Поэтому $0{,}5 = e^{-26{,}7k}$, откуда $k = -\frac{\ln 0{,}5}{26{,}7} \approx 0{,}026$. Следовательно, процесс

[1]) Такой метод определения физических констант очень часто применяется в подобных случаях.

распада протекает по формуле

$$M = e^{-0,026t}.$$

Для того чтобы узнать, какое количество вещества осталось нераспавшимся, например, через 10 минут после начала опыта, достаточно в эту формулу подставить $t = 10$:

$$x = e^{-0,026\cdot 10} \approx 0,77\ г.$$

2) Охлаждение тела. Согласно закону, установленному Ньютоном, *скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды.*

Пусть тело нагрето до температуры T_0; температуру окружающей среды будем считать постоянной[1]) и равной T_c ($T_c < T_0$). Найдем зависимость между изменяющейся температурой T тела и временем охлаждения t.

Пусть в момент времени t температура тела равна T. Скорость изменения температуры, т. е. $\frac{dT}{dt}$, по закону Ньютона пропорциональна разности $T - T_c$; следовательно,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c).$$

Знак минус выбран потому, что с возрастанием t температура T тела уменьшается. Коэффициент пропорциональности k зависит как от физических свойств тела, так и от его геометрической формы (ясно, что скорость охлаждения раскатанного листа стали больше, чем первоначального стального слитка).

Разделяя переменные, получим $\frac{dT}{T - T_c} = -k\,dt$. Отсюда

$$\ln(T - T_c) = -kt + \ln C \quad и \quad T = T_c + Ce^{-kt}.$$

Так как $T > T_c$, то можно писать $\ln(T - T_c)$, а не $\ln|T - T_c|$. Рекомендуем читателю рассмотреть случай $T_c > T_0$, т. е. когда тело не остывает, а нагревается.

Подставляя начальное условие $T|_{t=0} = T_0$, найдем C: $T_0 = T_c + C$, т. е. $C = T_0 - T_c$. Окончательно закон охлаждения имеет вид

$$T = T_c + (T_0 - T_c)\,e^{-kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k должен быть либо задан, либо установлен экспериментально путем измерения температуры T

[1]) Мы считаем, что при охлаждении тела температура окружающей среды не меняется. Если при охлаждении тела нужно учитывать повышение температуры окружающей среды, то задача становится более сложной.

в некоторый момент времени t[1]). Отметим, что теоретически температура тела сравняется с температурой окружающей среды лишь при $t \to \infty$.

В обоих приведенных примерах соответствующий физический закон непосредственно устанавливает связь между производной неизвестной функции и самой функцией (независимая переменная t в уравнение не входит).

Рассмотрим теперь более сложный пример.

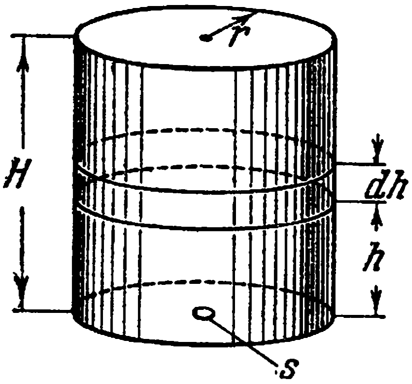

Рис. 216.

3) Истечение жидкости из цилиндра. Цилиндрический сосуд, в дне которого имеется отверстие, наполнен жидкостью. Найдем время T, в течение которого жидкость вытечет из сосуда, если высота столба жидкости равна H, радиус цилиндра равен r, площадь отверстия равна s (рис. 216).

При решении задачи используем закон Торичелли[2]).

Скорость v истечения жидкости в случае отверстий, небольших сравнительно с высотой столба жидкости, равна $\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня жидкости над отверстием, а g — ускорение силы тяжести[3]). (Эта скорость равна скорости при свободном падении тела с высоты h.)

Если бы убыль жидкости постоянно возмещалась, то скорость истечения по закону Торичелли оставалась бы постоянной, и тогда имевшееся вначале количество жидкости вытекло бы за $\frac{\pi r^2 H}{\sqrt{2gH}s}$ *сек.* Но без такого возмещения уровень жидкости все время понижается, и скорость истечения уменьшается; задача оказывается более сложной.

Пусть в момент времени t высота жидкости в цилиндре равна h (рис. 216). Мы найдем связь между dt и dh, если предположим, что за бесконечно малый промежуток времени dt скорость истечения будет постоянной и равной $\sqrt{2gh}$. Тогда объем dV жидкости, вытекающей из цилиндра за время dt, будет равен объему цилиндра

---

[1]) Если, например, известно, что при $t = t_1$ температура $T = T_1$, то $k = \frac{1}{t_1} \ln \frac{T_0 - T_c}{T_1 - T_c}$.

[2]) Е. Торичелли (1608—1647) — итальянский ученый, ученик и сотрудник Галилея.

[3]) В данной здесь форме закон Торичелли применим только к идеальной жидкости. Практически пользуются формулой $v = \mu\sqrt{2gh}$, где μ — коэффициент, зависящий от вязкости жидкости и формы отверстия, из которого происходит истечение. Для воды, например, в случае круглого отверстия $\mu \approx 0{,}6$.

с основанием s и высотой $v\,dt$:

$$dV = s\sqrt{2gh}\,dt.$$

Предоставляем читателю проверить, что этот объем будет отличаться от истинного объема вытекшей жидкости на величину бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt.

С другой стороны, поскольку уровень понизился на dh, этот объем равен

$$dV = -\pi r^2\,dh$$

(мы ставим знак минус, потому что $dh < 0$). Приравнивая оба найденных выражения для dV, придем к дифференциальному уравнению

$$s\sqrt{2gh}\,dt = -\pi r^2\,dh.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$dt = -\frac{\pi r^2}{s\sqrt{2gh}}\,dh.$$

Интегрируя, получим

$$t = -\frac{2\pi r^2}{s\sqrt{2g}}\sqrt{h} + C.$$

Так как $h\Big|_{t=0} = H$, то

$$C = \frac{2\pi r^2}{s\sqrt{2g}}\sqrt{H}.$$

Окончательно

$$t = \frac{2\pi r^2}{s\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right).$$

В результате мы получили формулу, выражающую время истечения t как функцию высоты столба жидкости h. Полагая $h = 0$, найдем полное время истечения

$$T = \frac{2\pi r^2}{s\sqrt{2g}}\sqrt{H}.$$

161. Однородные и линейные уравнения первого порядка. Прежде всего рассмотрим простые и важные классы уравнений первого порядка, приводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными.

I. Однородные уравнения.

Определение. **Уравнение**

$$y' = f(x, y)$$

называется *однородным*, если функция $f(x, y)$ может быть

представлена как функция отношения своих аргументов:

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Например, уравнение

$$(xy - y^2)\,dx - (x^2 - 2xy)\,dy = 0$$

однородное, так как его можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}.$$

В общем случае переменные в однородном уравнении не разделяются. Однако, вводя вспомогательную неизвестную функцию u по формуле

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{или} \quad y = xu,$$

мы сможем преобразовать однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Действительно, имеем

$$y' = u + xu',$$

и уравнение $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ принимает вид

$$u + xu' = \varphi(u), \quad \text{т. е.} \quad x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x};$$

после интегрирования получаем

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Найдя отсюда выражение для u как функции от x и возвращаясь к переменной $y = xu$, получим искомое решение однородного уравнения.

Чаще всего не удается просто найти явное выражение для u. Тогда после интегрирования следует в левую часть вместо u подставить $\frac{y}{x}$; в результате мы получим решение уравнения в неявном виде.

Разумеется, мы предполагаем, что $\varphi(u) - u \not\equiv 0$. Если $\varphi(u) \equiv u$, то $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \equiv \frac{y}{x}$ и не нужно делать никаких преобразований, ибо само заданное уравнение $y' = \frac{y}{x}$ — с разделяющимися переменными.

Если же знаменатель $\varphi(u)-u$ обращается в нуль лишь при каком-то значении u_0, то, как уже отмечено, функция $u=u_0$ является решением преобразованного уравнения, а функция $y=u_0x$ — исходного.

Нет необходимости запоминать полученные выше формулы: в каждом примере нетрудно проделать полностью указанное преобразование.

Пример. Найдем решение однородного уравнения

$$y'=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}.$$

Замена $y=xu$ приводит к уравнению

$$u+xu'=\frac{u-u^2}{1-2u} \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\left(\frac{u-u^2}{1-2u}-u\right)=\frac{1}{x}\frac{u^2}{1-2u}.$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{1-2u}{u^2}\,du=\frac{dx}{x},$$

откуда $\frac{1}{u}+2\ln|u|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$, или $\ln\left(e^{\frac{1}{u}}u^2\right)=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$, и значит,

$$u^2e^{\frac{1}{u}}=\frac{C}{x}.$$

Возвращаясь к переменной y, приходим к общему решению:

$$\frac{y^2}{x}e^{\frac{x}{y}}=C.$$

При $C>0$ интегральные кривые лежат в полуплоскости $x>0$, а при $C<0$ — в полуплоскости $x<0$.

II. Линейные уравнения. Вторым часто встречающимся типом уравнений первого порядка является линейное уравнение.

Определение. **Уравнение вида**

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{*}$$

т. е. линейное относительно искомой функции и ее производной, называется *линейным*. Здесь $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции независимой переменной x.

Уравнение (*) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными путем следующего искусственного приема. Запишем функцию y в виде произведения двух функций: $y=uv$. Одной из них мы можем распорядиться совершенно произвольно; при этом вторая должна быть определена в зависимости от первой таким образом, чтобы их произведение удовлетворяло данному линейному уравнению. Свободой выбора одной из функций u и v мы воспользуемся для максимального упрощения уравнения, получающегося после замены.

Из равенства $y = uv$ находим производную y':

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставляя это выражение в уравнение (*), имеем

$$u'v + uv' + p(x)\,uv = q(x), \text{ или } u'v + u\,(v' + p(x)\,v) = q(x).$$

Выберем в качестве v *какое-нибудь* частное решение уравнения

$$v' + p(x)\,v = 0. \qquad (**)$$

Тогда для отыскания u получим уравнение

$$u'v = q(x). \qquad (***)$$

Сначала найдем v из уравнения (**). Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dv}{v} = -p(x)\,dx,$$

откуда

$$\ln v = -\int p(x)\,dx \text{ и } v = e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Под неопределенным интегралом здесь понимается *какая-нибудь* одна первообразная от функции $p(x)$, т. е. v является вполне определенной функцией от x.

Зная v, находим далее u из уравнения (***):

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v} = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}, \quad du = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx,$$

и значит,

$$u = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C.$$

Здесь мы уже берем для u все первообразные. По u и v найдем искомую функцию y:

$$y = uv = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right].$$

Полученная формула дает общее решение линейного уравнения (*).

Положение не изменится, если мы прибавим произвольную постоянную к интегралу в показателе. В самом деле, эта вторая произвольная постоянная в конечном счете исчезнет, так как один множитель будет содержать ее в знаменателе, а другой — в числителе.

Можно решать задачу с помощью определенных интегралов с переменным верхним пределом. При этом

$$v = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}, \qquad u = \int\limits_{x_0}^{x} q(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx} + C,$$

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \left(\int\limits_{x_0}^{x} q(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\, dx + C \right).$$

Частное решение, соответствующее начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$, получается отсюда при $C = y_0$.

Как и раньше, мы не настаиваем на запоминании общей формулы. Следует помнить лишь способ решения и применять его в каждом конкретном случае.

Примеры. 1) Решим уравнение $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$.

Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Имеем: $u'v + uv' + \frac{1}{x} uv = \frac{\sin x}{x}$, или $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}$. Пусть $v' + \frac{v}{x} = 0$. Отсюда $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$ и, значит, $\ln v = -\ln x$, т. е. $v = \frac{1}{x}$. Следовательно, $u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}$, откуда $u' = \sin x$ и, значит, $u = -\cos x + C$. Имеем окончательно

$$y = uv = \frac{1}{x}(-\cos x + C).$$

2) Найдем решение уравнения $y' - 2xy = 1$ при начальном условии $y|_{x=0} = 0$.

Здесь $p(x) = -2x$, $q(x) = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. По общей формуле получим

$$y = e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx.$$

Несмотря на то, что интеграл в правой части не может быть выражен при помощи элементарных функций (см. п. **85**), задача считается решенной, так как функция y найдена. Ее значения можно вычислять при помощи методов приближенного интегрирования. Впрочем, в данном конкретном случае прибегать к этим методам нет нужды, так как для интеграла $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ имеются готовые таблицы $\Big($точнее, имеются таблицы для функции $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx\Big)$.

К линейным уравнениям часто приводятся уравнения более сложного вида. Рассмотрим, например, так называемое уравнение Бернулли[1]).

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

При $n = 0$ — это линейное уравнение, а при $n = 1$ можно разделить переменные. При других значениях n оно сводится к линейному при помощи следующего приема: делим обе части уравнения на y^n и записываем его так:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x).$$

Если ввести вспомогательную неизвестную функцию $y^{-n+1} = z$, то $(-n+1)y^{-n}y' = z'$, и уравнение примет вид

$$z' + (-n+1)p(x)z = (-n+1)q(x).$$

Это линейное уравнение; решая его и переходя от z снова к y, мы и получим решение исходного уравнения.

Рассмотрим одну важную задачу электротехники, которая приведет нас к линейному дифференциальному уравнению первого порядка. Пусть электрическая цепь имеет сопротивление R и самоиндукцию L (рис. 217).

Если через I обозначить силу тока в цепи, а через E электродвижущую силу, то, как известно из физики,

$$E = RI + L\frac{dI}{dt}.$$

Считая, что E является известной функцией времени, получаем линейное уравнение, которое запишем в виде

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}.$$

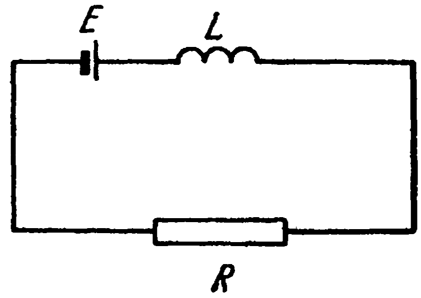

Рис. 217.

Проинтегрируем это уравнение в предположении, что $E = \text{const}$ при начальном условии $I|_{t=0} = 0$. Это означает, что мы включаем в цепь, в которой не было тока, постоянную электродвижущую силу. Воспользовавшись общей формулой, выраженной при помощи определенных интегралов, получим

$$I = e^{-\int_0^t \frac{R}{L}dt} \int_0^t \frac{E}{L} e^{\int_0^t \frac{R}{L}dt} dt,$$

[1]) Я. Бернулли (1654—1705) и И. Бернулли (1667—1748) — швейцарские математики, современники Лейбница и Ньютона. Своими работами и широкой педагогической деятельностью они во многом способствовали развитию математического анализа.

или, выполняя интегрирование,

$$I=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Ток I слагается как бы из двух токов: тока $\frac{E}{R}$, соответствующего закону Ома, и экстратока замыкания $\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$, протекающего в обратном направлении. Экстраток замыкания быстро стремится к нулю, и поэтому в цепи довольно скоро устанавливается постоянный ток. Еще проще решается задача о размыкании цепи. В этом случае мы считаем, что $I|_{t=0}=I_0$ и $E=0$[1]. Тогда получается уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dI}{dt}=-\frac{R}{L}I$. Решая его, получим $I=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$ — экстраток размыкания. Скорость стремления экстратока к нулю зависит от отношения $\frac{R}{L}$: чем это отношение больше, тем быстрее экстраток затухает.

Рекомендуем читателю самостоятельно решить задачу в случае, когда электродвижущая сила E синусоидальна, т. е. когда $E=E_0\sin\omega t$.

162. Уравнения в полных дифференциалах. Возьмем уравнение первого порядка, записанное в дифференциальной форме:

$$P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0. \tag{A}$$

Определение. **Если левая часть уравнения (А) является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, то это уравнение называется *уравнением в полных дифференциалах*.**

Выражение же $P\,dx+Q\,dy$, как известно (п. **115**, I), есть полный дифференциал, если $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Пользуясь ранее рассмотренными методами отыскания функции по ее полному дифференциалу (см. п. **115**, I или п. **142**), находим такую функцию $u(x,\ y)$, что

$$du(x,\ y)=P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy.$$

Тогда уравнение (А) можно записать так:

$$du(x,\ y)=0.$$

---

[1]) Мы не останавливаемся на вопросе, как реализовать такую электрическую цепь.

Последнее равенство означает, что между переменными x и y существует зависимость вида

$$u(x, y) = C,$$

где C — произвольная постоянная. Полученная зависимость и дает общее решение уравнения (A). Следовательно, интегрирование уравнения (A) сводится к отысканию первообразной от левой части. Воспользовавшись выражениями для этой первообразной, найденными в п. **142**[1]), получаем общее решение уравнения (A) в виде

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C$$

или в виде

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = C.$$

Пример. Найдем общее решение уравнения

$$(2x + y)\,dx + (x - 4y)\,dy = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + y) = \frac{\partial}{\partial x}(x - 4y) = 1,$$

то левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Беря за точку (x_0, y_0) начало координат, имеем

$$u(x, y) = \int_{0}^{x} (2x + y)\,dx + \int_{0}^{y} (-4y)\,dy = x^2 + xy - 2y^2 = C.$$

Решенное здесь дифференциальное уравнение является однородным, поэтому его можно проинтегрировать и способом, описанным в п. **161**, I.

163. Приближенные методы решения уравнений первого порядка.

I. Поле направлений. Если ни один из частных приемов интегрирования уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \qquad (*)$$

не приводит к цели или требует сложных выкладок, то можно прибегнуть к приближенному решению. Мы изложим здесь графический способ Эйлера и вытекающий из него способ численного

---

[1]) Если изучение дифференциальных уравнений предшествует изучению криволинейных интегралов, то читатель должен отыскивать функцию $u(x, y)$ методом п. **115**, I.

интегрирования. Прежде чем перейти к рассмотрению этих способов, коснемся геометрического смысла уравнения первого порядка (*).

Уравнение (*) определяет в каждой точке $P(x, y)$ той области плоскости Oxy, в которой справедлива теорема существования и единственности решения (п. **158**), величину углового коэффициента касательной (y') к интегральной кривой, проходящей через точку $P(x, y)$. Эту величину графически можно изобразить прямолинейной стрелкой, исходящей из точки P и имеющей угловой коэффициент, равный $f(x, y)$; при этом длина стрелки здесь не имеет никакого значения. Таким образом, заданием уравнения (*) устанавливается, как говорят, поле направлений в плоскости Oxy.

Геометрическое место точек с одинаковым направлением поля ($y' = \text{const}$) называется изоклиной (линией равных наклонов) уравнения. Очевидно, мы получим уравнение изоклины, соответствующей данному значению $y' = C$, если подставим это значение в дифференциальное уравнение

$$C = f(x, y).$$

При произвольных, но постоянных C это есть уравнение семейства изоклин дифференциального уравнения (*).

Во всех точках одной изоклины, соответствующей одному C, касательные к интегральным кривым имеют одинаковое направление.

Как видно, задачу интегрирования дифференциального уравнения можно геометрически истолковать так: *найти линии, удовлетворяющие тому условию, что касательные к ним имеют направления, совпадающие с направлениями поля в точках касания.*

Перейдем к изложению методов приближенного интегрирования, причем здесь всюду предполагается, что теорема существования и единственности решения справедлива.

II. Графический метод Эйлера. Рассмотрим метод Эйлера построения интегральной кривой уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{*}$$

проходящей через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$, т. е. к графическому отысканию частного решения с начальным условием

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Приближенно это можно выполнить с помощью простых построений, вполне аналогичных тем, которые производятся при графическом интегрировании функций, т. е. при решении уравнения (*) в частном случае, когда $f(x, y)$ является функцией только x (см. п. **95**).

Разобьем интервал $[x_0, x]$ на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (рис. 218). Через точки деления проведем прямые, параллельные оси Oy, и последовательно проделаем следующие однотипные операции.

Вычисляем значение $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$; $f(x_0, y_0)$ измеряет согласно уравнению $(*)$ угловой коэффициент интегральной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. Для построения направления, исходящего из точки M_0, возьмем полюс P графика на оси Ox слева от начала координат на расстоянии, равном $OP=1$ (при этом масштаб OP может быть отличным от масштаба, принятого по осям координат); отложим по оси Oy отрезок ON_0, равный в масштабе OP числу $f(x_0, y_0)$, и соединим точку N_0 прямой с полюсом P. Направление отрезка PN_0, очевидно, и будет искомым направлением кривой в точке M_0. Проведем из M_0 отрезок прямой, параллельной PN_0, до пересечения с прямой $x=x_1$. Мы получим точку M_1, которую и примем в качестве точки интегральной кривой, соответствующей $x=x_1$. Это построение означает замену дуги кривой в частичном интервале $[x_0, x_1]$ отрезком ее касательной в начальной точке. Далее, вычисляем значение $f(x, y)$ в найденной точке $M_1(x_1, y_1)$; $f(x_1, y_1)$ измеряет угловой коэффициент кривой в точке M_1. Откладываем по оси Oy отрезок ON_1, равный в масштабе OP числу $f(x_1, y_1)$, и соединяем прямой точку N_1 с полюсом P. Затем из точки M_1 проводим отрезок прямой, параллельной PN_1, до пересечения с прямой $x=x_2$. В пересечении получаем точку M_2, которую принимаем за точку интегральной кривой, соответствующую $x=x_2$.

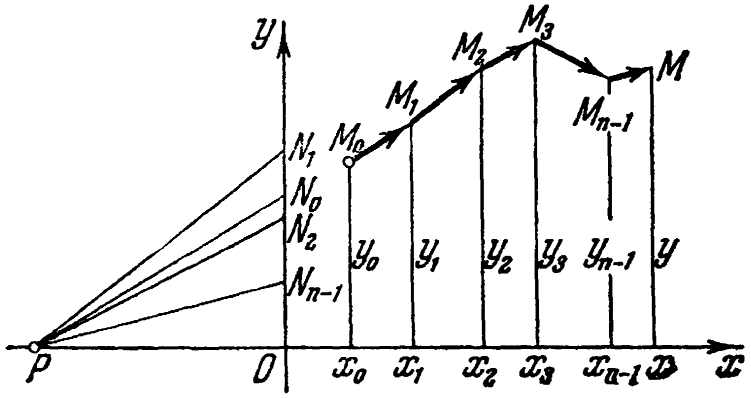

Рис. 218.

Таким же образом и дальше находим одну вслед за другой точки кривой, соответствующие точкам разбиения $x_3, x_4, \ldots$ интервала $[x_0, x]$, пока не доходим до точки $M(x, y)$. Вычерченная ломаная линия $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M$ *и представляет приближенно интегральную кривую, проходящую через точку* $M_0(x_0, y_0)$.

III. Численное интегрирование. Переведем на аналитический язык прием Эйлера приближенного интегрирования дифференциального уравнения $(*)$.

Первая операция дает такую связь между координатами точек M_0 и M_1:

$$y_1-y_0=f(x_0, y_0)(x_1-x_0); \tag{1}$$

вторая операция приводит к аналогичному соотношению

$$y_2-y_1=f(x_1, y_1)(x_2-x_1) \tag{2}$$

и т. д.; наконец, n-я операция дает

$$y - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}). \qquad (n)$$

Эти n равенств позволяют последовательно вычислить значения неизвестной функции в точках деления интервала $[x_0, x]$. Действительно, из первого равенства по заданным x_0, y_0 и выбранному x_1 находим y_1, из второго по известным x_1, y_1 и выбранному x_2 находим соответствующее ему значение y_2 и т. д., пока не дойдем до искомого значения y.

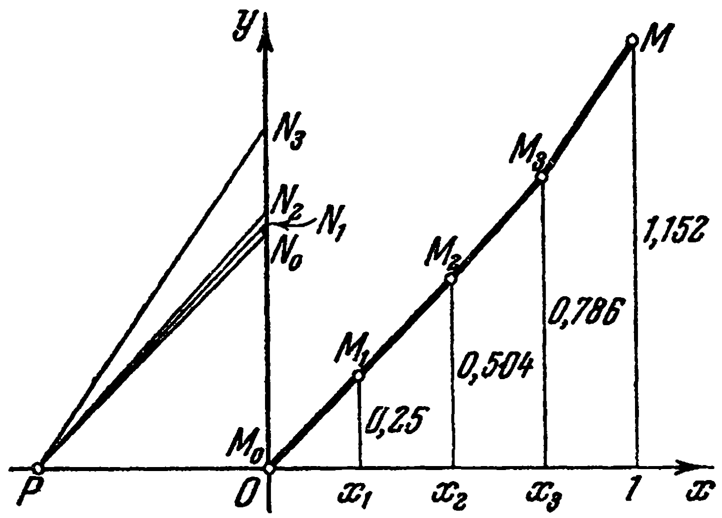

Рис. 219.

Чем меньше наибольший из частичных интервалов и, значит, больше число n и чем x ближе к x_0, тем точнее будет получаться результат.

Итак, фактическое вычисление приближенного значения y можно производить с помощью равенств (1)—(n). Этот прием является одним из *методов численного интегрирования* уравнения (*).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = xy^2 + 1.$$

К нему не подходит ни один из изложенных способов решения уравнений первого порядка. Найдем приближенное решение этого уравнения на интервале $[0, 1]$ с начальным условием $y|_{x=0} = 0$ и вычислим y при $x = 1$.

Разделим интервал $[0, 1]$ на четыре части точками $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 0{,}75$; $x_4 = 1$ (рис. 219). Обозначим через y'_0, y'_1, y'_2, y'_3 значения y' соответственно в точках x_0, x_1, x_2, x_3. Так как $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то $y'_0 = 1$ и, значит,

$$y_1 = 1(x_1 - x_0) = 0{,}25; \quad M_1(0{,}25;\ 0{,}25).$$

Далее,

$$y'_1 = 0{,}25 \cdot 0{,}25^2 + 1 = 1{,}016.$$

Поэтому

$$y_2 = 0{,}25 + 1{,}016 \cdot 0{,}25 = 0{,}504; \quad M_2(0{,}5;\ 0{,}504).$$

Затем

$$y'_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}504^2 + 1 = 1{,}127,$$

$$y_3 = 0{,}504 + 1{,}127 \cdot 0{,}25 = 0{,}786; \quad M_3(0{,}75;\ 0{,}786).$$

Наконец,

$$y_3' = 0{,}75 \cdot 0{,}786^2 + 1 = 1{,}463$$

и

$$y = y_4 = 0{,}786 + 1{,}463 \cdot 0{,}25 = 1{,}152.$$

Следовательно, $y = 1{,}152$ является искомым приближенным значением при $x = 1$ частного решения заданного уравнения, определенного начальным условием $y\,|_{x=0} = 0$. На рис. 219 в соответствии с нашими подсчетами проведена интегральная кривая уравнения, проходящая через точку (0, 0).

Существуют гораздо более точные методы приближенного решения дифференциальных уравнений; они излагаются в специальных руководствах (см., например, [7], [8]).

164*. Особые точки дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$. Предположим, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения (см. п. **158**) во всех точках некоторой области, за исключением точки (x_0, y_0); такие точки мы назвали *особыми*. Через каждую точку области, кроме особой, проходит одна-единственная интегральная кривая, и наша задача состоит в том, чтобы выяснить, как ведут себя интегральные кривые, проходящие через точки, близкие к особой. Мы не собираемся заниматься общими рассмотрениями и хотим лишь на некоторых частных примерах выяснить суть дела.

Прежде всего условимся переменные x и y считать равноправными; это значит, что с равным основанием можно рассматривать y как функцию от x или x как функцию от y. При этом нам придется уточнить определение особой точки. Возьмем уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$. Точка (0, 0) является для него особой, так как правая часть разрывна при $y = 0$. Если же считать x функцией, а y — независимой переменной и переписать уравнение в виде $\frac{dx}{dy} = y$, то точка (0, 0) перестает быть особой, так как теперь правая часть, разумеется, удовлетворяет всем условиям теоремы существования. Единственным решением этого последнего уравнения при заданном начальном условии будет функция $x = \frac{y^2}{2}$. Интегральной кривой является парабола, касающаяся оси ординат в начале координат. Таким образом, через точку (0, 0) проходит одна интегральная кривая, и нам нет смысла считать эту точку особой. То же самое можно сказать и о любой другой точке оси абсцисс.

Поэтому в дальнейшем *будем считать особой только такую точку* (x_0, y_0), *в которой разрывны правые части обоих уравнений*

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x, y)}.$$

Именно такой случай имеет место для уравнений

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Ax+By}{Cx+Dy} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{Cx+Dy}{Ax+By} \tag{*}$$

в начале координат. Функции в правых частях не имеют предела при произвольном стремлении x и y к нулю (см. аналогичный пример на стр. 369).

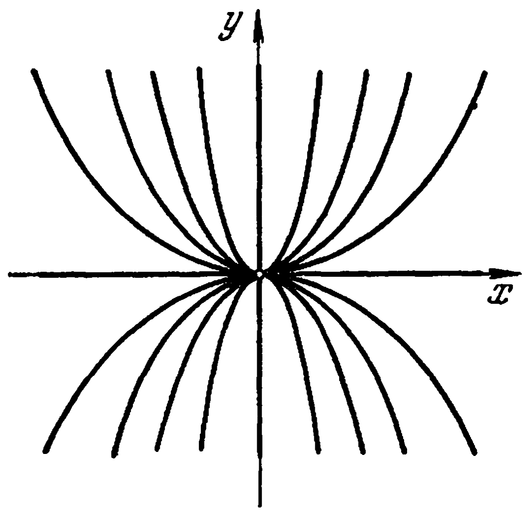

Рис. 220.

Приведем несколько примеров исследования уравнений типа (*).

Примеры. 1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$. Разделяя переменные и интегрируя, получим $\ln y = 2\ln x + \ln C$, откуда $y=Cx^2$. Это уравнение семейства парабол; записав дифференциальное уравнение в виде $x\,dy - 2y\,dx = 0$, найдем еще два частных решения $y=0$ и $x=0$. Все интегральные кривые проходят через особую точку — начало координат (рис. 220). Такая особая точка называется *узлом*.

Предоставляем читателю проверить, что для уравнения $\frac{dy}{dx}=\lambda\frac{y}{x}$ при $\lambda>0$ особая точка также является узлом; в частности, при $\lambda=1$ семейством интегральных кривых служат прямые, проходящие через начало координат.

2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$. Общее решение имеет вид $y=\frac{C}{x}$. Это семейство равнобочных гипербол; к нему следует добавить оси координат: $y=0$ и $x=0$ (рис. 221). Такая особая точка называется *седлом*.

Аналогичная картина будет для уравнений $\frac{dy}{dx}=-\lambda\frac{y}{x}$ и $\frac{dy}{dx}=\lambda\frac{x}{y}$ при $\lambda>0$.

3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. Общее решение $x^2+y^2=C$; интегральные кривые — окружности с центром в начале координат (рис. 222). В этом случае особая точка называется *центром*; через нее не проходит ни

одна интегральная кривая. Для уравнения $\frac{dy}{dx} = -\lambda \frac{x}{y}$, где $\lambda > 0$, особая точка также является центром; семейством интегральных кривых будут эллипсы с центром в начале координат.

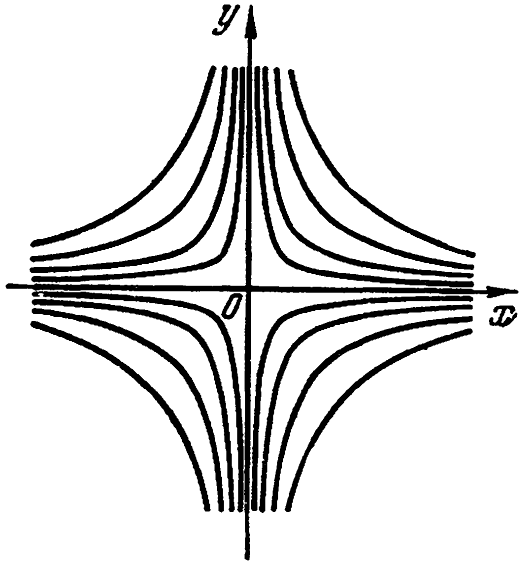

Рис. 221.

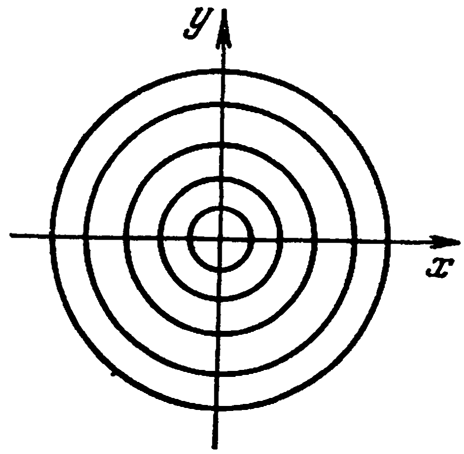

Рис. 222.

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$. Замена $y = ux$ приводит после простых преобразований к уравнению с разделенными переменными $\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}$. Интегрируя и возвращаясь к y, получим

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \ln C = \ln x \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

В системе полярных координат ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) уравнение имеет гораздо более простой вид

$$r = Ce^{\varphi}.$$

Это семейство логарифмических спиралей (см. п. **49**), изображенных на рис. 223. Особая точка такого типа называется *фокусом*.

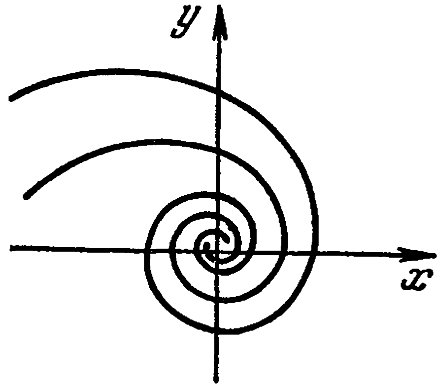

Рис. 223.

Можно доказать, на чем мы не останавливаемся, что для уравнения (*) начало координат при любых значениях коэффициентов (если только $AD - BC \neq 0$) является особой точкой одного из указанных четырех типов: *узел, седло, центр, фокус*.

Исследование особых точек уравнений более сложного вида представляет очень трудную задачу, далеко выходящую за рамки курса.

§ 2. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков

165. Дифференциальные уравнения второго порядка. Мы перейдем теперь к изучению дифференциальных уравнений вида

$$F(x, y, y', y'')=0,$$

в левую часть которых входит вторая производная неизвестной функции. Мы будем называть их *дифференциальными уравнениями второго порядка.*

Обычно рассматривают уравнения, разрешенные относительно второй производной

$$y''=f(x, y, y'). \qquad (*)$$

Начнем с простого примера:

$$y''=x.$$

Последовательно интегрируя, найдем сначала первую производную: $y'=\frac{x^2}{2}+C_1$, а затем и саму функцию:

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)dx+C_2=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2.$$

Так как мы интегрировали дважды, то и получили две произвольные постоянные, которые обозначили через C_1 и C_2.

Сформулируем общий вывод, доказательство которого мы проводить не будем.

Дифференциальное уравнение второго порядка $y''=f(x, y, y')$ имеет бесчисленное множество решений, которые даются формулой $y=\varphi(x, C_1, C_2)$, содержащей две произвольные постоянные. Эта совокупность решений называется *общим решением.*

Частное решение уравнения отыскивается при помощи задания начальных условий

$$y|_{x=x_0}=y_0 \text{ и } y'|_{x=x_0}=y'_0.$$

Например, найдем частное решение рассмотренного нами уравнения $y''=x$ при начальных условиях $y|_{x=2}=2$, $y'|_{x=2}=3$. Подставляя эти условия в выражения для общего решения и его производной, получаем систему уравнений

$$3=2+C_1, \quad 2=\frac{4}{3}+2C_1+C_2,$$

откуда

$$C_1=1 \quad \text{и} \quad C_2=-\frac{4}{3}.$$

Следовательно, искомым частным решением будет

$$y=\frac{x^3}{6}+x-\frac{4}{3}.$$

Геометрический смысл начальных условий заключается в том, что помимо точки (x_0, y_0), через которую должна проходить интегральная кривая, мы задаем еще угловой коэффициент касательной (y'_0) к этой кривой. Отметим, что так как общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, то через данную точку проходит *бесчисленное множество интегральных кривых*, лишь одна из которых имеет *данный* угловой коэффициент. Так, например, легко проверить, что если в общем решении рассмотренного выше примера положить $C_2 = \frac{2}{3} - 2C_1$, то график функции $y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + \left(\frac{2}{3} - 2C_1\right)$ при любом значении C_1 пройдет через заданную точку (2, 2). Выбирая из всех этих кривых ту, для которой угловой коэффициент равен 3, мы и приходим к искомому частному решению.

Чтобы сформулировать теорему существования решения для уравнения второго порядка вида (*), будем считать, что правая часть этого уравнения является функцией трех независимых переменных x, y и y', так как при задании начальных условий координаты x_0, y_0 и угловой коэффициент касательной y'_0 ничем между собой не связаны.

Теорема существования и единственности решения. **Если функция $f(x, y, y')$ непрерывна в окрестности значений x_0, y_0, y'_0, то уравнение $y'' = f(x, y, y')$ имеет решение $y = y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$.**

Если, кроме того, непрерывны и частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$, то это решение уравнения единственно. Доказывать теорему мы не будем.

Пользуясь приведенной теоремой, можно, например, сразу сказать, что уравнение $y'' = \frac{y'}{x} + y$ имеет единственное решение при начальных условиях $y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=1} = -1$; при этом, конечно, открытым остается вопрос, как это решение найти. Если для этого же уравнения задать начальные условия при $x = 0$, то теорема существования никакого заключения сделать не позволит, так как правая часть уравнения при этих начальных условиях будет не определена.

Как и для уравнений первого порядка, задачу отыскания частного решения по начальным условиям называют *задачей Коши*.

Для уравнений второго порядка выделение частного решения можно производить и путем задания *краевых условий*; при этом задаются значения функции y в двух разных точках

$$y|_{x=x_1}=y_1 \quad \text{и} \quad y|_{x=x_2}=y_2.$$

С такой задачей читатель может столкнуться в курсе сопротивления материалов при изучении уравнения прогиба балки. Еще более общие задачи такого типа встречаются в курсе уравнений математической физики.

Найдем, например, решение уравнения $y''=x$ при краевых условиях $y|_{x=1}=0$ и $y|_{x=2}=0$. Выше было показано, что общее решение уравнения имеет вид $y=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$. Подставляя заданные условия, составим систему двух уравнений для отыскания произвольных постоянных

$$\frac{1}{6}+C_1+C_2=0, \qquad \frac{4}{3}+2C_1+C_2=0.$$

Отсюда $C_1=-\frac{7}{6}$, $C_2=1$ и частное решение таково: $y=\frac{x^3}{6}-\frac{7}{6}x+1$.

В рассмотренном примере найдено единственное частное решение, удовлетворяющее заданным краевым условиям. Однако так будет далеко не всегда. Может оказаться, что уравнение второго порядка совсем не имеет решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям; в других случаях оно может иметь бесчисленное множество таких решений. Примеры этого будут приведены позже (пример 2 в п. **170**). В сказанном и состоит *коренное отличие задания краевых условий от задания начальных условий*. Если заданы начальные условия, то теорема существования (в случае ее применимости) сразу гарантирует, что поставленная задача имеет единственное решение. Если же заданы краевые условия, то, лишь найдя общее решение, мы сможем установить, имеет ли задача решения и в каком количестве.

166. Частные случаи уравнений второго порядка. Возьмем дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''=f(x, y, y')$$

и рассмотрим частные случаи, легко приводимые к уравнениям первого порядка.

I. Правая часть уравнения не содержит y и y':

$$y''=f(x). \tag{*}$$

Так как $y''=(y')'$, то

$$y'=\int f(x)\,dx+C_1.$$

Интегрируя еще раз, будем иметь

$$y=\int\left[\int f(x)\,dx\right]dx+C_1x+C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Пример такого уравнения мы уже рассматривали в п. **165**.

II. Правая часть уравнения не содержит y:

$$y''=f(x,\ y'). \qquad (**)$$

Положим $y'=z$; тогда $y''=z'$ и уравнение (**) преобразуется в уравнение первого порядка относительно z:

$$z'=f(x,\ z).$$

Если мы найдем решение этого уравнения $z=\varphi(x,\ C_1)$, то искомое решение получим интегрированием равенства $y'=z$, т. е.

$$y=\int\varphi(x,\ C_1)\,dx+C_2.$$

Пример. Решим уравнение

$$y''+\frac{y'}{x}=x.$$

Полагая $y'=z$ и $y''=z'$, приходим к уравнению первого порядка $z'+\frac{z}{x}=x$, которое оказывается линейным. Решив его, найдем $z=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}$. Тогда $y'=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}$ и $y=\frac{x^3}{9}+C_1\ln x+C_2$.

III. Правая часть уравнения не содержит x:

$$y''=f(y,\ y'). \qquad (***)$$

Положим $y'=p$ и будем считать p функцией от y. Дифференцируя это равенство, получим $y''=\frac{dp}{dx}$. Чтобы исключить x, произведем следующее преобразование:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}y'=\frac{dp}{dy}p.$$

Таким образом,

$$y''=p\frac{dp}{dy}.$$

Подставив в уравнение, будем иметь

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,\ p),$$

т. е. уравнение первого порядка относительно p как функции от y. Если мы найдем его решение $p=\varphi(y,\ C_1)$, то искомое решение получим из уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx}=p=\varphi(y,\ C_1),\ \text{т. е.}\ \frac{dy}{\varphi(y,\ C_1)}=dx\ \text{и}\ \int\frac{dy}{\varphi(y,\ C_1)}=x+C_2.$$

Пример. Решим уравнение

$$2yy''+y'^2=0.$$

Полагая $y'=p$ и $y''=p\frac{dp}{dy}$, получим

$$2yp\frac{dp}{dy}+p^2=0.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приведя его к виду $\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{2y}$ и интегрируя, получим $\ln p=-\frac{1}{2}\ln y+\ln C_1$ и $p=\frac{C_1}{\sqrt{y}}$. Определив теперь y из уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{\sqrt{y}}$, придем к искомому решению $y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2$, или $y=(C_1x+C_2)^{\frac{2}{3}}$. При сокращении на p было потеряно решение уравнения $p=y'=0$, т. е. $y=\text{const}$. В данном случае оно получается из общего при $C_1=0$.

В обоих последних случаях мы заменяли производную y' новой вспомогательной функцией и приходили, таким образом, к уравнению первого порядка. Если уравнение имеет вид $y''=f(y')$, т. е. если оно одновременно относится и к типу II и к типу III, то следует выбрать тот ход решения, который окажется более удобным.

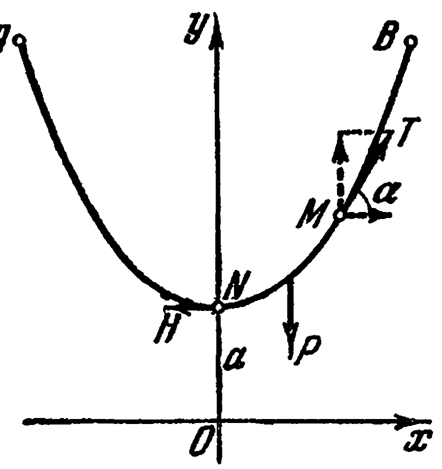

Рис. 224.

167. Приложения к механике.

I. Цепная линия. Найдем форму гибкой нерастяжимой однородной нити (цепи), прикрепленной за два конца и находящейся под действием собственного веса (рис. 224).

За ось Oy примем вертикальную прямую, проходящую через низшую точку N линии; ось Ox проведем горизонтально, на неопределенном пока расстоянии от точки N.

