Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Конспект лекций по математическому анализу

Лектор Бадерко Е.А.

Часть 2
Интегральное исчисление функций одной переменной

Отделение механики, 1 курс, 2 семестр, 2019-2020 уч. г.

Об опечатках большая просьба сообщать составившему конспект Некрасову Всеволоду на почту vsevolod.nekrasov@math.msu.ru

Содержание

Глава 1. Неопределённый интеграл

$\boxed{\S 1}$. Свойства производных дифференцируемых функций

Напоминание: $f \in \mathcal{D}[a,b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (f \in \mathcal{D}(a,b)) \wedge (\exists\, f'_+(a) \in \mathbb{R}) \wedge (\exists\, f'_-(b) \in \mathbb{R})$

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{D}[a,b], f'_+(a) \overset{(>)}{<} f'_-(b)$. *Тогда* $\forall\, M \in \big(f'_+(a), f'_-(b)\big)$ (*или* $\big(f'_-(b), f'_+(a)\big)\big)$ $\exists\, c \in (a,b)$ *такое, что* $f'(c) = M$.

► Без ограничения общности, $f'_+(a) < f'_-(b)$.

- Рассмотрим частный случай: $f'_+(a) < 0, f'_-(b) > 0$. Докажем, что $\exists\, c \in (a,b)$ такое, что $f'(c) = 0$. По условию, $f \in \mathcal{D}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{C}[a