Возьмем произвольную точку M линии. В условиях равновесия кусок нити NM можно рассматривать как твердое тело. Оно подвержено действию трех сил: силы горизонтального натяжения H, силы натяжения T, приложенной в точке M и направленной по касательной к линии, и собственного веса P, равного $s\delta$, где s — длина дуги NM, а δ — вес единицы длины нити.

Согласно условиям равновесия имеем

$$T\sin\alpha = s\delta, \qquad T\cos\alpha = H.$$

Разделим почленно первое равенство на второе:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta}{H}s.$$

Следовательно, если $y = \varphi(x)$ есть искомое уравнение линии ANB, то

$$y' = ks, \text{ где } k = \frac{\delta}{H} = \text{const}.$$

Продифференцируем это равенство по x:

$$y'' = ks' = k\sqrt{1+y'^2}.$$

Будем решать это уравнение, как указано в п. **166**, II. Положим $y' = z$, тогда $y'' = z'$; следовательно, получаем

$$z' = k\sqrt{1+z^2}, \text{ или } \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k\,dx,$$

откуда

$$\ln(z+\sqrt{1+z^2}) = kx + C_1.$$

В точке N имеем $x = 0$ и должно быть $z = y' = 0$ (N — низшая точка линии). Значит, $C_1 = 0$ и $z + \sqrt{1+z^2} = e^{kx}$. Перенося z в правую часть и возводя в квадрат, приходим к равенству

$$z = y' = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}) = \operatorname{sh} kx.$$

Интегрируя, находим

$$y + C_2 = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) = \frac{1}{k}\operatorname{ch} kx.$$

Выберем теперь расстояние ON равным $\frac{1}{k}$. Тогда $C_2 = 0$, и мы получаем искомое уравнение линии

$$y = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) = \frac{1}{k}\operatorname{ch} kx.$$

В этом примере наглядно видно, как, пользуясь начальными условиями задачи, удобно последовательно находить значения постоянных интегрирования. Предварительное составление общего решения привело бы к более громоздким выкладкам.

Обозначая $\frac{1}{k}$ через a, запишем

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

Это — уравнение цепной линии, которая потому так и названа, что ее форму, как мы видим, принимает свободно подвешенная цепь.

II. Задачи динамики материальной точки. Пусть материальная точка движется прямолинейно под действием некоторой силы, направленной вдоль линии движения точки. Согласно второму закону Ньютона произведение массы на ускорение равно действующей силе: $mw=F$[1]). Так как $w=\frac{d^2s}{dt^2}$, где t — время, а s — путь, то при отыскании закона движения мы приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F.$$

В обычно встречающихся задачах сила F может зависеть от времени t, расстояния s и скорости движения $v=\frac{ds}{dt}$, т. е. $F=F\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right)$. В курсах механики принято производные по времени обозначать не штрихами, а точками: $v=\dot{s}$, $w=\dot{v}=\ddot{s}$. Поэтому дифференциальное уравнение движения примет вид

$$m\ddot{s}=F(t, s, \dot{s}). \qquad (*)$$

Обычно задаваемые начальные условия $s|_{t=0}=s_0$ и $\dot{s}|_{t=0}=\dot{s}_0$ имеют ясный механический смысл: это начальное положение точки и ее начальная скорость. Рассмотрим теперь некоторые примеры.

1) Равномерно ускоренное движение. Пусть сила F постоянна; обозначим отношение $\frac{F}{m}$ через a. Тогда $\ddot{s}=a$. Интегрируя, получим: $\dot{s}=at+C_1$ и $s=\frac{at^2}{2}+C_1t+C_2$. Сразу видно, что $C_1=\dot{s}|_{t=0}=v_0$ и $C_2=s|_{t=0}=s_0$. Таким образом, мы получили хорошо известную формулу для пути при равномерно ускоренном движении: $s=\frac{at^2}{2}+v_0t+s_0$.

---

[1]) Мы не рассматриваем ускорение w и силу F как векторы, так как из условия задачи следует, что направление силы и ускорения определяется их знаком. В самом общем случае уравнение движения имеет вид $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}$, где $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор движущейся точки (см. п. 70). Проектируя это равенство на оси координат, мы придем к системе трех дифференциальных уравнений, решение которой в общем случае представляет большие математические трудности.

2) Движение точки в среде с сопротивлением. Как показывает опыт, всякое тело испытывает при движении в среде сопротивление со стороны этой среды. Сила сопротивления возрастает со скоростью тела и зависит как от свойств среды (плотности, вязкости и т. д.), так и от размеров и формы движущегося тела. Если скорость движения невелика и тело имеет малые размеры, то силу сопротивления можно считать пропорциональной скорости v:

$$F_{\text{c}} = -kv.$$

Коэффициент пропорциональности $k > 0$, а знак минус указывает, что сила сопротивления всегда направлена против движения[1]). Если скорость движения велика, то сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости, т. е.

$$F_{\text{c}} = -\gamma v^2.$$

В этом случае коэффициент пропорциональности γ рассчитывается по формуле

$$\gamma = C\rho S,$$

где ρ — плотность среды, S — наибольшая площадь сечения тела, перпендикулярного к направлению движения (миделево сечение), а C — безразмерный коэффициент, определяемый опытным путем и зависящий от формы движущегося тела [2]).

Разумеется, установить, в каком случае можно принять тот или иной закон сопротивления, можно только опытным путем.

В качестве примера рассмотрим падение тела на землю с учетом сопротивления воздуха.

Будем считать, что масса тела равна m и начальная скорость его равна нулю. На тело действуют две силы: сила тяжести mg и сила сопротивления, которую мы примем пропорциональной квадрату скорости движения. Дифференциальное уравнение примет вид

$$m\ddot{s} = mg - \gamma\dot{s}^2.$$

Применяя подстановку

$$\dot{s} = v, \qquad \ddot{s} = \frac{dv}{dt},$$

придем к уравнению первого порядка

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2.$$

---

[1]) Например, при движении шара радиуса R в жидкости, согласно закону Стокса, $k = 6\pi R\eta$, где η — вязкость среды.

[2]) Определение коэффициента C производится обычно при помощи аэродинамических труб; при этом само тело неподвижно и на него набегает воздушный поток.

Запишем его в виде

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\gamma}{m}\left(\frac{mg}{\gamma}-v^2\right)$$

и введем обозначения: $\frac{\gamma}{m}=a$ и $\frac{mg}{\gamma}=b^2$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dv}{b^2-v^2}=a\,dt$$

или после интегрирования (см. формулу (11) таблицы интегралов)

$$\frac{1}{2b}\ln\frac{b+v}{b-v}=at+C.$$

Так как $v|_{t=0}=0$, то $C=0$. Тогда $\frac{b+v}{b-v}=e^{2abt}$ и

$$v=b\,\frac{e^{2abt}-1}{e^{2abt}+1}=b\,\mathrm{th}\,(abt).$$

Из полученной формулы следует, что скорость v всегда меньше b и стремится к этому значению при $t\to\infty$. Таким образом, скорость вовсе не возрастает безгранично, как при свободном падении в безвоздушной среде, а стремится к определенному пределу — предельной скорости:

$$v_{\text{пр}}=b=\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}.$$

Практически предельная скорость достигается довольно быстро; величина предельной скорости (а также время ее наступления) увеличивается вместе с массой тела и с уменьшением коэффициента сопротивления γ, что хорошо согласуется с наглядными представлениями.

Перейдем теперь к установлению связи между скоростью падения и пройденным путем; для падения без учета сопротивления воздуха, как известно, $v=\sqrt{2gs}$, где s — путь, пройденный при падении. Для получения нужной зависимости можно было бы, зная скорость, интегрированием найти путь и потом искать связь между v и s. Мы, однако, поступим проще, исключив независимую переменную t из самого дифференциального уравнения. Для этого применим подстановку, указанную в п. **166**, III:

$$\dot{s}=v,\quad \ddot{s}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds}.$$

Дифференциальное уравнение с учетом введенных обозначений примет тогда вид

$$v\frac{dv}{ds}=a\,(b^2-v^2).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$-\frac{1}{2}\ln(b^2-v^2)=as+C.$$

Так как $v|_{s=0}=0$, то $C=-\frac{1}{2}\ln b^2$ и, следовательно, $as=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2}{b^2-v^2}$, откуда $v=b\sqrt{1-e^{-2as}}$. Заменяя a и b их значениями, получим

$$v=\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}\sqrt{1-e^{-\frac{2\gamma s}{m}}}.$$

Из этой формулы следует, что если отношение $\frac{\gamma}{m}$ велико (практически это значит, что тело плохо обтекаемо), то уже при небольших s величиной $e^{-\frac{2\gamma s}{m}}$ можно пренебречь, и мы приходим опять к предельной скорости $\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$. Если же отношение $\frac{\gamma}{m}$ очень мало, то, воспользовавшись приближенной формулой $e^x\approx 1+x$, верной для малых x (см. п. **36**), найдем, что при небольших s

$$v\approx\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}\sqrt{1-\left(1-\frac{2\gamma s}{m}\right)}=\sqrt{2gs},$$

т. е. что приближенно верна формула для скорости при падении в безвоздушной среде.

Рекомендуем читателю самостоятельно проанализировать случай свободного падения тела при условии, что сила сопротивления пропорциональна скорости (например, это имеет место при опускании тела в воде), и убедиться, что и в этом случае скорость v имеет определенное предельное значение при возрастании t.

Несколько позже, в п. **175**, мы вернемся к задачам динамики и рассмотрим гармонические колебания точки.

168. Дифференциальные уравнения высших порядков. Решение дифференциального уравнения становится более сложным по мере того, как в левую часть его начинают входить производные более высоких порядков. В этом пункте мы ограничимся только основными определениями, относящимися к уравнениям любого порядка.

Определение. ***Порядком*** **дифференциального уравнения называют наивысший порядок производной, входящей в уравнение.**

Обычно имеют дело с уравнениями, разрешенными относительно старшей производной. Тогда уравнение n-го порядка запишется в виде

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (*)$$

Общее решение такого уравнения зависит от n произвольных постоянных: $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Чтобы выделить частное решение, отвечающее конкретным условиям задачи, нужно задать начальные условия; они имеют следующий вид:

$$y|_{x=x_0}=y_0, \quad y'|_{x=x_0}=y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},$$

т. е. при $x=x_0$ задаются значения самой функции и ее первых $(n-1)$ производных. Дифференцируя $(n-1)$ раз общее решение и подставляя начальные условия, мы получаем систему n уравнений с n неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

На вопрос о существовании и единственности частного решения отвечает теорема, совершенно аналогичная уже приведенным ранее для случаев $n=1$ и $n=2$. Формулируя ее, нужно считать, что правая часть уравнения (*) — функция f — зависит от n независимых переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. *Если эта функция непрерывна в окрестности начальных значений $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ и имеет непрерывные частные производные по всем переменным, начиная с y, то уравнение (*) имеет единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.*

Укажем один тип уравнений n-го порядка, которые легко решаются при любом n, а именно

$$y^{(n)}=f(x).$$

Общее решение этого уравнения мы получим, произведя последовательно n интегрирований; при каждом таком интегрировании будет появляться новая произвольная постоянная.

Пример. Решим уравнение $y^{(IV)}=\sin x$. Имеем:

$$\begin{aligned}
y^{(III)} &= -\cos x + C_1, \\
y^{(II)} &= -\sin x + C_1 x + C_2, \\
y' &= \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \\
y &= \sin x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.
\end{aligned}$$

Изменяя обозначения произвольных постоянных, общее решение можно записать в виде

$$y=\sin x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения

169. Линейные уравнения второго порядка. Общие свойства. Определение. ***Линейным дифференциальным уравнением*** **второго порядка называется уравнение первой степени (линейное) относительно неизвестной функции и ее производных.**

Будем записывать его в виде

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x). \qquad (*)$$

Функция $f(x)$ называется *правой частью уравнения*. Если функция $f(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение $(*)$ называется *линейным уравнением без правой части* (или *однородным*). В противном случае уравнение $(*)$ называют *линейным уравнением с правой частью* (или *неоднородным*).

Если в некотором интервале $a \leqslant x \leqslant b$ функции $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $f(x)$ непрерывны, то уравнение $(*)$ при любых начальных условиях

$$y|_{x=x_0}=y_0, \quad y'|_{x=x_0}=y_0', \qquad \text{где } x_0 \in (a, b)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее этим условиям. Это следует из того, что к уравнению $(*)$, записанному в виде $y''=-a_1(x)y'-a_2(x)y+f(x)$, применима теорема существования и единственности решения, сформулированная в п. **165**; непрерывна и сама правая часть, и ее частные производные по y (это $-a_2(x)$) и по y' (это $-a_1(x)$).

Заметим еще, что линейное уравнение

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x)$$

можно привести к виду $(*)$, деля обе его части на $p_0(x)$. При этом в тех точках, где $p_0(x)=0$, условия теоремы существования могут нарушиться; такие точки называются *особыми*[1]).

I. Линейные уравнения без правой части. Рассмотрим сначала уравнения без правой части, т. е.

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \qquad (**)$$

где для краткости обозначено $a_1=a_1(x)$ и $a_2=a_2(x)$. В частных случаях a_1 и a_2 могут быть просто постоянными.

Теорема. **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения линейного уравнения $(**)$, то функция $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ при любых постоянных C_1 и C_2 также является решением уравнения.**

Для краткости в дальнейшем мы будем записывать решения в виде y_1 и y_2, а выражение $C_1y_1+C_2y_2$ называть их линейной комбинацией.

Доказательство. Продифференцируем дважды функцию $y=C_1y_1+C_2y_2$:

$$y'=C_1y_1'+C_2y_2', \quad y''=C_1y_1''+C_2y_2''.$$

---

[1]) С такими случаями читатель может встретиться в дальнейшем при изучении специальных типов линейных уравнений, играющих важную роль при решении ряда задач математической физики.

Подставим y, y' и y'' в левую часть уравнения (**). Получим

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1 (C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$
$$= C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2).$$

Выражения в скобках представляют собой результат подстановки в левую часть уравнения (**) соответственно функций y_1 и y_2, а так как они по условию суть решения уравнения, то оба эти выражения тождественно равны нулю и, таким образом, функция $y(x)$ действительно удовлетворяет уравнению (**).

На основе доказанной теоремы мы можем сделать следующий вывод о структуре общего решения линейного уравнения без правой части:

Если y_1 и y_2 — решения уравнения (**) такие, что их отношение не равно постоянной величине $\left(\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const}\right)$, то линейная комбинация этих функций

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

является общим решением уравнения.

В предыдущей теореме мы доказали, что функция $C_1 y_1 + C_2 y_2$ является решением линейного уравнения без правой части. Следовательно, она и будет общим решением, если только действительно содержит две произвольные постоянные. Именно поэтому исключен случай $\frac{y_2}{y_1} = k = \text{const}$, так как тогда $y_2 = k y_1$ и выражение $C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + k C_2) y_1$ фактически содержит не две произвольные постоянные, а только одну. Ясно также, что не может служить для образования общего решения и такое очевидное частное решение уравнения (**), как $y \equiv 0$. Отметим тут же, что это решение называют *нулевым* или *тривиальным*.

Для линейных уравнений мы можем доказать основное свойство общего решения, которое фактически все время применяется при решении задач, а именно то, что *из общего решения при любых заданных возможных начальных условиях может быть найдено частное решение, удовлетворяющее этим условиям.*

Пусть заданы начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y_0'$, причем точка x_0 принадлежит интервалу, где функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ непрерывны, т. е. где выполнены условия теоремы существования и единственности решения. В частности, если a_1 и a_2 — постоянные, то x_0 может быть любым. Подставляя начальные значения в выражения для общего решения и его производной, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} &= y_0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' &= y_0', \end{aligned}\right\}$$

где $y_{10}=y_1(x_0)$, $y'_{10}=y'_1(x_0)$, $y_{20}=y_2(x_0)$, $y'_{20}=y'_2(x_0)$ — известные числа.

Чтобы эта система имела решение при любых правых частях, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был не равен нулю

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (***)$$

(Если этот определитель равен нулю, то система имеет решение только при условии $\frac{y_{10}}{y'_{10}}=\frac{y_{20}}{y'_{20}}=\frac{y_0}{y'_0}$, т. е. заведомо не при любых начальных условиях y_0 и y'_0.)

Теперь докажем основную, завершающую часть рассуждения: *если y_1 и y_2 — такие решения, что $\frac{y_2}{y_1}\neq \text{const}$ (в частности, ни одно из них не является нулевым), то определитель (***) не равен нулю ни в одной точке x_0.*

Предположим противное, т. е. что этот определитель равен нулю. Тогда система линейных однородных уравнений

$$C_1y_{10}+C_2y_{20}=0, \qquad C_1y'_{10}+C_2y'_{20}=0,$$

получающаяся при нулевых начальных условиях $y_0=0$ и $y'_0=0$, помимо нулевого решения $C_1=0$, $C_2=0$ имеет бесчисленное множество других ненулевых решений; пусть C_{10}, C_{20} — одно из них. Тогда функция $C_{10}y_1+C_{20}y_2$ является решением уравнения (**) при нулевых начальных условиях. Но так как тривиальное решение $y\equiv 0$, очевидно, также удовлетворяет этим условиям, а по теореме единственности решение должно быть только одно, то

$$C_{10}y_1+C_{20}y_2\equiv 0.$$

Отсюда $\frac{y_2}{y_1}=-\frac{C_{10}}{C_{20}}=\text{const}$, что противоречит условию $\frac{y_2}{y_1}\neq\text{const}$ (если $C_{20}=0$, то $y_1\equiv 0$, что также невозможно по условию). Итак, предположив, что определитель равен нулю в точке x_0, мы пришли к противоречию; тем самым наше заключительное утверждение, а с ним и основное свойство общего решения доказаны.

II. Линейные уравнения с правой частью. Пусть теперь дано линейное уравнение второго порядка с правой частью

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x). \qquad (*)$$

Уравнение без правой части

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \qquad (**)$$

получающееся из данного уравнения (*), если вместо свободного члена $f(x)$ взять нуль, назовем *соответствующим уравнению* (*). Докажем теорему о структуре общего решения уравнений с правой частью (*).

Теорема. ***Общее решение* уравнения с правой частью (*) можно составить как сумму общего решения соответствующего уравнения без правой части (**) и какого-нибудь частного решения данного уравнения (*).**

Доказательство. Обозначим через $\Phi(x)$ общее решение уравнения (**), а через $\varphi(x)$ — какое-нибудь частное решение уравнения (*). Возьмем функцию

$$y=\Phi(x)+\varphi(x).$$

Имеем

$$y'=\Phi'(x)+\varphi'(x), \quad y''=\Phi''(x)+\varphi''(x).$$

Подставляя выражения для y, y', y'' в левую часть заданного уравнения (*), найдем:

$$\Phi''(x)+\varphi''(x)+a_1[\Phi'(x)+\varphi'(x)]+a_2[\Phi(x)+\varphi(x)]=$$
$$=[\Phi''(x)+a_1\Phi'(x)+a_2\Phi(x)]+[\varphi''(x)+a_1\varphi'(x)+a_2\varphi(x)].$$

Выражение в первой квадратной скобке равно нулю, ибо $\Phi(x)$ — решение уравнения без правой части (**), а выражение во второй квадратной скобке равно $f(x)$, ибо $\varphi(x)$ — решение уравнения с правой частью (*). Следовательно, функция $y=\Phi(x)+\varphi(x)$ действительно есть решение уравнения (*). Так как это решение зависит от двух произвольных постоянных (от них зависит функция $\Phi(x)$), то оно и есть общее решение, что мы и хотели доказать.

Итак, для того чтобы найти общее решение уравнения с правой частью, нужно найти общее решение соответствующего уравнения без правой части и лишь одно какое-нибудь частное решение заданного уравнения. Это можно записать так:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\varphi(x),$$

где y_1 и y_2 — частные решения соответствующего уравнения без правой части, а $\varphi(x)$ — частное решение уравнения с правой частью.

170. Уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части. Решением линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами a_1 и a_2 мы заниматься не будем; задача эта слишком сложна. Мы будем рассматривать только линейные уравнения с постоянными коэффициентами, т. е. уравнения

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x), \tag{*}$$

где a_1 и a_2 — постоянные величины. Как и раньше, начнем с уравнений без правой части.

Возьмем однородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (**)$$

где a_1 и a_2 — постоянные. Поставим перед собой цель — найти общее решение такого уравнения.

Попробуем удовлетворить уравнению (**) функцией вида $y = e^{rx}$ (r — константа). Читателя не должна смущать кажущаяся с первого взгляда произвольность выбора этой функции. Внимательно проследив за простейшими выкладками, которые мы сейчас приведем, он убедится, что особенности показательной функции действительно дают повод ожидать, что при некотором определенном r функция e^{rx} будет решением уравнения (**).

Имеем

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Следовательно, должно иметь место тождество

$$e^{rx}(r^2 + a_1 r + a_2) = 0$$

или, так как $e^{rx} \neq 0$,

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0. \qquad (A)$$

Отсюда видно, что функция e^{rx} будет решением дифференциального уравнения (**), если r будет корнем квадратного уравнения (A). Уравнение (A) называется *характеристическим*.

Чтобы составить характеристическое уравнение, нужно в данном дифференциальном уравнении (**) y заменить единицей, а каждую производную искомой функции (y' и y'') — величиной r в степени, равной порядку производной (r и r^2).

Следует различать три возможных случая для корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (здесь везде предполагается, что коэффициенты a_1 и a_2 — действительные числа):

1) r_1 и r_2 — действительные и различные числа: $r_1 \neq r_2$;

2) r_1 и r_2 — действительные и равные числа: $r_1 = r_2$ (r_1 — двукратный корень уравнения (A));

3) r_1 и r_2 — комплексные сопряженные числа: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Корни характеристического уравнения действительные и различные: $r_1 \neq r_2$. При этом оба корня могут быть взяты в качестве показателей r функции e^{rx}, и мы сразу получаем два решения уравнения (**): $e^{r_1 x}$ и $e^{r_2 x}$. Ясно, что их отношение не является постоянной величиной: $\dfrac{e^{r_2 x}}{e^{r_1 x}} = e^{(r_2 - r_1)x}$.

Общее решение в случае действительных и разных корней характеристического уравнения дается формулой

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Легко проверить, что определитель (***) п. **169**, I в данном случае не равен нулю.

Составим этот определитель, задаваясь каким-нибудь значением x_0:

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2) x_0} (r_2 - r_1).$$

Так как $r_2 \neq r_1$, то этот определитель ни при каком значении x_0 не равен нулю.

Пример. Решим уравнение

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

Его корни суть

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -1.$$

Поэтому общим решением будет

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Найдем частное решение по начальным условиям $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = -5$. Составим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 2, \\ 2C_1 - C_2 &= -5. \end{aligned}$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = 3$ и искомым частным решением будет

$$y = -e^{2x} + 3e^{-x}.$$

2) Корни характеристического уравнения действительные и равные: $r_1 = r_2$. В этом случае мы непосредственно получаем только одно решение $y_1 = e^{r_1 x}$. Покажем, что в качестве второго решения можно взять функцию

$$y_2 = x e^{r_1 x}.$$

Продифференцируем дважды функцию y_2:

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}, \\ y_2'' &= 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}. \end{aligned}$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения (**):

$$2r_1e^{r_1x}+r_1^2xe^{r_1x}+a_1(e^{r_1x}+r_1xe^{r_1x})+a_2xe^{r_1x}=$$
$$=e^{r_1x}\left[x\left(r_1^2+a_1r_1+a_2\right)+(2r_1+a_1)\right].$$

Поскольку r_1 — корень характеристического уравнения, то $r_1^2+a_1r_1+a_2=0$; а так как r_1 — двукратный корень, то по формуле Виета $r_1+r_1=-a_1$, т. е. $2r_1+a_1=0$. Таким образом, выражение, заключенное в квадратной скобке, равно нулю, и функция $y_2=xe^{r_1x}$ действительно является решением уравнения (**).

Итак, **в случае действительных равных корней характеристического уравнения общее решение уравнения (**) имеет вид**

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{r_1x}.$$

И здесь легко проверить, что определитель (***) п. **169, I** ни при каком значении x_0 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} e^{r_1x_0} & x_0e^{r_1x_0} \\ r_1e^{r_1x_0} & e^{r_1x_0}+r_1x_0e^{r_1x_0} \end{vmatrix}=e^{2r_1x_0}\neq 0.$$

Пример. Решим уравнение

$$y''-6y'+9y=0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2-6r+9=0$$

имеет один двукратный корень

$$r_1=r_2=3,$$

значит, общее решение уравнения запишется так:

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{3x}.$$

3) Корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные числа: $r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$, $\beta\neq 0$. Если допускать в качестве решений комплексные функции действительного переменного (см. § 6 гл. 4)[1]), то, как и выше, получаем два решения уравнения (**): $e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $e^{(\alpha-i\beta)x}$, причем их отношение, равное $e^{2i\beta x}$, не есть постоянное число. Общее решение можно записать как

$$C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные. Предо-

[1]) Если читатель не знаком с содержанием этого параграфа, то он может ограничиться запоминанием окончательного вывода, выделенного жирным шрифтом, и разбором примеров.

ставляем читателю воспользоваться правилами дифференцирования комплексных функций и проверить, что написанное выражение является решением.

Для того чтобы получить решение в действительной форме, воспользуемся следующим простым правилом: *если уравнение* (**) *с действительными коэффициентами имеет комплексное решение* $y=u(x)+iv(x)$, *то каждая из функций* $u(x)$ *и* $v(x)$ *является решением этого уравнения*. В самом деле, дифференцируя функцию y и подставляя результат в уравнение, получим

$$(u''+iv'')+a_1(u'+iv')+a_2(u+iv)=0,$$

или после перегруппировки слагаемых

$$(u''+a_1u'+a_2u)+i(v''+a_1v'+a_2v)=0.$$

Так как комплексное выражение равно нулю только тогда, когда равны нулю его действительная и мнимая части, то должно быть

$$u''+a_1u'+a_2u=0 \quad \text{и} \quad v''+a_1v'+a_2v=0,$$

но это и значит, что функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями.

Так как по формуле Эйлера (см. п. **74**)

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

то в силу указанного правила функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями уравнения (**); ясно, что их отношение не есть постоянная. Зная два частных решения, строим общее решение:

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x),$$

где C_1 и C_2 — уже действительные постоянные. Второе решение в комплексной форме $e^{(\alpha-i\beta)x}$ нам даже не понадобилось; строя общее решение по его действительной ($e^{\alpha x}\cos\beta x$) и мнимой ($-e^{\alpha x}\sin\beta x$) частям, мы, очевидно, получим то же самое.

Итак, **в случае комплексных сопряженных корней характеристического уравнения общее решение имеет вид**

$$\boldsymbol{y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).}$$

Предоставляем читателю лишний раз проверить, что и здесь определитель (***) п. **169, I** не равен нулю.

Примеры. 1) $y''-4y'+13y=0$.

Записываем характеристическое уравнение

$$r^2-4r+13=0.$$

Его корни суть

$$r_1=2+3i, \quad r_2=2-3i.$$

Поэтому общее решение будет

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

2) $y'' + \omega^2 y = 0$ $(\omega = \text{const})$.

Из характеристического уравнения

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

находим

$$r_1 = \omega i, \quad r_2 = -\omega i.$$

Поэтому

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Полученное общее решение можно записать в несколько ином виде, если ввести другие произвольные постоянные при помощи условий

$$C_1 = A \sin \varphi, \quad C_2 = A \cos \varphi.$$

$\left(\text{Отсюда } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ и } \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2}.\right)$ Тогда

$$y = A(\sin \varphi \cos \omega x + \cos \varphi \sin \omega x) = A \sin(\omega x + \varphi).$$

Задавая любые начальные условия, найдем единственные значения постоянных C_1 и C_2 или A и φ.

Покажем, что при задании краевых условий (см. конец п. **165**) картина может быть иной. Пусть для определенности $\omega = 1$; тогда общее решение $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Зададим условия $y|_{x=0} = 0$, $y|_{x=\pi} = y_0$. Из первого условия следует, что $C_1 = 0$; из второго условия $C_2 \sin \pi = y_0$ заключаем, что если $y_0 \neq 0$, то найти C_2 нельзя, т. е. что решения с заданными краевыми условиями не существует. Если же $y_0 = 0$, то любая функция $y = C_2 \sin x$ удовлетворяет и уравнению, и краевым условиям. Предоставляем читателю проверить, что если второе условие задать в любой точке $x \neq n\pi$, то задача будет иметь единственное решение.

171. Уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью. Рассмотрим теперь линейное уравнение с постоянными коэффициентами a_1 и a_2 и с правой частью, т. е.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (*)$$

Нам уже известно (см. п. **169**, II), что общее решение такого уравнения слагается из общего решения соответствующего уравнения без правой части и какого-нибудь частного решения уравнения с правой частью.

Поскольку общее решение уравнения без правой части мы находить умеем, то остается только найти частное решение данного уравнения (*). Сначала мы рассмотрим некоторые частные случаи, в которых решение находится методом неопределенных коэффициентов, а потом укажем и общий метод.

1. Пусть правая часть уравнения (*) имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{mx},$$

где $P(x)$ — многочлен. Тогда уравнение (*) имеет частное решение вида

$$y = x^k Q(x)e^{mx},$$

где $Q(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$, причем если число m не является корнем характеристического уравнения $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$, то $k = 0$, а если является, то k — кратность этого корня.

Принимая решение в указанной форме, мы находим неизвестные коэффициенты многочлена $Q(x)$ по методу неопределенных коэффициентов.

Правило сохраняет свою силу и тогда, когда $m = 0$, т. е. в правой части стоит только многочлен; в этом случае надо проверить, не является ли число 0 корнем характеристического уравнения. В частных случаях многочлен $P(x)$ может быть нулевой степени, т. е. постоянной величиной.

Приведем примеры, которые помогут читателю уяснить указанный прием отыскания частного решения.

Примеры. 1) $y'' - 2y' + y = 1 + x$; $y|_{x=0} = 2$; $y'|_{x=0} = -3$. Здесь характеристическое уравнение

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

имеет двукратный корень $r = 1$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения будет равно

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Правая часть уравнения имеет рассматриваемую форму, причем $m = 0$, $P(x) = 1 + x$. Так как число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y = Ax + B,$$

где A, B — постоянные, подлежащие отысканию.

Дифференцируя и подставляя в дифференциальное уравнение, находим

$$-2A + Ax + B = 1 + x.$$

Приравнивая коэффициенты в обеих частях равенства

$$A = 1, \quad -2A + B = 1,$$

получим $A = 1$, $B = 3$. Итак, частным решением заданного уравнения является функция

$$y = x + 3,$$

а его общим решением — функция

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + (x + 3).$$

После того, как найдено общее решение уравнения, находим по начальным условиям частное[1]). Для этого найдем

$$y' = (C_1 + C_2 x) e^x + C_2 e^x + 1.$$

Тогда

$$2 = C_1 + 3, \quad -3 = C_1 + C_2 + 1.$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = -3$. Искомым решением будет функция

$$y = -(1 + 3x) e^x + x + 3.$$

2) $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Здесь характеристическое уравнение

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

имеет корни $r_1 = 1$, $r_2 = 3$. Значит, общее решение соответствующего уравнения без правой части будет иметь вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Правая часть имеет рассматриваемую форму, причем $P(x) = 3$, т. е. является многочленом нулевой степени; число $m = 2$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $k = 0$. Частное решение ищем в виде

$$y = Ae^{2x},$$

где A — постоянная, подлежащая отысканию.

Тогда $y' = 2Ae^{2x}$, $y'' = 4Ae^{2x}$. Подставляя значения y, y' и y'' в уравнение, получим

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x},$$

откуда $A = -3$. Следовательно, частным решением будет функция $y = -3e^{2x}$, а общим

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 3e^{2x}.$$

3) $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Здесь левая часть уравнения такая же, как в примере 2. Поэтому общее решение соответствующего уравнения без правой части

---

[1]) Нами уже было найдено одно частное решение $y = x + 3$, но оно не соответствует начальным условиям. Мы использовали это решение для нахождения общего решения уравнения, а теперь из него получаем частное решение, уже удовлетворяющее данным начальным условиям.

запишем сразу:

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

Так как теперь $m=1$, т. е. m является однократным корнем характеристического уравнения, то $k=1$; $P(x)=x$ — многочлен первой степени. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y=x(Ax+B)e^x=(Ax^2+Bx)e^x.$$

Дифференцируем дважды:

$$y'=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x,$$
$$y''=2Ae^x+2(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x$$

и подставляем в уравнение:

$$2Ae^x+2(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x-4[(2Ax+B)e^x+$$
$$+(Ax^2+Bx)e^x]+3(Ax^2+Bx)e^x=e^x(-4Ax+2A-2B)=xe^x.$$

Отсюда

$$2A-2B=0, \qquad -4A=1,$$

т. е.

$$A=-\frac{1}{4}, \qquad B=-\frac{1}{4}.$$

Итак, мы нашли частное решение $y=-\frac{1}{4}(x^2+x)e^x$, а следовательно, и общее:

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}-\frac{1}{4}(x^2+x)e^x.$$

2. Пусть правая часть уравнения (*) имеет вид

$$f(x)=a\cos nx+b\sin nx.$$

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то уравнение имеет частное решение вида

$$y=A\cos nx+B\sin nx.$$

Если же числа $\pm in$ служат корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y=x(A\cos nx+B\sin nx).$$

В частных случаях, когда $a=0$ или $b=0$, решение **все** равно следует искать в указанном полном виде.

Примеры. 1) $y''+4y'+13y=5\sin 2x$.

Характеристическое уравнение $r^2+4r+13=0$ имеет корни $r=-2\pm 3i$. Значит, общее решение соответствующего уравнения без правой части запишется так:

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Так как числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Дважды дифференцируем:

$$y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x,$$
$$y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

и подставляем в уравнение:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 8A \sin 2x + 8B \cos 2x + 13A \cos 2x + \\ + 13B \sin 2x = 5 \sin 2x.$$

Приравнивая друг другу коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в обеих частях равенства (справа коэффициент при $\cos 2x$ равен нулю), получим

$$-8A + 9B = 5, \qquad 9A + 8B = 0.$$

Отсюда $A = -\frac{8}{29}$, $B = \frac{9}{29}$, т. е. частным решением будет функция $-\frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x$, а общим

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

2) $y'' + \omega^2 y = a \sin nx$.

Общее решение соответствующего уравнения без правой части мы уже нашли на стр. 591:

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Если $n \neq \omega$, то частное решение данного уравнения ищем в виде

$$y = A \cos nx + B \sin nx.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получим (рекомендуем читателю проделать выкладки самостоятельно)

$$A(\omega^2 - n^2) \cos nx + B(\omega^2 - n^2) \sin nx = a \sin nx.$$

Отсюда

$$A = 0 \quad \text{и} \quad B = \frac{a}{\omega^2 - n^2}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения таково:

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{a}{\omega^2 - n^2} \sin nx.$$

Если же $n=\omega$, то это решение не годится. В этом случае частное решение ищем в виде

$$y=x\,(A\cos\omega x+B\sin\omega x).$$

Имеем

$$y'=(A\cos\omega x+B\sin\omega x)+x\omega\,(-A\sin\omega x+B\cos\omega x),$$
$$y''=2\omega\,(-A\sin\omega x+B\cos\omega x)-x\omega^2\,(A\cos\omega x+B\sin\omega x).$$

Подставляя в уравнение, находим

$$2\omega\,(-A\sin\omega x+B\cos\omega x)-x\omega^2\,(A\cos\omega x+B\sin\omega x)+\\+x\omega^2\,(A\cos\omega x+B\sin\omega x)=a\sin\omega x,$$

т. е.

$$2\omega\,(-A\sin\omega x+B\cos\omega x)=a\sin\omega x,$$

откуда

$$A=-\frac{a}{2\omega},\qquad B=0.$$

Итак, функция

$$y=-\frac{a}{2\omega}\,x\cos\omega x$$

является частным решением уравнения при $n=\omega$.

Следовательно, общим решением будет

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x-\frac{a}{2\omega}\,x\cos\omega x.$$

Перейдем теперь к самому общему виду правой части, при котором еще можно применять метод неопределенных коэффициентов.

3. Если в уравнении (*) правая часть имеет вид

$$f(x)=e^{mx}\,[P_1(x)\cos nx+P_2(x)\sin nx],$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены, а числа $m\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y=e^{mx}\,[R_1(x)\cos nx+R_2(x)\sin nx],$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Если числа $m\pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то указанную форму частного решения следует умножить на x.

Случай 1 получается из приведенного общего при $n=0$, а случай 2 при $m=0$, $P_1(x)=a$, $P_2(x)=b$.

Заметим, что в результате решения может случиться, что степень одного из многочленов $R_1(x)$ и $R_2(x)$ будет меньше взятой первоначально, т. е. некоторые старшие коэффициенты этого многочлена окажутся равными нулю.

Пример. $y''+y=4x\sin x$.

Здесь $m=0$, $n=1$ и $\pm i$ суть корни характеристического уравнения $r^2+1=0$. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y=x\,[(Ax+B)\cos x+(A_1x+B_1)\sin x].$$

Имеем

$$y''=[-Ax^2+(4A_1-B)\,x+(2A+2B_1)]\cos x+\\ +[-A_1x^2-(4A+B_1)\,x+(2A_1-2B)]\sin x.$$

Подставляя в уравнение, находим

$$[2A_1x+(A+B_1)]\cos x+[-2Ax+(A_1-B)]\sin x=2x\sin x.$$

Это равенство будет тождественным только при

$$2A_1=0,\quad A+B_1=0,\quad -2A=2,\quad A_1-B=0.$$

Отсюда

$$A=-1,\quad B=0,\quad A_1=0,\quad B_1=1.$$

Следовательно, получаем частное решение

$$y=x\,(\sin x-x\cos x).$$

Общее решение дается формулой

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\,(\sin x-x\cos x).$$

Практически важно учесть следующее простое замечание.

Пусть правая часть уравнения $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ равна сумме двух функций: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, а y_1 и y_2 суть решения уравнений с той же левой частью, но с правыми частями, соответственно равными $f_1(x)$ и $f_2(x)$; тогда y_1+y_2 будет решением данного уравнения.

В самом деле,

$$(y_1''+y_2'')+a_1(y_1'+y_2')+a_2(y_1+y_2)=(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+\\ +(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)=f_1(x)+f_2(x)=f(x).$$

Это значит, что если мы умеем найти решения уравнения, когда правыми частями его являются отдельные слагаемые заданной правой части, то мы очень просто — в виде суммы решений — находим и все искомое решение.

Например, в силу этого замечания уравнение (см. примеры 2 и 3 на стр. 593—594)

$$y''-4y'+3y=3e^{2x}+xe^x$$

имеет частное решение

$$y=-3e^{2x}-\frac{1}{4}(x^2+x)\,e^x$$

и, значит, такое общее решение:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 3e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x) e^x.$$

172. Метод вариации произвольных постоянных [1]**.** Изложим теперь метод, позволяющий отыскивать частное решение линейного уравнения с правой частью

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (*)$$

где $f(x)$ — любая функция.

При использовании этого метода нам нужно знать общее решение соответствующего уравнения без правой части. Метод вариации постоянных в равной мере применим как к уравнениям с постоянными коэффициентами, так и к уравнениям, в которых коэффициенты a_1 и a_2 являются функциями от x. Однако, так как мы умеем решать лишь уравнения с постоянными коэффициентами, то и излагаемый метод практически мы сможем применять только к таким уравнениям.

Пусть уравнение без правой части, соответствующее уравнению (*)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (**)$$

имеет общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Будем искать решение уравнения (*) в виде

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2, \qquad (***)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные функции, подлежащие определению, а y_1 и y_2 — известные частные решения уравнения без правой части (**). Будем в дальнейшем для краткости вместо $C_1(x)$ и $C_2(x)$ писать просто C_1 и C_2, помня, что они являются функциями от x. Поскольку определению подлежат две функции C_1 и C_2, то одним соотношением между ними мы можем распорядиться по произволу. Продифференцируем равенство (***):

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'.$$

Оказывается, что наиболее целесообразно подчинить C_1 и C_2 такому условию, чтобы выражение для y' имело тот же самый вид, что и при постоянных C_1 и C_2.

Для этого положим

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \qquad (A)$$

[1]) Этот метод принадлежит Лагранжу.

Тогда

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Продифференцируем еще раз:

$$y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''.$$

Подставим y, y' и y'' в левую часть уравнения (*):

$$C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2'' + a_1 C_1 y_1' + a_1 C_2 y_2' + a_2 C_1 y_1 + a_2 C_2 y_2 =$$
$$= C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = f(x).$$

Выражения в обеих скобках равны нулю, так как y_1 и y_2 являются решениями уравнения без правой части (**). Значит, чтобы функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ была решением уравнения (*), помимо условия (А) должно еще соблюдаться условие

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \tag{Б}$$

Таким образом, мы приходим к системе уравнений

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0,$$
$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Определитель этой системы, как мы уже отмечали в п. **169**, I в нуль не обращается:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$$

и поэтому мы можем сначала найти C_1' и C_2', а затем интегрированием и сами функции C_1 и C_2. Если при интегрировании производных C_1' и C_2' ввести произвольные постоянные, то мы сразу получим общее решение неоднородного уравнения.

Пример. Решим уравнение

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

Однородному уравнению $y'' + y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0$. Его корни $r = \pm i$. Поэтому $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$.

Запишем решение данного уравнения в виде

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

и составим систему уравнений для отыскания C_1 и C_2:

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0,$$
$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x.$$

Решив эту систему, найдем

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad C_2' = \sin x.$$

Интегрирование дает

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \int\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)dx = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + k_1$$

(см. формулу 69 таблицы интегралов),

$$C_2 = \int \sin x\,dx = -\cos x + k_2,$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Теперь запишем общее решение заданного уравнения:

$$y = \left[\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + k_1\right]\cos x + [-\cos x + k_2]\sin x =$$
$$= k_1 \cos x + k_2 \sin x - \cos x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

173. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Изложенная в предыдущих пунктах теория линейных дифференциальных уравнений второго порядка легко переносится на линейные уравнения n-го порядка ($n > 2$).

Линейное уравнение n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (*)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — функции независимой переменной x или постоянные величины.

Так же как и раньше, наряду с данным неоднородным уравнением всегда будем рассматривать соответствующее ему однородное уравнение (без правой части)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \qquad (**)$$

Чтобы сформулировать основную теорему о структуре общего решения такого уравнения, введем понятие линейной независимости системы функций.

Рассмотрим систему функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, определенных в одном и том же интервале. Напомним, что линейной комбинацией этих функций мы условились называть выражение

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — постоянные величины.

Определение. ***Система функций*** $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ **называется *линейно независимой*, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.**

Это означает, например, что не может быть равенства

$$\varphi_1(x) = k_2\varphi_2(x) + \ldots + k_n\varphi_n(x),$$

где $k_2, \ldots, k_n$ — постоянные величины.

Отсюда следует, что ни одна из линейно независимых функций не может тождественно равняться нулю. Если, например, было бы $\varphi_1(x) \equiv 0$, то указанное равенство выполнялось бы при $k_2 = \ldots = k_n = 0$.

В частности, две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы, если их отношение не есть константа: $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \neq \text{const}$.

Система функций, не являющаяся линейно независимой, называется *линейно зависимой*. Например, линейно зависимой будет система

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \varphi_3(x) = x^3, \quad \varphi_4(x) = 2x - x^2.$$

Действительно, функция $\varphi_4(x)$ является линейной комбинацией остальных:

$$\varphi_4(x) = 2\varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

(При этом вовсе не обязательно, чтобы $\varphi_n(x)$ выражалось через все остальные функции.)

Сформулируем теперь теорему о структуре общего решения уравнения (**).

Теорема. **Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть n частных линейно независимых решений уравнения (**), то общим решением этого уравнения является их линейная комбинация**

$$y = C_1y_2 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n. \qquad (***)$$

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и для уравнений второго порядка (см. п. **169**), и мы рекомендуем читателю провести его самостоятельно.

Если решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то по крайней мере одно из них линейно выразится через остальные $n-1$ и функция (***) будет фактически зависеть не от n, а от меньшего числа произвольных постоянных. Она не будет доставлять общего решения.

Существует простое условие линейной независимости частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Именно, этим условием служит неравенство нулю так называемого определителя Вронского[1]) (или вронскиана), составленного из функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их

[1]) И. Гоэне-Вронский (1778—1853) — известный польский математик.

производных:

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Знак неравенства означает, что определитель не может равняться нулю ни при каком значении x. Доказательство этого условия в общем случае мы не приводим; для $n=2$ оно приведено в п. **169**, I. Этот определитель играет важную роль при отыскании частного решения по заданным начальным условиям.

Действительно, если заданы начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

то, чтобы из общего решения

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

получить частное, надо решить систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{gathered} C_1y_{10} + C_2y_{20} + \ldots + C_ny_{n0} = y_0, \\ C_1y_{10}' + C_2y_{20}' + \ldots + C_ny_{n0}' = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_{10}^{(n-1)} + C_2y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_ny_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{gathered}$$

Здесь через $y_{i0}^{(k)}$ обозначено значение k-й производной от частного решения y_i в точке x_0. Определитель этой системы

$$V = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \ldots & y_{n0} \\ y_{10}' & y_{20}' & \ldots & y_{n0}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \ldots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

есть значение определителя Вронского в точке $x=x_0$. Как мы только что отметили, если система частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независима, то этот определитель в любой точке x_0 отличен от нуля, если при этом значении x_0 все коэффициенты уравнения (**) непрерывны. Следовательно, система линейных уравнений относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ всегда имеет единственное решение. В частности, нулевым начальным условиям ($y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0$) соответствует нулевое решение системы

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0,$$

т. е. функция, удовлетворяющая уравнению (**) и нулевым начальным условиям, тождественно равна нулю.

О линейно независимых решениях линейного уравнения n-го порядка говорят еще, что они образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение линейного уравнения n-го порядка с правой частью (*) слагается из общего решения соответствующего ему уравнения без правой части (**) и какого-либо частного решения самого уравнения. Доказательство этого проводится точно так же, как и для уравнений второго порядка.

Метод вариации произвольных постоянных (см. п. **172**) употребляется и в случае линейных уравнений любого порядка n. Для его применения нужно только знать фундаментальную систему решений соответствующего уравнения без правой части.

Рекомендуем читателю самостоятельно придти к следующему выводу.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0,$$

то решением уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$$

является функция

$$C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — функции независимой переменной, производные которых $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ удовлетворяют следующей системе n линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&C_1'y_1+C_2'y_2+\ldots+C_n'y_n=0,\\
&C_1'y_1'+C_2'y_2'+\ldots+C_n'y_n'=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x).
\end{aligned}$$

(Первые $(n-1)$ уравнений этой системы выбираются по нашему произволу с таким расчетом, чтобы производные до $(n-1)$ порядка включительно от функции $C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ имели тот же самый вид, что и при постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Если мы теперь найдем n-ю производную и подставим выражения всех производных в данное уравнение, то мы получим последнее уравнение системы.)

Чтобы лучше запомнить систему уравнений для отыскания $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, заметим, что определитель этой системы есть как раз определитель Вронского (отсюда следует, что эта система имеет единственное решение), а правые части уравнений все, кроме последней, равны нулю. В последнем уравнении правая часть равна $f(x)$ — правой части данного неоднородного уравнения.

174. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение линейных уравнений с постоянными коэффициентами любого порядка производится совершенно аналогично решению уравнений второго порядка. Мы ограничимся поэтому только самыми краткими указаниями. Начнем с уравнения n-го порядка без правой части

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$

где a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n—действительные постоянные.

Характеристическим уравнением для него называется уравнение n-й степени

$$r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\ldots+a_{n-1}r+a_n=0.$$

Имеет место следующее предложение, обобщающее для любого порядка n предложение, полученное нами для $n=2$:

1) **Каждому k-кратному действительному корню r характеристического уравнения соответствует k частных решений вида**

$$e^{rx},\ xe^{rx},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{rx}.$$

2) **Каждой паре t-кратных комплексно сопряженных корней $r_1=\alpha+\beta i$, $r_2=\alpha-\beta i$, характеристического уравнения соответствует $2t$ частных решений вида**

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{t-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{t-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Общая сумма кратностей всех корней должна равняться степени характеристического уравнения n; поэтому число всех частных решений будет в точности совпадать с порядком уравнения.

Доказательство того, что указанные частные решения линейно независимы, т. е. образуют фундаментальную систему решений, мы не приводим.

Чтобы найти общее решение заданного уравнения, нужно взять линейную комбинацию указанных частных решений.

Пример. $y^{(V)}+y^{(IV)}+2y'''+2y''+y'+y=0.$

Характеристическое уравнение

$$r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0,$$

как легко заметить, имеет корень $r=-1$; после деления на $r+1$ уравнение принимает вид

$$r^4+2r^2+1=0,$$

т. е.

$$(r^2+1)^2=0.$$

Значит, имеем

$$r_1=-1,\quad r_2=r_3=i,\quad r_4=r_5=-i.$$

Поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения запишется так:

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x.$$

Отыскание частного решения уравнения с правой частью

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{mx} [P_1(x) \cos nx + P_2(x) \sin nx],$$

производится по тем же правилам, что и для уравнений с правой частью второго порядка (п. **171**).

Оказывается, что уравнение имеет частное решение вида

$$y = x^k e^{mx} [R_1(x) \cos nx + R_2(x) \sin nx],$$

где $R_1(x)$, $R_2(x)$ — многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$, а k — кратность, с которой $m \pm ni$ входят в число корней характеристического уравнения. Если $m \pm ni$ не являются корнями характеристического уравнения, то k принимаем равным нулю. Если правая часть уравнения $f(x)$ не является функцией указанного вида, то следует применить метод вариации произвольных постоянных.

175. Колебания. Резонанс.

I. Механические колебания. Задачи о колебаниях занимают значительное место в ряду важных задач современной техники и физики. В большом числе случаев явления колебаний описываются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка (линейные колебания), которые в простейших условиях имеют постоянные коэффициенты. Рассмотрим сначала механические колебания.

Допустим, что на движущееся тело (массу для простоты будем считать равной единице) действует сила, стремящаяся вернуть тело в состояние равновесия, причем величина силы пропорциональна отклонению от положения равновесия. Если обозначить через s расстояние тела от положения равновесия, а через ω^2 — коэффициент пропорциональности, то величина силы будет равна $\omega^2 s$. Указанная сила называется *восстанавливающей силой;* ω называется *коэффициентом восстановления.*

Далее, пусть движение происходит при наличии сопротивления среды. Силу, возникающую при этом, предположим пропорциональной скорости движения. Она направлена в сторону, обратную направлению движения, а ее величина равна $2ks$, если через $2k$ обозначить коэффициент пропорциональности. Эта сила называется *силой сопротивления*, а k — *коэффициентом сопротивления.*

Наконец, допустим, что на систему действует посторонняя заданная сила $f(t)$, выраженная как функция времени t. Ее называют *возмущающей силой* (точнее, внешней возмущающей силой).

Составим дифференциальное уравнение движения. Для получения равнодействующей всех сил нужно, очевидно, восстанавливающую силу и силу сопротивления взять со знаком минус, ибо первая направлена в сторону, противоположную направлению отсчета s, а вторая противоположна скорости. Таким образом, приходим к уравнению

$$\ddot{s} = -2k\dot{s} - \omega^2 s + f(t),$$

или

$$\ddot{s} + 2k\dot{s} + \omega^2 s = f(t). \qquad (*)$$

Итак, указанные явления механических колебаний описываются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если внешняя возмущающая сила отсутствует ($f(t) \equiv 0$), то колебание называется *свободным* или *собственным*, свободному колебанию отвечает однородное уравнение, соответствующее уравнению (*). При наличии возмущающей силы говорят, что колебание *вынужденное*,— такое колебание описывается неоднородным уравнением (*), правая часть которого $f(t)$ называется иногда *возмущающим членом*.

Восстанавливающей силой может быть сила упругости. Реально такой случай осуществляется, например, при следующих обстоятельствах. К вертикальной пружине подвешен груз, в точности уравновешивающийся силой упругости пружины. Если груз выводится вертикальной силой из состояния равновесия, то в дальнейшем он будет совершать колебания — свободные при отсутствии дополнительной силы, действующей на груз или на всю систему, вынужденные при наличии ее (например, когда сама точка привеса пружины по некоторому закону перемещается по вертикали). Сила противодействия пружины (восстанавливающая сила) будет действительно пропорциональна отклонениям (деформациям), как это следует из закона Гука. Коэффициент восстановления есть «жесткость» пружины.

II. Исследование свободных колебаний. Перейдем к применениям известных нам решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами к исследованию колебаний. Начнем со свободных колебаний

$$\ddot{s} + 2k\dot{s} + \omega^2 s = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + 2kr + \omega^2 = 0$ имеет корни: $-k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$. Возможны три случая.

1) *Коэффициент сопротивления больше коэффициента восстановления:* $k > \omega$.

При этом решением будет

$$s = C_1 e^{-\delta_1 t} + C_2 e^{-\delta_2 t},$$

где $\delta_1 = k - \sqrt{k^2 - \omega^2} > 0$, $\delta_2 = k + \sqrt{k^2 - \omega^2} > 0$.

Мы видим, что никакого *колебания* не происходит; с увеличением t отклонение s уменьшается, стремясь к нулю при $t \to \infty$ и система стремится к равновесию (которое практически наступает в конечный момент времени). Мы имеем дело с непериодическими, как говорят, затухающими движениями. Наглядно этот случай можно объяснить тем, что влияние силы сопротивления (тормозящей движение) настолько превосходит влияние силы восстановления (вызывающей колебания), что движение затухает до того, как система перейдет положение равновесия.

2) *Коэффициент сопротивления равен коэффициенту восстановления:* $k = \omega$.

При этом решением будет

$$s = e^{-kt}(C_1 + C_2 t).$$

Этот случай не отличается от предыдущего в том смысле, что s является, начиная с некоторого t, убывающей функцией и $s \to 0$ при $t \to \infty$.

3) *Коэффициент сопротивления меньше коэффициента восстановления:* $k < \omega$.

При этом решением будет

$$s = e^{-kt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \qquad \text{где } k_1 = \sqrt{\omega^2 - k^2}.$$

Совершив преобразование, указанное на стр. 591, запишем, что

$$s = Ae^{-kt} \sin(k_1 t + \varphi_0),$$

где A и φ_0 — произвольные постоянные. Чтобы их определить нужно задать начальные условия: начальное отклонение точки и ее скорость.

Теперь уже тело действительно совершает колебания — так называемые *затухающие гармонические колебания.*

Если коэффициент сопротивления $k = 0$, то мы получим

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

т. е. обычное гармоническое колебание.

В том случае, когда $k \neq 0$, амплитуда колебания Ae^{-kt}, в отличие от случая чисто гармонических колебаний, не есть постоянная величина, а зависит от времени; она стремится к нулю при $t \to \infty$. Следовательно, тело стремится к равновесию, но не монотонно, а колеблясь около положения равновесия, с постепенно — по экспоненциальному закону — затухающими размахами (амплитудами). Как и для гармонических колебаний, величина $k_1=\sqrt{\omega^2-k^2}$ называется *частотой*, величина $T=\frac{2\pi}{k_1}$ — *периодом*, а φ_0 — *начальной фазой* затухающего гармонического колебания. Величина Ae^{-kt} называется *амплитудой* затухающего колебания. Логарифм амплитуды $\ln A - kt$ убывает с постоянной скоростью k. Чтобы найти максимальное отклонение s, найдем производную $\dot{s}$:

$$\dot{s}=-kAe^{-kt}\sin(k_1t+\varphi_0)+Ak_1e^{-kt}\cos(k_1t+\varphi_0).$$

Приравнивая производную (т. е. скорость) нулю, получим уравнение для определения экстремальных значений t:

$$\operatorname{tg}(k_1t+\varphi_0)=\frac{k_1}{k}.$$

Ясно, что максимумы и минимумы отклонений (с учетом знака) будут чередоваться и следовать один за другим через полупериод $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{k_1}$. Отношение двух последовательных максимальных отклонений будет равно[1])

$$\Delta=\frac{Ae^{-kt_0}}{Ae^{-k(t_0+T)}}=e^{kT}.$$

Постоянная величина $\ln\Delta=kT$ называется *логарифмическим декрементом затухания*.

Схематический график затухающего гармонического колебания $s=Ae^{-kt}\sin k_1t$ (при $\varphi_0=0$) указан на рис. 225. При построении графика учтено, что в общих точках кривых Ae^{-kt} и $Ae^{-kt}\sin k_1t$, т. е. при $k_1t=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, они имеют общую касательную; проверить равенство производных в этих точках предоставляем читателю. То же самое можно сказать и о кривых $-Ae^{-kt}$ и $Ae^{-kt}\sin k_1t$. Как уже отмечено, расстояние между соседними точками максимума и минимума равно половине периода, т. е. $\frac{\pi}{k_1}$.

III. Исследование вынужденных колебаний. Резонанс. Изучим теперь вынужденные колебания, которые описываются линейным уравнением с правой частью

$$\ddot{s}+2k\dot{s}+\omega^2s=f(t).$$

Рассмотрим практически наиболее важный случай, когда коэффициент сопротивления меньше коэффициента восстановления: $k<\omega$, и внешняя сила — периодическая: $f(t)=a\sin\omega_1t$.

---

[1]) Через t_0 обозначено одно из значений t, при которых s достигает максимума. На практике Δ измеряется именно как отношение двух максимальных амплитуд, хотя ясно, что это число равно отношению **любых** двух отклонений, отделенных интервалом времени T.

В силу свойств линейных неоднородных уравнений любое вынужденное колебание является результатом наложения собственного колебания системы и какого-нибудь наперед выбранного вынужденного колебания. Найдем частное вынужденное колебание, т. е. частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{s}+2k\dot{s}+\omega^2 s=a\sin\omega_1 t.$$

Пусть $k\neq 0$; тогда $\omega_1 i$ не есть корень характеристического уравнения, и решение можно искать в виде $M\cos\omega_1 t+N\sin\omega_1 t$.

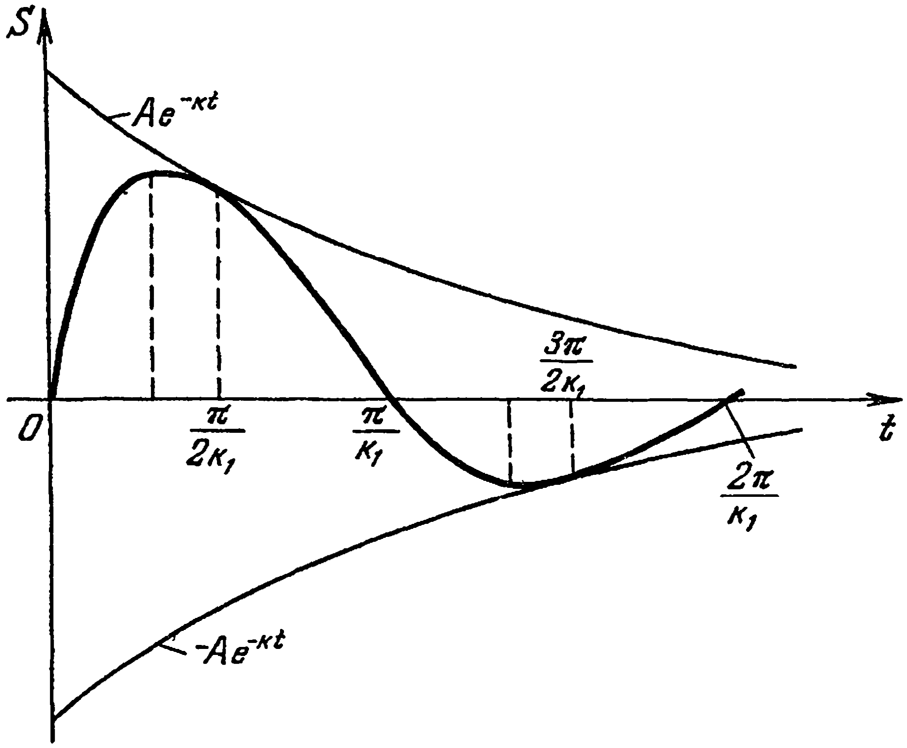

Рис. 225.

Находя известным способом коэффициенты M и N, придем к решению (необходимые выкладки рекомендуем провести читателю самостоятельно)

$$s=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1),$$

где

$$A_1=\sqrt{M^2+N^2}=\frac{a}{\sqrt{4k^2\omega_1^2+(\omega^2-\omega_1^2)^2}}$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{M}{N}=\frac{-2k\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2}.$$

Таким образом, *одно из вынужденных колебаний есть простое гармоническое колебание с амплитудой A_1, частотой ω_1 и начальной фазой φ_1*. Всякое другое получается наложением этого колебания на собственное колебание системы:

$$s = Ae^{-kt}\sin(k_1 t + \varphi_0) + A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Вследствие того, что первый член с возрастанием t довольно быстро стремится к нулю, через некоторое время движение будет описываться в основном только вторым членом. С этим связано интересное

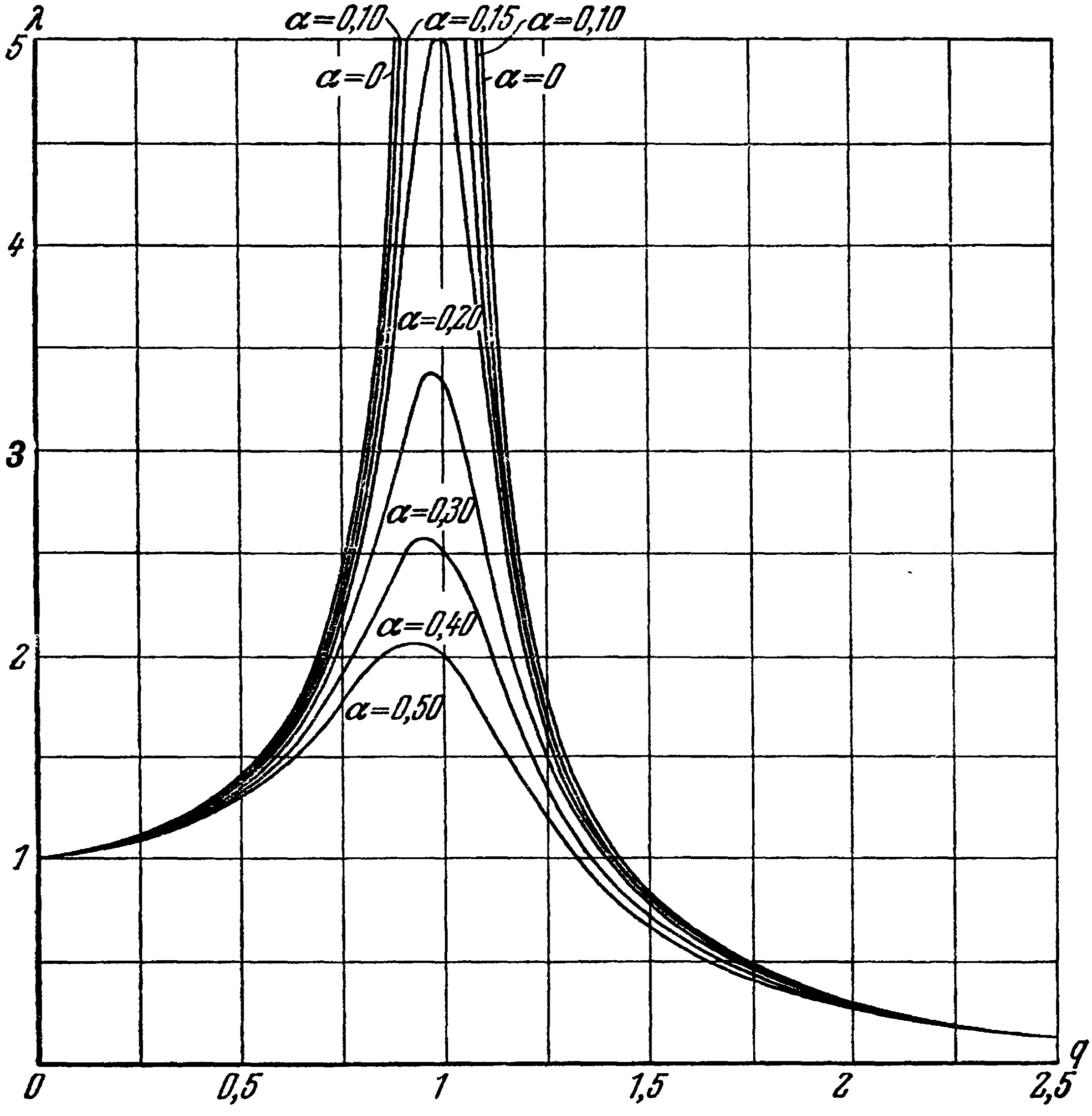

Рис. 226.

явление, возникающее при вынужденных колебаниях, так называемый резонанс.

Рассмотрим амплитуду вынужденного колебания A_1 и предположим, что величины k и ω неизменны, т. е. собственная частота системы постоянна. Выражение для A_1 запишем так:

$$A_1 = \frac{a}{\omega^2 \sqrt{\frac{4k^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right]^2}} = \frac{a}{\omega^2 \sqrt{\alpha^2 q^2 + (1-q^2)^2}},$$

где $\alpha=\frac{2k}{\omega}$, $q=\frac{\omega_1}{\omega}$. Амплитуда A_1 пропорциональна величине

$$\lambda=\lambda(q)=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2q^2+(1-q^2)^2}}.$$

Характер изменения λ при изменении q виден на графиках функции $\lambda(q)$, соответствующих различным значениям α. На рис. 226 даны графики $\lambda=\lambda(q)$ при $\alpha=0{,}50$; $0{,}40$; $0{,}30$; $0{,}20$; $0{,}15$; $0{,}10$; 0. Как правило, α — величина небольшая, ибо коэффициент сопротивления k составляет обычно малую долю коэффициента восстановления ω.

Исследование показывает, что с увеличением q, т. е. с увеличением возмущающей частоты ω_1, величина λ, а вместе с ней и амплитуда установившегося вынужденного колебания сначала возрастают до некоторого максимума, а затем быстро убывают, стремясь к нулю при $q\to\infty$ ($\omega_1\to\infty$). Этот максимум достигается при $q=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{2}}$, т. е. при $\omega_{1\,\max}=\sqrt{\omega^2-2k^2}$. Легко проверить, что при этом амплитуда $A_{1\,\max}=\frac{a}{2k\sqrt{\omega^2-k^2}}$.

При близости частоты возмущающей силы к величине $\omega_{1\,\max}$ и при малом k (это значит, что $\omega_{1\,\max}\approx\omega$) тело будет совершать через некоторый промежуток времени гармонические колебания с очень большой амплитудой, которая может быть совершенно несоразмерной с амплитудой синусоидальной силы, вызывающей само колебание системы. Это явление резкого возрастания амплитуды колебания под влиянием даже совсем малых внешних воздействий и называется *резонансом*. Кривые на рис. 226 называются *кривыми резонанса*.

Резонанс играет значительную роль в технике и физике. Каждое упругое тело (например, любое сооружение) имеет свою определенную собственную частоту колебания, зависящую только от свойств тела. Представим себе, что это тело под действием внешней силы выводится из состояния равновесия. Если частота внешней силы близка к собственной частоте, то воздействие силы, как бы мала она ни была, может оказаться огромным и разрушительным. При проектировании различных сооружений (машин, мостов, кораблей, самолетов и т. п.) особенно принимаются в расчет соображения о прочности, связанные с резонансом. Резонансом объясняется хорошо известное из опыта явление, когда небольшая «раскачка» упругого тела (скажем, моста) вызывает его поломку.

При отсутствии сопротивления, т. е. когда $k=0$ (что на практике, однако, не может встретиться), амплитуда вынужденного колебания равна $\frac{a}{|\omega^2-\omega_1^2|}$ и обращается в бесконечность при совпадении возмущающей и собственной частот ($\omega_1=\omega$) (см. рис. 226, кривая $\alpha=0$). В том случае, когда $\omega_1\neq\omega$, решение дифференциального уравнения колебания $\ddot{s}+\omega^2 s=a\sin\omega_1 t$ получается из общего решения, найденного выше, приданием k значения 0. Но если $\omega_1=\omega$, то указанное решение не подходит, так как ωi при этом становится корнем характеристического уравнения $r^2+\omega^2=0$. Решением, как было показано в примере на стр. 596, будет функция

$$s=A\sin(\omega t+\varphi_0)-\frac{a}{2\omega}t\cos\omega t.$$

Второй член (так называемый «вековой член») показывает, что с течением времени размахи колебания неограниченно возрастают, что здесь и иллюстрирует резонанс.

IV. Колебания в электрической цепи. Картину, вполне аналогичную механическим колебаниям, представляют процессы, протекающие в электрической цепи, имеющей сопротивление R, самоиндукцию L, емкость C, если в ней действует напряжение $v=v(t)$, поступающее извне. Подобный вопрос мы уже рассматривали в п. **161**, где, однако, не принималась во внимание емкость. В общем случае необходимо учесть, что часть полного напряжения обусловливается наличием емкости. В физике показывается, что эта часть измеряется величиной $\frac{1}{C}\int i\,dt$, где i — сила тока.

Таким образом, приходим к уравнению

$$Li'+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=v(t),$$

откуда дифференцированием по t получаем линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$i''+\frac{R}{L}i'+\frac{1}{LC}i=\frac{1}{L}v'(t).$$

Это дифференциальное уравнение, описывающее явление течения тока, аналогично уравнению, описывающему явление механических колебаний.

Если внешняя электродвижущая сила постоянна (или вовсе отсутствует), то уравнение будет однородным. Ему соответствует ток, который в силу неравенства нулю сопротивления ($R\neq 0$) неизбежно будет затухающим. В электротехнике он называется *переходным*. Распространяя и дальше аналогию с механическими колебаниями, можно сказать, что этот ток $\left(\text{при условии } \frac{R}{2L}<\sqrt{\frac{1}{CL}}\right)$ дает собственные колебания цепи (контура)[1]. Если существует внешнее возмущающее напряжение, такое, что $v'(t)$ не равно тождественно нулю, то неоднородное уравнение имеет частное решение: $i=i(t)$, которое дает вынужденный ток, называемый установившимся. Наконец, общее решение уравнения, т. е. зависимость тока от времени при любых условиях, получается сложением переходного и установившегося токов. Совершенно ясно, что, аналогично случаю механических колебаний, по прошествии некоторого промежутка времени переходный ток практически не будет влиять на течение электричества. В случае, когда $v(t)$ (а следовательно, и $v'(t)$) есть синусоидальная функция времени, установившийся ток тоже будет синусоидальным. Здесь мы опять можем столкнуться с явлением резонанса, играющим особенно важную роль в колебательных контурах. В дальнейшие подробности входить нет нужды, так как с математической стороны ход явления подобен случаю механических колебаний.

§ 4. Системы дифференциальных уравнений

176. Общие определения. Нормальные системы уравнений. С системами дифференциальных уравнений встречаются при изучении процессов, для описания которых одной функции недостаточно. С примерами такого рода нам уже приходилось сталкиваться. Так в п. **151** было отмечено, что отыскание векторных линий поля требует решения системы дифференциальных уравнений. В сноске на стр. 578 указано, что решение задач динамики криволинейного движения приводит к системе трех дифференциальных уравнений, в которых неизвестными функциями являются проекции движущейся точки на оси координат, а независимой переменной — время. Позже мы увидим, что решение задач электротехники для двух электрических цепей, находящихся в электромагнитной связи, потребует решения системы двух дифференциальных уравнений. Количество подобных примеров легко можно увеличить.

Начнем с определений. Будем всюду в этом параграфе независимую переменную обозначать буквой t, а неизвестные функции этой переменной или через $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ или, если их не больше трех, через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Определение. ***Системой дифференциальных уравнений* называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные.**

---

[1] Если $\frac{R}{2L} \geqslant \sqrt{\frac{1}{CL}}$, то колебаний в цепи не будет, ток будет непериодическим затухающим.

Всегда предполагается, что число уравнений равно числу неизвестных функций. Вот примеры таких систем (производные по t обозначаем не штрихами, а точками):

$$\begin{cases} \dot{x}=2x+\ y+t+1, \\ \dot{y}=3x-2y+5t, \end{cases} \qquad \begin{cases} t\ddot{x}_1+\ddot{x}_2 \ +2x_1x_3=0, \\ 2\ddot{x}_2+\ddot{x}_3 \ -2tx_1 \ =0, \\ \dot{x}_3+2x_1+\ tx_2 \ =0. \end{cases}$$

Решением системы дифференциальных уравнений называется совокупность функций

$$x_1=x_1(t), \qquad x_2=x_2(t), \ \ldots, \ x_n=x_n(t),$$

которая при подстановке в каждое из уравнений превращает его в тождество. Вопрос об общем и частных решениях, а также об их геометрическом смысле будет рассмотрен позднее.

Обычно приходится иметь дело не с произвольными системами дифференциальных уравнений, а с так называемыми нормальными системами.

Определение. ***Нормальной системой дифференциальных уравнений*** **называется система уравнений вида**

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1=f_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ &\dot{x}_2=f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\dot{x}_n=f_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n). \end{aligned} \qquad (*)$$

Например, нормальной будет первая из приведенных выше систем.

Важность изучения именно нормальных систем следует из того, что во многих случаях произвольно заданную систему дифференциальных уравнений удается привести к нормальной. Так, например, система

$$\begin{cases} \dot{x}+2\dot{y}-x=0, \\ \dot{x}-3y+\dot{y}=t \end{cases}$$

приводится к нормальной, если разрешить данные уравнения относительно производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$:

$$\begin{cases} \dot{x}=\frac{1}{5}(3x-2y+2t), \\ \dot{y}=\frac{1}{5}(\ x+\ y-\ t). \end{cases}$$

Систему уравнений

$$\dot{x}+\dot{y}-tx=0, \qquad \dot{x}+\dot{y}+y=0$$

нельзя разрешить относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$, и поэтому ее нельзя привести к нормальной. Подобные системы мы рассматривать не будем.

Система уравнений

$$\ddot{x}_1 + tx_2 = 0, \qquad \ddot{x}_2 + 2\dot{x}_1 - x_2 = 0,$$

содержащая производные второго порядка приводится к нормальной при помощи введения новых вспомогательных неизвестных функций $\dot{x}_1 = x_3$, $\dot{x}_2 = x_4$. Тогда $\ddot{x}_1 = \dot{x}_3$, $\ddot{x}_2 = \dot{x}_4$, и заданная система заменяется следующей нормальной системой:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \qquad \dot{x}_3 = -tx_2, \quad \dot{x}_4 = x_2 - 2x_3.$$

Покажем теперь, что одно дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, с помощью введения новых вспомогательных функций всегда можно свести к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Возьмем, например, уравнение третьего порядка

$$\dddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$$

и введем две новые вспомогательные функции

$$y = \dot{x}, \qquad z = \dot{y} = \ddot{x}.$$

Тогда заданное уравнение заменится системой трех уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = f(t, x, y, z),$$

которая является частным случаем нормальной системы (*). Ясно, что так можно поступать в случае уравнения любого порядка n; при этом число вспомогательных функций будет равно $n-1$.

В обычно встречающихся случаях верно и обратное утверждение: *Нормальная система уравнений может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы.* Эта замена часто позволяет решать такие системы.

Рассмотрим, например, систему уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x - y + z.$$

Продифференцируем первое уравнение по переменной t и заменим производную $\dot{y}$ ее выражением из второго уравнения $\ddot{x} = \dot{y} = z$.

Продифференцируем еще раз это уравнение и заменим производную $\dot{z}$ ее выражением из третьего уравнения $\dddot{x} = \dot{z} = x - y + z$. Так как $y = \dot{x}$, а $z = \ddot{x}$, то окончательно получим $\dddot{x} = x - \dot{x} + \ddot{x}$, или

$$\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = 0,$$

т. е. линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Обращаем внимание читателя, что в процессе исключения функций y и z мы выражаем их через функцию x и ее производные. Найдя общее решение полученного дифференциального уравнения высшего порядка, мы получим выражение для функции x, зависящее от трех произвольных постоянных. Остальные неизвестные функции (y и z) находятся уже не при помощи интегрирования, а из их выражений через найденную функцию. Таким образом, общее число произвольных постоянных не увеличится и будет равно порядку системы.

Решим полученное уравнение третьего порядка. Характеристическое уравнение, ему соответствующее: $r^3-r^2+r-1=(r^2+1)\times\times(r-1)=0$, имеет корни $r_1=1$, $r_{2,3}=\pm i$. Следовательно,

$$x=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\sin t.$$

Поскольку при исключении y и z мы получали $y=\dot{x}$ и $z=\ddot{x}$, то

$$y=C_1e^t-C_2\sin t+C_3\cos t,$$
$$z=C_1e^t-C_2\cos t-C_3\sin t.$$

В качестве примера, когда нормальную систему нельзя заменить одним дифференциальным уравнением, рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x}=x,\quad \dot{y}=z,\quad \dot{z}=y.$$

Здесь указанным выше способом можно два последних уравнения свести к одному уравнению второго порядка: $\ddot{y}=\dot{z}=y$. Его общее решение $y=C_1e^t+C_2e^{-t}$; тогда $z=\dot{y}=C_1e^t-C_2e^{-t}$. Первое же уравнение никак не связано с остальными и его приходится решать отдельно: $x=C_3e^t$. Окончательно решение системы имеет вид

$$x=C_3e^t,\quad y=C_1e^t+C_2e^{-t},\quad z=C_1e^t-C_2e^{-t}.$$

В него также входят т р и произвольные постоянные.

На основании рассмотренных примеров мы сделаем следующий вывод (доказательство его мы опускаем).

Общее решение нормальной системы

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n),\\
\dot{x}_2&=f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{x}_n&=f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)
\end{aligned}$$

имеет вид

$$x_1=\varphi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad x_2=\varphi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ldots$$
$$\ldots, x_n=\varphi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Второй из приведенных примеров показывает, что в выражения некоторых из x_i могут входить не все произвольные постоянные, а только часть из них.

Начальные условия, при помощи которых из общего решения выделяется частное, задаются следующим образом:

$$x_1\big|_{t=t_0}=x_{10}, \quad x_2\big|_{t=t_0}=x_{20}, \ \ldots, \ x_n\big|_{t=t_0}=x_{n0}.$$

Подставляя начальные условия в общее решение, получаем систему алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)=x_{10}, \\ &\varphi_2(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)=x_{20}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_n(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)=x_{n0}. \end{aligned}$$

Для нормальных систем уравнений также имеет место теорема, гарантирующая существование и единственность частного решения.

Теорема. **Если правые части нормальной системы непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности значений t_0, x_{10}, $x_{20}, \ldots, x_{n0}$, то существует единственная система функций $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t)$, являющаяся решением системы и удовлетворяющая заданным начальным условиям.**

177*. Геометрическая и механическая иллюстрации решений системы дифференциальных уравнений. Фазовое пространство. Рассмотрим сначала для простоты нормальную систему двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f_1(t, x, y), \qquad \dot{y}=f_2(t, x, y). \tag{*}$$

Будем считать переменные x и y независимо от их физического смысла координатами точки на плоскости Oxy; саму эту плоскость назовем *фазовой плоскостью.* Любое решение данной системы

$$x=x(t), \quad y=y(t) \tag{**}$$

можно рассматривать как параметрическое задание линии на фазовой плоскости. Пользуясь терминологией механики и считая, что t — время, скажем, что функции $x(t)$ и $y(t)$ выражают законы движения проекций движущейся точки на оси координат, а линия (**) является *траекторией* движения. Производные $\dot{x}$ и $\dot{y}$ представляют при этом проекции скорости движущейся точки на оси координат.

Еще раз подчеркнем, что все сказанное является лишь удобной геометрической, или вернее механической, иллюстрацией. В конкретных задачах переменные x и y могут обозначать величины, никак не связанные с движением точки; например, это могут быть токи в электрических цепях. Отметим также, что при указанной иллюстрации решение $x = x(t)$ одного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ является законом движения точки по оси абсцисс; различным частным решениям соответствуют при этом разные законы движения. Участок оси Ox, по которому движется точка, может для всех частных решений быть одним и тем же (например, если уравнение имеет общее решение $x = \sin Ct$), а может быть и различным (например, если $x = C \sin t$). В первом из приведенных примеров мы имеем гармонические колебания с одинаковой амплитудой, но с разной частотой, а во втором примере — наоборот.

Вернемся к системе двух дифференциальных уравнений (*) и зададим начальные условия: $x|_{t=t_0} = \alpha$, $y|_{t=t_0} = \beta$; им соответствует частное решение, $x_0(t)$, $y_0(t)$, определяющее закон движения по некоторой траектории L_0. Возьмем теперь новые начальные условия, изменив начальный момент времени, но оставив прежними значения фазовых координат x и y: $x|_{t=t_1} = \alpha$, $y|_{t=t_1} = \beta$. Мы получим новое решение $x_1(t)$, $y_1(t)$ и новую, соответствующую ему траекторию L_1, которая, конечно, не обязана совпадать с L_0. Действительно, найдя из уравнений (*) значения производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$ в начальные моменты времени t_0 и t_1, мы получим разные величины. Это значит, что если движение начиналось из точки (α, β) в момент времени t_0, то вектор скорости был один, а если в момент времени t_1 — то другой; при этом точки начнут двигаться по разным направлениям. Таким образом, через одну и ту же точку фазовой плоскости могут проходить разные траектории. Приведем один простой пример.

1) $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 2t$. Здесь оба уравнения не связаны друг с другом, и мы сразу получаем $x = t + C_1$, $y = t^2 + C_2$. При начальных условиях $x|_{t=0} = 0$, $y|_{t=0} = 0$ решением будут функции $x = t$, $y = t^2$; соответствующая траектория — парабола $y = x^2$. Если взять те же начальные значения x и y, но при $t = 1$, то соответственно получим $x = t - 1$, $y = t^2 - 1$; исключая t, найдем уравнение новой траектории $y = (x + 1)^2 - 1$ — тоже параболы, но, разумеется, не совпадающей с предыдущей.

Особенно важным для приложений является случай, когда в правые части уравнений (*) не входит независимая переменная t. Такая система дифференциальных уравнений называется *автономной*; она имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y). \qquad (***)$$

Если движение описывается такими уравнениями, то, в какой бы момент времени ни начинать движение из фиксированной точки (α, β), вектор скорости будет одним и тем же. Можно доказать, что все движения, начинающиеся из точки (α, β), в разные моменты времени будут проходить по одной и той же траектории (доказательства мы не приводим, хотя механический смысл его довольно ясен). Представляя себе движение в виде шарика, катящегося по траектории, можно сказать, что шарики, выпущенные из данной точки в разные моменты времени, будут двигаться по одной и той же траектории, не сталкиваясь и не обгоняя друг друга (заметим только, что могут быть и траектории в виде замкнутых линий, например окружностей или эллипсов).

Можно также доказать, что для автономной системы через каждую точку фазовой плоскости, в которой выполнены условия теоремы существования решения, сформулированной в конце п. **176**, проходит одна-единственная траектория. Поясним сказанное примером.

2) $\frac{dx}{dt}=y$, $\frac{dy}{dt}=-x$. Исключая функцию y, получим $\ddot{x}=\dot{y}=-x$, т. е. $\ddot{x}+x=0$. Запишем решение последнего уравнения в виде $x=A\sin(t+\varphi)$; тогда $y=A\cos(t+\varphi)$. Траекториями служат окружности $x^2+y^2=A^2$ с центром в начале координат.

Уравнение семейства траекторий можно было бы получить и иначе, исключив с самого начала дифференциал независимой переменной dt, т. е. разделив второе из уравнений системы на первое $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. Решив это дифференциальное уравнение первого порядка, получим общее решение в виде того же семейства окружностей.

Остановимся вкратце еще на одном вопросе. Рассмотрим снова систему (***) и предположим, что в точке (x_0, y_0) обе правые части равны нулю

$$f_1(x_0, y_0)=0, \qquad f_2=(x_0, y_0)=0.$$

Тогда функции $x=x_0$ и $y=y_0$ (попросту говоря, постоянные) являются решениями системы; это значит, что шарик, помещенный в точку (x_0, y_0), будет все время оставаться неподвижным. Такие точки называются *точками покоя*. Например, для системы 2) точкой покоя является начало координат.

Для уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}$, полученного исключением dt, эти точки будут особыми (см. п. **164**). Отсюда ясно, что задача о расположении интегральных кривых этого уравнения вблизи особой точки тесно связана с задачей о расположении траекторий автономной системы вблизи точки покоя. Читатели, которым в будущем надлежит заниматься *теорией устойчивости*, должны к рассмотренным вопросам отнестись с большой внимательностью. Продолжить изучение этих вопросов можно, например, по книге [6].

Все вышесказанное почти без всяких изменений переносится на системы трех и более числа уравнений. При $n=3$ у нас есть три неизвестные функции: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и соответственно этому мы рассматриваем траектории в *фазовом пространстве* $Oxyz$. Разумеется, геометрическое их изображение в этом случае гораздо более сложно. При $n>3$ геометрическое изображение становится вообще невозможным; сохраняя терминологию, мы говорим об *n-мерном фазовом пространстве*.

Изложим еще *гидродинамическую* иллюстрацию решений системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим стационарное поле скоростей текущей жидкости $V\{v_x, v_y, v_z\}$, и пусть $v_x=f_1(x, y, z)$, $v_y=f_2(x, y, z)$, $v_z=f_3(x, y, z)$. Дифференциальные уравнения семейства линий тока (см. п. 151) имеют вид

$$\frac{dx}{f_1(x, y, z)}=\frac{dy}{f_2(x, y, z)}=\frac{dz}{f_3(x, y, z)}.$$

Если ввести параметр t и приравнять каждое из отношений dt, то получим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x, y, z),\quad \frac{dy}{dt}=f_2(x, y, z),\quad \frac{dz}{dt}=f_3(x, y, z).$$

Решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ этой системы и будут уравнениями линий тока. Эти линии тока не изменяются во времени; частицы жидкости, текущие по разным линиям тока, не перемешиваются друг с другом, так как эти линии не пересекаются. В нестационарном случае картина течения жидкости становится более сложной.

178. Системы линейных дифференциальных уравнений. В приложениях особенно часто встречаются системы линейных уравнений. Для большей краткости изложения ограничимся рассмотрением нормальной системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ и начнем с изучения свойств однородной системы

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}&=a_1(t)x+b_1(t)y+c_1(t)z,\\ \dot{y}&=a_2(t)x+b_2(t)y+c_2(t)z,\\ \dot{z}&=a_3(t)x+b_3(t)y+c_3(t)z. \end{aligned}\right. \qquad (*)$$

Функции $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$ предполагаются непрерывными.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующие простые свойства этой системы:

1) *Если известно частное решение* $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ *системы уравнений* (*), *то функции* Cx_1, Cy_1, Cz_1, *где* C — *произвольная постоянная, также образуют решение.*

2) *Если известны два решения* x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, *то и функции* x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2 *также являются решением.*

Отсюда следует, что если известны три частных решения (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), то функции

$$\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 \\ y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3, \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3 \end{aligned} \qquad (**)$$

представляют решение при любых постоянных C_1, C_2 и C_3. Выясним, в каком случае из него можно получить частное решение, удовлетворяющее любым заданным начальным условиям. Если эти условия таковы:

$$x\,|_{t=t_0} = x_0, \quad y\,|_{t=t_0} = y_0, \quad z\,|_{t=t_0} = z_0,$$

то система уравнений для определения постоянных C_1, C_2, C_3 примет вид

$$\begin{aligned} C_1x_{10} + C_2x_{20} + C_3x_{30} &= x_0, \\ C_1y_{10} + C_2y_{20} + C_3y_{30} &= y_0, \\ C_1z_{10} + C_2z_{20} + C_3z_{30} &= z_0, \end{aligned}$$

где x_{i0}, y_{i0}, z_{i0} — значения соответствующих функций при $t = t_0$. Для того чтобы эта система имела единственное решение при любых начальных условиях, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ни при каком значении $t = t_0$ не обращался в нуль. Мы, как и раньше, будем говорить, что совокупность трех частных решений, удовлетворяющих этому условию, образует *фундаментальную систему*; решение (**) в этом случае является *общим решением.*

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(t)\,x + b_1(t)\,y + c_1(t)\,z + g_1(t), \\ \dot{y} &= a_2(t)\,x + b_2(t)\,y + c_2(t)\,z + g_2(t), \\ \dot{z} &= a_3(t)\,x + b_3(t)\,y + c_3(t)\,z + g_3(t) \end{aligned} \qquad (***)$$

слагается из общего решения соответствующей однородной системы (*) *и какого-либо частного решения неоднородной системы.* Доказательство этого утверждения схоже с доказательством аналогичной теоремы для одного линейного уравнения (см. п. **169**, II), и читатель легко проведет его самостоятельно.

Задача решения системы линейных уравнений, по сути дела, эквивалентна задаче решения одного линейного дифференциального уравнения соответствующего порядка[1]), в рассматриваемом случае — третьего. Действительно, чтобы свести систему (*) или (***) к одному уравнению третьего порядка, мы должны, как указано выше, продифференцировать одно из уравнений системы, например первое. Заменяя каждый раз производные неизвестных функций в правой части их выражениями, мы увидим, что все последовательные производные функции x будут линейно выражаться через функции x, y и z. Поэтому и, наоборот, функции y и z линейно выразятся через x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$. Отсюда следует, что в результате мы получим линейное дифференциальное уравнение. Ясно, что если исходной была однородная система уравнений, то и полученное уравнение будет однородным; в то же время неоднородная система может привестись как к неоднородному, так и к однородному уравнению. Примером последнего случая служит система $\dot{x}=x+y+\frac{t^2}{2}$, $\dot{y}=x-t$, приводящаяся к уравнению $\ddot{x}-\dot{x}-x=0$.

Решением линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами мы не занимались; поэтому не будем решать системы таких уравнений и прямо перейдем к системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

179. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами[2]). Пусть дана однородная система

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}&=a_1x+b_1y+c_1z,\\ \dot{y}&=a_2x+b_2y+c_2z,\\ \dot{z}&=a_3x+b_3y+c_3z, \end{aligned}\right. \tag{*}$$

где a_i, b_i, c_i — постоянные. Как отмечено в конце предыдущего пункта, эту систему можно свести к одному однородному линейному уравнению третьего порядка; нетрудно сообразить, что, как и в примере на стр. 615, всегда будет получаться уравнение с постоянными коэффициентами. Так как структуру решений такого уравнения мы знаем, то практически целесообразно не сводить систему к одному уравнению, а прямо искать частные решения системы в виде

$$x=k_1e^{rt}, \qquad y=k_2e^{rt}, \qquad z=k_3e^{rt}, \tag{**}$$

где k_1, k_2, k_3 и r — неопределенные постоянные, которые следует найти.

---

[1]) Пример на стр. 616 показывает, что иногда может получиться несколько таких уравнений; каждое из них содержит только одну неизвестную функцию.

[2]) Перед чтением этого пункта читатель должен вспомнить свойства систем линейных однородных алгебраических уравнений. В учебниках [1] и [2] они изложены для случая трех уравнений, в книге [10] — для любого их числа.

Дифференцируя функции x, y и z и подставляя результаты в систему (*), получим

$$
\begin{aligned}
k_1 r e^{rt} &= a_1 k_1 e^{rt} + b_1 k_2 e^{rt} + c_1 k_3 e^{rt},\\
k_2 r e^{rt} &= a_2 k_1 e^{rt} + b_2 k_2 e^{rt} + c_2 k_3 e^{rt},\\
k_3 r e^{rt} &= a_3 k_1 e^{rt} + b_3 k_2 e^{rt} + c_3 k_3 e^{rt}.
\end{aligned}
$$

Сократив на e^{rt} и перенеся все члены в одну сторону, мы придем к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно k_1, k_2, k_3:

$$
\begin{aligned}
(a_1 - r)k_1 + a_2 k_2 \qquad + a_3 k_3 \qquad &= 0,\\
a_2 k_1 + (b_2 - r)k_2 + b_3 k_3 \qquad &= 0,\\
a_3 k_1 + b_3 k_2 \qquad + (c_3 - r)k_3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{***}
$$

Чтобы эта система однородных уравнений имела ненулевые решения (только такие нас и интересуют), необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю

$$
\begin{vmatrix}
a_1 - r & b_1 & c_1\\
a_2 & b_2 - r & c_2\\
a_3 & b_3 & c_3 - r
\end{vmatrix} = 0.
$$

Раскрыв этот определитель, мы получим уравнение третьей степени относительно r. Это уравнение называется *характеристическим*.

Итак, *для того чтобы существовало решение вида* (**), *нужно, чтобы число r было корнем характеристического уравнения.*

Предположим сначала, что все корни характеристического уравнения действительные и простые. Пусть один из таких корней равен r_1. Подставив это значение в систему уравнений (***), получим

$$
\begin{aligned}
(a_1 - r_1)k_1 + b_1 k_2 \qquad + c_1 k_3 \qquad &= 0,\\
a_2 k_1 + (b_2 - r_1)k_2 + c_2 k_3 \qquad &= 0,\\
a_3 k_1 + b_3 k_2 \qquad + (c_3 - r_1)k_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Определитель этой системы по условию равен нулю. Примем без доказательства, что если r_1 — простой корень характеристического уравнения (а только такие корни мы сейчас и рассматриваем), то по крайней мере один из миноров второго порядка этого определителя не равен нулю. Тогда одно из уравнений является следствием двух остальных и система сводится к двум уравнениям с тремя неизвестными. Решение такой системы будет зависеть от одной произвольной постоянной. Если, например, система сводится к двум первым уравнениям, то одним из решений будут числа

$$
k_1^{(1)} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_1 - r_1 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad
k_2^{(1)} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 - r_1\\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad
k_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_1 - r & b_1\\ a_2 & b_2 - r \end{vmatrix}.
$$

(Эти формулы легко получаются, если перенести члены с k_3 в правую часть и решить получающуюся систему неоднородных уравнений.) Все остальные решения получаются умножением чисел $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$ и $k_3^{(1)}$ на одну и ту же произвольную постоянную. Поступая так со всеми корнями характеристического уравнения, мы найдем три системы функций, каждая из которых является решением системы (*).

Эти системы функций таковы:

$$\begin{array}{lll} k_1^{(1)}e^{r_1t}, & k_2^{(1)}e^{r_1t}, & k_3^{(1)}e^{r_1t}, \\ k_1^{(2)}e^{r_2t}, & k_2^{(2)}e^{r_2t}, & k_3^{(2)}e^{r_2t}, \\ k_1^{(3)}e^{r_3t}, & k_2^{(3)}e^{r_3t}, & k_3^{(3)}e^{r_3t}. \end{array}$$

Доказательство того, что эти функции образуют фундаментальную систему, мы опускаем. Общее решение системы (*) запишется в виде

$$\begin{aligned} x &= C_1k_1^{(1)}e^{r_1t} + C_2k_1^{(2)}e^{r_2t} + C_3k_1^{(3)}e^{r_3t}, \\ y &= C_1k_2^{(1)}e^{r_1t} + C_2k_2^{(2)}e^{r_2t} + C_3k_2^{(3)}e^{r_3t}, \\ z &= C_1k_3^{(1)}e^{r_1t} + C_2k_3^{(2)}e^{r_2t} + C_3k_3^{(3)}e^{r_3t}. \end{aligned}$$

Примеры. 1) Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = -4x - y - 4z, \\ \dot{z} = -y. \end{cases}$$

Система уравнений (***) имеет вид

$$\begin{aligned} -rk_1 \qquad\qquad\qquad + k_3 &= 0, \\ -4k_1 - (1+r)k_2 - 4k_3 &= 0, \\ -k_2 - rk_3 &= 0. \end{aligned}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & 1 \\ -4 & -(1+r) & -4 \\ 0 & -1 & -r \end{vmatrix} = -r^3 - r^2 + 4r + 4 = (4 - r^2)(r+1) = 0.$$

Его корни: $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = 2$. Здесь при отыскании k_1, k_2, k_3 удобнее взять первое и третье уравнения системы.

Для $r_1 = -1$

$$k_1^{(1)} + k_3^{(1)} = 0, \qquad -k_2^{(1)} + k_3^{(1)} = 0.$$

Решением будут, например, числа $k_1^{(1)} = 1$, $k_2^{(1)} = -1$, $k_3^{(1)} = -1$.

Следовательно, первое решение таково:

$$x_1 = e^{-t}, \quad y_1 = -e^{-t}, \quad z_1 = -e^{-t}.$$

Для $r_2=-2$

$$2k_1^{(2)}+k_3^{(2)}=0, \qquad -k_2^{(2)}+2k_3^{(2)}=0.$$

Здесь можно положить $k_1^{(2)}=1$, $k_2^{(2)}=-4$, $k_3^{(2)}=-2$; тогда $x_2=e^{-2t}$, $y_2=-4e^{-2t}$, $z_2=-2e^{-2t}$.

Наконец, для $r_3=2$

$$-2k_1^{(3)}+k_3^{(3)}=0, \quad -k_2^{(3)}-2k_3^{(3)}=0.$$

Выбирая $k_1^{(3)}=1$, $k_2^{(3)}=-4$, $k_3^{(3)}=2$, получим

$$x_3=e^{2t}, \qquad y_3=-4e^{2t}, \qquad z_3=2e^{2t}.$$

Окончательно общее решение системы таково:

$$\begin{aligned} x &= C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+C_3e^{2t}, \\ y &= -C_1e^{-t}-4C_2e^{-2t}-4C_3e^{2t}, \\ z &= -C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}+2C_3e^{2t}. \end{aligned}$$

Предоставляем читателю проверить, что найденная система частных решений является фундаментальной.

Если среди простых корней характеристического уравнения есть комплексные, то и решение получится в виде комплексных функций действительного переменного. Чтобы перейти к решению в действительной форме, следует воспользоваться предложением, совершенно аналогичным доказанному на стр. 590. *Если комплексные функции x_1+ix_2, y_1+iy_2, z_1+iz_2 являются решением системы* (*) *с действительными коэффициентами, то их действительные* (x_1, y_1, z_1) *и мнимые* (x_2, y_2, z_2) *части, взятые в отдельности, сами являются решениями.* При этом комплексно сопряженным корням характеристического уравнения соответствуют одни и те же действительные решения.

Для большей краткости проиллюстрируем этот случай на примере системы двух уравнений.

2)
$$\begin{cases} \dot{x}=-7x+y, \\ \dot{y}=-2x-5y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -7-r & 1 \\ -2 & -5-r \end{vmatrix} = r^2+12r+37=0,$$

откуда $r_{1,2}=-6\pm i$. Система уравнений для отыскания k_1 и k_2 сводится к одному уравнению с комплексными коэффициентами; для корня $r_1=-6+i$ это уравнение таково:

$$(-1-i)k_1+k_2=0.$$

(Советуем лишний раз убедиться, что второе уравнение является следствием первого.)

Можно принять, что $k_1 = 1$, $k_2 = 1 + i$; тогда решением данной системы дифференциальных уравнений будут комплексные функции

$$x = e^{(-6+i)\,t} = e^{-6t}\cos t + ie^{-6t}\sin t,$$
$$y = (1+i)\,e^{(-6+i)t} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) + ie^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

Беря отдельно действительные и мнимые части, получим два решения в действительной форме:

$$x_1 = e^{-6t}\cos t, \quad y_1 = e^{-6t}(\cos t - \sin t);$$
$$x_2 = e^{-6t}\sin t, \quad y_2 = e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

Как уже отмечено, комплексно сопряженный корень $r = -6 - i$ приведет к этим же самым решениям.

Легко проверить, что найденные решения образуют фундаментальную систему и, следовательно, общим решением системы будет

$$x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t),$$
$$y = e^{-6t}[C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)].$$

Подбор частного решения для системы неоднородных уравнений можно производить, сведя эту систему к одному уравнению высшего порядка и пользуясь приемами, указанными в п. **174**; останавливаться на этом детальнее мы не будем.

Рассмотрим в заключение одну задачу из электротехники, которая приведет нас к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть даны две цепи; их сопротивление, самоиндукцию и емкость обозначим соответственно через R_1, L_1, C_1 для первой цепи и через R_2, L_2, C_2 — для второй. Предположим, далее, что цепи находятся в электромагнитной связи: каждая индуцирует электродвижущую силу другой. Если обозначить через M постоянный коэффициент взаимной индукции, то оказывается, что индуцированное напряжение первой цепи будет равно $M\frac{di_2}{dt}$, второй — $M\frac{di_1}{dt}$, где $i_1 = i_1(t)$, $i_2 = i_2(t)$ обозначают силу тока соответственно в первой и во второй цепях.

Предположим, что в обеих цепях отсутствует внешняя электродвижущая сила. При этом течение тока в цепях будет регулироваться следующими дифференциальными уравнениями (см. п. **175**, IV):

$$L_1 i_1' + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + M i_2' = 0,$$
$$L_2 i_2' + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt + M i_1' = 0$$

или, после дифференцирования по t,

$$L_1 i_1'' + R_1 i_1' + \frac{1}{C_1} i_1 + M i_2'' = 0,$$

$$L_2 i_2'' + R_2 i_2' + \frac{1}{C_2} i_2 + M i_1'' = 0.$$

Мы получили систему двух дифференциальных уравнений второго порядка; ее можно решать и не приводя предварительно к нормальному виду. Полагая $i_1 = k_1 e^{rt}$, $i_2 = k_2 e^{rt}$, придем к системе однородных алгебраических уравнений относительно k_1 и k_2. Условием существования ненулевых решений будет равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} L_1 r^2 + R_1 r + \frac{1}{C_1} & M r^2 \\ M r^2 & L_2 r^2 + R_2 r + \frac{1}{C_2} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(L_1 L_2 - M^2) r^4 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) r^3 + \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} + R_1 R_2\right) r^2 + \\ + \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1}\right) r + \frac{1}{C_1 C_2} = 0.$$

На практике обычно оказывается, что это уравнение имеет две пары комплексно сопряженных корней, т. е. колебания тока в цепях будут складываться из двух гармонических колебаний. Подробный анализ всех встречающихся при этом случаев приводится в курсах электротехники. Отметим еще, что если не учитывать емкостей в цепях, то течение тока будет описываться системой уравнений первого порядка; при этом процесс не будет колебательным.

180*. Случай кратных корней характеристического уравнения. Если характеристическое уравнение имеет кратные корни, то решение системы значительно усложняется. В то время как для одного уравнения высшего порядка, зная кратности корней характеристического уравнения, мы всегда можем сразу написать фундаментальную систему (см. п. **174**) и, следовательно, общее решение, здесь дело обстоит иначе. Не вдаваясь в подробности, поясним на двух примерах суть дела.

1) Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = 3x + 3y - 2z. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & -1 \\ 1 & 2-r & -1 \\ 3 & 3 & -2-r \end{vmatrix} = -r(r^2 - 2r + 1) = 0$$

имеет корни $r_1=0$, $r_{2,3}=1$. Для простого корня $r_1=0$ можно положить $k_1^{(1)}=k_2^{(1)}=1$, $k_3^{(1)}=3$. Решение будет состоять из постоянных: $x_1=1$, $y_1=1$, $z_1=3$; понятно, их можно умножить на произвольную постоянную C_1.

Для кратного корня $r=1$ система уравнений для k_i

$$k_1+k_2-k_3=0,\quad k_1+k_2-k_3=0,\quad 3k_1+3k_2-3k_3=0$$

сводится не к двум уравнениям, как для простого корня, а к одному $k_1+k_2-k_3=0$. Здесь можно произвольно задать уже две величины, например, положить $k_1=C_2$ и $k_2=C_3$; тогда $k_3=C_2+C_3$, и мы получим решение, зависящее от двух произвольных постоянных:

$$x=C_2e^t,\ y=C_3e^t,\ z=(C_2+C_3)\,e^t.$$

Легко заметить, что оно является линейной комбинацией двух частных решений $x_2=e^t$, $y_2=0$, $z_2=e^t$ и $x_3=0$, $y_3=e^t$, $z_3=e^t$.

Фундаментальность полученной системы трех решений следует из того, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ e^t & 0 & e^t \\ 0 & e^t & e^t \end{vmatrix}=e^{2t}\neq 0.$$

Окончательно, общее решение системы таково:

$$x=C_1+C_2e^t,\qquad y=C_1+C_3e^t,\qquad z=3C_1+(C_2+C_3)\,e^t.$$

2) Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x}=x-y, \\ \dot{y}=4x-y+2z, \\ \dot{z}=\qquad 2y+z. \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 & 0 \\ 4 & -1-r & 2 \\ 0 & 2 & 1-r \end{vmatrix}=-(1-r)^2(1+r)=0$$

равны: $r_1=-1$, $r_{2,3}=1$. Простому корню соответствует решение $x_1=$ $=e^{-t}$, $y_1=2e^{-t}$, $z_1=-2e^{-t}$.

Составляя же систему уравнений относительно k_i для кратного корня

$$-k_2=0,\ 4k_1-2k_2+2k_3=0,\ 2k_2=0,$$

мы видим, что она снова сводится к двум уравнениям. В результате мы найдем только одно решение; например, $x_2=e^t$, $y_2=0$,

$z_2 = -2e^t$. Третьего решения такого же вида, не являющегося линейной комбинацией двух найденных, не существует. Оказывается, что в этом случае можно найти решение вида

$$x = (\alpha_1 + \beta_1 t)\, e^t, \quad y = (\alpha_2 + \beta_2 t)\, e^t, \quad z = (\alpha_3 + \beta_3 t)\, e^t.$$

Постоянные α_i, β_i определяются методом неопределенных коэффициентов. Дифференцируя x, y, z, подставляя результаты в уравнения и сокращая на e^t, получим тождества:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \beta_1 t + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t,\\
&\alpha_2 + \beta_2 t + \beta_2 = 4(\alpha_1 + \beta_1 t) - \alpha_2 - \beta_2 t + 2(\alpha_3 + \beta_3 t),\\
&\alpha_3 + \beta_3 t + \beta_3 = \qquad\qquad 2(\alpha_2 + \beta_2 t) + \alpha_3 + \beta_3 t.
\end{aligned}$$

Осталось приравнять свободные члены (уравнения слева) и коэффициенты при t (уравнения справа) в каждом тождестве:

$$\begin{array}{llll}
1) & \beta_1 + \alpha_2 = 0, & 4) & \beta_2 = 0,\\
2) & -4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_2 - 2\alpha_3 = 0, & 5) & -4\beta_1 + 2\beta_2 - 2\beta_3 = 0,\\
3) & \beta_3 - 2\alpha_2 = 0, & 6) & -2\beta_2 = 0.
\end{array}$$

Шестое уравнение равносильно четвертому, а пятое является следствием первого, третьего и четвертого; всего остается четыре уравнения с шестью неизвестными. Полагая, например, $\alpha_1 = C_2$ и $\alpha_2 = C_3$, выразим через них остальные:

$$\beta_1 = -C_3, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 2C_3, \quad \alpha_3 = -2C_2 + C_3.$$

В итоге получим решение, зависящее от двух произвольных постоянных:

$$x = (C_2 - C_3 t)\, e^t, \; y = C_3 e^t, \; z = (-2C_2 + C_3 + 2C_3 t)\, e^t.$$

Решение, обозначенное выше индексом «2», получается при $C_2 = 1$ и $C_3 = 0$. Если положить $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, то получим третье решение $x_3 = -te^t$, $y_3 = e^t$, $z_3 = (1 + 2t)\, e^t$, образующее с первыми двумя фундаментальную систему.

Как мы видим, несмотря на то, что в обоих последних примерах был двукратный корень характеристического уравнения, решения, соответствующие этому корню, имеют разную структуру: в первом случае решение содержит только функцию e^t, а во втором и e^t, и te^t.

При большом числе уравнений и более высокой кратности корня алгебраические трудности резко возрастают, и без знания специальных вычислительных приемов линейной алгебры решение таких систем становится крайне затруднительным. Структура же общего решения определяется следующим правилом.

Если характеристическое уравнение системы n уравнений имеет корень r кратности m, то ему отвечает решение, зависящее от m

произвольных постоянных, вида

$$x_1 = P_1(t)\,e^{rt},\ x_2 = P_2(t)\,e^{rt},\ \ldots,\ x_n = P_n(t)\,e^{rt},$$

где все $P_i(t)$ — многочлены степени не выше $m-1$. При отыскании коэффициентов этих многочленов ровно m из них можно принять за произвольные постоянные; тогда остальные выразятся через них. Может оказаться, что часть многочленов $P_i(t)$ или даже все будут иметь степень, меньшую чем $m-1$. (В примере 1 при $m=2$ все многочлены оказались нулевой степени, т. е. постоянными.)

В случае комплексных корней решения отыскиваются в виде комплексных функций, а затем отделяются действительные и мнимые части; они будут состоять из функций вида $t^q e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $t^q e^{\alpha t}\sin\beta t$, где $\alpha+i\beta$ — корень характеристического уравнения кратности m и $q \leqslant m-1$.

181*. Матричная форма записи системы линейных дифференциальных уравнений. В этом пункте мы познакомим читателя, знающего основы матричного исчисления, с очень удобной формой записи системы линейных дифференциальных уравнений и ее решений. Эта форма записи в настоящее время широко применяется и в технической литературе.

Пусть дана нормальная система однородных линейных дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Коэффициенты системы a_{ij} могут быть функциями от t (непрерывными); в частном случае просто постоянными. Введем в рассмотрение матрицу коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и матрицу-столбец $\mathbf{X}(t)$, элементами которого являются неизвестные функции $x_i(t)$, а также производную $\dot{\mathbf{X}}(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Говорят также, что $\mathbf{X}(t)$ есть векторная функция скалярного аргумента t с координатами $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. В дальнейшем будем матрицу-столбец $\mathbf{X}(t)$ называть просто вектором и часто обозначать коротко через $\mathbf{X}$.

Произведение матрицы A на вектор $\mathbf{X}$ есть снова вектор

$$A\mathbf{X}=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}.$$

Элементы вектора справа есть как раз правые части системы уравнений (*); поэтому ее кратко можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{X}}=A\mathbf{X}. \qquad (**)$$

Частными решениями такого уравнения являются векторные функции (коротко — векторы) $\mathbf{X}_i(t)$ с координатами $x_{1i}(t)$, $x_{2i}(t)$, ..., ..., $x_{ni}(t)$. Разумеется, уравнению (**) удовлетворяет нулевое, или тривиальное, решение $\mathbf{X}_i\equiv 0$.

Основываясь на правилах действий с матрицами, легко проверить, что любая линейная комбинация частных решений

$$C_1\mathbf{X}_1(t)+C_2\mathbf{X}_2(t)+\ldots+C_m\mathbf{X}_m(t),$$

где все C_i — постоянные, тоже является решением.

Введем определение линейной независимости системы векторных функций. *Система векторных функций называется линейно независимой, если тождество*[1])

$$\lambda_1\mathbf{X}_1(t)+\lambda_2\mathbf{X}_2(t)+\ldots+\lambda_m\mathbf{X}_m(t)\equiv 0 \qquad (***)$$

при постоянных λ_i *возможно только при* $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$. В противном случае, т. е. когда это тождество возможно не при всех λ_i, равных нулю, система называется *линейно зависимой.*

Иначе говоря, система векторных функций линейно независима, если ни одну из функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных, и линейно зависима в противном случае. Отметим еще, что одно написанное векторное тождество (***)

---

[1]) В этом определении совсем не обязательно считать, что $\mathbf{X}_i(t)$ являются решениями уравнения (**); они могут быть любыми векторными функциями.

равносильно n координатным:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 x_{11}(t)+\lambda_2 x_{12}(t)+\ldots+\lambda_m x_{1m}(t)\equiv 0,\\
&\lambda_1 x_{21}(t)+\lambda_2 x_{22}(t)+\ldots+\lambda_m x_{2m}(t)\equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_1 x_{n1}(t)+\lambda_2 x_{n2}(t)+\ldots+\lambda_m x_{nm}(t)\equiv 0.
\end{aligned}$$

Конечно, имеется в виду, что функции $x_{ij}(t)$ определены и непрерывны в одном и том же интервале изменения t.

Пусть теперь векторные функции $\mathbf{X}_1(t)$, $\mathbf{X}_2(t)$, ..., $\mathbf{X}_n(t)$ являются решениями матричного дифференциального уравнения (**), или, что то же самое, системы (*). *Для того чтобы эти решения были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы определитель*

$$W=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

не был равен нулю ни при каком значении t из интервала, в котором коэффициенты системы $a_{ij}(t)$ непрерывны. В частности, если рассматривается система с постоянными коффициентами, то это должно иметь место при всех t. Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Любую линейно независимую систему n решений называют *фундаментальной системой*, а определитель W — *определителем Вронского*. Если фундаментальная система известна, то общее решение есть линейная комбинация функций, образующих эту систему:

$$\mathbf{X}(t)=C_1\mathbf{X}_1(t)+C_2\mathbf{X}_2(t)+\ldots+C_n\mathbf{X}_n(t).$$

Предоставляем читателю записать общее решение в координатной форме.

Частные решения системы (*) с постоянными коэффициентами, как указано в п. **179**, отыскиваются в виде $x_1=k_1e^{rt}$, $x_2=k_2e^{rt}$, ..., $x_n=k_ne^{rt}$. При этом векторные функции $\mathbf{X}(t)$ и $\dot{\mathbf{X}}(t)$ равны

$$\mathbf{X}(t)=\begin{pmatrix} k_1e^{rt}\\ k_2e^{rt}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ k_ne^{rt}\end{pmatrix}=e^{rt}\begin{pmatrix} k_1\\ k_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ k_n\end{pmatrix},\qquad \dot{\mathbf{X}}(t)=re^{rt}\begin{pmatrix} k_1\\ k_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ k_n\end{pmatrix}.$$

Обозначим вектор с координатами $k_1, k_2, \ldots, k_n$ через $\mathbf{K}$ и подставим выражения для $\mathbf{X}$ и $\dot{\mathbf{X}}$ в матричное дифференциальное уравнение (**):

$$Ae^{rt}\mathbf{K} = re^{rt}\mathbf{K}.$$

Сокращая на скалярный множитель e^{rt}, получаем матричное алгебраическое уравнение

$$A\mathbf{K} = r\mathbf{K}. \qquad (****)$$

Нам требуется найти такой ненулевой вектор $\mathbf{K}$ (если $\mathbf{K}$ — нулевой вектор, то получится нулевое решение), чтобы в результате умножения матрицы A на этот вектор получился вектор $r\mathbf{K}$, коллинеарный $\mathbf{K}$. В матричном исчислении числа r, при которых существует ненулевое решение уравнения (****), называются *собственными числами*, а сами векторы $\mathbf{K}$ — *собственными векторами* матрицы A.

Отметим, что если $\mathbf{K}$ — собственный вектор, соответствующий собственному числу r, то и любой вектор $\lambda\mathbf{K}$, ему коллинеарный, тоже будет собственным. Действительно, из уравнения (****) следует, что $A\lambda\mathbf{K} = \lambda A\mathbf{K} = \lambda r\mathbf{K} = r\lambda\mathbf{K}$.

С точки зрения решения системы дифференциальных уравнений это означает, что, умножая любое решение на числовой множитель, мы снова получаем решение.

Записав матричное уравнение в координатной форме и перенеся все члены в левую часть, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{array}{llll}
(a_{11}-r)k_1 + a_{12}k_2 & + \ldots + a_{1n}k_n & & = 0, \\
a_{21}k_1 + (a_{22}-r)k_2 & + \ldots + a_{2n}k_n & & = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \\
a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 & + \ldots + (a_{nn}-r)k_n & & = 0.
\end{array}$$

Чтобы эта система имела ненулевые решения, т. е. чтобы r было собственным числом, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}-r & \ldots & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-r
\end{vmatrix} = 0$$

Разворачивая определитель, получим уравнение n-й степени относительно r — *характеристическое уравнение*. Если все корни характеристического уравнения простые, то n различным собственным числам будут соответствовать n различных собственных векторов (определенных с точностью до числовых множителей), и мы получим ровно n линейно независимых решений уравнения (**). Трудности, возникающие в случае кратных корней характеристического уравнения, отмечены в п. **180**.

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется дифференциальным уравнением первого порядка?
2. Что называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка?
3. Дать определение частного решения. В чем состоит начальное условие для уравнения первого порядка?
4. Сформулировать теорему существования и единственности решения уравнения первого порядка.
5. Дать геометрическую иллюстрацию частного и общего решений дифференциального уравнения первого порядка.
6. Дать определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными и указать метод его интегрирования.
7. Какое уравнение первого порядка называется однородным? Как оно решается?
8. Какое уравнение первого порядка называется линейным? Изложить способ его решения.
9. Какое уравнение первого порядка называется уравнением в полных дифференциалах? Описать способы его решения.
10. В чем состоит графический метод Эйлера построения интегральной кривой уравнения первого порядка?
11. Описать метод Эйлера приближенного численного интегрирования уравнения первого порядка.
12*. Какие точки являются особыми для дифференциального уравнения первого порядка? Указать возможные типы особых точек и привести примеры.
13. Что называется дифференциальным уравнением второго порядка?
14. Каков геометрический смысл начальных условий дифференциального уравнения второго порядка?
15. Сформулировать теорему существования и единственности решения для уравнений второго порядка.
16. Изложить способы приведения уравнений второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ к уравнению первого порядка в случаях, когда правая часть не содержит: 1) y и y'; 2) y; 3) x.
17. Дать определение дифференциального уравнения n-го порядка и его общего решения. Указать, как задаются начальные условия для уравнения n-го порядка.
18. Что называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка?
19. Какой вид имеет общее решение линейного уравнения без правой части?
20. Доказать для линейных уравнений второго порядка основное свойство общего решения.
21. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного уравнения с правой частью.
22. Описать способ решения линейного уравнения второго порядка без правой части с постоянными коэффициентами. Какое уравнение называется характеристическим? Как оно составляется?

23. Какой вид имеет общее решение линейного уравнения второго порядка без правой части с постоянными коэффициентами при действительных и различных корнях характеристического уравнения? при равных корнях?

24. Доказать, что если комплексная функция является решением линейного уравнения с действительными коэффициентами, то ее действительная и мнимая части также являются решениями.

25. Указать вид решения в случае комплексных корней характеристического уравнения.

26. Разъяснить правило отыскания частного решения уравнения с правой частью вида

$$f(x) = e^{mx}\left[P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx\right],$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены. Привести примеры.

27. Как можно находить решение уравнения с правой частью, если правая часть его представлена в виде суммы нескольких функций?

28. В чем заключается метод вариации произвольных постоянных?

29. Какая система функций называется линейно независимой? Какая — линейно зависимой?

30. Сформулировать условие линейной независимости системы частных решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

31. Доказать теорему о структуре общего решения линейного уравнения n-го порядка без правой части и с правой частью.

32. Как может быть составлено общее решение линейного уравнения без правой части с постоянными коэффициентами порядка n в зависимости от корней характеристического уравнения?

33. Что называется системой дифференциальных уравнений? Что называется решением такой системы?

34. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?

35. Описать приемы сведения произвольной системы дифференциальных уравнений к нормальной.

36. Описать приемы сведения нормальной системы к одному уравнению высшего порядка.

37. Какой вид имеет общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений? Сформулировать теорему существования решения такой системы.

38*. Описать геометрическую иллюстрацию решения системы дифференциальных уравнений как траекторий на фазовой плоскости.

39*. Описать свойства решений автономной системы дифференциальных уравнений.

40. Сформулировать свойства решений линейной системы дифференциальных уравнений.

41. Описать метод решения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью характеристического уравнения. Рассмотреть случай простых корней (действительных или комплексных).

42*. Указать вид решения в случае кратных корней характеристического уравнения.

43*. Описать матричную форму записи системы линейных дифференциальных уравнений. Сформулировать определение линейно независимой системы векторных функций и указать структуру общего решения системы.

44*. Установить связь между решением однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и задачей отыскания собственных чисел и векторов матрицы коэффициентов системы.

ГЛАВА XI

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды[1])

182. Определение ряда и его суммы. Пусть дана бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Определение. **Выражение**

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

называется *рядом*, а $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — *членами ряда.*

Коротко ряд записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Выражение для n-го члена ряда при произвольном n называется *общим членом ряда.*

Ряд считается заданным, если известно правило, по которому для любого номера n можно записать соответствующий член ряда.

Чаще всего общий член ряда задается формулой $u_n = f(n)$, пользуясь которой можно сразу написать любой член ряда. Например, если $u_n = \frac{1}{2^n}$, то ряд имеет вид

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Если $u_n = \frac{1}{n!}$, то ряд таков:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Иногда ряд задается при помощи рекуррентного соотношения, связывающего последующий член ряда с предыдущими.

---

[1]) Перед чтением этого параграфа рекомендуем вспомнить содержание пп. **26**, II и **31**.

При этом задаются несколько первых членов ряда и формула, по которой находятся следующие члены ряда. Например, пусть $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, а рекуррентная формула такова: $u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{3} u_{n-2}$. Последовательно находим

$$u_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{12}, \quad u_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{24} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получаем ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + \frac{11}{24} + \ldots$$

Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Сумму n первых его членов обозначим через s_n:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

и назовем n-й частичной суммой ряда.

Образуем теперь последовательность частичных сумм ряда:

$$\begin{aligned} &s_1 = u_1, \\ &s_2 = u_1 + u_2, \\ &\ldots\ldots \\ &s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

С неограниченным увеличением числа n в сумме s_n учитывается все большее и большее число членов ряда. Поэтому естественно дать следующее определение.

Определение. **Если при $n \to \infty$ существует предел последовательности частичных сумм членов данного ряда**

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

то ряд называется *сходящимся*, а число s — его *суммой*.

Записывают это так:

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Если последовательность s_n не стремится к пределу, то ряд называется *расходящимся*.

Отметим, что ряд может расходиться в двух случаях: 1) если последовательность s_n будет стремиться к бесконечности и 2) если последовательность s_n колеблющаяся (см. п. **31**). В обоих случаях мы скажем, что ряд суммы не имеет.

В качестве простого примера рассмотрим сумму членов бесконечной геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (*)$$

Сумма n первых членов прогрессии равна

$$s_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1-q}.$$

Следовательно, при $|q| < 1$ *бесконечная геометрическая прогрессия образует сходящийся ряд, сумма которого* равна

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Если же $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, а поэтому и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, т. е. ряд расходится.

Пусть теперь $q = 1$. Ряд

$$a + a + \ldots + a + \ldots \qquad (a \neq 0)$$

имеет частичную сумму $s_n = na$, которая стремится к бесконечности вместе с n: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Если же $q = -1$, то получается ряд

$$a - a + a - a + \ldots$$

Его частичные суммы принимают следующие значения: $s_1 = a$, $s_2 = 0$, $s_3 = a$, $s_4 = 0$ и т. д., т. е. s_n—колеблющаяся последовательность, не стремящаяся ни к какому пределу. Согласно определению этот ряд расходится.

Таким образом, **бесконечная геометрическая прогрессия представляет ряд, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.**

В рассмотренном примере мы устанавливали сходимость или расходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и известной формулой для n-й частичной суммы.

Однако в большинстве случаев этим путем идти нельзя, так как очень трудно найти компактную формулу для s_n, а значит, и предел s_n. В дальнейшем мы будем выяснять сходимость ряда, не находя фактически его суммы, а пользуясь признаками сходимости, к установлению которых мы вскоре и перейдем. Поясним предварительно, для чего важно знать, сходится ли ряд, даже если мы не умеем находить его сумму.

Рассмотрим сходящийся ряд

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Разность между суммой ряда и его n-й частичной суммой называется n-м *остатком ряда*. Остаток ряда есть в свою очередь сумма бесконечного ряда[1]); обозначим ее через r_n. Имеем

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

Исходный ряд по предположению сходится, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$. Следовательно, абсолютная величина остатка

$$|r_n| = |s - s_n|$$

будет как угодно мала, если только число n взято достаточно большим. Таким образом, мы всегда имеем возможность приближенно подсчитать сумму сходящегося ряда, взяв достаточно большое число первых его членов. Однако большую трудность представляет выяснение величины возникающей ошибки. В дальнейшем на частных примерах мы покажем, как иногда можно оценивать величину ошибки и тем самым устанавливать, сколько нужно брать членов ряда для получения его суммы с требуемой точностью. Напомним еще раз, что расходящиеся ряды суммы не имеют.

Приведем теперь простейшие свойства сходящихся рядов.

1. Если ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится и имеет сумму s, то ряд, образованный из произведений всех членов данного ряда на одно и то же число λ:

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n + \ldots,$$

тоже сходится и имеет сумму λs.

Для доказательства обозначим n-ю частичную сумму первого ряда через s_n, а второго через σ_n. Имеем

$$\sigma_n = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n = \lambda s_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} (\lambda s_n) = \lambda \lim_{n \to \infty} s_n = \lambda s.$$

Свойство доказано.

2. Если сходятся ряды

$$s' = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$s'' = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

[1]) Сходимость его будет доказана чуть позднее (см. свойство 3).

то ряд, образованный сложением соответствующих членов данных рядов:

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots,$$

тоже сходится и его сумма равна $s'+s''$.

Доказательство этого свойства также очень просто и опирается на теорему о пределе суммы. Пусть s'_n и s''_n — соответственно n-е частичные суммы данных рядов, а σ_n — частичная сумма полученного ряда. Тогда

$$\sigma_n=(u_1+v_1)+\ldots+(u_n+v_n)=s'_n+s''_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(s'_n+s''_n)=\lim_{n\to\infty}s'_n+\lim_{n\to\infty}s''_n=s'+s'',$$

что и требовалось доказать.

Умножив члены второго ряда на -1 (при этом по свойству 1 его сумма станет равной $-s''$) и сложив с членами первого, получим, что

$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\ldots+(u_n-v_n)+\ldots=s'-s''.$$

3. **Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем приписывания или отбрасывания любого конечного числа членов.**

Пусть дан сходящийся ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

и мы выбросили из него конечное число членов, например члены u_2, u_8, u_{10} и u_{15}. Чтобы не менять нумерацию оставшихся членов, будем считать, что на место выброшенных членов поставлены нули. Тогда при $n>15$ частичные суммы обоих рядов будут отличаться друг от друга на постоянное слагаемое $u_2+u_8+u_{10}+u_{15}$. И если существует предел одной из частичных сумм, то существует предел второй, причем они отличаются друг от друга на то же постоянное слагаемое[1]).

Совершенно аналогичны рассуждения в случае приписывания к ряду новых членов.

В качестве следствия из этого свойства получаем, что *если сходится ряд, то сходится и любой его остаток, и наоборот.*

183. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд. Как мы уже говорили, первый важнейший вопрос, относящийся к данному ряду, заключается в выяснении его сходимости или рас-

[1]) Если сумма выброшенных членов окажется равной нулю, то суммы обоих рядов будут совпадать.

ходимости. Нашей ближайшей целью будет изложение признаков, при помощи которых по общему члену ряда можно судить о сходимости или расходимости ряда.

Необходимый признак сходимости ряда. **Если ряд сходится, то общий член стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера.**

Доказательство. Имеем

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = s_{n-1} + u_n;$$

если ряд сходится, то

$$\lim_{n \to \infty} s_{n-1} = s \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Поскольку

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1},$$

то

$$\lim_{n \to \infty} u_n = s - s = 0.$$

Из доказанного необходимого признака сходимости вытекает достаточный признак расходимости ряда.

Если u_n не стремится к нулю, то ряд не может быть сходящимся, т. е. он расходящийся.

Возьмем, например, ряд

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \ldots + \frac{n}{100n+1} + \ldots$$

Этот ряд расходится, ибо его общий член $u_n = \frac{n}{100n+1}$ при $n \to \infty$ стремится к $\frac{1}{100}$ и, значит, не стремится к нулю.

Следует твердо помнить, что стремление n-го члена ряда к нулю не является достаточным для сходимости ряда.

Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

который называется *гармоническим.*

Здесь $u_n = \frac{1}{n} \to 0$, тем не менее ряд расходится. В самом деле, сейчас мы докажем, что $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Для доказательства заменим некоторые члены ряда меньшими числами и убедимся, что даже сумма меньших слагаемых будет стремиться к бесконечности. Выпишем несколько первых членов гармонического ряда, разбив их на группы следующим образом:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

В каждой из круглых скобок заменим все слагаемые последним, которое оставим без изменения. Получим (под каждой скобкой подписано число слагаемых в ней)

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\right)}_{4}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{8}+\ldots$$

Совершенно очевидно, что от такой замены сумма членов в каждой скобке уменьшилась и стала равной $\frac{1}{2}$. Поскольку таких скобок можно брать сколько угодно, сумма их будет стремиться к бесконечности.

Итак, мы доказали, что сумма меньших слагаемых будет стремиться к бесконечности, а следовательно, сумма бо́льших слагаемых, представляющих собой гармонический ряд, и подавно.

Еще проще доказать расходимость ряда $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$, у которого n-й член также стремится к нулю. Здесь $s_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$. Следовательно, при $n\to\infty$ и $s_n\to\infty$.

184. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости.

I. Признаки сравнения. Рассмотрим специально ряды, все члены которых положительны:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u_n>0).$$

Иногда в целях упрощения нумерации членов удобнее считать, что $u_n\geqslant 0$, т. е. что среди членов ряда есть равные нулю.

Исследование сходимости таких рядов значительно облегчается следующим простым предложением:

Лемма. **Если частичные суммы ряда с положительными членами ограничены сверху:**

$$s_n<M,$$

то ряд сходится[1]**.**

Доказательство. Так как все члены ряда положительны, то частичные суммы его по мере возрастания числа членов тоже возрастают:

$$s_1<s_2<\ldots<s_n<\ldots$$

---

[1]) Для рядов с произвольными членами из приведенного условия вовсе не следует сходимость ряда. Мы это видели на примере ряда $a-a+a-$ $-a+\ldots$, у которого все частичные суммы не превосходят числа a и который тем не менее расходится.

Но если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то по признаку сходимости Вейерштрасса (см. п. **31**) она имеет предел, также не превосходящий числа M. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \leqslant M.$$

И обратно,

Если ряд с положительными членами сходится, то его частичные суммы меньше суммы ряда: $s_n < s$.

Из доказанной леммы немедленно следуют признаки сравнения для рядов с положительными членами.

Признаки сравнения. **Пусть даны два ряда с положительными членами:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots \quad (u_k > 0) \tag{1}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_k + \ldots \quad (v_k > 0), \tag{2}$$

и пусть каждый член ряда (1) не больше соответствующего члена ряда (2), т. е.

$$u_k \leq v_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{*}$$

Тогда:

1) Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1).

2) Если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Доказательство. Докажем сначала первую часть. Положим

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

По условию ряд (2) сходится, поэтому $\sigma_n < \sigma$, где σ — сумма второго ряда. А из условия (*) следует, что

$$s_n \leqslant \sigma_n < \sigma,$$

т. е. что частичные суммы ряда (1) ограничены сверху. Но тогда в силу только что доказанной леммы ряд (1) сходится.

Для доказательства второй части достаточно заметить, что, поскольку ряд (1) расходится, его частичные суммы неограниченно возрастают:

$$s_n \longrightarrow \infty.$$

Так как $\sigma_n \geqslant s_n$, то и $\sigma_n \longrightarrow \infty$. Следовательно, ряд (2) расходится, что и требовалось доказать.

Признаки сравнения применимы и в том случае, когда условию (*) удовлетворяют члены рядов не при всех n, а лишь начиная с некоторого $n=N$. Это следует из третьего свойства сходящихся рядов (см. п. **182**).

Докажем, например, что ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

будет расходящимся. Для этого достаточно сравнить данный ряд с гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$ при $n>1$ и гармонический ряд расходится, то и данный ряд расходится. (На стр. 642 мы доказали расходимость данного ряда иным способом.)

Так же легко установить сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots,$$

члены которого меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

На практике признак сравнения наиболее удобно применять в следующем виде: *если предел отношения* u_n *к* v_n *существует и не равен нулю*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A>0,$$

то ряды (1) *и* (2) *или оба сходятся, или оба расходятся.*

Докажем это. Из определения предела следует, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число N, что при всех $n>N$ будет справедливо неравенство $\left|\frac{u_n}{v_n}-A\right|<\varepsilon$, или в развернутом виде

$$A-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<A+\varepsilon,$$

где ε считаем настолько малым, что $A-\varepsilon>0$.

Предположим сначала, что ряд (2) сходится; тогда по свойству 1 п. **182** сходится ряд с общим членом $(A+\varepsilon)v_n$ и по признаку сравнения сходится ряд (1), так как $u_n<(A+\varepsilon)v_n$ при всех $n>N$.

Наоборот, если ряд (2) расходится, то из неравенства $u_n>$ $>(A-\varepsilon)v_n$ будет следовать, что расходится и ряд (1). Например, ряд с общим членом $u_n=\frac{2n}{3n^2-1}$ расходится, так как предел отношения u_n к $\frac{1}{n}$ равен $\frac{2}{3}$.

Трудность применения признаков сравнения заключается в том, что для данного ряда надо подбирать еще другой ряд, с которым можно было бы его сравнивать. Очень часто в качестве «эталона» расходящегося ряда принимают гармонический ряд, а в качестве «эталона» сходящегося ряда или бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, или ряд из обратных квадратов

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Доказать сходимость этого ряда можно следующим образом: объединим его члены в группы, содержащие последовательно 1, 2, 4, 8, ... членов ряда, и заменим в каждой группе (начиная со второй) все слагаемые наибольшим из них, т. е. первым членом группы. Тогда очевидны неравенства:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<4\cdot\frac{1}{4^2}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2},$$

$$\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{15^2}<8\cdot\frac{1}{8^2}=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3} \quad \text{и т. д.}$$

Применяя теперь признак сравнения (с геометрической прогрессией), заключаем, что ряд из обратных квадратов сходится. С помощью этого ряда легко установить сходимость, например, ряда с общим членом $u_n=\frac{n}{n^3+1}$; предел отношения u_n к $1/n^2$ равен 1.

Перейдем теперь к признаку, который позволит в очень большом числе случаев устанавливать сходимость ряда, исходя только из выражения для его членов.

II. Признак Даламбера[1]. **Пусть дан ряд с положительными членами**

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (u_n>0). \qquad (*)$$

Если при $n\to\infty$ существует предел отношения последующего члена к предыдущему $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, равный ρ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

то при $\rho<1$ ряд сходится, при $\rho>1$ ряд расходится[2].

При $\rho=1$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

---

[1]) Ж. Даламбер (1717—1783) — крупнейший французский математик, механик и философ. Член Петербургской академии наук.

[2]) Ряд также будет расходиться, если $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\infty$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Пусть $\rho < 1$. В силу определения предела всегда можно выбрать такое число N, что при всех $n \geqslant N$ будет справедливо неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = \rho_1,$$

где $\varepsilon > 0$ берется настолько малым, чтобы $\rho_1 = \rho + \varepsilon$ еще оставалось меньшим 1. Тогда

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < \rho_1, \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < \rho_1, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < \rho_1, \quad \text{и т. д.}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} &u_{N+1} < \rho_1 u_N, \\ &u_{N+2} < \rho_1 u_{N+1} < \rho_1^2 u_N, \\ &u_{N+3} < \rho_1 u_{N+2} < \rho_1^3 u_N, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что члены ряда

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots,$$

представляющего N-й остаток данного ряда, меньше соответствующих членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\rho_1 u_N + \rho_1^2 u_N + \rho_1^3 u_N + \ldots$$

(знаменатель ее ρ_1 меньше 1). Следовательно, N-й остаток ряда сходится, но тогда сходится и сам данный ряд.

Пусть $\rho > 1$. Тогда можно выбрать такое N, что при $n \geqslant N$ будет справедливо неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon = \rho_1,$$

где ε берется настолько малым, чтобы $\rho_1 = \rho - \varepsilon$ еще оставалось большим 1. Но тогда каждый последующий член ряда будет больше предыдущего и, поскольку все они положительны, не может выполняться необходимый признак сходимости ряда, согласно которому общий член должен стремиться к нулю. Значит, ряд расходится.

В том случае, когда предел $\rho = 1$, признак Даламбера неприменим: могут быть ряды как сходящиеся, так и расходящиеся.

Примеры. 1) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Здесь $u_n = \frac{n}{2^n}$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. Поэтому $\rho = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$. Следовательно, данный ряд сходится.

2) Возьмем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Для него $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \to 1$ при $n \to \infty$ независимо от величины показателя p. При $p=1$ получается гармонический ряд, который, как мы уже доказали, расходится. При $p=2$ получается ряд обратных квадратов, который сходится. Значит, когда $\rho=1$, мы никакого заключения о ряде сделать не можем. В этом случае приходится исследовать ряд с помощью других признаков.

185. Интегральный признак Коши. Читатель, наверное, уже давно обратил внимание на полную аналогию определений сходимости ряда и сходимости несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом (см. п. **97**). Точно так же много общего и в признаках сходимости рядов с положительными членами и интегралов с положительной подынтегральной функцией. Сейчас мы приведем признак, позволяющий в некоторых случаях сводить вопрос о сходимости ряда к вопросу о сходимости соответствующего несобственного интеграла; может оказаться, что этот последний вопрос будет более простым.

Интегральный признак Коши. **Пусть дан ряд**

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (u_n > 0),$$

члены которого являются значениями непрерывной функции $f(x)$ при целых значениях аргумента x:

$$u_1 = f(1), \; u_2 = f(2), \; \ldots, \; u_n = f(n), \; \ldots,$$

и пусть $f(x)$ монотонно убывает в интервале $(1, \infty)$. Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

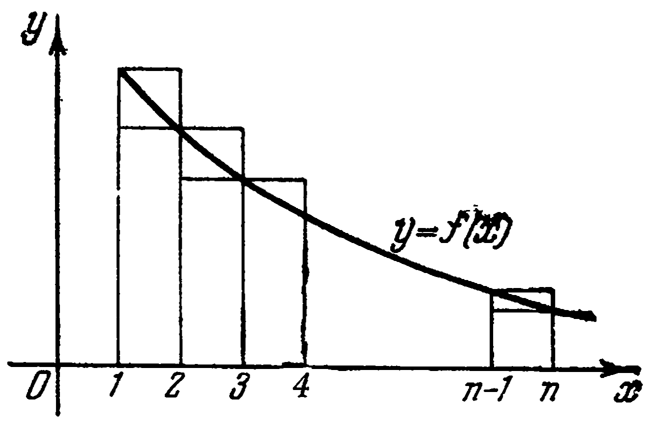

Рис. 227.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линией $y=f(x)$, с основанием от $x=1$ до $x=n$, где n — произвольное целое положительное число (рис. 227). Площадь ее измеряется интегралом

$$I_n = \int\limits_1^n f(x)\,dx.$$

Отметим целые точки основания $x=1$, $x=2$, ..., $x=n-1$, $x=n$. Рассмотрим две ступенчатые фигуры: одна из них (входящая) имеет площадь, равную $f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=s_n-u_1$, а вторая (выходящая) — площадь, равную $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)=s_n-u_n$, где $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$. Площадь первой фигуры меньше площади данной криволинейной трапеции, площадь второй больше ее, т. е. мы имеем

$$s_n-u_1<I_n<s_n-u_n.$$

Отсюда получаем два неравенства:

$$s_n<I_n+u_1, \qquad (*)$$

$$s_n>I_n+u_n. \qquad (**)$$

Так как функция $f(x)$ положительна, то интеграл I_n возрастает вместе с n; возможны два случая:

1) Несобственный интеграл сходится, т. е. $I=\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ существует; тогда $I_n<I$ и из неравенства $(*)$ при всяком n находим

$$s_n<u_1+I.$$

Следовательно, частичные суммы s_n ограничены, и на основании леммы ряд сходится.

2) Интеграл расходится; тогда $I_n\to\infty$ при $n\to\infty$ и на основании неравенства $(**)$ заключаем, что s_n также неограниченно возрастает, т. е. ряд расходится.

Покажем на примере ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,$$

что интегральный признак иногда может с легкостью дать ответ тогда, когда признак Даламбера неприменим. Для этого ряда, как мы установили, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to 1$; применим к нему интегральный признак. Очевидно, функцией $f(x)$ является $\frac{1}{x^p}$. Интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^{\infty}=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to\infty}(x^{-p+1}-1)$$

сходится, если $p>1$, так как в этом случае $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-p+1}=0$ и $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$; если же $p<1$, то интеграл расходится, так как теперь $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-p+1}=\infty$. При $p=1$ интеграл тоже расходится

$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$. Поэтому рассматриваемый ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

При $p = 1$ получается гармонический ряд, и мы получаем еще одно доказательство его расходимости. При $p = 2$ получается ряд обратных квадратов; его сходимость уже была доказана раньше.

186. Ряды с произвольными членами. Абсолютная сходимость.

I. Знакочередующиеся ряды. Перейдем к рядам с членами, имеющими любой знак. Прежде всего остановимся на так называемых *знакочередующихся рядах*. В таких рядах члены попеременно имеют то положительный, то отрицательный знак. Знакочередующийся ряд можно записать так:

$$\pm(u_1 - u_2 + u_3 - \ldots), \tag{*}$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots$ — положительные числа. Укажем простой достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.

Теорема Лейбница. **Если в знакочередующемся ряде абсолютные величины членов ряда убывают, т. е. в ряде (*) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$, и общий член u_n стремится к нулю, то ряд сходится, причем его сумма по абсолютной величине меньше u_1; остаток ряда r_n по абсолютной величине меньше абсолютной величины первого из отбрасываемых членов: $|r_n| < u_{n+1}$.**

Доказательство. Возьмем для определенности перед всем рядом (*) знак плюс

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots - u_{2m} + u_{2m+1} - \ldots$$

Рассмотрим сначала последовательность частичных сумм s_{2m} с четными индексами и запишем их в виде

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Так как по условию выражение в каждой скобке положительно и число таких скобок растет вместе с m, то последовательность s_{2m} будет возрастающей. Наоборот, последовательность частичных сумм с нечетными индексами будет убывающей, так как

$$s_{2m+1} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2m} - u_{2m+1})]$$

и сумма в квадратной скобке, на основании только что высказанных соображений, будет возрастать вместе с m.

Таким образом,

$$s_2 < s_4 < s_6 < \ldots \quad \text{и} \quad s_1 > s_3 > s_5 > \ldots$$

Легко заметить, что любая сумма с четным индексом меньше любой суммы с нечетным индексом

$$s_{2m} < s_{2k+1}.$$

Действительно, если $m < k$, то

$$s_{2m} < s_{2k} = s_{2k+1} - u_{2k+1} < s_{2k+1}.$$

Если же $m > k$ (или $m = k$), то

$$s_{2m} = s_{2m+1} - u_{2m+1} < s_{2m+1} < s_{2k+1}.$$

На рис. 228 показано геометрическое изображение последовательности частичных сумм. Последовательность сумм с четными

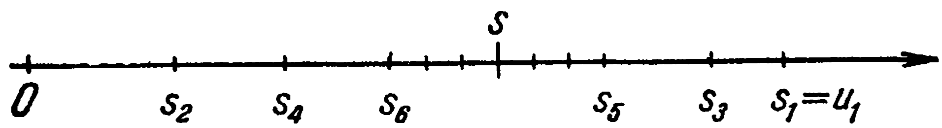

Рис. 228.

индексами возрастает и ограничена сверху; значит, она имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m} = s$.

Так как $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$ и $u_{2m+1} \to 0$ при $m \to \infty$, то

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} = s,$$

т. е. суммы с нечетными индексами, убывая, стремятся к тому же пределу s.

На рис. 228 ясно видно, что последовательность частичных сумм приближается к своему пределу колеблясь; ясно также, что сумма ряда s меньше любой суммы с нечетным индексом и, в частности, меньше u_1.

Если бы перед всем рядом (*) стоял знак минус, то рис. 228 надо было бы симметрично отобразить относительно начала координат; в этом случае было бы $|s| < u_1$.

Остаток ряда

$$r_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$$

представляет собой ряд, удовлетворяющий всем условиям признака Лейбница. Поэтому его сумма r_n по абсолютной величине меньше первого члена в скобке, т. е. $|r_n| < u_{n+1}$, что и требовалось доказать. Теорема полностью доказана.

Теорема Лейбница позволяет в случаях, когда она применима, установить не только сходимость ряда, но и оценить ошибку, допускаемую при отбрасывании всех членов ряда, начиная с некоторого.

Например, по теореме Лейбница сразу видно, что ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\pm\frac{1}{n}\mp\ldots$$

сходится; мы увидим позже, в п. **194**, что его сумма равна $\ln 2$. Согласно доказанному предельная абсолютная ошибка приближенного равенства $\ln 2\approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots\pm\frac{1}{n-1}$ равна $\frac{1}{n}$.

II. Абсолютная сходимость. Для рядов с произвольным распределением знаков их членов мы приведем только один важный признак сходимости.

Достаточный признак сходимости. **Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.**

Доказательство. Обозначим через s_n сумму n первых членов ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

через s_n^+ — сумму всех положительных членов, а через s_n^- — сумму абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов ряда. Тогда

$$s_n=s_n^+-s_n^- \quad \text{и} \quad \sigma_n=s_n^++s_n^-,$$

где

$$\sigma_n=|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|.$$

Так как по условию σ_n имеет предел (обозначим его через σ), а s_n^+ и s_n^- — положительные и возрастающие функции от n, причем $s_n^+\leqslant\sigma_n<\sigma$ и $s_n^-\leqslant\sigma_n<\sigma$, то и они имеют пределы. Вследствие этого и $s_n=s_n^+-s_n^-$ при $n\to\infty$ стремится к пределу, что и требовалось доказать.

Этот достаточный признак не является необходимым, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ может сходиться и тогда, когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится. Например, ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\pm\frac{1}{n}\mp\ldots,$$

как мы только что видели, сходится, а ряд (гармонический)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

составленный из абсолютных величин его членов, как известно, расходится.

Определение. **Ряд, абсолютные величины членов которого образуют сходящийся ряд, называется *абсолютно сходящимся*.**

Если ряд сходится, а ряд, образованный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный ряд называется *неабсолютно* или *условно сходящимся*.

Например, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\pm\frac{1}{n}\mp\ldots$ условно сходящийся.

Указанное разграничение абсолютной и неабсолютной сходимостей рядов является весьма существенным. Оказывается, что некоторые свойства конечных сумм переносятся только на абсолютно сходящиеся ряды; условно сходящиеся ряды этими свойствами не обладают.

На этих вопросах мы подробно останавливаться не будем. Заметим только, что абсолютно сходящиеся ряды обладают, как и обычные суммы конечного числа слагаемых, переместительным свойством (при любой перемене мест членов абсолютно сходящегося ряда он остается абсолютно сходящимся и с той же суммой). Это свойство отсутствует у неабсолютно сходящихся рядов; оказывается, переставляя члены такого ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится.

Возьмем, например, условно сходящийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots$$

и переставим его члены так, чтобы после каждого положительного члена стояли два отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$$

Сложим теперь каждый член с идущим после него отрицательным:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$$

В результате мы получили ряд, члены которого образованы произведениями членов исходного ряда на $\frac{1}{2}$. Но по свойству 1 п. 182 отсюда следует, что этот ряд тоже сходится и сумма его равна половине суммы исходного ряда. Таким образом, изменив только порядок следования членов ряда, мы уменьшили его сумму вдвое!

Абсолютно сходящиеся ряды обладают еще одним важным свойством: их можно перемножать.

Под произведением двух сходящихся рядов

$$s'=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{1}$$

$$s''=v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{2}$$

будем понимать ряд, образованный из всевозможных парных произведений членов данных рядов, расположенных в таком порядке:

$$(u_1v_1)+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\ldots$$
$$\ldots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_2+u_nv_1)+\ldots \quad (3)$$

В каждой группе членов этого ряда, объединенных скобками, сумма индексов сомножителей (т. е. номеров мест, на которых они находятся в своих рядах) постоянна: в 1-й скобке она равна 2, во 2-й равна 3, в 3-й равна 4, ..., в n-й равна $n+1$.

Имеет место теорема, которую мы приводим без доказательства:

Если ряды (1) и (2) абсолютно сходятся, то их произведение есть также абсолютно сходящийся ряд, сумма s которого равна произведению сумм рядов сомножителей:

$$s=s'\cdot s''.$$

§ 2. Функциональные ряды

187. Общие определения. Перейдем теперь к рассмотрению рядов, членами которых являются не числа, а функции:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \quad (*)$$

Такие ряды называются *функциональными*. Предполагается, что все функции $u_n(x)$ определены и непрерывны в одном и том же интервале, конечном или бесконечном.

Ряд (*) может для одних значений x сходиться, для других — расходиться. Значение $x=x_0$, при котором числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$$

сходится, называется *точкой сходимости ряда* (*). Совокупность всех точек сходимости ряда называется *областью сходимости ряда*: говорят, что *ряд сходится в этой области*. Областью сходимости ряда обычно бывает какой-нибудь интервал оси Ox.

Пример 1. Ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

сходится в интервале $(-1, 1)$, так как при любом значении x из этого интервала соответствующий числовой ряд представляет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. При $|x|\geqslant 1$ этот ряд расходится.

Определение области сходимости более сложных функциональных рядов представляет весьма трудную задачу.

Сумма ряда является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости ряда; обозначим ее через $S(x)$:

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

Так, в приведенном выше примере сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$; разумеется эта функция является суммой ряда только в интервале $(-1,\ 1)$ — области сходимости ряда.

Сумму n первых членов ряда (n-ю частичную сумму) будем обозначать через $s_n(x)$, а остаток ряда — через $r_n(x)$. Если ряд сходится при некотором значении x, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Хорошо известно, что сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная; далее, производная и интеграл от суммы конечного числа функций равны соответственно сумме производных и интегралов от этих функций. При изучении функциональных рядов сразу возникает вопрос: переносятся ли указанные свойства на суммы бесконечного числа функций, т. е. на функциональные ряды? Покажем на примере, что для произвольных функциональных рядов эти свойства могут оказаться несправедливыми.

2. Рассмотрим ряд

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots$$

При $x=0$ все члены ряда равны нулю и сумма его равна нулю. При $x \neq 0$ ряд представляет сходящуюся геометрическую прогрессию, так как ее знаменатель $q = \frac{1}{1+x^2} < 1$. Сумма ряда равна

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{x^2}{1+x^2} : \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) = 1.$$

Таким образом, сумма ряда $S(x)$ оказалась разрывной функцией; она имеет разрыв в точке $x=0$:

$$S(x) = 1, \text{ если } x \neq 0, \quad \text{и} \quad S(0) = 0.$$

Чтобы установить, в каких же случаях на функциональные ряды можно перенести свойства конечных сумм функций, введем новое определение.

Определение. **Функциональный ряд**

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (*)$$

называется *правильно сходящимся* в области D, принадлежащей области сходимости ряда, если в области D все члены его по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов некоторого сходящегося числового ряда с положительными членами.

Это значит, что во всех точках области D должно выполняться неравенство $|u_n(x)| \leqslant M_n$, где M_n — член сходящегося ряда $M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$; этот последний ряд называется *мажорирующим* (усиливающим) по отношению к ряду (*).

3. Ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$$

правильно сходится в любом интервале оси Ox, так как $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд обратных квадратов сходится.

В более подробных курсах вводят более сложное определение *равномерной* сходимости ряда; поясним вкратце его смысл.

Пусть в точке x_1 ряд сходится. Это значит, что $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x_1) = 0$; поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число N_1, что при всех $n > N_1$ будет справедливо неравенство $|r_n(x_1)| < \varepsilon$.

Возьмем в области сходимости другую точку x_2; в ней тоже ряд сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x_2) = 0$. Если взять то же самое число ε, то, конечно, неравенство $|r_n(x_2)| < \varepsilon$ будет выполняться, начиная с некоторого номера, т. е. при $n > N_2$, однако может оказаться, что число N_2 будет больше N_1. Именно поэтому мы обозначили числа N_1 и N_2 разными индексами. Если бы речь шла только о двух точках, то мы бы вышли из положения очень просто: взяли бы из двух чисел N_1 и N_2 наибольшее и обозначили его через N; тогда оба остатка были бы по абсолютной величине меньше ε при всех $n > N$. Так же мы могли бы поступить, если бы у нас было не две, а три, четыре или вообще любое конечное число точек. Но если область сходимости интервал, то в нем бесконечное число точек, и хотя каждой точке x соответствует свое число $N(\varepsilon, x)$ (его обозначают $N(\varepsilon, x)$, подчеркивая, что оно зависит и от ε и от x) такое, что при $n > N(\varepsilon, x)$ остаток $|r_n(x)| < \varepsilon$, но числа N общего для всех точек области сходимости может и не найтись. В связи со сказанным становится понятным следующее определение.

Определение. **Функциональный ряд (*) называется *равномерно сходящимся* в области D, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $N(\varepsilon)$, зависящее только от ε и не зависящее от x, что при всех $n > N(\varepsilon)$ неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$ справедливо для всех точек области D.**

Легко показать, что *если в области D функциональный ряд сходится правильно, то он сходится и равномерно*. Действительно, из определения правильной сходимости ряда следует, что для любого x из области D

$$|r_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \ldots| \leqslant |u_{n+1}(x)| + \ldots \leqslant M_{n+1} + \ldots = r_n,$$

где r_n — остаток сходящегося числового ряда $M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$ Величина r_n от x не зависит и будет меньше любого числа $\varepsilon > 0$, если $n > N$, где N зависит только от ε; но тогда при этих же значениях n и $|r_n(x)| < \varepsilon$, что и означает равномерную сходимость ряда.

В то же время можно привести примеры (мы этого делать не будем) таких равномерно сходящихся рядов, для которых нельзя подобрать мажорирующие числовые ряды, т. е. такие, которые не являются правильно сходящимися.

В дальнейшем мы для простоты будем говорить о правильно сходящихся рядах, однако все сформулированные теоремы останутся справедливыми и для рядов равномерно сходящихся.

188. Свойства правильно сходящихся функциональных рядов. В этом пункте мы сформулируем, не приводя доказательств, основные теоремы для правильно сходящихся рядов; они дадут ответы на вопросы, поставленные в п. **187**, о возможности переноса на такие ряды свойств сумм конечного числа функций. Во всех теоремах предполагается, что область правильной сходимости ряда есть некоторый интервал оси Ox.

Теорема 1. **Если ряд из непрерывных функций правильно сходится в области D, то его сумма есть функция непрерывная в этой области.**

Пример. Ряд $\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$ сходится правильно в любом интервале (см. пример 3 п. **187**); следовательно, его сумма $S(x)$ есть функция непрерывная.

Фактическое отыскание этой функции является задачей несравненно более трудной; нам ведь даже неизвестно, будет ли эта функция элементарной или нет. Разумеется, у нас всегда есть возможность приближенно подсчитать значения функции в различных точках, беря некоторое количество членов ряда, т. е. $S_n(x)$. Интересно при этом отметить, что предельная абсолютная ошибка, возникающая при такой замене, может считаться одинаковой для всех значений x, так как

$$|r_n(x)|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\ldots\right|\leqslant\frac{|\sin(n+1)x|}{(n+1)^2}+\ldots\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots=r_n,$$

где r_n — остаток числового ряда — зависит только от n и не зависит от x. Подобное же замечание относится, понятно, к любым правильно сходящимся рядам. (Читатель, познакомившийся с мелким шрифтом в п. **187**, может перенести это замечание на ряды равномерно сходящиеся.)

Итак, первая теорема утверждает, что сумма правильно сходящегося ряда из непрерывных функций есть функция непрерывная. Во второй теореме речь пойдет о перенесении на такие ряды простейшего свойства интеграла: интеграл от суммы функций равен сумме интегралов. Чтобы в дальнейшем не делать оговорок, условимся, что интервал интегрирования $[a, b]$ всегда считается принадлежащим области правильной сходимости ряда.

Теорема 2. **Если ряд из непрерывных функций правильно сходится, то интеграл от суммы ряда равен сумме ряда, составленного из интегралов от членов данного ряда:**

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\ldots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\ldots \qquad (*)$$

Коротко теорему формулируют так:

Правильно сходящийся ряд можно почленно интегрировать.

Сходимость числового ряда из интегралов доказывается очень просто. Из определения правильной сходимости данного ряда следует, что $|u_n(x)| \leqslant M_n$, где M_n — член сходящегося числового ряда; по теореме об оценке интеграла (см. п. **90**)

$$\left|\int_a^b u_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |u_n(x)|\,dx \leqslant M_n(b-a).$$

Так как по свойству 1 п. **182** ряд с общим членом $M_n(b-a)$ сходится, то, согласно п. **186**, II, сходится и ряд из интегралов (и даже абсолютно). Доказательство второй части теоремы — равенства левой и правой частей формулы (*) мы не приводим.

Теорема 2 применима и в том случае, когда берутся интегралы с переменным верхним пределом:

$$\int_a^x S(x)\,dx = \int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x u_n(x)\,dx + \ldots,$$

где $a \leqslant x \leqslant b$. Здесь справа стоит функциональный ряд; снова пользуясь теоремой об оценке интеграла ($\left|\int_a^x u_n(x)\,dx\right| \leqslant M_n(x-a) \leqslant$ $\leqslant M_n(b-a)$), устанавливаем, что он, как и данный ряд, сходится правильно.

Теорема о возможности почленного дифференцирования ряда более сложна, так как требует дополнительных предположений.

Теорема 3. **Если ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, составленный из функций, имеющих непрерывные производные, сходится в области D и его сумма равна $S(x)$, а ряд из производных $u'_n(x)$ сходится в этой области правильно, то производная суммы ряда $S'(x)$ равна сумме ряда из производных:**

$$S'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots$$

Говоря коротко: **Если ряд, составленный из производных сходящегося ряда, сходится правильно, то его можно почленно дифференцировать.**

Отметим, что правильная сходимость данного ряда, а также дифференцируемость его суммы не предполагаются, а являются следствиями условий теоремы. Однако проверка правильной сходимости ряда из производных совершенно обязательна; при невыполнении этого условия теорема может потерять смысл. Например, ряд $\sin x + \frac{\sin 2^3 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^3 x}{n^2} + \ldots$ правильно сходится (он мажорируется рядом обратных квадратов) и его сумма — непрерывная функция. Ряд же из производных $\cos x + 2\cos 2^3 x +$

$+\ldots+n\cos n^3x+\ldots$ расходится, так как его общий член ни при каком x не стремится к нулю. Следовательно, теорема неприменима, несмотря на то, что сумма ряда, может быть, и имеет производную.

В настоящем курсе будут рассмотрены только важнейшие классы функциональных рядов: *степенные ряды* и *тригонометрические ряды.*

§ 3. Степенные ряды

189. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости. Начнем с определения степенного ряда.

Определение. ***Степенным рядом* называется функциональный ряд**

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots,$$

члены которого суть произведения постоянных a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... на степенные функции с целыми показателями степеней от разности $x-x_0$.

Постоянные a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... называются *коэффициентами степенного ряда.*

В частности, если $x_0=0$, то мы будем иметь степенной ряд, расположенный по степеням x:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

В дальнейшем мы будем изучать именно такие степенные ряды, потому что всякий степенной ряд подстановкой $x-x_0=x'$ преобразуется к ряду указанного вида.

Для удобства n-м членом степенного ряда называют член a_nx^n несмотря на то, что он стоит на $(n+1)$-м месте. Свободный член ряда a_0 считают нулевым членом ряда.

Степенные ряды обладают многими важными свойствами, к рассмотрению которых мы и переходим.

Рассмотрим степенной ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{$*$}$$

и докажем очень важную теорему, на которой будет основано изучение таких рядов.

Теорема Абеля. **Если степенной ряд (*) сходится в точке $x_0\neq 0$, то он сходится и притом абсолютно в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$, т. е. при всяком x, удовлетворяющем условию $|x|<|x_0|$.**

Доказательство. Заметим, что вследствие сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nx_0^n$ его общий член стремится к нулю: $a_nx_0^n\to 0$; поэтому все члены этого ряда ограничены, т. е. существует такое постоянное положительное число M, что при всяком n имеет место неравенство $|a_n x_0^n| < M$. Запишем ряд (*) так:

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots$$

и составим ряд из абсолютных величин членов этого ряда:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

В силу установленного неравенства каждый член здесь меньше соответствующего члена геометрической прогрессии со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right|$:

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

Если $|x| < |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и прогрессия сходится; поэтому сходится и ряд абсолютных величин, а значит, абсолютно сходится сам ряд (*). Теорема доказана.

Несмотря на то, что $|a_n x^n| < |a_n x_0^n|$, мы не можем сразу воспользоваться признаком сравнения, поскольку в условии теоремы не сказано, что ряд в самой точке x_0 сходится абсолютно.

Следствие. *Если степенной ряд* (*) *расходится при* $x = x_0$, *то он расходится и при всяком* x, *большем по абсолютной величине, чем* x_0, *т. е. при* $|x| > |x_0|$.

В самом деле, если бы он сходился при каком-нибудь таком x, то в силу теоремы Абеля он абсолютно сходился бы и при всех меньших по абсолютной величине значениях x, в частности при $x = x_0$, а это противоречит условию.

Перейдем к установлению области сходимости степенного ряда (*). Здесь возможны три случая:

1) *Область сходимости состоит только из одной точки* $x = 0$, другими словами, ряд расходится для всех значений x, кроме одного.

Этот случай может быть иллюстрирован рядом

$$1 + x + 2^2 x^2 + \ldots + n^n x^n + \ldots;$$

действительно, если x фиксировано и $x \neq 0$, то, начиная с достаточно большого n, будет $|nx| > 1$, откуда вытекает неравенство $|n^n x^n| > 1$, означающее, что общий член ряда не стремится к нулю.

2) *Область сходимости состоит из всех точек оси* Ox, другими словами, ряд сходится при всех x.

Рассмотрим ряд

$$1+x+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^n}+\ldots$$

Для любого x, начиная с достаточно большого n, будет $\left|\frac{x}{n}\right|<1$. Так как

$$\left|\frac{x}{n+1}\right|^{n+1}<\left|\frac{x}{n}\right|^{n+1}, \quad \left|\frac{x}{n+2}\right|^{n+2}<\left|\frac{x}{n}\right|^{n+2} \text{ и т. д.},$$

то, начиная с номера n, члены ряда по абсолютной величине будут меньше членов сходящейся геометрической прогрессии. Следовательно, при любом x ряд сходится.

3) *Область сходимости состоит больше чем из одной точки оси Ox, причем есть точки оси, не принадлежащие области сходимости.* Например, ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

представляющий геометрическую прогрессию со знаменателем x, сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\geqslant 1$.

В третьем случае на числовой оси наряду с точками сходимости ряда имеются и точки его расходимости.

Из теоремы Абеля и ее следствия вытекает, что все точки сходимости расположены от начала координат не дальше, чем любая из точек расходимости. Совершенно ясно, что точки сходимости будут целиком заполнять некоторый интервал с центром в начале координат.

Таким образом, можно сказать, что *для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое положительное число R, что для всех x, по модулю меньших R ($|x|<R$), ряд абсолютно сходится, а для всех x, по модулю больших R ($|x|>R$), ряд расходится.*

Что касается значений $x=R$ и $x=-R$, то здесь могут осуществляться различные возможности: ряд может сходиться в обеих точках, или только в одной из них, или ни в одной. При этом ряд может сходиться как абсолютно, так и условно. Позже мы рассмотрим примеры, иллюстрирующие эти случаи.

Определение. ***Радиусом сходимости*** **степенного ряда (*) называется такое число R, что для всех x, $|x|<R$, степенной ряд сходится, а для всех x, $|x|>R$, расходится. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости*.**

Условимся для рядов, расходящихся при всех x, кроме $x=0$, считать $R=0$, а для рядов, сходящихся при всех x, считать $R=\infty$.

Для степенных рядов вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

все сказанное выше остается в силе с той только разницей, что теперь центр интервала сходимости будет лежать не в точке $x=0$, а в точке $x=x_0$. Следовательно, интервалом сходимости будет интервал $(x_0-R,\ x_0+R)$.

Укажем способ отыскания радиуса сходимости степенного ряда.

Прежде всего заметим, что для нахождения радиуса сходимости мы можем исследовать ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$|a_0|+|a_1||x|+\ldots+|a_n||x|^n+\ldots, \qquad (**)$$

так как интервалы сходимости ряда (*) и ряда (**) совпадают.

К ряду (**), члены которого положительны, применим признак Даламбера. Допустим, что мы сумели найти предел отношения последующего члена ряда к предыдущему. В отличие от числового ряда, этот предел будет содержать множителем или сам $|x|$, или некоторую его степень. Если, начиная с некоторого номера, члены ряда идут без пропусков, т. е. коэффициенты ряда не обращаются в нуль, то этот предел можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Если, например, ряд содержит только все четные степени x, т. е. имеет вид $a_0+a_2x^2+\ldots+a_{2n}x^{2n}+\ldots$, то этот предел равен $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{2n+2}||x|^{2n+2}}{|a_{2n}||x|^{2n}}=|x|^2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n}|}$ (аналогично и в других случаях). Для тех значений $|x|$, при которых получаемый предел будет *меньше* 1, ряд сходится, а для тех, при которых *больше* 1, ряд расходится. Отсюда следует, что то значение $|x|$, при котором этот предел равен единице, и будет являться радиусом сходимости ряда.

Может случиться, что найденный предел при *любом* $|x|$ будет равен нулю. Это значит, что ряд (*) сходится при всех x и его радиус сходимости равен бесконечности ($R=\infty$).

Наоборот, если при всех $|x|\neq 0$ предел окажется равным бесконечности, то ряд будет всюду расходиться (кроме точки $x=0$) и его радиус сходимости будет равен нулю.

Поясним сказанное на конкретных примерах.

Примеры. 1) Найдем радиус сходимости ряда

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$$

Имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)!\,|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

при любом значении $|x|$. Следовательно, ряд сходится при всех значениях x, т. е. $R = \infty$.

В силу необходимого признака сходимости общий член рассматриваемого ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

при любом значении x. Это замечание будет существенным образом использовано в дальнейшем.

2) Возьмем ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} n}{(n+1)\,x^n}\right| = |x| \left|\frac{n}{n+1}\right| \to |x|.$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера ряд сходится, если $|x| < 1$, и расходится, если $|x| > 1$. Итак, $R = 1$.

В этом примере нетрудно установить, что делается с рядом на концах интервала сходимости. При $x = 1$ получаем расходящийся ряд $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, а при $x = -1$ ряд $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots$, сходящийся неабсолютно.

Отметим, что при исследовании вопроса о сходимости ряда на концах интервала сходимости признак Даламбера неприменим (соответствующий предел здесь равен 1) и нужно применять другие признаки.

3) Исследуем ряд

$$x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2} + \ldots$$

Здесь

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)^2}{(2n+1)^2 x^{2n-1}}\right| = |x|^2 \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^2 \to |x|^2.$$

Следовательно, радиус сходимости ряда равен 1; при $|x| < 1$ ряд сходится, а при $|x| > 1$ расходится. Предоставляем читателю доказать, что на обоих концах интервала ряд сходится абсолютно.

4) Найдем интервал сходимости ряда

$$\frac{x-1}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Составим отношение:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x-1|^{n+1}n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}|x-1|^n}=|x-1|\frac{n}{2(n+1)}$$

и найдем его предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x-1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x-1|}{2}.$$

Согласно предыдущему ряд сходится, если $\frac{|x-1|}{2}<1$, т. е. $-2<x-1<2$. Таким образом, интервалом сходимости ряда является интервал $(-1, 3)$ с центром в точке $x=1$. Предоставляем читателю проверить, что на концах интервала ряд ведет себя так же, как ряд примера 2.

190. Свойства степенных рядов. Рассмотрим степенной ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (*)$$

имеющий радиус сходимости R (R может равняться ∞). Сумма этого ряда — обозначим ее через $S(x)$ — есть функция, определенная внутри интервала сходимости, а также в том из концов интервала, где ряд сходится.

Чтобы применить к степенным рядам результаты п. 188, докажем прежде всего следующие леммы[1]).

Лемма 1. **Степенной ряд правильно сходится в любом интервале $[-b, b]$, целиком лежащем внутри интервала сходимости.**

Доказательство. Выберем точку x_0 так, чтобы было $b<x_0<R$; она лежит в интервале сходимости и по теореме Абеля числовой ряд

$$|a_0|+|a_1x_0|+\ldots+|a_nx_0^n|+\ldots$$

сходится. Для любой точки $x\in[-b, b]$ имеем $|x|<|x_0|$ и, следовательно, $|a_nx^n|<|a_nx_0^n|$. Последнее неравенство и означает, что ряд $(*)$ правильно сходится в интервале $[-b, b]$.

Лемма 2. **Степенной ряд, составленный из производных членов ряда $(*)$, имеет тот же радиус сходимости, что и данный ряд.**

---

[1]) Если п. 188 не изучался, то читатель должен прямо перейти к свойствам степенных рядов, сформулированным ниже.

Доказательство. Ряд из производных имеет вид

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+(n+1)\,a_{n+1}x^n+\ldots \qquad (**)$$

Предположим для простоты рассуждений, что предел отношения $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ существует[1]); тогда радиусы сходимости рядов (*) и (**) можно отыскивать с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}x^{n+1}}{na_nx^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Равенство пределов отношения последующего члена к предыдущему для обоих рядов показывает, что радиусы их сходимости равны. Заметим, что на конце интервала сходимости ряд (**) может расходиться и тогда, когда ряд (*) сходится; советуем читателю проверить это на примере ряда $1+x+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$

Если теперь составить ряд из производных ряда (**), то он опять будет иметь тот же радиус сходимости и т. д. Таким образом, *все степенные ряды, получающиеся последовательным дифференцированием ряда* (*), *имеют один и тот же радиус сходимости и по лемме* 1 *правильно сходятся в любом интервале, целиком принадлежащем интервалу сходимости.*

Из доказанных лемм и общих свойств правильно сходящихся рядов вытекают следующие свойства степенных рядов:

1. Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (-R<x<R).$$

Дополнительно отметим, что в том конце интервала, где степенной ряд сходится, его сумма $S(x)$ остается непрерывной.

Необходимо отметить одно обстоятельство, которое может иногда привести к недоразумениям. Возьмем геометрическую прогрессию, сходящуюся при $|x|<1$:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}.$$

Функция $\frac{1}{1-x}$ определена и непрерывна всюду, кроме точки $x=1$. Тем не менее следует твердо помнить, что эта функция является

---

[1]) Если это не предполагать, то доказательство леммы усложняется.

суммой ряда только при $|x|<1$; при $|x|\geqslant 1$ ряд расходится и об его сумме говорить нельзя.

2. Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости

$$\int_0^x S(x)\,dx=\int_0^x a_0dx+\int_0^x a_1x\,dx+\int_0^x a_2x^2dx+\ldots+\int_0^x a_nx^ndx+\ldots=$$

$$=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots\qquad(-R<x<R).$$

3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости

$$S'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots\qquad(-R<x<R).$$

Продолжая дифференцирование, последовательно получим

$$S''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$
$$S'''(x)=3\cdot 2a_3+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\ldots$$

и таким же образом дальше. Итак,

Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз.

§ 4. Разложение функций в степенные ряды

191. Ряд Тейлора[1]). Мы знаем, что сумма степенного ряда в интервале сходимости этого ряда является непрерывной и бесконечное число раз дифференцируемой функцией (см. п. **190**). Перейдем теперь к выяснению обратного вопроса.

Когда можно утверждать, что заданная функция $f(x)$ является суммой некоторого степенного ряда?

Из свойств степенных рядов следует прежде всего, что эта функция должна быть бесконечное число раз дифференцируема. Однако, как мы вскоре увидим, это условие не является достаточным.

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы установить, какие функции и в каких интервалах можно представить в виде сумм степенных рядов.

В дальнейшем, если заданную функцию $f(x)$ мы представим в виде суммы некоторого степенного ряда, то будем говорить, что функция $f(x)$ разложена в степенной ряд.

Важность такого разложения видна хотя бы из того, что мы получаем возможность *приближенно заменить функцию суммой*

---

[1]) Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик, ученик Ньютона.

нескольких первых членов степенного ряда, т. е. многочленом. Вычисление значений функции при этом сводится к вычислению значений многочлена, что можно сделать, производя только простейшие арифметические действия. Особенно важно, что мы сумеем оценивать точность получаемых приближенных значений.

Напомним читателю, что с частным случаем замены функции многочленом мы уже встречались в п. **53**, рассматривая применения дифференциала к приближенным вычислениям. Именно там мы заменяли функцию в окрестности изучаемой точки многочленом первой степени, т. е. линейной функцией. Однако полученные нами результаты носили весьма ограниченный характер; мы не умели оценивать точность такой замены и поэтому ничего не могли сказать об интервале, в котором найденные приближенные формулы были применимы.

Замена функции таким простым выражением, как многочлен, оказывается очень удобной и в различных вопросах анализа: при вычислении интегралов, решении дифференциальных уравнений и т. д.

Итак, предположим, что функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в окрестности некоторой точки x_0. Допустим, что ее можно представить в виде суммы степенного ряда, сходящегося в каком-то интервале, содержащем точку x_0:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \quad (*)$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... — неопределенные пока коэффициенты.

Покажем, как, пользуясь свойствами степенных рядов, можно найти коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... по известным значениям функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0.

Положим в равенстве (*) $x=x_0$. Будем иметь

$$f(x_0)=a_0.$$

Продифференцируем степенной ряд

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots$$

и снова положим $x=x_0$. Тогда

$$f'(x_0)=a_1.$$

При следующем дифференцировании получим

$$f''(x)=2a_2+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots$$

Отсюда, полагая снова $x=x_0$, найдем, что

$$f''(x_0)=2a_2, \text{ т. е. } a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}.$$

(Мы напишем для единообразия не 2, а 2!) После n-кратного дифференцирования получим

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \ldots,$$

причем все остальные члены будут еще содержать множитель $(x - x_0)$ и, следовательно, при $x = x_0$ обратятся в нуль. Мы получим

$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n, \quad \text{т. е.} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Таким образом находятся последовательно все коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... разложения (*):

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ \ldots, \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ \ldots$$

Подставляя найденные выражения в равенство (*), получим ряд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \quad (**)$$

который называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$.

Определение. ***Рядом Тейлора* функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд (**) относительно разности $x - x_0$, коэффициенты которого a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... выражаются через функцию $f(x)$ и ее производные в точке x_0 по формулам**

$$a_0 = f(x_0), \ a_1 = f'(x_0), \ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ \ldots, \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ \ldots$$

Эти коэффициенты называются *коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0*.

Таким образом, мы установили пока, что

Если функцию $f(x)$ можно разложить в степенной ряд по степеням разности $(x - x_0)$, то этот ряд обязательно является рядом Тейлора этой функции.

Обращаем особое внимание читателя на то, что все наши рассуждения были сделаны в предположении, что функция $f(x)$ *может быть разложена в степенной ряд*.

Если заранее этого не предположить, а просто считать функцию $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируемой и составить для нее ряд Тейлора, то ниоткуда не следует, что этот ряд сходится при значениях x, отличных от x_0.

Более того, как это ни покажется странным читателю, могут быть даже такие случаи, что ряд Тейлора, составленный для функции $f(x)$, сходится, а сумма его вовсе не равна $f(x)$.

Примером может служить функция

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ при } x \neq 0 \text{ и } f(0)=0.$$

Это — бесконечное число раз дифференцируемая на всей оси Ox функция, причем все ее производные в точке $x=0$ равны нулю. Действительно, $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$ и $f'(0)=0$, так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^{z^2}}=0$$

$\left(\text{мы положили } \frac{1}{h}=z\right)$. Далее, $f''(0)=0$, так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{h^3}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim_{z\to\infty}\frac{2z^4}{e^{z^2}}=0,$$

и т. д. Следовательно, все коэффициенты Тейлора функции $f(x)$ при $x=0$ равны нулю. Соответствующий ряд Тейлора состоит из членов, равных нулю, и, значит, сходится, но не к функции $f(x)$, а к функции, тождественно равной нулю.

192. Условие разложения функций в ряд Тейлора. Перейдем теперь к выяснению условий, при которых можно утверждать, что ряд Тейлора (**), составленный для функции $f(x)$:

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

действительно сходится в некотором интервале и что его сумма в точности равна $f(x)$.

Обозначим через $T_n(x)$ многочлен n-й степени, представляющий n-ю частичную сумму ряда Тейлора:

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Назовем *остаточным членом ряда Тейлора* разность

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x).$$

Сходимость ряда Тейлора к функции $f(x)$ в точке x означает, что

$$\lim_{n\to\infty}T_n(x)=f(x),$$

или, что то же самое,

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-T_n(x)]=\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Величина $R_n(x)$ дает при этом как раз ту ошибку, которую мы делаем, заменяя функцию $f(x)$ многочленом $T_n(x)$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, которая позволит нам оценивать величину остаточного члена, рассмотрим один частный случай.

Предположим, что функция $f(x)$ сама есть многочлен n-й степени. Тогда при последовательном дифференцировании функции $f(x)$ мы будем каждый раз получать многочлен степени на единицу меньше. После n дифференцирований мы получим постоянную величину и все последующие производные будут равны нулю. Таким образом, от ряда Тейлора для многочлена $f(x)$ останутся только $(n+1)$ первых слагаемых, т. е. опять-таки многочлен n-й степени. Это, разумеется, можно было предвидеть и заранее, так как мы попросту располагаем заданный многочлен по степеням разности $x-x_0$.

Полученное тождество

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *формулой Тейлора для многочленов.*

Примеры. 1) Расположим многочлен $f(x)=-3+x-x^2+2x^3$ по степеням разности $x-1$. Здесь $x_0=1$ и

$$f(1)=-1, \qquad f'(1)=(1-2x+6x^2)_{x=1}=5,$$
$$f''(1)=(-2+12x)_{x=1}=10, \qquad f'''(1)=12.$$

Итак,

$$-3+x-x^2+2x^3=-1+5(x-1)+5(x-1)^2+2(x-1)^3.$$

Раскрывая скобки в правой части и приводя подобные члены, читатель легко убедится в справедливости полученного тождества.

2) В качестве еще одного интересного примера расположим многочлен n-й степени $f(x)=(1+x)^n$ по степеням x, т. е. по степеням разности $x-0$. Имеем

$$f(0)=1,\ f'(0)=n,\ f''(0)=n(n-1),\ \ldots$$
$$\ldots,\ f^{(k)}(0)=n(n-1)\ldots(n-k+1),\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=n(n-1)\ldots2\cdot1.$$

Формула Тейлора дает:

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k+\ldots+x^n.$$

Мы получили известную формулу Ньютона для бинома в целой положительной степени; она является, таким образом, частным случаем формулы Тейлора.

193. Остаточный член ряда Тейлора. Формула Тейлора. Пусть $f(x)$ — функция, относительно которой мы хотим выяснить, допускает она разложение в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки x_0 или нет. Запишем ее в виде (см. п. **192**)

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \qquad (*)$$

где $R_n(x)$ — остаточный член ряда Тейлора.

Докажем теорему относительно структуры $R_n(x)$, которая в дальнейшем позволит нам устанавливать, стремится ли $R_n(x)$ к нулю при неограниченном возрастании n или нет, т. е. разлагается ли функция $f(x)$ в ряд Тейлора или нет.

Теорема. **Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0, имеет $(n+1)$-ю производную $f^{(n+1)}(x)$, то остаточный член $R_n(x)$ для любой точки этого интервала имеет вид**

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где ξ заключено между x_0 и x.

Доказательство. Запишем остаточный член $R_n(x)$ в виде, аналогичном формуле общего члена ряда $(*)$, т. е.

$$R_n(x) = D_{n+1}\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

и найдем такое выражение для D_{n+1}, чтобы равенство

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + D_{n+1}\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

было справедливо для любого x из интервала, указанного в условии теоремы.

Зафиксируем независимую переменную x и положим ее равной x_1; тогда D_{n+1} станет равной

$$D_{n+1} = \frac{f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) - \ldots - \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n}{\dfrac{(x_1 - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

Наша задача придать теперь этому выражению вид, указанный в условии теоремы, т. е. $f^{(n+1)}(\xi)$, где $\xi \in (x_0, x_1)$. Заметим сначала, что при $n=0$ это следует из теоремы Лагранжа (п. **57**)

$$D_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(\xi), \qquad \text{где} \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Доказательство для любого n проводится так же, как и доказательство теоремы Лагранжа,—путем построения вспомогательной функции $F(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы Ролля; только теперь эта функция имеет более сложный вид. Именно, положим

$$F(x)=f(x_1)-f(x)-f'(x)(x_1-x)-\frac{f''(x)}{2!}(x_1-x)^2-\ldots$$
$$\ldots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_1-x)^n-D_{n+1}\frac{(x_1-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Из выражения для $F(x)$ сразу видно, что $F(x_1)=0$. Взяв $x=x_0$ и заменив D_{n+1} его значением, убеждаемся, что и $F(x_0)=0$. Находим производную $F'(x)$:

$$F'(x)=-f'(x)-f''(x)(x_1-x)+f'(x)-$$
$$-\frac{f'''(x)}{2!}(x_1-x)^2+f''(x)(x_1-x)-\ldots-\boldsymbol{\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_1-x)^n}+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(x_1-x)^{n-1}+\boldsymbol{D_{n+1}\frac{(x_1-x)^n}{n!}}.$$

Производная $F'(x)$ существует во всех точках интервала, так как по условию теоремы существует $f^{(n+1)}(x)$, а следовательно, и все производные низших порядков. В выражении для $F'(x)$ уничтожаются все слагаемые, кроме двух выделенных[1]; вынося еще общий множитель за скобки, получим

$$F'(x)=\frac{(x_1-x)^n}{n!}\left[-f^{(n+1)}(x)+D_{n+1}\right].$$

Итак, мы проверили, что функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, и нашли ее производную. Подставим в выражение для $F'(x)$ то значение $\xi \in (x_0, x_1)$, при котором производная равна нулю (если значений ξ несколько, то берем любое из них):

$$F'(\xi)=\frac{(x_1-\xi)^n}{n!}\left[-f^{(n+1)}(\xi)+D_{n+1}\right]=0.$$

Первый множитель нулю не равен, потому что $\xi \neq x_1$; значит,

---

[1]) Рекомендуем читателю взять определенное значение n, скажем $n=4$, и привести полностью все выкладки. Тогда будет значительно понятнее рассуждение в тексте, проведенное для любого n.

должно быть $D_{n+1}=f^{(n+1)}(\xi)$, и

$$R_n(x_1)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \text{где } \xi\in(x_0,\ x_1).$$

Так как x_1 — любая точка интервала, то теорема доказана.

Найденное выражение для остаточного члена позволяет равенство (*) переписать так:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (**)$$

В таком виде эту формулу называют *формулой Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в точке x_0*. Последний член в этой формуле отличается от общего члена суммы только тем, что значение соответствующей производной берется не в точке x_0, а в некоторой точке ξ, лежащей между x_0 и x.

При выводе формулы Тейлора мы предполагали только, что функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно, где n — какое-то число. Последующие производные могут при этом и не существовать.

Интересно отметить некоторые частные случаи этой формулы.

1) Пусть $n=0$. Тогда

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$$

Мы получаем формулу Лагранжа, которая является, таким образом, частным случаем формулы Тейлора.

2) Пусть $n=1$. Тогда

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Если в этой формуле отбросить остаточный член, то получим приближенное значение функции, основанное на применении дифференциала (см. п. **53**):

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

При этом функция $f(x)$ заменяется линейной функцией.

Само по себе выражение для остаточного члена $R_n(x)$ не дает возможности вычислять его величину, так как нам неизвестна точка ξ, в которой берется $(n+1)$-я производная. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся оценкой величины $R_n(x)$. Это делается на основании следующего замечания:

Пусть в интервале, в котором справедлива формула Тейлора, $f^{(n+1)}(x)$ по абсолютной величине не превосходит числа M_{n+1}:

$$|f^{(n+1)}(x)|\leq M_{n+1}.$$

Тогда для любого x из этого интервала остаточный член $R_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|R_n(x)| < M_{n+1} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (***)$$

Действительно, согласно доказанной теореме

$$|R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \, |x-x_0|^{n+1} \leqslant$$
$$\leqslant M_{n+1} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

194. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена[1]**.** Разложение заданной функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 распадается на два этапа.

1) Сначала мы вычисляем значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0 и составляем ряд Тейлора для функции $f(x)$. При этом предполагается, что функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема.

2) Находим интервал, в котором составленный ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, т. е. устанавливаем, для каких значений x остаточный член ряда $R_n(x)$ будет стремиться к нулю при $n \to \infty$. При этом можно часто пользоваться следующей теоремой:

Теорема. **Если в некотором интервале, окружающем точку x_0, абсолютные величины всех производных функции $f(x)$ ограничены одним и тем же числом, то функция $f(x)$ в этом интервале разлагается в ряд Тейлора.**

Доказательство. Нам нужно установить, что для всех точек интервала остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

По условию теоремы во всех точках интервала

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M,$$

где M — постоянная, не зависящая от n. Тогда в силу неравенства (***) п. **193**

$$|R_n(x)| \leqslant M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Но отношение $\frac{|x-x_0|^n}{n!}$ стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. п. **189**, пример 1). Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

[1] К. Маклорен (1698—1746) — шотландский математик; ученик и последователь Ньютона.

для всех точек x рассматриваемого интервала, что и требовалось доказать.

Особенно часто используется разложение функции в ряд по степеням x. В этом случае мы, полагая $x_0=0$, получаем ряд

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Этот ряд является частным случаем ряда Тейлора; по установившейся традиции его называют *рядом Маклорена*.

Перейдем теперь к разложению в ряды элементарных функций.

I. Показательная функция e^x. Разложим в ряд Маклорена функцию

$$f(x)=e^x.$$

Все производные от функции e^x тоже равны e^x и в точке $x=0$ обращаются в 1. По формуле Тейлора

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x).$$

Рассмотрим интервал $[-N, N]$, где N — любое фиксированное число. Для всех значений x из этого интервала $e^x<e^N=M$. Следовательно, все производные в этом интервале ограничены одним и тем же числом $M=e^N$ и по доказанной теореме $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. По предположению N — любое число, следовательно, *функция e^x разлагается в ряд Маклорена при всех значениях x, т. е. на всей оси Ox.*

Итак,

$$\mathbf{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots}\quad(-\infty,\ \infty). \tag{1}$$

То, что радиус сходимости ряда (1) равен бесконечности, мы уже доказали раньше (пример 1 п. **189**). Здесь же мы установили, что при любом x сумма этого ряда равна e^x.

В частности, при $x=1$ находим ряд для числа e:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

II. Тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Разложим в ряд Маклорена функцию $\sin x$. Для этого находим последовательно значения ее производных в точке $x=0$:

$$f(0)=(\sin x)_{x=0}=0,\ f'(0)=(\cos x)_{x=0}=1,$$
$$f''(0)=(-\sin x)_{x=0}=0,$$
$$f'''(0)=(-\cos x)_{x=0}=-1,\ f^{\mathrm{IV}}(0)=(\sin x)_{x=0}=0 \text{ и т. д.}$$

Мы видим, что значения производных повторяются и образуют периодическую последовательность

$$0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots$$

Любая производная функции $\sin x$ (т. е. $\pm\cos x$ или $\pm\sin x$) по абсолютной величине не превосходит единицы. Следовательно, *ряд Маклорена для функции* $\sin x$ *сходится к ней на всей числовой оси.*

Итак,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots (-\infty,\ \infty). \quad (2)$$

Совершенно аналогично получим разложение $\cos x$ (оно также справедливо на всей оси Ox):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty,\ \infty). \quad (3)$$

Любопытно заметить, что нечетная функция $\sin x$ раскладывается в ряд только по нечетным степеням x, а четная функция $\cos x$ — только по четным.

Доказательство возможности разложения функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$ в ряд Маклорена было очень простым потому, что любая производная от соответствующей функции легко находилась. Все эти производные оказывались ограниченными в любом интервале оси Ox, поэтому полученные ряды представляют разлагаемые функции на всей числовой оси.

В тех случаях, когда исследование остаточного члена представляет затруднения (в частности, когда мы не можем пользоваться доказанной выше теоремой), поступают иначе. Составив ряд Тейлора для функции $f(x)$, определяют сначала интервал его сходимости и лишь затем стараются доказать стремление остаточного члена к нулю при значениях x, принадлежащих интервалу сходимости. Вне интервала сходимости ряда остаточный член можно не исследовать, так как там он к нулю стремиться не может.

Для обычно встречающихся функций ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ во всей области его сходимости. Пример функции, для которой это не так, приведен на стр. 668.

III. Биномиальный ряд. Разложим в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = (1+x)^m,$$

где m — любое действительное число[1]). Здесь

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},\ \ldots$$
$$\ldots,\ f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},\ \ldots$$

---

[1]) Мы не берем просто степенную функцию x^m потому, что если m не целое положительное число (а только такой случай и интересен), то производные от x^m, начиная с некоторой, в точке $x=0$ не существуют.

Поэтому $f(0)=1$, $f'(0)=m$, $f''(0)=m(m-1)$, ..., $f^{(n)}(0)=$ $=m(m-1)\ldots(m-n+1)$, ... Следовательно, ряд запишется в виде

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Установим прежде всего область сходимости ряда. Найдем предел абсолютной величины отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1} : \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n\right| =$$
$$= |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| = |x|.$$

Согласно признаку Даламбера *ряд сходится, если* $|x|<1$, *и расходится, если* $|x|>1$.

Перейдем к исследованию остаточного члена, ограничившись случаем, когда $0<x<1$. В этом интервале для всех $n>m-1$ мы имеем

$$(1+x)^{m-n-1} = \frac{1}{(1+x)^{n-(m-1)}} < 1$$

и поэтому

$$|f^{(n+1)}(x)| = |m(m-1)\ldots(m-n)(1+x)^{m-n-1}| <$$
$$< |m(m-1)\ldots(m-n)|.$$

Здесь мы не можем воспользоваться теоремой, приведенной в начале пункта, так как полученная граница для производной з а в и с и т от n. Применим неравенство (***) п. **193**

$$|R_n(x)| < \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|.$$

Правая часть неравенства есть абсолютная величина $(n+1)$-го члена степенного ряда, сходящегося при $|x|<1$ (как мы только что доказали). Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$. Соответствующее доказательство для интервала $(-1, 0)$ более сложно, и мы его не приводим.

Таким образом, *биномиальный ряд представляет функцию* $(1+x)^m$ *в интервале* $(-1, 1)$:

$$\mathbf{(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots}$$
$$\mathbf{\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots\ (-1,\ 1).} \quad (4)$$

Разумеется, если m — целое положительное число, то ряд справа содержит всего $(m+1)$ слагаемых и превращается в формулу бинома Ньютона (см. пример 2 п. **192**). Исследование сходимости ряда (4) на концах интервала мы не приводим и заметим только, что если $m>0$, то ряд сходится к функции $(1+x)^m$ во всем замкнутом интервале $[-1, 1]$.

Приведем часто встречающиеся биномиальные ряды, соответствующие значениям $m=-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (справа указаны интервалы, в которых справедливы разложения):

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \quad (-1<x<1)$$

(ряд справа представляет геометрическую прогрессию)

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n}x^n+\ldots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n}x^n+\ldots \quad (-1<x\leqslant 1).$$

Разложения отдельных функций в ряды могут быть получены из уже известных разложений с помощью свойств степенных рядов. Покажем это на примерах.

IV. Функции $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$. Для разложения в ряд Маклорена функции $f(x)=\ln(1+x)$ [1]) воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots(-1<x<1). \quad (*)$$

Применим теорему об интегрировании степенных рядов и проинтегрируем ряд (*) в пределах от 0 до x. Поскольку

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^x=\ln(1+x),$$

то, интегрируя почленно правую часть ряда (*), получим

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots(-1,\ 1). \quad (5)$$

[1]) Функцию $y=\ln x$ раскладывать в ряд Маклорена нельзя, так как она разрывна при $x=0$.

При $|x|>1$, а также при $x=-1$ ряд (5) расходится и поэтому не может представлять функцию $\ln(1+x)$. В точке $x=1$ ряд сходится, и на основании дополнительного замечания к первому свойству степенных рядов (см. п. **190**) его сумма остается непрерывной. Поэтому разложение (5) справедливо и при $x=1$:

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Вычислять значение $\ln 2$ с помощью этого ряда было бы крайне затруднительно. Из теоремы Лейбница о знакочередующихся рядах следует, что для вычисления $\ln 2$ с точностью до 0,00001 пришлось бы взять 100 000 (!) членов ряда, что, разумеется, практически неприемлемо. Позже, в п. **195**, мы увидим, что, преобразовав полученный ряд, мы сумеем получить значение $\ln 2$ с такой же точностью при несравненно меньшем объеме вычислений.

Совершенно аналогично получается разложение функции $\operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена. С этой целью заменим в формуле для суммы членов геометрической прогрессии (*) x на x^2. Получим

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots(-1<x<1). \quad (**)$$

Интегрируя ряд (**) в пределах от 0 до x и считая, что $|x|<1$, будем иметь

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots \quad (-1,\ 1). \quad (6)$$

На концах интервала сходимости ряд сходится, и поэтому разложение (6) остается справедливым и при $x=\pm 1$. Подставляя в ряд значение $x=1$, получим выражение для числа π в виде числового ряда

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Разложения (1)—(6), а также интервалы их применения следует запомнить, так как многие другие функции могут быть разложены в ряды при помощи этих разложений.

Приведем несколько примеров.

П р и м е р ы. 1) Разложим в ряд Маклорена гиперболические функции $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$. Возьмем ряд (1) для e^x и заменим x на $-x$; получим

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Далее по правилу сложения и вычитания рядов находим искомые разложения, справедливые на всей числовой оси:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

2) Разложим в ряд Маклорена функцию

$$y = e^{x^2}.$$

Снова возьмем разложение функции $y = e^x$ и вместо x подставим в него x^2. Мы получим

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Это разложение справедливо на всей числовой оси.

3) Разложим в ряд Маклорена функцию

$$y = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Воспользуемся приведенным выше, в качестве примера биномиального ряда при $m = -\frac{1}{2}$, разложением функции $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ и заменим в нем x на $-x^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots \qquad (***)$$

Чтобы получить разложение заданной функции, нужно умножить обе части равенства на x^3:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^7 + \ldots$$

4) Разложим в ряд Маклорена функцию

$$y = \arcsin x.$$

Так как

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^x = \arcsin x,$$

то разложение $\arcsin x$ получается интегрированием ряда (***):

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

Это разложение справедливо в замкнутом интервале $[-1, 1]$.

5) Разложим в ряд Маклорена функцию

$$y = e^x \sin x.$$

Так как ряды для e^x и $\sin x$ сходятся абсолютно, то, перемножая их по правилу, указанному в конце п. **186**, получим искомое разложение. Здесь общий закон образования коэффициентов подметить трудно, и мы ограничимся вычислением нескольких первых коэффициентов ряда

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \ldots$$

§ 5. Некоторые применения рядов Тейлора

195. Приближенное вычисление значений функции. Допустим, что нам известны значения самой функции $f(x)$ и ее последовательных производных в некоторой точке x_0 и мы доказали, что функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 разлагается в ряд Тейлора. Тогда точное значение функции $f(x)$ в любой точке этой окрестности может быть вычислено по ряду Тейлора, а приближенное ее значение — по частичной сумме этого ряда. Возникающую при этом ошибку можно оценивать либо опираясь на теорему об оценке остаточного члена, либо непосредственно оценивая остаток ряда. Если, например, получающийся числовой ряд знакочередующийся, то это делается при помощи теоремы Лейбница; в случае знакоположительного ряда мы стараемся подобрать другой ряд (обычно геометрическую прогрессию), члены которого больше членов остатка и сумму которого мы можем найти.

На практике оценка остатка ряда оказывается более удобной, так как оценка остаточного члена предполагает знание производной нужного нам порядка во всем рассматриваемом интервале. Мы же часто можем получать разложения функций в ряды, вообще не отыскивая производных, а комбинируя известные нам ряды. Применение указанных способов оценки ошибки станет более ясным после разбора приводимых примеров.

Примеры. 1) Мы имеем

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Производя вычисления по этой формуле в интервале $[0, M]$, где M — любое число, и учитывая, что наибольшее значение $f^{(n+1)}(x) = e^x$ в этом интервале равно e^M, по теореме об оценке остаточного члена получим

$$R_n(x) < e^M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Эта оценка неудобна тем, что сюда входит величина e^M. Кроме того, она может оказаться слишком завышенной, так как установлена сразу для всего интервала.

При $M=1$ получим

$$R_n(x) < e\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 3\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ ^{1)}.$$

Подсчитаем, например, сколько нужно взять членов ряда, чтобы получить число e с точностью до 0,00001. Здесь $x=1$ и должно быть

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}.$$

Легко проверить, что это неравенство справедливо при $n=8$: $\frac{3}{9!}=\frac{3}{362880} < 10^{-5}$. Чтобы получить число e с этой точностью, надо в сумме

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}\approx 2{,}71828$$

все слагаемые брать с точностью до 10^{-6} во избежание накопления ошибок при арифметических действиях. В результате мы нашли число e с шестью верными знаками.

Рекомендуем читателю проверить, что для вычисления $\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$ с той же точностью понадобилось бы взять $n=6$, т. е. семь слагаемых. Вообще, чем меньше будет показатель степени у e, тем меньше понадобится членов в приближенной формуле для достижения одной и той же точности.

Покажем теперь, как можно оценить ошибку $R_n(1)$, пользуясь всем рядом для e^x:

$$R_n(1)=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right] < \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!\,n}.$$

Итак, мы получили оценку ошибки $\frac{1}{n!\,n}$, т. е. почти в 3 раза более точную, чем найденную выше $\frac{3}{(n+1)!}$.

---

1) Здесь мы намеренно увеличили правую часть для простоты вычислений.

2) Вычислим значения функций $\sin x$ и $\cos x$ при помощи их разложений в ряды. Приближенные формулы отличаются здесь очень высокой точностью, а ошибка легко оценивается с помощью теоремы Лейбница. Положим в разложении функции $\sin x$ последовательно $n=1$, 2, 3. Считая, что $x>0$, получим

$$\sin x \approx x, \qquad |R_1(x)| < \frac{x^3}{6},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad |R_3(x)| < \frac{x^5}{120},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \qquad |R_5(x)| < \frac{x^7}{5040}.$$

Первая и третья формулы дают значения $\sin x$ с избытком, а вторая с недостатком. Рекомендуем читателю проверить, что для получения значений $\sin x$ с точностью до 0,0001 следует пользоваться первой формулой в интервале $0<x<0{,}08$, второй в интервале $0{,}08<x<0{,}4$ и третьей в интервале $0{,}4<x<0{,}9$[1]).

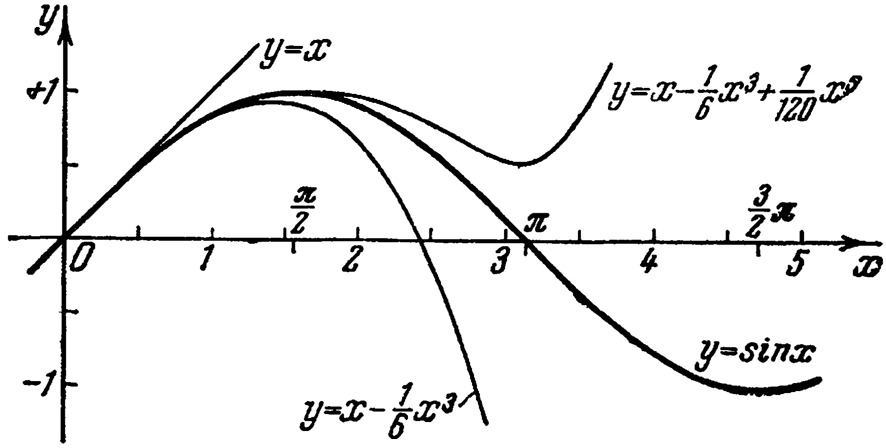

Рис. 229.

На рис. 229 сравнивается в окрестности точки $x=0$ график функции $y=\sin x$ с графиками приближающих многочленов

$$y=x, \qquad y=x-\frac{x^3}{6}, \qquad y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

Аналогично получаем приближенные формулы для $\cos x$:

$$\cos x \approx 1, \qquad |R_0(x)| < \frac{x^2}{2},$$

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}, \qquad |R_2(x)| < \frac{x^4}{24},$$

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}, \qquad |R_4(x)| < \frac{x^6}{720}.$$

---

[1]) Соответственно в градусной мере эти интервалы будут (0,4°30′), (4°30′, 23°), (23°, 52°). Все границы интервалов вычислены приближенно.

Здесь первая и третья формулы дают значения $\cos x$ с избытком, а вторая с недостатком.

На рис. 230 показано, как ведут себя графики функций $y=1$, $y=1-\frac{x^2}{2}$, $y=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ по сравнению с графиком функции $y=\cos x$ в окрестности начала координат.

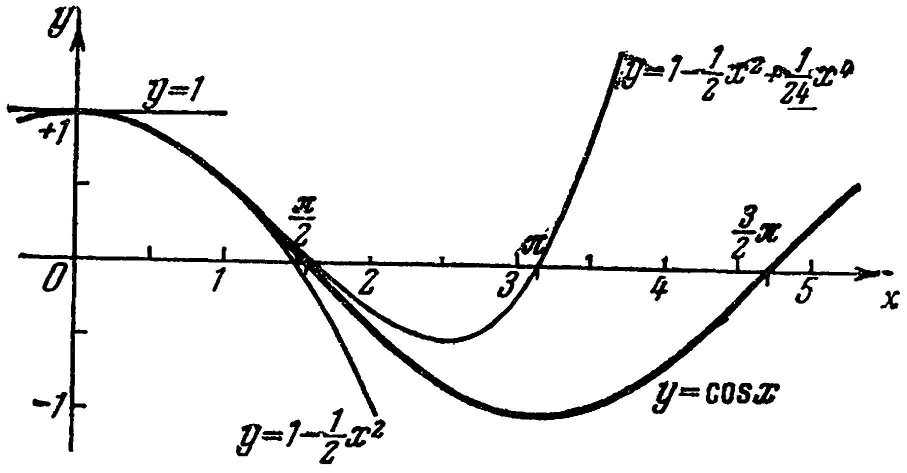

Рис. 230.

3) Рассмотрим теперь известный ряд для $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots \qquad (-1<x\leqslant 1).$$

Коэффициенты этого ряда убывают несравненно медленнее, чем коэффициенты рядов для e^x, $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому мы будем говорить, что этот ряд сходится *медленно*[1]).

Как мы уже отмечали, из теоремы Лейбница о знакопеременных рядах следует, что для вычисления, например, $\ln 2$ с точностью до 0,00001 нужно взять не меньше 100 000 (!) начальных членов ряда. Такое суммирование практически невозможно.

Покажем, как здесь можно ускорить сходимость ряда. Заменим x на $-x$ и запишем ряд для $\ln(1-x)$. Вычитая из ряда для $\ln(1+x)$ ряд для $\ln(1-x)$, получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots\right) \qquad (-1<x<1).$$

По найденной формуле можно вычислять логарифмы *любых* положительных чисел. В самом деле, когда x меняется в интервале сходимости ряда $(-1, 1)$, непрерывная функция $\frac{1+x}{1-x}$ пробегает

[1]) Разумеется, это выражение чисто условное.

весь интервал $(0, \infty)$. Вычислим по этой формуле $\ln 2$. Если $\frac{1+x}{1-x}=2$, то $x=\frac{1}{3}$. Возьмем n-ю частичную сумму

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}\right).$$

Ошибку оценим так: $2\left(\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{3^{2n+3}}+\frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{3^{2n+5}}+\ldots\right)<$

$$<\frac{2}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)=\frac{2\cdot 9}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}\cdot 8}=\frac{1}{4\,(2n+3)\cdot 3^{2n+1}}.$$

Найдем n, при котором ошибка не превзойдет 0,00001. Должно быть

$$4\,(2n+3)\cdot 3^{2n+1}>10^5,$$

что уже имеет место при $n=4$. Значит,

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}\right)\approx 0{,}693144.$$

Итак, в новом ряде достаточно взять пять слагаемых (вместо 100 000 в исходном ряде), чтобы найти результат ($\ln 2$) с той же точностью.

Полагая в полученном ряде $x=\frac{1}{2N+1}$, где N — целое положительное число, придем к формуле

$$\ln\frac{N+1}{N}=\ln(N+1)-\ln N=2\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3}+\ldots\right),$$

фактически служащей для вычисления логарифмов целых чисел, одного вслед за другим, с любой практически нужной точностью.

196. Интегрирование функций и дифференциальных уравнений.

I. Интегрирование функций. Допустим, что нужно найти интеграл

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx,$$

причем известно разложение подынтегральной функции $f(x)$ в ряд Тейлора, а пределы интеграла лежат внутри интервала сходимости ряда. Тогда мы имеем право интегрировать ряд почленно. В результате получится ряд Тейлора для функции $F(x)$, имеющий тот же радиус сходимости, что и ряд для подынтегральной функции $f(x)$.

Если интеграл $\int_a^x f(x)\,dx$ выражается через элементарную функцию

$F(x)$, то мы тем самым находим ее разложение в ряд Тейлора. Именно так мы поступали при разложении функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$. Если же интеграл $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ в элементарных функциях не выражается (см. п. 85), то найденный ряд может служить выражением **неэлементарной** функции $F(x)$ через самые простые основные элементарные функции — степенные, правда, уже не конечным выражением, а **бесконечным**. Однако мы уже убедились, что такое представление функций с помощью бесконечных рядов отнюдь не хуже, чем представление с помощью конечного числа основных элементарных функций. Наоборот, оно в силу простоты членов ряда во многих отношениях значительно удобнее любой не степенной функции.

Заметим, что, зная оценку остаточного члена ряда для подынтегральной функции $f(x)$, мы можем на основании теоремы об оценке интеграла оценить и остаточный член ряда для интеграла $F(x)$.

Примеры. 1) Пусть дан интеграл

$$\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Деля ряд для $\sin x$ на x, получим

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$$

Этот ряд, как и ряд для $\sin x$, имеет своим интервалом сходимости всю ось Ox. Интегрирование дает

$$\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \ldots$$

Этот ряд не сходится ни к какой **элементарной** функции; он является аналитическим заданием **новой** функции, но посредством не конечного, а бесконечного числа операций. Между прочим, функция $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ часто встречается при изучении некоторых разделов теоретической физики. С помощью приведенного ряда составлены ее подробные таблицы.

2) При изучении **теории вероятностей** важную роль играет функция

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

называемая **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**. Вычислить интеграл в конечном виде нельзя, так как $\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ не выражается в элементарных функциях. Разложим подынтегральную функцию в ряд, для чего в разложение e^x подставим взамен x величину $-\frac{x^2}{2}$:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3!} + \ldots$$

Тогда $F(x)$ представится бесконечным рядом

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 2!5} - \frac{x^7}{2^3 \cdot 3!7} + \ldots\right),$$

сходящимся на всей числовой оси. Вычислять значения функции $F(x)$ очень удобно, так как ряд быстро сходится.

3) Вычислим интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}.$$

На первый взгляд раскладывать подынтегральную функцию в ряд ни к чему, так как неопределенный интеграл выражается в элементарных функциях. Однако его выражение очень сложно и мало удобно для вычисления:

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$$

В то же время, разложив подынтегральную функцию в ряд

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \ldots,$$

мы сразу получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{9} - \ldots$$

Если ограничиться двумя первыми членами ряда (при этом ошибка не превосходит $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{9} \approx 0{,}0002$), то

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4} \approx 0{,}4938.$$

II. **Интегрирование дифференциальных уравнений.** Рассмотрим теперь применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений. Пусть задано дифференциальное уравнение и начальные условия, определяющие частное решение[1]). Допустим, что решение уравнения в окрестности точки x_0, в которой заданы начальные условия, можно разложить в степенной ряд, расположенный по степеням разности $x-x_0$:

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots$$

Продифференцируем этот ряд с неопределенными пока коэффициентами столько раз, каков порядок уравнения. Подставляя затем в уравнение вместо неизвестной функции и ее производных соответствующие ряды, мы получаем тождество, из которого и определяем неизвестные коэффициенты ряда. При этом первые коэффициенты ряда (в числе, равном порядку уравнения) определятся не из этого тождества, а из начальных условий. Если, далее, доказать, что полученный ряд сходится, то можно быть уверенным, что он выражает искомое решение. Очень часто в обычно встречаемых случаях в таком доказательстве и нет нужды.

Достаточно большое число членов ряда дает нам как угодно хорошее приближенное выражение решения в виде многочлена.

Особенно удобно решать с помощью рядов *линейные* дифференциальные уравнения.

Поясним на примерах указанный метод.

Примеры. 1) Решим линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-xy=0$ при начальных условиях $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$.

Решение ищем в виде ряда, расположенного по степеням x:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

Коэффициенты a_0 и a_1 находим из начальных условий:

$$a_0=y_{x=0}=0,\quad a_1=y'|_{x=0}=1.$$

Дважды дифференцируем ряд:

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

Подставляя в уравнение вместо y и y'' их разложения, получаем тождество

$$2a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots=$$
$$=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_{n-3}x^{n-2}+\cdots$$

[1]) При помощи степенных рядов можно отыскивать и общие решения дифференциальных уравнений, однако мы этим заниматься не будем и отошлем читателя, например, к книге [7].

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим

$$a_2=0,\ a_3=0,\ 4\cdot 3a_4=1,\ \ldots,\ n(n-1)n_n=a_{n-3}.$$

Поэтому

$$a_4=\frac{1}{3\cdot 4},\ a_5=0,\ a_6=0,\ a_7=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7},\ a_8=0,\ a_9=0,$$
$$a_{10}=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$$

и вообще

$$a_{3m-1}=a_{3m}=0,\ a_{3m+1}=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3m(3m+1)}.$$

Значит,

$$y=x+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\ldots+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3m(3m+1)}x^{3m+1}+\ldots$$

С помощью признака Даламбера легко убедиться в том, что этот ряд сходится на всей оси Ox и, следовательно, представляет искомое решение при всех x.

Заметим, что порядок уравнения нисколько не влияет на метод решения его при помощи рядов.

2) $y'=xy^2+1$ при $y|_{x=1}=0$.

Это уравнение нелинейное, и поэтому подстановка вместо y его разложения в ряд

$$y=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\ldots$$

привела бы к сложным уравнениям для определения коэффициентов. Поэтому обычно поступают иначе.

Продифференцируем уравнение несколько раз подряд, рассматривая y как функцию от x;

$$y''=y^2+2xyy',$$
$$y'''=4yy'+2xy'^2+2xyy'',$$
$$y^{IV}=6y'^2+6yy''+6xy'y''+2xyy'''.$$

Полагая в самом уравнении и во всех этих равенствах $x=1$ и принимая во внимание, что $y|_{x=1}=0$, последовательно найдем

$$y'|_{x=1}=1,\ y''|_{x=1}=0,\ y'''|_{x=1}=2,\ y^{IV}|_{x=1}=6,\ \ldots$$

Так как

$$a_0=y|_{x=1}=0,\ a_1=y'|_{x=1}=1,\ a_2=\frac{1}{2!}y''|_{x=1}=0,$$
$$a_3=\frac{1}{3!}y'''|_{x=1}=\frac{1}{3},\quad a_4=\frac{1}{4!}y^{IV}|_{x=1}=\frac{1}{4},\ \ldots,$$

то

$$y=(x-1)+\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots$$

§ 6*. Дополнительные вопросы теории степенных рядов

197*. Степенные ряды в комплексной области. Большинство вопросов теории рядов почти без всяких изменений переносится на ряды, членами которых являются комплексные числа. Предварительно введем определение предела последовательности комплексных чисел; оно находится в той же связи с обычным определением предела последовательности, в какой определение предела комплексной функции действительного переменного (см. п. **73**) находится с обычным определением предела функции.

Определение. **Комплексное число Z называется *пределом последовательности комплексных чисел* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, если для любого положительного числа ε можно указать такое число N, что при всех $n > N$ будут справедливы неравенства**

$$|z_n - Z| < \varepsilon.$$

Если $z_n = x_n + iy_n$ и $Z = a + ib$, то $|z_n - Z| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$.

Отсюда сразу следует (как и в п. **73**), что существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = Z$ равносильно существованию двух пределов последовательностей действительных чисел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Данное определение позволяет без всяких изменений перенести на ряды с комплексными членами определение сходимости ряда. *Ряд с комплексными членами*

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots \qquad (*)$$

называется сходящимся, если существует предел последовательности частичных сумм этого ряда.

Сходимость ряда $(*)$ равносильна сходимости двух рядов с действительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad \text{и} \quad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

где u_n — действительные, а v_n — мнимые части членов ряда: $w_n = u_n + iv_n$.

Если сходится ряд, составленный из модулей членов ряда $(*)$

$$|w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n| + \ldots,$$

то сходится и сам ряд; в этом случае он называется *абсолютно сходящимся*. Это немедленно следует из очевидных неравенств $|u_n| \leqslant |w_n|$ и $|v_n| \leqslant |w_n|$.

Пусть теперь $z = x + iy$ — переменная комплексная величина. Так как действие возвышения комплексного числа в целую положительную степень известно (см. п. **72**), то можно рассматривать степенные функции комплексного переменного:

$$w = z^n, \qquad n \text{ — целое положительное число.}$$

В отличие от комплексных функций действительного переменного здесь *и независимая переменная, и функция принимают комплексные значения.* Детальное изучение функций комплексного переменного не входит в задачу настоящей книги; читателей, которым оно предстоит, мы отсылаем, например, к книгам [6], [11]. Приведем только определения простейших функций, основанные на свойствах степенных рядов.

Для степенного ряда от комплексной переменной z

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad (**)$$

где коэффициентами ряда $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ могут быть любые комплексные числа, оказывается справедливой теорема Абеля (п. **189**), согласно которой из сходимости ряда (**) в точке z_0 следует его абсолютная сходимость при всех z, по модулю меньших $z_0: |z| < |z_0|$. Из теоремы Абеля вытекает существование числа R такого, что при всех z, удовлетворяющих неравенству $|z| < R$, степенной ряд абсолютно сходится, а при всех z таких, что $|z| > R$, ряд расходится. Если $|z| < R$, то точка комплексной плоскости z лежит в круге с центром в начале координат и с радиусом, равным R; число R называется *радиусом сходимости ряда,* а круг $|z| < R$ — *кругом сходимости.*

Радиус сходимости может быть равен нулю; тогда ряд сходится только в одной точке — в начале координат. Может случиться, что ряд сходится во всей комплексной плоскости; тогда говорят, что его радиус сходимости равен бесконечности.

Сумма степенного ряда является в круге его сходимости некоторой функцией комплексного переменного; такие функции называются *аналитическими.*

Степенной ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad (***)$$

сходится во всей комплексной плоскости. Это следует из того, что он сходится при любом действительном значении $z = N$, а значит, и внутри любого круга с центром в начале координат.

В точках действительной оси, когда $z = x$, ряд представляет показательную функцию e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Назовем теперь *показательной функцией* e^z *сумму ряда* (***); эта функция определена во всей комплексной плоскости:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Для функции e^z, определенной таким образом, остается справедливым основное свойство показательной функции

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}.$$

Действительно, перемножая по правилу, указанному в п. **186**, ряды для e^{z_1} и e^{z_2}, получим

$$e^{z_1}e^{z_2}=\left(1+z_1+\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}+\ldots\right)\left(1+z_2+\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}+\ldots\right)=$$

$$=1+(z_1+z_2)+\frac{1}{2!}\left(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2\right)+\frac{1}{3!}\left(z_1^3+3z_1^2z_2+\right.$$

$$\left.+3z_1z_2^2+z_2^3\right)+\ldots=1+(z_1+z_2)+\frac{(z_1+z_2)^2}{2!}+\frac{(z_1+z_2)^3}{3!}+\ldots=$$

$$=e^{z_1+z_2}.$$

В частности, если $z_1=x$ и $z_2=iy$, то $e^{x+iy}=e^x e^{iy}$. Выразим с помощью ряда второй множитель e^{iy}:

$$e^{iy}=1+iy+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\ldots+\frac{(iy)^n}{n!}+\ldots$$

Так как $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$ и т. д., то

$$e^{iy}=1+iy-\frac{y^2}{2!}-i\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+i\frac{y^5}{5!}-\ldots$$

Перегруппировав члены, что возможно в силу абсолютной сходимости ряда, запишем

$$e^{iy}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\ldots\right).$$

Ряды, стоящие в скобках, представляют соответственно $\cos y$ и $\sin y$. Поэтому

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y.$$

В результате мы пришли к уже известной *формуле Эйлера*, получив ее из совершенно иных соображений, чем в п. **74** (см. сноску на стр. 238). Напомним, что с помощью формулы Эйлера можно вычислять значения e^z для любого показателя степени $z=x+iy$:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Через показательную функцию e^z определяются *тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного:*

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\qquad \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

Все они определены во всей комплексной плоскости. Если z равно действительному числу x, то получаются известные определения гиперболических функций действительного переменного (п. **23**) и формулы Эйлера, выражающие косинус и синус через показательную функцию с чисто мнимым показателем степени (п. **74**).

Предоставляем читателю написать на основании определений разложения в степенные ряды тригонометрических и гиперболических функций и убедиться, что они могут быть получены из известных разложений в действительной области путем замены x на z.

198*. Ряд и формула Тейлора для функции двух переменных. Рассмотрим вкратце разложение в степенные ряды функций двух переменных; при этом мы осветим только практическую сторону дела и почти не будем касаться вопросов сходимости.

Определение. **Степенным рядом по переменным x и y называется ряд**

$$a_{00}+(a_{10}x+a_{01}y)+(a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2)+\ldots$$
$$\ldots+(a_{n0}x^n+a_{n-1,\,1}x^{n-1}y+\ldots+a_{0n}y^n)+\ldots \qquad (*)$$

Коэффициенты ряда нумеруются двойными индексами; перед произведением степеней x^ky^l, где k и l — целые числа, стоит коэффициент a_{kl}. Для удобства члены ряда располагают так, чтобы в каждой скобке стояли члены одного измерения; тогда сумма индексов у коэффициентов, стоящих в одной скобке, одна и та же.

Можно рассматривать степенные ряды по степеням разностей $x-x_0$ и $y-y_0$; для этого нужно в ряде $(*)$ заменить x на $x-x_0$ и y на $y-y_0$.

Обычно ряд $(*)$ сходится в некоторой области, содержащей точку $(0, 0)$ и симметричной относительно осей координат (в частных случаях — во всей плоскости). *В любом прямоугольнике, целиком лежащем внутри этой области, ряд сходится правильно и его сумма является непрерывной функцией переменных x и y. Эта функция имеет частные производные любых порядков и их можно находить почленным дифференцированием ряда.*

Пусть теперь $f(x, y)$ — функция, имеющая в окрестности начала координат частные производные любого порядка. Предположим, что ее можно разложить в степенной ряд вида $(*)$, и найдем коэффициенты ряда уже известным методом неопределенных коэффициентов.

Итак, пусть

$$f(x, y)=a_{00}+(a_{10}x+a_{01}y)+(a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2)+\ldots$$

Полагая $x=0$, $y=0$, получим $a_{00}=f(0,0)$.

Найдем частные производные по x и по y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=a_{10}+2a_{20}x+a_{11}y+\ldots,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=a_{01}+a_{11}x+2a_{02}y+\ldots,$$

причем все последующие члены содержат множителями переменные величины. Снова полагая $x=0$, $y=0$, найдем a_{10} и a_{01}:

$$a_{10}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \qquad a_{01}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0.$$

Совершенно аналогично получим

$$a_{20}=\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \qquad a_{11}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0, \qquad a_{02}=\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0.$$

Во всех случаях индекс 0 показывает, что берутся значения производных в точке (0, 0).

Итак, ряд Тейлора для функции двух переменных имеет вид

$$f(x, y)=f(0, 0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y+\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 x^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 xy+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right]+$$
$$+\frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 x^3+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0 x^2y+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 xy^2+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 y^3\right]+\ldots$$

Закон образования последующих членов ряда ясен.

Беря разность между функцией $f(x, y)$ и суммой членов ряда до n-го измерения включительно, получаем *остаточный член ряда Тейлора.* Можно доказать, что он, как и в случае функции одной переменной, образуется так: берется группа членов $(n+1)$-го измерения и взамен значений производных в точке (0, 0) подставляются значения этих же производных в некоторой промежуточной точке (ξ, η), лежащей на отрезке, соединяющем начало координат с точкой (x, y).

Заменяя остаток ряда его выражением, получаем *формулу Тейлора с остаточным членом.* Предоставляем читателю написать ее при $n=2$.

Ясно, что лишь при стремлении остаточного члена к нулю ряд Тейлора будет сходиться к функции $f(x, y)$.

Если раскладывать функцию $f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0), то значения частных производных берутся в этой точке, а x и y заменяются соответственно на $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$.

При разложении в ряд Тейлора функции двух переменных очень часто удается использовать уже известные разложения функций одной переменной.

Примеры. 1) Разложим в ряд Тейлора функцию $e^x \sin y$ в окрестности точки (0, 0). Заменяя e^x и $\sin y$ их разложениями и перемножая ряды, получаем

$$e^x \sin y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) =$$
$$= y + xy + \left(\frac{x^2 y}{2!} - \frac{y^3}{3!}\right) + \ldots$$

Разумеется, то же самое получится, если воспользоваться общей формулой.

2) Разложим в ряд функцию x^y в окрестности точки (1, 1). Находим частные производные

$$z'_x = yx^{y-1}, \qquad z'_y = x^y \ln x,$$
$$z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \quad z''_{yy} = x^y \ln^2 x$$

. . . .

Найдя значения производных в точке (1,1) и подставляя в общую формулу, получим

$$x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \ldots$$

Отсюда, например, следует, что $(1{,}04)^{1{,}03} \approx 1 + 0{,}04 + 0{,}04 \cdot 0{,}03 = 1{,}0412$.

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется числовым рядом? Что называется общим членом ряда?
2. Что называется суммой ряда? Дать определение сходящегося и расходящегося рядов. Привести примеры.
3. В чем состоит необходимый признак сходимости ряда? Привести пример, показывающий, что он не является достаточным.
4. Указать простейший достаточный признак расходимости ряда.
5. Сформулировать и доказать теорему о сравнении двух рядов с положительными членами.
6. В чем состоит признак Даламбера? Доказать его.
7. В чем состоит интегральный признак Коши? Доказать его. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$.
8. Какой ряд называется знакочередующимся? В чем состоит признак Лейбница для такого ряда? Доказать этот признак.
9. Привести общий достаточный признак сходимости ряда с произвольными членами. Доказать его.
10. Что называется абсолютной сходимостью ряда? условной сходимостью? Привести примеры абсолютно и не абсолютно сходящихся рядов.
11. Какой ряд называется функциональным? Что называется областью сходимости функционального ряда?
12. Какой функциональный ряд называется правильно сходящимся?

13. Сформулировать и объяснить свойства правильно сходящихся рядов.

14. Какой ряд называется степенным?

15. Сформулировать и доказать теорему Абеля. Определить радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда.

16. Привести примеры степенных рядов, радиус сходимости которых равен: 1) нулю, 2) бесконечности, 3) конечному числу, отличному от нуля.

17. Доказать леммы о степенных рядах и на их основании сформулировать свойства степенных рядов.

18. В чем заключается задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд?

19. Что называется рядом Тейлора функции $f(x)$? Как определяются коэффициенты ряда Тейлора?

20. Что называется остаточным членом ряда Тейлора?

21. Сформулировать и доказать теорему об остаточном члене ряда Тейлора.

22. Что называется формулой Тейлора n-го порядка?

23. Какой ряд называется рядом Маклорена?

24. Вывести разложения в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$. Указать интервалы, в которых полученные разложения имеют место.

25. Указать способы оценки остаточного члена при приближенных вычислениях значений функций.

26. В чем состоит метод интегрирования функций с помощью степенных рядов? Привести примеры.

27. В чем состоит метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов? Привести примеры.

28*. Дать определение предела последовательности комплексных чисел и сходящегося ряда с комплексными членами.

29*. Дать определение показательной функции e^z с помощью степенного ряда и доказать ее основное свойство.

30*. Вывести с помощью степенных рядов формулу Эйлера.

31*. Дать определение тригонометрических и гиперболических функций комплексного переменного.

32*. Дать определение степенного ряда по переменным x и y.

33*. Вывести методом неопределенных коэффициентов формулу разложения функции двух переменных в ряд Тейлора.

ГЛАВА XII

РЯДЫ ФУРЬЕ [1]. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§ 1. Ряды Фурье

199. Гармонические колебания. Тригонометрические ряды. I. Как известно, простое гармоническое колебание описывается функцией

$$s = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где s — отклонение колеблющейся точки от положения равновесия, t — время, A — амплитуда колебания, ω — круговая частота [2] и φ_0 — начальная фаза (см. п. **21**, II). Напомним еще, что период колебания T равен $\frac{2\pi}{\omega}$.

Функция $A\sin(\omega t + \varphi_0)$ (и ее график) называется *простой гармоникой*. Колебания, получающиеся в результате наложения нескольких простых гармонических колебаний, называются *сложными гармоническими колебаниями*. Например, в случае наложения двух простых гармонических колебаний получаем

$$s = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Если, в частности, круговые частоты ω_1 и ω_2 равны между собой, $\omega_1 = \omega_2$, то результирующее движение оказывается снова простым гармоническим колебанием с той же частотой и тем же периодом [3].

Пусть теперь $\omega_1 \neq \omega_2$. Периоды простых колебаний равны $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ и $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$.

---

[1] Ш. Фурье (1768—1830) — знаменитый французский математик и физик.

[2] Для краткости мы ее в дальнейшем назовем просто частотой.

[3] Рекомендуем читателю проверить, что если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то

$$s = A\sin(\omega t + \varphi),$$

где $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$.

Результирующее колебание будет периодическим, если существует такое число T, что имеют место равенства

$$T=r_1T_1 \quad \text{и} \quad T=r_2T_2,$$

где r_1 и r_2 — целые числа. (Число T будет наименьшим, обладающим указанным свойством, если числа r_1 и r_2 не имеют общего делителя.) Отсюда вытекает, что отношение частот должно равняться отношению этих чисел

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{r_2}{r_1}.$$

Следовательно, частоты ω_1 и ω_2 должны быть соизмеримы. Если частоты несоизмеримы, результирующее колебание не является периодическим. Если частоты соизмеримы, то можно положить

$$\omega_1=r_1\omega, \quad \omega_2=r_2\omega.$$

Сложное колебание

$$s=A_1\sin(r_1\omega t+\varphi_1)+A_2\sin(r_2\omega t+\varphi_2)$$

будет периодическим с периодом

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Действительно, функция s не изменяет своего значения от прибавления к любому значению t числа $\frac{2\pi}{\omega}$; если, кроме того, r_1 и r_2 не имеют общего делителя, то легко проверить, что это число будет наименьшим положительным числом, обладающим указанным свойством.

В дальнейшем будем для простоты считать, что $\omega=1$, т. е. период $T=2\pi$. (К этому всегда можно придти, изменив масштаб по оси t, т. е. положив $\omega t=t'$.)

Периодическая функция

$$A_1\sin(r_1t+\varphi_1)+A_2\sin(r_2t+\varphi_2)$$

может иметь весьма своеобразный график, значительно отличающийся от графиков простых гармоник (см., например, рис. 28 на стр. 64). Было замечено, что вообще суммы простых гармоник

$$y=A_1\sin(r_1t+\varphi_1)+A_2\sin(r_2t+\varphi_2)+\ldots+A_n\sin(r_nt+\varphi_n)$$

при различных значениях параметров A_k, φ_k и целых чисел r_k и n приводят к самым разнообразным периодическим функциям. В терминах механики это означает, что наложение простых гармонических колебаний создает разнообразные периодические движения, отнюдь не похожие на простые гармонические колебания.

Естественно, возникла обратная задача: нельзя ли так подобрать простые гармонические колебания, чтобы их наложение вызвало заранее данное периодическое движение, т. е. *нельзя ли представить всякое периодическое движение как сложное гармоническое колебание?*

Оказалось, что этого, как правило, сделать нельзя, если ограничиться конечной суммой простых гармоник. Если же привлечь к рассмотрению бесконечные суммы простых гармоник, т. е. ряды, то практически любую периодическую функцию можно разложить на простые гармоники.

К рассмотрению этой задачи мы сейчас и приступим.

II. Тригонометрические ряды.

Определение. ***Тригонометрическим рядом*** **называется функциональный ряд**

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots,$$

членами которого являются синусы и косинусы от целых кратных значений аргумента x.

Постоянные a_i и b_i называются *коэффициентами* ряда. Мы пишем свободный член ряда в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия последующих формул.

Коротко тригонометрический ряд будем записывать так:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx. \qquad (*)$$

Тригонометрический ряд (*) можно записать и в виде суммы простых гармоник. Действительно, объединим слагаемые с одинаковой частотой:

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Полагая $a_n=A_n\sin\varphi_n$ и $b_n=A_n\cos\varphi_n$, получим

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=A_n\sin(nx+\varphi_n).$$

Запись в таком виде удобна в тех случаях, когда нужно знать амплитуду и начальную фазу n-й гармоники. При этом

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\varphi_n=\frac{a_n}{b_n}.$$

Тогда ряд (*) примет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx+\varphi_n).$$

Иногда n-ю гармонику записывают в несколько ином виде:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \cos (nx - \varphi_n).$$

Здесь по-прежнему амплитуда $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, но начальная фаза φ_n определяется иначе: $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π[1]). Постараемся разложить эту функцию в тригонометрический ряд, т. е. представить ее в виде суммы ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \qquad (*)$$

В дальнейшем мы установим условия, при которых это возможно.

Поскольку функция $f(x)$ (а также ряд (*)) имеет период 2π, то ее можно рассматривать в любом интервале длины 2π. Выберем в качестве основного интервал $(-\pi, \pi)$; на других участках оси Ox функция $f(x)$ (и ряд) будет повторять свои значения и свое поведение в основном интервале $(-\pi, \pi)$.

Выведем некоторые вспомогательные соотношения[2]), с помощью которых будем отыскивать коэффициенты a_i и b_i (в дальнейшем k и p будут означать л ю б ы е ц е л ы е числа):

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = 0$ для любого k;

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = 0,$ если $k \neq 0$.

Действительно,

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = -\frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi}$, что в силу четности функции $\cos x$ равно нулю $(\cos k\pi = \cos(-k\pi))$;

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$, так как $\sin k\pi = \sin(-k\pi) = 0$.

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin px\, dx = 0$ для любых k и p.

---

[1]) Функции произвольного периода T будут рассмотрены ниже, в п. 201.

[2]) Позднее, в п. 205, роль этих соотношений будет объяснена с более общей точки зрения.

$$4)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq p, \\ \pi, & \text{если } k = p \neq 0. \end{cases}$$

$$5)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin px\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq p, \\ \pi, & \text{если } k = p \neq 0. \end{cases}$$

Эти соотношения легко доказываются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\cos kx \sin px = \frac{1}{2}\left[\sin (k+p)\, x + \sin (p-k)\, x\right],$$

$$\cos kx \cos px = \frac{1}{2}\left[\cos (k+p)\, x + \cos (k-p)\, x\right],$$

$$\sin kx \sin px = \frac{1}{2}\left[\cos (k-p)\, x - \cos (k+p)\, x\right].$$

Если только $k \neq p$, то, подставляя в интегралы 3), 4) и 5) вместо произведений тригонометрических функций написанные выражения, мы разобьем каждый из них на сумму двух интегралов. Эти последние будут равны нулю в силу формул 1) и 2), так как $k+p$ и $k-p$ — целые числа, не равные нулю.

Если же $k = p$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx)\, dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

(второй интеграл равен нулю тоже в силу формулы 2)).

Аналогично

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx)\, dx = \pi.$$

Таким образом, соотношения 1)—5) полностью доказаны.

200. Ряды Фурье. Пусть $f(x)$ — какая-нибудь функция, заданная в интервале $(-\pi, \pi)$, относительно которой мы предполагаем, что ее в этом интервале можно разложить в сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \qquad (*)$$

Будем предполагать также, что ряд (*) можно почленно интегрировать, т. е. интеграл от суммы ряда $f(x)$ равен сумме интегралов от членов ряда (*достаточные* условия возможности почленного интегрирования ряда указаны в п. 188).

Интегрируя в пределах от $-\pi$ до π обе части разложения (*), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0.$$

Интегралы от всех остальных членов ряда обратятся в нуль в силу формул 1) и 2) п. **199**. Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Чтобы найти коэффициент a_k, где k — любое целое положительное число, умножим обе части равенства (*) на $\cos kx$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right).$$

Все интегралы в правой части, кроме интеграла при коэффициенте a_k, равны нулю вследствие формул 2), 3) и 4) п. **199**. Интеграл же при a_k равен π. Значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \pi a_k.$$

Отсюда находим a_k:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx. \tag{2}$$

Формула (1) получается из формулы (2) при $k=0$.

Чтобы найти коэффициент b_k, умножим обе части равенства (*) на $\sin kx$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx\right).$$

В силу формул 1), 3) и 5) п. **199** все интегралы в правой части равны нулю, кроме интеграла при коэффициенте b_k. Этот интеграл равен $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin kx\, dx = \pi$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx = \pi b_k \quad \text{и} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx. \quad (3)$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция, заданная в интервале $(-\pi, \pi)$, относительно которой мы только предполагаем, что

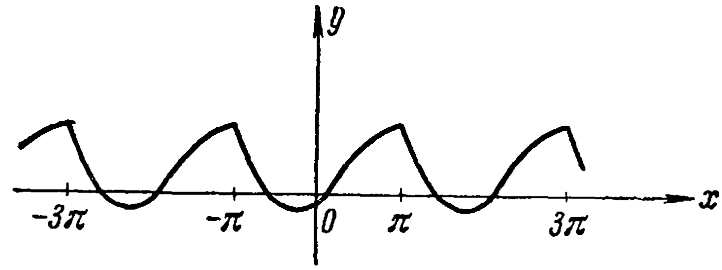

Рис. 231.

существует интеграл от нее в интервале $(-\pi, \pi)$. При этом функция $f(x)$ может иметь точки разрыва.

Определение. ***Коэффициентами Фурье*** **функции $f(x)$ называются числа a_n *и* b_n, определяемые формулами**

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Мы уже отмечали, что сумма ряда Фурье функции $f(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π. Поэтому, если ряд сходится в интервале $(-\pi, \pi)$, то он сходится и при всех остальных значениях x и сумма его периодически повторяет те значения, которые она принимала в основном интервале $(-\pi, \pi)$. Таким образом, сумма ряда Фурье будет представлять функцию $f(x)$, заданную в интервале $(-\pi, \pi)$ и периодически продолженную на всю числовую ось.

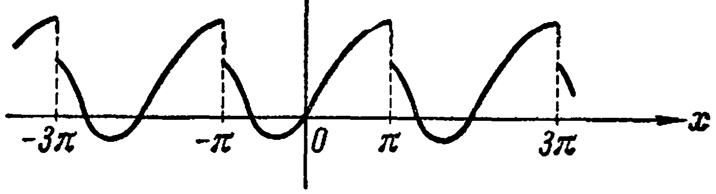

Рис. 232.

Поэтому, говоря в дальнейшем о разложении в ряд Фурье функции, заданной в интервале $(-\pi, \pi)$, всегда будем считать, что речь идет о периодической функции. Если при этом значения функции $f(x)$ на концах основного интервала равны между собой: $f(-\pi) = f(\pi)$, то функция продолжается непрерывно (рис. 231), а если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то при таком продолжении концы основного интервала будут являться точками разрыва функции (рис. 232).

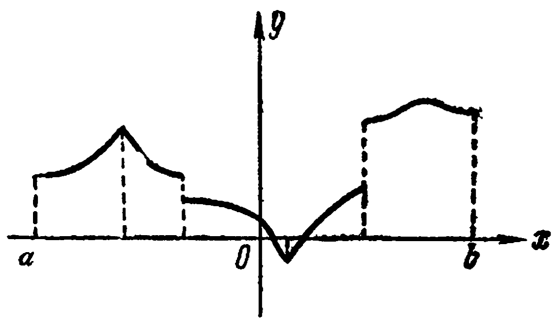

Рис. 233.

Разумеется, еще нельзя утверждать, что образованный ряд Фурье сходится и что его сумма (если он сходится) равна функции $f(x)$. Аналогичную картину мы наблюдали и при разложении функций в ряд Тейлора (см. п. **191**).

Сейчас мы сформулируем условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой именно функцию $f(x)$.

Введем предварительно несколько определений.

Функция $f(x)$ называется гладкой в интервале (a, b), если в этом интервале она непрерывна вместе со своей первой производной $f'(x)$.

Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой в интервале (a, b), если интервал (a, b) можно разбить на конечное число частичных интервалов, в каждом из которых $f(x)$ — гладкая функция.

Графиком гладкой функции является *гладкая линия* (см. п. **66**); на такой линии нет ни угловых точек, ни точек возврата. График кусочно-гладкой функции состоит из конечного числа гладких дуг; такая кривая линия называется *кусочно-гладкой*.

В силу данных определений кусочно-гладкая в интервале (a, b) функция может иметь лишь конечное число точек разрыва 1-го рода (см. п. **33**). Например, функция, график которой изображен на рис. 233, кусочно-гладкая в интервале (a, b).

Напомним, что в точке разрыва первого рода функция имеет предельные значения слева и справа, которые мы условились обозначать $f(x-0)$ и $f(x+0)$.

Сформулируем теперь основную теорему о возможности разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье. Доказывать ее мы не будем.

Теорема. **Если функция $f(x)$ кусочно-гладкая в интервале $(-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ во всех точках, в которых она непрерывна.**

В точках разрыва функции $f(x)$ ряд сходится к среднему арифметическому ее предельных значений слева и справа, т. е. к значению $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, где x_0—точка разрыва первого рода.

В обеих граничных точках интервала сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции при стремлении независимой переменной к этим точкам изнутри интервала

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

В частности, *если функция $f(x)$ гладкая и ее значения на концах интервала $(-\pi, \pi)$ равны между собой, то разложение ее в ряд Фурье справедливо во всем замкнутом интервале.*

Условия основной теоремы могут быть несколько иными: можно требовать, чтобы *функция $f(x)$ имела в интервале $(-\pi, \pi)$ лишь конечное число максимумов и минимумов и была непрерывной, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода* (*условия Дирихле*[1]). При соблюдении этих условий функция также разлагается в ряд Фурье, сходящийся в точках непрерывности функции к самой функции, а в точках ее разрыва (x_0) — к значению $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$. Условия основной теоремы, равно как и условия Дирихле, относятся к очень широкому классу функций. В то время как первые допускают у функции бесконечное множество точек экстремумов, требуя существования непрерывной первой производной (кроме, быть может, конечного числа точек), вторые ограничивают число экстремумов, но зато не предъявляют никаких требований к существованию производной. Любая из функций, употребляемых в анализе и в его применениях, удовлетворяет приведенным условиям. Вместе же они, безусловно, охватывают все возможные функции, какие только обычно могут встретиться, так что *каждая такая функция представима своим рядом Фурье.* Любопытно отметить, что для справедливости предложения о разложимости функции в ряд Фурье одной непрерывности недостаточно. Существуют примеры непрерывных функций, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках.

Обратим внимание читателя на то, что условия, накладываемые на функцию при разложении ее в ряд Фурье, значительно менее стеснительны, чем при разложении в степенной ряд. В самом деле, если функция представлена рядом Тейлора, то она во всем интервале сходимости ряда не только непрерывна, но и бесконечное число раз дифференцируема. Для разложения же функции в ряд Фурье этого вовсе не требуется; нужно только, чтобы существовала и была непрерывной (и то не всюду) первая производная рассматриваемой функции.

Если функция разлагается в ряд Фурье, то можно получить достаточно хорошее ее приближение, взяв конечную сумму членов

---

[1]) Г. Дирихле (1805 — 1859) — известный немецкий математик.

ряда Фурье. По аналогии с рядом Тейлора эта конечная сумма членов называется *многочленом Фурье:*

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Разумеется и здесь встает вопрос о величине ошибки этого приближенного равенства. Однако эта задача более сложная, чем при замене функции многочленом Тейлора, и мы касаться ее не будем.

Тригонометрические ряды находят важное применение в многочисленных разделах математики и доставляют особенно удобные методы для решения трудных задач математической физики[1]). Теория тригонометрических рядов возникла в результате постановки и исследования ряда конкретных проблем механики и физики. Последующее развитие этого замечательного раздела анализа также происходило в теснейшей связи с развитием математической физики.

Учение о разложении функций в тригонометрические ряды называют гармоническим анализом.

201. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Ряд Фурье в произвольном интервале.

I. Разложение четных и нечетных функций. Допустим, что разлагаемая в ряд Фурье функция $f(x)$ — четная. Тогда функции $f(x)\sin kx$ будут нечетными, и все коэффициенты b_k, как интегралы от нечетных функций по интервалу $(-\pi, \pi)$, симметричному относительно начала координат, окажутся равными нулю (см. п. **94**, пример 4). Следовательно, *четная функция имеет ряд Фурье, составленный из одних косинусов:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,$$

ибо $f(x)\cos nx$ — четная функция.

Допустим теперь, что $f(x)$ — нечетная функция. Тогда $f(x)\cos kx$ будут нечетными функциями, и все коэффициенты a_k оказываются нулями. Следовательно, *нечетная функция имеет ряд*

[1]) Особенно велика роль тригонометрических рядов в электротехнике при изучении периодических несинусоидальных токов.

Фурье, составленный из одних синусов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

ибо $f(x)\sin nx$ — четная функция.

II. Разложение функций с произвольным периодом. Рассмотрим теперь задачу о разложении в ряд Фурье функции, заданной в интервале $(-l, l)$, где l — произвольное число.

Если в интервале $(-l, l)$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы п. **200**, то разложение может быть легко получено при помощи замены независимой переменной по формуле $x' = \frac{\pi}{l}x$. Тогда функция $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}x'\right)$, и когда x пробегает интервал $(-l, l)$, переменная x' изменяется в интервале $(-\pi, \pi)$. Разложение этой функции в ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}x'\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx' + b_n \sin nx')$$

или

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x'\right)\cos nx'\,dx' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x'\right)\sin nx'\,dx' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

(В интегралах слева произведена подстановка $\frac{l}{\pi}x' = x$.)

Здесь сумма ряда Фурье — периодическая функция с периодом $T = 2l$.

Частоты последовательных гармоник, составляющих ряд, равны $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$; наименьшая частота $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$.

III. Разложение функций, заданных на половине периода. Пусть требуется разложить в тригонометрический ряд функцию $f(x)$ в интервале $(0, \pi)$ (или, что сводится к этому, в каком-нибудь интервале $(0, l)$). Мы можем *по произволу* продолжить функцию $f(x)$ на интервал $(-\pi, 0)$, но так, чтобы образовавшаяся в этом интервале функция $F(x)$, совпадающая с $f(x)$ в интервале $(0, \pi)$, удовлетворяла условиям основной теоремы. Разложив функцию $F(x)$ в ряд Фурье, получим искомый ряд, представляющий функцию $f(x)$ в интервале $(0, \pi)$; не имеет значения, что он в интервале $(-\pi, 0)$ представляет какую-то другую функцию, по существу не связанную с данной функцией $f(x)$.

В частности, $f(x)$ можно *продолжить четно* на интервал $(-\pi, 0)$; значит, график функции $f(x)$ продолжить симметрично относительно оси Oy. При этом $F(x)$ будет четной функцией и ряд будет состоять только из косинусов. Если же $f(x)$ *продолжить нечетно* на интервал $(-\pi, 0)$ значит, график продолжить симметрично относительно начала координат, то $F(x)$ будет нечетной функцией и ряд будет состоять из одних синусов.

Мы приходим к выводу, что если функцию $f(x)$ можно разложить в тригонометрический ряд, то в интервале $(0, \pi)$ таких ее разложений существует бесчисленное множество. Значит, можно составить сколько угодно сходящихся тригонометрических рядов, представляющих в интервале $(0, \pi)$ одну и ту же функцию, а в интервале $(-\pi, 0)$ самые разнообразные функции.

202. Примеры. 1) Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)$, определенную в интервале $(-\pi, \pi)$ так:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -\pi<x<0,\\ 1 & \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$$

График этой функции, периодически продолженный на всю ось Ox, изображен на рис. 234. Ясно, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы о разложении. Поскольку она нечетна, все коэффициенты $a_n=0$.

Найдем коэффициенты b_n. Согласно п. **201**, I имеем

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^\pi=-\frac{2}{\pi n}(\cos n\pi-1),$$

или

$$b_n=\frac{2}{\pi n}(1-\cos\pi n).$$

Так как $\cos\pi n=(-1)^n$, то, полагая последовательно $n=1, 2, 3, \ldots$, найдем

$$b_1=\frac{4}{\pi},\quad b_2=0,\quad b_3=\frac{4}{3\pi},\quad b_4=0,\quad b_5=\frac{4}{5\pi}\ \text{ и т. д.}$$

Таким образом,

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\right).$$

Согласно основной теореме сумма ряда в правой части равна 1 при $0 < x < \pi$ и -1 при $-\pi < x < 0$. При $x = 0$, а также в точках $\pm\pi$ сумма ряда, как это ясно видно, равна нулю, что опять-таки соответствует теореме о разложении. Аналогично ряд ведет себя в любом интервале, отличающемся от основного интервала $(-\pi, \pi)$ целым числом периодов.

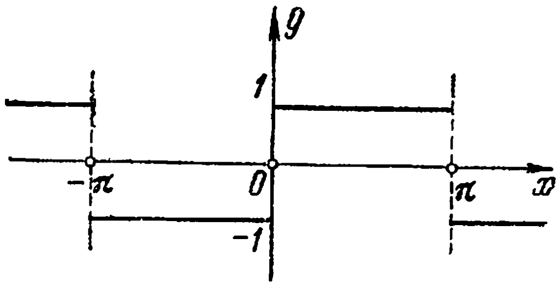

Рис. 234.

Интересно проследить, каким образом график функции приближается графиками последовательных частичных сумм полученного ряда.

На рис. 235 пунктиром показаны последовательные гармоники ряда и сплошной линией—графики соответствующих частичных сумм.

Пользуясь найденным разложением функции $f(x)$, легко написать ряд Фурье для функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} a & \text{при } -\pi < x < 0, \\ b & \text{при } \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Для этого достаточно заметить, что

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}.$$

(Указанная замена означает, что мы перенесли начало координат в точку $\left(0, \frac{a+b}{2}\right)$ и изменили масштаб по оси Oy.) Тогда

$$\varphi(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{2(b-a)}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$

2) Разложим в ряд Фурье функцию

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi.$$

График этой функции, периодически продолженный на всю числовую ось, изображен на рис. 236. Поскольку функция $f(x)$ четная, то все коэффициенты $b_n = 0$. По формулам п. **201**, I имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \pi, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}\,dx\right] = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\quad(\cos\pi n - 1).$$

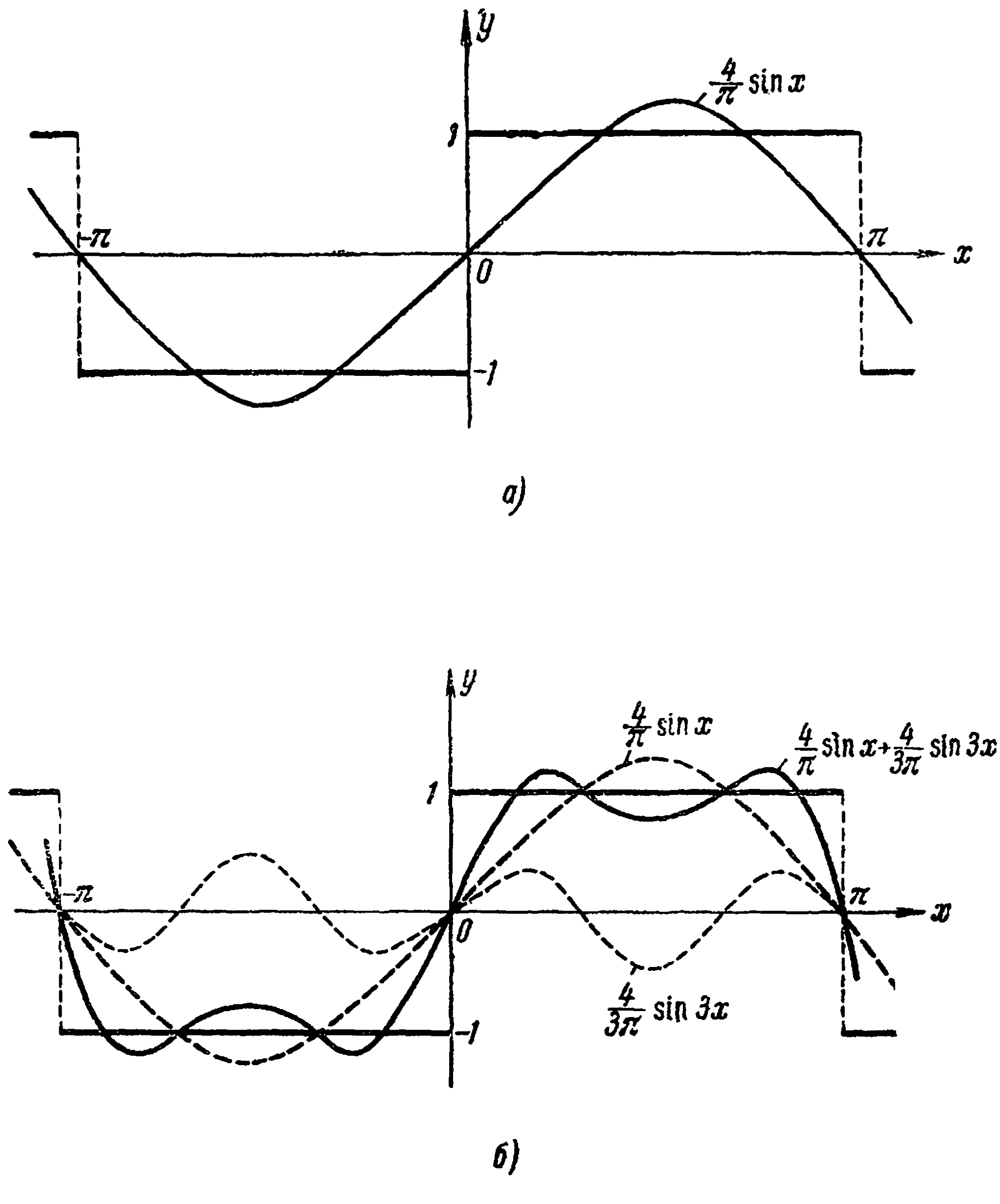

Рис. 235.

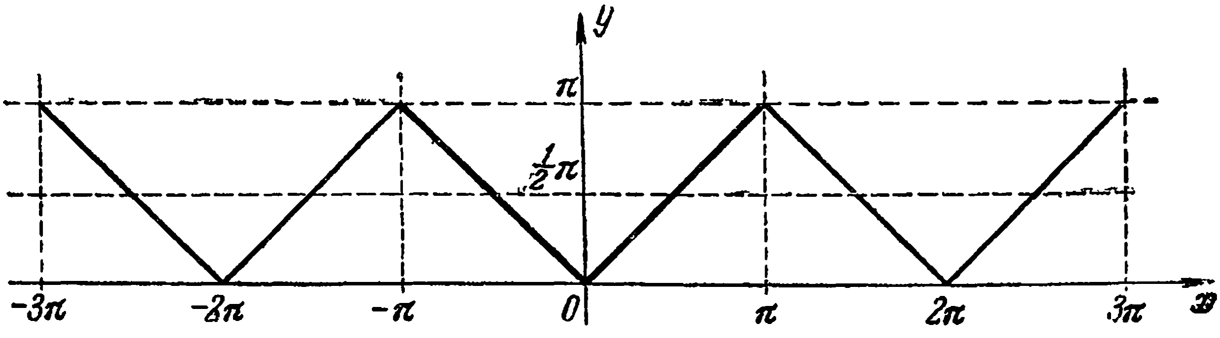

Рис. 236.

Отсюда

$$a_1 = -\frac{4}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4}{3^2\pi}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{4}{5^2\pi} \text{ и т. д.}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right).$$

Приближение функции $f(x)$ последовательными частичными суммами ряда Фурье показано на рис. 237.

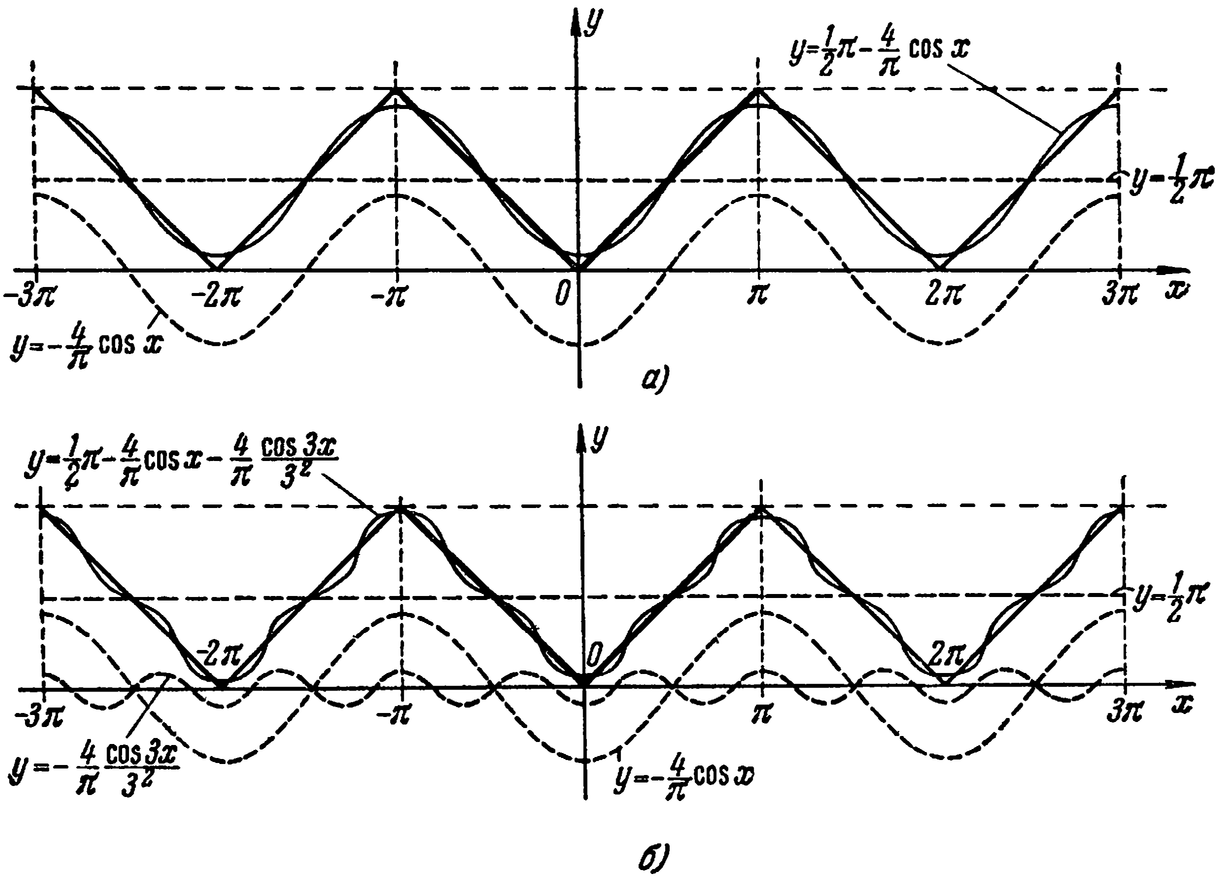

Рис. 237.

При $x = 0$ получается интересный числовой ряд для числа π. Имеем

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right),$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Из этой формулы получаются некоторые другие. Положим

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots, \qquad \sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right).$$

Мы имеем

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2,\ \sigma_2=\frac{1}{4}\sigma=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2),$$

или

$$3\sigma_2=\sigma_1, \text{ т. е. } \sigma_2=\frac{\pi^2}{24}.$$

Значит,

$$\sigma=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

В п. **184** мы доказали, что ряд обратных квадратов сходится, теперь же сумели найти его сумму.

3) Разложим в ряд Фурье функцию

$$f(x)=x, \quad -\pi<x<\pi.$$

График этой функции, продолженной на всю числовую ось, состоит из параллельных отрезков (рис. 238). Так как функция нечетна, то находим только b_n. Имеем

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\frac{\cos nx}{n}dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos n\pi}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^\pi\right]=-\frac{2\cos\pi n}{n}.$$

Полагая последовательно $n=1,\ 2,\ 3,\ldots,$ получим $b_1=2$, $b_2=-\frac{2}{2}$, $b_3=\frac{2}{3},\ldots$

Итак,

$$f(x)=$$
$$=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right).$$

Это равенство справедливо при $-\pi<x<\pi$. В точках $x=\pm\pi$ сумма ряда равна нулю.

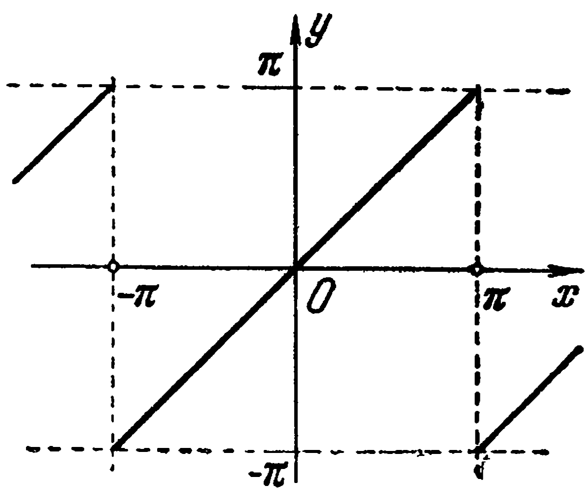

Рис. 238.

Отметим, что в интервале $(0, \pi)$ функции примеров 2 и 3 представляют одну и ту же функцию. Обе они в этом интервале просто равны x. Однако поскольку в интервал $(-\pi, 0)$ они продолжены по-разному: первая — четно, а вторая — нечетно, то и их разложения в ряды Фурье получаются различными.

4) Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)$, определенную в интервале $(-\pi, \pi)$ так:

$$f(x)=\begin{cases} ax & \text{при} \quad -\pi < x \leqslant 0, \\ bx & \text{при} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

где a и b — постоянные. Графиком $f(x)$ является ломаная, состоящая из двух отрезков прямых: $y=ax$ и $y=bx$ (на рис. 239 $a<0$ и $b>0$).

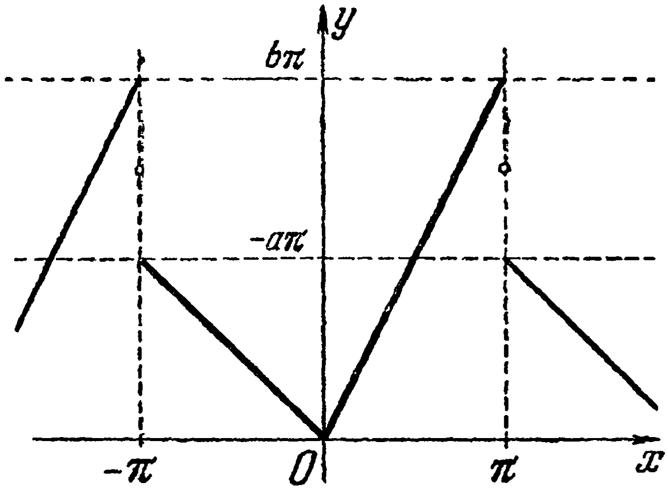

Рис. 239.

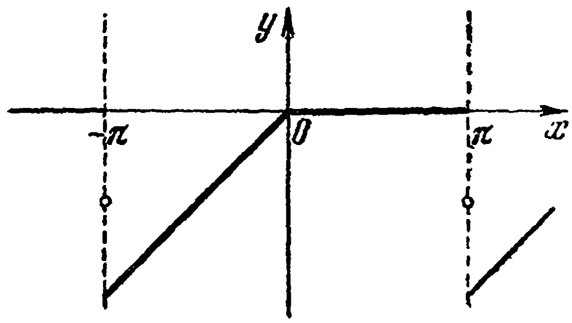

Рис. 240.

Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$. При $n \neq 0$ имеем

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} bx\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{a}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\right)+\frac{b}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{a}{\pi n^2}(1-\cos\pi n)+\frac{b}{\pi n^2}(\cos\pi n-1)=\frac{a-b}{\pi n^2}[1-(-1)^n],$$

т. е.

$$a_1=\frac{a-b}{\pi}\cdot 2, \qquad a_2=0, \qquad a_3=\frac{a-b}{\pi\cdot 3^2}\cdot 2, \qquad a_4=0, \ldots$$

При $n=0$ имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} bx\,dx=\frac{b-a}{2}\pi.$$

Далее,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} bx\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{a}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\right)+\frac{b}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{a}{\pi}\,\frac{-\pi}{n}\cos\pi n-\frac{b}{\pi}\,\frac{\pi}{n}\cos\pi n=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1},$$

т. е.

$$b_1=\frac{a+b}{1},\ b_2=-\frac{a+b}{2},\ b_3=\frac{a+b}{3},\ b_4=-\frac{a+b}{4},\ \ldots$$

Таким образом, ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{b-a}{4}\pi+\left(\frac{a-b}{\pi}\cdot 2\cos x+\frac{a+b}{1}\sin x\right)-\frac{a+b}{2}\sin 2x+$$
$$+\left(\frac{a-b}{\pi}\cdot\frac{2}{3^2}\cos 3x+\frac{a+b}{3}\sin 3x\right)-\frac{a+b}{4}\sin 4x+\ldots$$

или

$$f(x)=\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2(a-b)}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\ldots\right)+$$
$$+(a+b)\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right).$$

В интервале $(-\pi,\ \pi)$ ряд представляет функцию $f(x)$, а в точках $x=\pm\pi$ он равен

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=$$
$$=\frac{-a\pi+b\pi}{2}=\pi\frac{b-a}{2}.$$

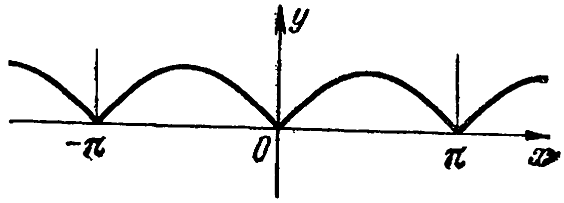

Рис. 241.

Нетрудно заметить, что функции примеров 2 и 3 являются частными случаями последнего примера. Полагая $a=-1$, $b=1$, мы получим функцию примера 2, а при $a=b=1$ — функцию примера 3.

Пусть $a=1$, $b=0$. Тогда

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } -\pi<x\leqslant 0,\\ 0 & \text{при } \quad 0<x<\pi \end{cases}$$

(рис. 240). В этом случае получаем ряд

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\ldots\right)+$$
$$+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right).$$

Этот ряд в интервале $(-\pi,\ 0)$ равен x, а в интервале $(0,\ \pi)$ сходится к нулю. При $x=\pm\pi$ сумма его равна $-\frac{\pi}{2}$.

5) Найдем ряд Фурье функции $f(x)=|\sin x|$ (рис. 241). Эта функция получается при «четном продолжении» функции $\sin x$ из интервала $(0,\ \pi)$ в интервал $(-\pi,\ 0)$. Поэтому

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетное}, \\ \dfrac{-4}{\pi(n^2-1)}, & \text{если } n \text{ четное}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \ldots + \frac{1}{(2n)^2-1}\cos 2nx + \ldots\right).$$

Функция $f(x) = |\cos x|$ получается из предыдущей переносом начала отсчета:

$$|\cos x| = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

Поэтому

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{3}\cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{15}\cos 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots\right] =$$
$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{15}\cos 4x + \ldots\right).$$

6) Разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ при $-1 < x < 1$. Период этой функции, продолженной на всю числовую ось, равен 2. Пользуясь формулами п. **201**, II и учитывая четность функции, имеем

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}, \qquad a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x\,dx =$$
$$= 2\left[\frac{x^2 \sin \pi nx}{\pi n} + \frac{2x\cos \pi nx}{\pi^2 n^2} - \frac{2\sin \pi nx}{\pi^3 n^3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos \pi n.$$

Отсюда

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x - \frac{1}{2^2}\cos 2\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x - \ldots\right).$$

§ 2. Дополнительные вопросы теории рядов Фурье. Практический гармонический анализ

203*. Равенство Парсеваля[1]**. Среднее значение квадрата периодической функции.** Пусть $f(x)$ — функция, заданная в интервале $(-\pi, \pi)$ и удовлетворяющая условиям основной теоремы п. **200**.

---

[1]) М. Парсеваль — французский математик первой половины XIX века.

Разложим ее в ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx.$$

Возведем теперь обе части равенства в квадрат и возьмем интеграл в пределах от $-\pi$ до π. При этом мы не будем останавливаться на доказательстве законности всех действий, производимых над бесконечным рядом в правой части:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx\right]^2 dx. \qquad (*)$$

При возведении в квадрат суммы будут получаться квадраты слагаемых и удвоенные парные произведения. Интегралы от парных произведений будут равны нулю в силу формул п. **199**; по тем же формулам интегралы от $\cos^2 nx$ и $\sin^2 nx$ равны π. Деля еще обе части равенства (*) на π, окончательно получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Это равенство называется *формулой Парсеваля*; оно позволяет найти среднее значение квадрата периодической функции за один период.

204*. Ряды Фурье в комплексной форме. Используя комплексные числа и формулы Эйлера, можно придать ряду Фурье функции $f(x)$ в интервале $(-\pi, \pi)$ удобную и легко запоминаемую форму. Пусть

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx).$$

Заменим по формулам Эйлера $\cos nx$ и $\sin nx$:

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}(a_n-ib_n)+e^{-inx}(a_n+ib_n). \qquad (*)$$

Обозначим комплексное число $a_n - ib_n$ через c_n:

$$c_n = a_n - ib_n.$$

По формулам для a_n и b_n (см. п. 200)

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx. \qquad (**)$$

Комплексное число $a_n + ib_n$ является сопряженным к c_n:

$$a_n + ib_n = \overline{c_n}.$$

Формула для $\overline{c_n}$ получается из формулы для c_n, если в ней заменить n на $-n$. Поэтому мы обозначим

$$\overline{c_n} = c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx. \qquad (***)$$

Так как $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, то оно находится по формуле (**) при $n = 0$; поэтому можно считать, что $a_0 = c_0$.

С учетом введенных обозначений ряд (*) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$$

или еще короче:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad \text{где } c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx.$$

Здесь индекс суммирования n пробегает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Так как комплексное число e^{-inx} является сопряженным к e^{inx}, то члены ряда, отвечающие индексам n и $-n$, представляют комплексные выражения

$$\frac{1}{2}c_n e^{inx} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}c_{-n}e^{-inx} = \frac{1}{2}\overline{c_n e^{inx}}.$$

Сумма их дает действительную величину — n-ю гармонику. При этом $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ является амплитудой этой гармоники[1]).

Формула (**) может служить и для вычисления коэффициентов ряда Фурье, если воспользоваться правилом интегрирования комп-

---

[1]) В электротехнике при изучении несинусоидальных токов важную роль играет изучение амплитудного спектра функции, т. е. зависимости $|c_n|$ от n.

лексных функций (см. п. **93**). При подстановке пределов интегрирования нужно помнить, что

$$e^{in\pi}=e^{-in\pi}=\cos n\pi=(-1)^n.$$

Пример. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)=e^x$ в интервале $(-\pi,\ \pi)$. Имеем

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^xe^{-inx}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x(1-in)}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left.\frac{e^{x(1-in)}}{1-in}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi(1-in)}(e^{\pi}e^{-in\pi}-e^{-\pi}e^{in\pi})=\frac{(-1)^n}{\pi(1-in)}(e^{\pi}-e^{-\pi}).$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{inx}}{1-in}.$$

Если мы хотим перейти к обычной форме ряда Фурье, то, как уже говорилось, надо объединить слагаемые, отвечающие индексам n и $-n$:

$$(-1)^n\frac{e^{inx}}{1-in}+(-1)^{-n}\frac{e^{-inx}}{1+in}=(-1)^n\frac{e^{inx}+e^{-inx}+ni(e^{inx}-e^{-inx})}{1+n^2}=$$

$$=(-1)^n\frac{2\cos nx-2n\sin nx}{1+n^2}.$$

Тогда будем иметь:

$$f(x)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right].$$

Рекомендуем читателю получить разложение e^x обычным способом и убедиться в тождественности результатов.

Комплексную форму ряда Фурье можно записать для любого интервала $(-l,\ l)$:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\omega_nx},\quad \text{где}\quad c_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,e^{-i\omega_nx}\,dx\quad \text{и}\quad \omega_n=\frac{\pi n}{l}.$$

Читатель легко самостоятельно проверит правильность результата.

205*. Ортогональные системы функций. Рассмотрим сейчас вкратце задачу более общую, чем разложение функций в ряды Фурье. Именно рассмотрим задачу о разложении функций в ряды по *ортогональной системе функций*. Будем в дальнейшем считать, что функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$ определены и непрерывны в некотором интервале $[a,\ b]$.

Определение. **Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ называется ортогональной в интервале $[a, b]$, если интеграл от произведения любых двух различных функций системы равен нулю:**

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \quad n \neq m.$$

Обозначим через k_n интеграл от квадрата функции $\varphi_n(x)$:

$$k_n = \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx.$$

Все числа k_n положительны.

Если каждую из функций $\varphi_n(x)$ умножить на величину $\frac{1}{\sqrt{k_n}}$, то новые функции

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{k_1}}\varphi_1(x), \quad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{k_2}}\varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{k_n}}\varphi_n(x), \ldots$$

будут, разумеется, снова образовывать ортогональную систему. Кроме того, интеграл от квадрата каждой из функций будет равен единице:

$$\int_a^b \psi_n^2(x)\,dx = \frac{1}{k_n}\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1.$$

Таким образом, функции $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots$ удовлетворяют условиям

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases} \qquad (*)$$

Такую систему функций будем называть *ортогональной нормированной системой*.

Примеры. 1) Система функций $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ в интервале $[-\pi, \pi]$ будет ортогональной системой. Это вытекает из формул 1)—5) п. **199**. Из тех же формул следует, что система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

будет ортогональной и нормированной.

2) Система функций $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$ будет ортогональной в интервале $[0, \pi]$.

Действительно, если $m \neq n$, то

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx = \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right]\Bigg|_0^\pi = 0$$

(см. формулу 62 таблицы интегралов). Так как

$$\int_0^\pi \sin^2 nx\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{2n}\right]\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

то, чтобы эту систему нормировать, надо все функции разделить на $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3) Система функций 1, $\cos x$, $\cos 2x$, ... , $\cos nx$, ... будет ортогональной в интервале $[0, \pi]$. Рекомендуем читателю проверить это самостоятельно.

Пусть теперь $f(x)$ — некоторая функция, определенная в интервале $[a, b]$. Предположим, что ее можно представить в этом интервале в виде ряда, расположенного по функциям $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_n(x)$, ... , ортогональным и нормированным в этом интервале, т. е.

$$f(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots + c_n\psi_n(x) + \ldots \qquad (**)$$

Чтобы найти *коэффициенты разложения*, умножим последовательно обе части равенства (**) на функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... , $\psi_n(x)$, ... и проинтегрируем по интервалу $[a, b]$. При этом мы считаем, что ряд справа можно интегрировать почленно. В силу соотношений (*) получим

$$\int_a^b f(x)\psi_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \psi_k(x)\psi_n(x)\,dx = c_n.$$

Коэффициенты c_n, определяемые по этим формулам, называются *коэффициентами разложения функции $f(x)$ относительно заданной ортогональной системы.* Мы не останавливаемся на вопросе о том, когда разложение (**) возможно.

Если, в частности, функции $\psi_n(x)$ суть тригонометрические функции примера 1, то ряд (**) будет просто рядом Фурье функции $f(x)$.

Разложения в ряды по ортогональным системам функций встречаются при решении многих важных задач математической физики; некоторые из них приведены в книге [5].

206. Практический гармонический анализ. Шаблоны. Если функция задана аналитическим выражением, то при помощи интегрирования можно вычислить ее коэффициенты Фурье и построить соответствующий тригонометрический ряд. Но в практике часто встречаются случаи, когда функция задается графически или таблично.

Так обычно получают функцию, описывающую исследуемый процесс, в результате эксперимента. Данные этого эксперимента заносятся или в таблицу, или на график, который иногда образуется и автоматически, в самопишущих приборах. Задача, возникающая перед исследователем, состоит в отыскании соответствующего аналитического выражения для функции. Для этой цели могут быть употреблены тригонометрические ряды, поскольку есть уверенность, что

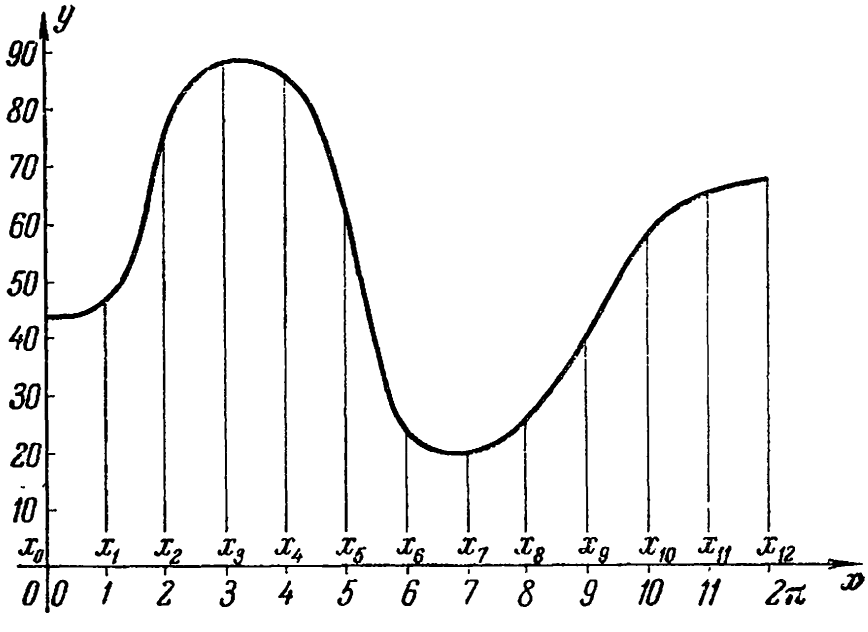

Рис. 242.

эта функция приближенно и достаточно точно может быть выражена суммой конечного числа первых членов ее ряда Фурье. Весь вопрос заключается в нахождении коэффициентов Фурье функции. Он может быть решен применением одного из способов приближенного вычисления интегралов.

Методы приближенного разложения функции, заданной графически или таблично, в ряд Фурье составляют, как говорят, *практический гармонический анализ*.

Для упрощения вычислений коэффициентов Фурье разработаны различные способы, учитывающие особенности подлежащих вычислению интегралов.

Эти способы схематизируют операцию приближенного вычисления коэффициентов Фурье. Ниже мы вкратце даем представление об одном из этих способов, использующем так называемые шаблоны.

Пусть в интервале $(0, 2\pi)$ задана функция $y=f(x)$. Мы считаем, что при любом задании функции график ее нам известен. При этом в случае необходимости систему координат Oxy следует параллельным сдвигом перенести так, чтобы весь график был расположен над осью Ox и как можно ближе к ней (рис. 242). Это скажется только на свободном члене в разложении Фурье, а вместе с тем позволит избежать как отрицательных, так и слишком больших положительных значений функции.

0	44	—	—
1	46	40	23
2	76	66	38
3	88	—	—
4	86	75	43
5	63	55	36,5
6	24	—	—
7	20	17	10
8	26	22	13
9	40	—	—
10	58	50	29
11	65	51	32,5

Приближенное представление функции в виде многочлена Фурье требует отыскания первых коэффициентов Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Для вычисления интегралов применяется одна из формул для численного интегрирования, обычно самая простая из них — **формула прямоугольников**. Интервал $(0, 2\pi)$ делится на n равных частей с помощью точек $x_0 = 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = 2\pi$, $x_i = i\frac{2\pi}{n}$, $\Delta x = \frac{2\pi}{n}$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} a_k &\approx \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos kx_i, \\ b_k &\approx \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin kx_i, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где $y_i = f(x_i)$.

Принимая во внимание особенности множителей $\cos kx_i$ и $\sin kx_i$, берут n чаще всего равным 12 или 24 или, если есть надобность в большей точности, 48. Мы здесь возьмем $n = 12$. Читатель легко проверит, что при этом в формулах (*) каждое из 12 учитываемых значений функции умножается лишь на одно из следующих чисел:

$$\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = 0{,}87,$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}50, \quad \cos\frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0,$$

взятое со знаком + или —.

Укажем практически удобную схему вычислений с помощью шаблонов (схема для 12 ординат).

Прежде всего составляется таблица из четырех столбцов и 12 строк. В первом столбце последовательно проставляются номера точек деления интервала $(0,\ 2\pi)$; во втором — выписываются соответствующие этим точкам ординаты, снимаемые прямо с графика (если функция задана графически), причем удобно выбрать столь мелкий масштаб, чтобы ординаты могли быть выражены целыми числами; в третьем столбце помещаются произведения соответствующих ординат на $\cos 30^\circ = 0{,}87$; в четвертом — произведения ординат на $\cos 60^\circ = 0{,}50$ (кроме строк, отмеченных номерами 0, 3, 6, 9, клетки которых прочеркиваются, так как они соответствуют произведению ординат на косинусы дуг, кратных π или $\frac{\pi}{2}$).

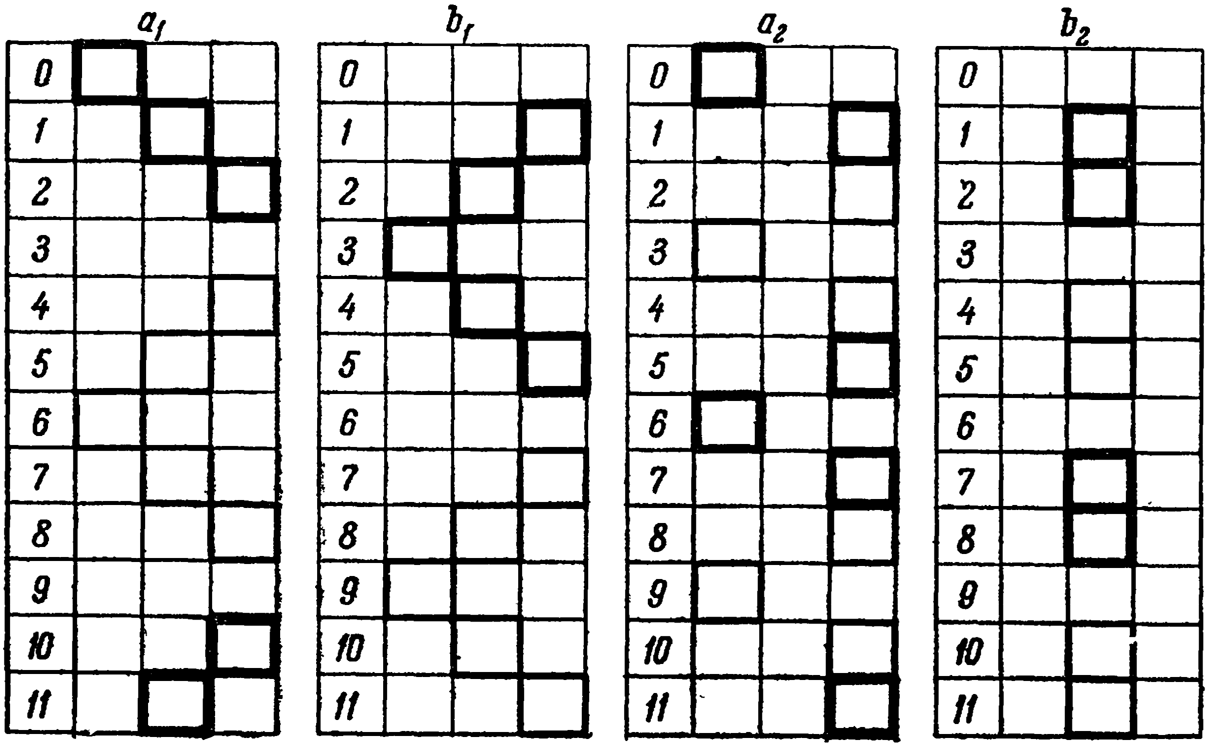

Рис. 243.

После того как таблица оказалась заполненной (она приготавливается для каждой заданной функции), можно приступить с помощью шаблонов к вычислению коэффициентов Фурье. Для коэффициента a_0, впрочем, не требуется шаблонов; он вычисляется как сумма чисел второго столбца, деленная на 6. Для вычисления других коэффициентов (a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_6, b_6) используются шаблоны из прозрачного материала, являющиеся точной копией (только без чисел) приведенной выше таблицы и заготовленные раз и навсегда для каждого коэффициента в отдельности. Те клетки данного шаблона, которые соответствуют положительным слагаемым в формулах (*), отмечаются иначе, чем те клетки, которые соответствуют отрицательным слагаемым. (Первые можно, например, обвести одной краской или жирной линией, а вторые — другой краской или тонкой линией.)

На рис. 243 даны шаблоны для первых четырех коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 (в схеме для 12 ординат). Рекомендуем читателю самостоятельно разобрать их устройство, пользуясь формулами (*).

Накладывая шаблон, соответствующий коэффициенту a_k или b_k, на таблицу, мы выбираем из нее числа, занимающие клетки, обведенные жирной линией, а также числа, занимающие клетки, обведенные тонкой линией. Складывая отдельно первую и вторую группы чисел и вычитая из первой суммы вторую, получаем $6a_k$, так что для вычисления a_k остается только результат разделить на 6. В приведенном примере находим:

$$a_0 = \frac{44+46+76+88+86+63+24+20+26+40+58+65}{6} = \frac{636}{6} = 106,$$

$$a_1 = \frac{(44+40+38+29+51)-(43+55+24+17+13)}{6} = \frac{50}{6} \approx 8{,}3,$$

$$b_1 = \frac{(23+66+88+75+36{,}5)-(10+22+40+50+32{,}5)}{6} = \frac{134}{6} \approx 22{,}3,$$

$$a_2 = \frac{(44+23+36{,}5+24+10+32{,}5)-(38+88+43+13+40+29)}{6} =$$

$$= -\frac{81}{6} \approx -13{,}5,$$

$$b_2 = \frac{(40+66+17+22)-(75+55+50+51)}{6} = -\frac{86}{6} \approx -14{,}3.$$

Таким образом получаем приближенное выражение функции в виде тригонометрического многочлена второго порядка

$$f(x) \approx 53 + (8{,}3 \cos x + 22{,}3 \sin x) - (13{,}5 \cos 2x + 14{,}3 \sin 2x).$$

§ 3*. Интеграл Фурье

207*. Интеграл Фурье. В п. **201**, II мы видели, что разложение функции $f(x)$, заданной в интервале $(-l, l)$, в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x, \text{ где } \omega_n = \frac{\pi n}{l}$$

и
$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \omega_n t \, dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \omega_n t \, dt.$$

(Для удобства в интегралах, определяющих коэффициенты a_n и b_n, переменная интегрирования обозначена буквой t.)

Подставляя выражения для a_n и b_n в ряд Фурье, получим

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\omega_n t\cos\omega_n x+\sin\omega_n t\sin\omega_n x\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(t-x)\,dt. \qquad (*)$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и не является периодической. Мы будем считать при этом, что она в любом интервале $(-l, l)$ может быть разложена в ряд Фурье и что несобственный интеграл от абсолютной величины этой функции сходится:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt=Q.$$

Рассмотрим сначала функцию $f(x)$ в интервале $(-l, l)$; на основании сделанных предположений ее можно разложить в ряд Фурье, который мы запишем в виде $(*)$. Будем теперь неограниченно увеличивать l и посмотрим, во что при этом перейдет формула $(*)$ для фиксированного значения x. Первое слагаемое формулы будет при $l\to\infty$ стремиться к нулю:

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt<\frac{Q}{2l}\to 0.$$

(Неравенство между интегралами доказано в п. **90**.)

Введем обозначение:

$$\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{\pi}{l}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда оставшаяся сумма перепишется так:

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(t-x)\,dt.$$

Заметим, что интеграл $\varphi(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt$ сходится, так как подынтегральная функция по абсолютной величине не превосходит функции $|f(t)|$, интеграл от которой сходится. Более того, как функция параметра ω он сходится правильно, и поэтому $\varphi(\omega)$ — непрерывная функция, если только непрерывна $f(t)$ (см. п. 137). Когда l очень велико, можно считать, что интеграл $\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(t-x)\,dt$ почти равен значению функции $\varphi(\omega)$ при $\omega=\omega_n$, т. е.

$$\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(t-x)\,dt \approx \varphi(\omega_n).$$

Написанная выше сумма перепишется теперь так:

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\,\Delta\omega.$$

В сумме $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\,\Delta\omega$ величина $\Delta\omega=\frac{\pi}{l}$ стремится к нулю при $l\to\infty$, а переменная ω_n пробегает при этом все значения от 0 до ∞. Следовательно, можно считать, что эта сумма будет стремиться к интегралу

$$\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\omega)\,d\omega=\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt.$$

Подставляя все в формулу для $f(x)$, получаем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \qquad (**)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, называется *интегралом Фурье.*

Точное доказательство формулы (**) требует более сложных рассуждений, которые мы опускаем. Отметим только, что в тех точках, где функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, интеграл Фурье (так же, как и ряд Фурье) дает значение $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, где x_0 — точка разрыва.

Так как $\cos\omega(t-x)=\cos\omega t\cos\omega x+\sin\omega t\sin\omega x$, то формулу (**) можно переписать в виде

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cos\omega x\,d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\sin\omega x\,d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt. \qquad (***)$$

Обозначим внутренние интегралы через $A(\omega)$ и $B(\omega)$:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt,\qquad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Тогда

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega.$$

В этой формуле мы имеем *разложение функции* $f(x)$ *в бесконечном интервале* $(-\infty, \infty)$ *на гармонические колебания, частоты которых* ω *непрерывно меняются от 0 до* ∞.

Когда функция была периодической, ее разложение в ряд Фурье состояло из отдельных гармоник с частотами $\omega_n=\frac{\pi n}{l}$, отличающимися друг от друга на постоянное число $\Delta\omega=\frac{\pi}{l}$. Каждая такая гармоника имела определенную амплитуду. Зависимость амплитуды от частоты называется *амплитудным спектром* функции. Как говорят, периодическая функция имеет *дискретный* спектр (т. е. она может быть представлена в виде отдельных гармоник). Аналогично говорят, что непериодическая функция имеет непрерывный спектр; частоты образующих ее гармоник изменяются *непрерывно*. Функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ дают закон распределения амплитуд (и начальных фаз) в зависимости от частоты ω.

Подробно на этом вопросе мы останавливаться не будем; отметим только, что он играет большую роль в приложениях интеграла Фурье к изучению непериодических процессов.

208*. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций. Вернемся снова к формуле (***) п. **207**

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\omega x\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Предположим, что функция $f(x)$ — четная. Тогда функция $f(x)\sin\omega x$ — нечетная и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$ будет равен нулю. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=2\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt.$$

Поэтому для четных функций

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\omega x d\omega \int_0^\infty f(t)\cos\omega t\, dt.$$

Если же $f(x)$ — функция нечетная, то точно так же получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega x\, d\omega \int_0^\infty f(t)\sin\omega t\, dt.$$

Если функция $f(x)$ определена только в интервале $(0, \infty)$, то ее можно продолжить в интервал $(-\infty, 0)$ как четным, так и нечетным образом, т. е. представить ее различными интегралами Фурье. Очень часто приходится также рассматривать функцию, равную $f(x)$ при $x>0$ и нулю при $x<0$. Ясно, что интеграл Фурье такой функции будет равен полусумме ее интегралов Фурье, полученных при четном и нечетном продолжении функции $f(x)$. Действительно, при $x>0$ оба эти интеграла, а также их полусумма будут равны $f(x)$ $\left(\text{в точках разрыва: } \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right)$. Если же $x<0$, то первый из них будет равен $f(x)$, а второй будет равен $-f(x)$, полусумма же их будет равна нулю.

Примеры. 1) Представим в виде интеграла Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0\leqslant x<1, \\ 0 & \text{при } x>1, \end{cases}$$

продолжив ее четным и нечетным образом.

Если продолжение четное, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\omega x\, d\omega \int_0^1 \cos\omega t\, dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}\, d\omega.$$

Отсюда, кстати, следует, что

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}\, d\omega=\begin{cases} 1 & \text{при } -1<x<1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } x=\pm 1, \\ 0 & \text{при } x<-1 \text{ и } x>1. \end{cases}$$

Если продолжение функции $f(x)$ нечетное, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega x\, d\omega \int_0^1 \sin\omega t\, dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega x(1-\cos\omega)}{\omega}\, d\omega.$$

Наконец, представление в виде интеграла Фурье функции, равной $f(x)$ при $x>0$ и нулю при $x<0$ (рис. 244), таково:

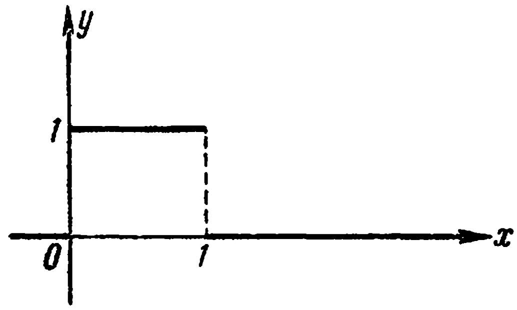

Рис. 244.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\cos\omega x\,\frac{\sin\omega}{\omega}+\sin\omega x\,\frac{1-\cos\omega}{\omega}\right)d\omega.$$

2) Представим в виде интеграла Фурье функцию ($\beta>0$)

$$f(x)=e^{-\beta x}\quad\text{при}\quad x>0,$$

продолжая ее на отрицательную полуось так же, как в примере 1. При четном продолжении (см. формулу 74 таблицы интегралов)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos\omega x\,d\omega\int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega}{\omega^2+\beta^2}\cos\omega x\,d\omega.$$

При нечетном продолжении с помощью формулы 73 получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\sin\omega x\,d\omega\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega}{\omega^2+\beta^2}\sin\omega x\,d\omega.$$

Так как $f(0)=1$, то при нечетном продолжении при $x=0$ будет точка разрыва. Поэтому интеграл Фурье при $x=0$ равен не $f(0)=1$, а нулю — полусумме значений функции с обеих сторон точки разрыва. Наконец, функция

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-\beta x} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x<0\end{cases}$$

представится в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\beta\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{\omega^2+\beta^2}\,d\omega.$$

209*. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье. Представление интеграла Фурье в комплексной форме совершенно аналогично комплексному представлению ряда Фурье. По формуле (***) п. **207** имеем

$$f(x)=\int_0^\infty[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega,$$

где

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega t\,dt,\qquad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Заменим в интеграле Фурье $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$ по формулам Эйлера. Получим

$$f(x)=\int_0^\infty\left[A(\omega)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+B(\omega)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\{[A(\omega)-iB(\omega)]\,e^{i\omega x}+[A(\omega)+iB(\omega)]\,e^{-i\omega x}\}\,d\omega.$$

Введем обозначение $\pi[A(\omega)-iB(\omega)]=F(\omega)$. Согласно формулам для $A(\omega)$ и $B(\omega)$ найдем

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(\cos\omega t-i\sin\omega t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}dt. \qquad (*)$$

Далее,

$$\pi[A(\omega)+iB(\omega)]=\overline{F(\omega)}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\omega t}dt.$$

Если обозначить $\overline{F(\omega)}=F(-\omega)$, то формула (*) будет определять $F(\omega)$ при всех ω, как положительных, так и отрицательных. Подставив функцию $F(\omega)$ в интеграл Фурье, получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty[F(\omega)\,e^{i\omega x}+F(-\omega)\,e^{-i\omega x}]\,d\omega.$$

Интеграл от второго слагаемого можно записать так:

$$\int_0^\infty F(-\omega)\,e^{-i\omega x}d\omega=\int_0^{-\infty}F(\omega)\,e^{i\omega x}d(-\omega)=\int_{-\infty}^0 F(\omega)\,e^{i\omega x}d\omega.$$

Поэтому окончательно

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{i\omega x}d\omega, \qquad \text{где} \quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}dt.$$

Интересно сравнить полученный результат с рядом Фурье в комплексной форме (см. п. **204**). Для функции $f(x)$, заданной в интервале $(-l, l)$, мы имели

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}, \qquad \text{где} \quad c_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,e^{-i\omega_n t}dt \quad \text{и} \quad \omega_n=\frac{\pi n}{l}.$$

Здесь же числа c_n заменяются функцией

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt,$$

непрерывно изменяющейся вместе с ω, а сумма выражений $c_n e^{i\omega_n x}$ заменяется интегралом.

Комплексная функция $F(\omega)$ называется *преобразованием Фурье* функции $f(t)$. При этом модуль $|F(\omega)|$ называют *амплитудной характеристикой функции* (или *амплитудным спектром*), а $-\arg F(\omega)$ — *фазовым спектром*.

Пример. Найдем преобразование Фурье функции

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at} & \text{при } t>0, \\ 0 & \text{при } t<0 \end{cases} \qquad (a>0).$$

Имеем

$$F(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}dt=-\left.\frac{e^{-t(a+i\omega)}}{a+i\omega}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{a+i\omega}.$$

Следовательно,

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}, \qquad -\arg F(\omega)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{a}.$$

Дальнейшие сведения о преобразовании Фурье и его применениях к задачам электротехники читатель может найти в книгах [6], [12].

ВОПРОСЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой ряд называется тригонометрическим? В чем состоит задача разложения функции в тригонометрический ряд?
2. Вывести формулы для коэффициентов Фурье периодической функции с периодом 2π.
3. Сформулировать условия разложения функции в ряд Фурье.
4. Указать особенности разложения в ряд Фурье четных и нечетных функций.
5. Указать формулы для коэффициентов разложения функции с произвольным периодом.
6. Как можно раскладывать в ряд Фурье функции, заданные на половине периода?

7*. Вывести формулу Парсеваля.

8. Записать ряд Фурье в комплексной форме.

9*. Какая система функций называется ортогональной?

10*. В чем состоит задача разложения функции в ряд по ортогональной системе? Как отыскиваются коэффициенты разложения?

11. Указать способы приближенного отыскания коэффициентов Фурье.

12*. Что называется интегралом Фурье?

13*. Указать условие представления функции интегралом Фурье.

14*. Как записывается интеграл Фурье для четных и нечетных функций?

15*. Записать интеграл Фурье в комплексной форме.

16*. Дать определение преобразования Фурье.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

(a, b, m, n — постоянные)

I. Интегралы от рациональных функций

1. $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$, n целое число, не равное -1.

2. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C = \frac{1}{a}\ln C\,|ax+b|$.

3. $\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{1}{a^2}[ax - b\ln(ax+b)] + C$.

4. $\int \frac{x^2\,dx}{ax+b} = \frac{x^2}{2a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2}{a^3}\ln(ax+b) + C$.

5. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$.

6. $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$.

7. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right) + C$.

8. $\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3}\left[ax - 2b\ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b}\right] + C$.

9. $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$.

10. $\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}x + C$.

11. $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + C$.

12. $\int \frac{x\,dx}{a^2x^2 \pm b^2} = \frac{1}{2a^2}\ln|a^2x^2 \pm b^2| + C$.

13. $\int \frac{x^2\,dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{a^2}x - \frac{b}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}x + C$.

14. $\int \frac{x^2\,dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{a^2}x + \frac{b}{2a^3}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{x(a^2x^2+b^2)} = \frac{1}{2b^2}\ln\frac{x^2}{a^2x^2+b^2} + C$.

16. $\int \frac{dx}{x(a^2x^2-b^2)} = \frac{1}{2b^2}\ln\left|\frac{a^2x^2-b^2}{x^2}\right| C$.

17. $\int \frac{dx}{x^2(a^2x^2+b^2)} = -\frac{1}{b^2x} - \frac{a}{b^3}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}x + C$.

18. $\int \frac{dx}{x^2(a^2x^2-b^2)} = \frac{1}{b^2x} + \frac{a}{2b^3}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + C$.

II. Интегралы от иррациональных функций

19. $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C,\ n \neq -1.$

20. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3} + C.$

21. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{105a^3}(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)\sqrt{(ax+b)^3} + C$

22. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + C.$

23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{15a^3}(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)\sqrt{ax+b} + C.$

24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} \begin{cases} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} + C, & b > 0, \\ = \frac{2}{\sqrt{-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, & b < 0. \end{cases}$

25. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$

26 $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$

27 $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$

В формулах 28—47 считается, что $a > 0,\ b > 0$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|ax + \sqrt{a^2x^2 \pm b^2}\right| + C.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{ax}{b} + C.$ 30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}} = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^2x^2 \pm b^2} + C.$

31. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}} = -\frac{1}{a^2}\sqrt{b^2 - a^2x^2} + C.$

32. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}} = \frac{1}{2a^3}\left[ax\sqrt{a^2x^2 \pm b^2} \mp b^2 \ln\left|ax + \sqrt{a^2x^2 \pm b^2}\right|\right] + C.$

33. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}} = \frac{1}{2a^3}\left[-ax\sqrt{b^2 - a^2x^2} + b^2\arcsin\frac{ax}{b}\right] + C.$

34. $\int \sqrt{a^2x^2 \pm b^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{a}\ln\left|ax + \sqrt{a^2x^2 \pm b^2}\right|\right] + C.$

35. $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{b^2 - a^2x^2} + \frac{b^2}{a}\arcsin\frac{ax}{b}\right] + C.$

36. $\int x\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}\,dx = \frac{1}{3a^2}\sqrt{(a^2x^2 \pm b^2)^3} + C.$

37. $\int x\sqrt{b^2 - a^2x^2}\,dx = -\frac{1}{3a^2}\sqrt{(b^2 - a^2x^2)^3} + C.$

38. $\int x^2\sqrt{a^2x^2\pm b^2}\,dx=$

$$=\frac{1}{8a^3}\left[ax(2a^2x^2\pm b^2)\sqrt{a^2x^2\pm b^2}-b^4\ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2\pm b^2}\right|\right]+C.$$

39. $\int x^2\sqrt{b^2-a^2x^2}\,dx=\frac{1}{8a^3}\left[ax(2a^2x^2-b^2)\sqrt{b^2-a^2x^2}+b^4\arcsin\frac{ax}{b}\right]+C.$

40. $\int\frac{\sqrt{a^2x^2+b^2}}{x}\,dx=\sqrt{a^2x^2+b^2}+\frac{b}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2x^2+b^2}-b}{\sqrt{a^2x^2+b^2}+b}+C.$

41. $\int\frac{\sqrt{a^2x^2-b^2}}{x}\,dx=\sqrt{a^2x^2-b^2}+b\arcsin\left|\frac{b}{ax}\right|+C.$

42. $\int\frac{\sqrt{b^2-a^2x^2}}{x}\,dx=\sqrt{b^2-a^2x^2}+b\ln\left|\frac{b-\sqrt{b^2-a^2x^2}}{x}\right|+C.$

43. $\int\frac{\sqrt{a^2x^2\pm b^2}}{x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{a^2x^2\pm b^2}}{x}+a\ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2\pm b^2}\right|+C.$

44. $\int\frac{\sqrt{b^2-a^2x^2}}{x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{b^2-a^2x^2}}{x}-a\arcsin\frac{ax}{b}+C.$

45.а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2x^2+b^2}}=\frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{b+\sqrt{a^2x^2+b^2}}\right|+C.$

45.б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2x^2-b^2}}=-\frac{1}{b}\arcsin\left|\frac{b}{ax}\right|+C.$

46. $\int\frac{dx}{x\sqrt{b^2-a^2x^2}}=\frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{b+\sqrt{b^2-a^2x^2}}\right|+C.$

47. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2x^2\pm b^2}}=\mp\frac{\sqrt{a^2x^2\pm b^2}}{b^2x}+C.$

48. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{b^2-a^2x^2}}=-\frac{\sqrt{b^2-a^2x^2}}{b^2x}+C.$

49. $\int\sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx=\sqrt{(a+x)(b+x)}+(a-b)\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x})+C.$

50. $\int\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx=\sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}+C.$

51. $\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+C.$

52. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C.$

53. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}=\ln\left|\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}\right|+C.$

54. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$

55. $\int x^m (ax^n+b)^{r/s}\,dx$, где m, n, r, s — целые числа, $s>1$. Применяется подстановка $ax^n+b=u^s$, если $\frac{m+1}{n}$ — число целое, и подстановка $a+bx^{-n}=u^s$, если $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ — число целое. В других случаях интеграл не выражается при помощи элементарных функций (П. Л. Чебышев[1]).

III. Интегралы от трансцендентных функций

56. $\int x^n e^x\,dx = e^x[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \ldots + (-1)^n n!] + C$,

n — целое положительное число.

57. $\int (\ln x)^n dx = x\,[(\ln x)^n - n(\ln x)^{n-1} + n(n-1)(\ln x)^{n-2} - \ldots + (-1)^n n!] + C$,

n — целое положительное число.

58. $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C,\quad n\neq -1.$

59. $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + C,\quad n\neq -1.$ 60. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C.$

61. $\int \sin mx \cos nx\,dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C,\quad m\neq n.$

62. $\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C,\quad m\neq n.$

63. $\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C,\quad m\neq n.$

64. $$\int \sin^m x \cos^n x\,dx \begin{cases} = -\dfrac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n}\displaystyle\int \sin^{m-2}x\cos^n x\,dx, & m\neq -n,\\[2mm] = \dfrac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n}\displaystyle\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx, & m\neq -n.\end{cases}$$

65. $$\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x} \begin{cases} = -\dfrac{1}{m-1}\,\dfrac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \dfrac{m+n-2}{m-1}\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^{m-2}x\cos^n x}, & m\neq 1,\\[2mm] = \dfrac{1}{n-1}\,\dfrac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \dfrac{m+n-2}{n-1}\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}, & n\neq 1.\end{cases}$$

---

[1]) П. Л. Чебышев (1821—1894) — великий русский математик. Для его научной деятельности характерно стремление тесно связать решение математических проблем с принципиальными вопросами естествознания и техники. Работы П. Л. Чебышева оказали большое влияние на развитие современной математики вообще, русской — в особенности.

66. $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx, \ n \neq 1.$

67. $\int x^n \sin x\,dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\,dx.$

68. $\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\,dx.$

69. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} \begin{cases} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C, & a^2 > b^2, \\ = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + a + b}{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - a - b} \right| + C, & a^2 < b^2. \end{cases}$$

70. $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} \begin{cases} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C, & a^2 > b^2, \\ = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} \right| + C, & a^2 < b^2. \end{cases}$$

71. $$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} - b + \sqrt{a^2+b^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} - b - \sqrt{a^2+b^2}} \right|.$$

72. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{a\operatorname{tg} x}{b}\right) + C.$

73. $\int e^{ax} \sin nx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$

74. $\int e^{ax} \cos nx\,dx = \frac{e^{ax}(n\sin nx + a\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$

75. $\int e^{ax} \sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1} x\,(a\sin x - n\cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x\,dx.$

76. $\int e^{ax} \cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1} x\,(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x\,dx.$

77. $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

78. $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

79. $\int x\arcsin x\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C.$

80. $\int x\arccos x\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arccos x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}.$

81. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$

ЛИТЕРАТУРА

КУРСЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Н. В. Ефимов, Краткий курс аналитической геометрии, «Наука», 1965.
2. И. И. Привалов, Аналитическая геометрия, «Наука», 1966.

КУРСЫ АНАЛИЗА (более подробные)

3. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, тт. I и II, «Наука», 1965.
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. I, II и III, «Наука», 1966.

ЛИТЕРАТУРА ПО НЕКОТОРЫМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ РАЗДЕЛАМ МАТЕМАТИКИ

5. И. Г. Арамaнович и В. И. Левин, Уравнения математической физики, «Наука», 1964.
6. И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц и Л. Э. Эльсгольц, Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости, «Наука», 1965.
7. Р. С. Гутер и Б. В. Овчинский, Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, Физматгиз, 1962.
8. 1) Б. П. Демидович и И. А. Марон, Основы вычислительной математики, «Наука», 1966.
   2) Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова, Численные методы анализа, Физматгиз, 1963.
9. Н. В. Ефимов, Квадратичные формы и матрицы, «Наука», 1964.
10. Ф. И. Карпелевич и Л. Е. Садовский, Элементы линейной алгебры и линейного программирования, «Наука», 1965.
11. П. И. Романовский, Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа, «Наука», 1964.

СПРАВОЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА

12. А. Анго, Математика для электро- и радиоинженеров, «Наука», 1965.
13. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, Справочник по математике для студентов втузов, «Наука», 1965.
14. М. Л. Смолянский, Таблицы неопределенных интегралов, «Наука», 1965.

А. Ф. БЕРМАНТ
И. Г. АРАМАНОВИЧ

Краткий курс математического анализа

ДЛЯ ВТУЗОВ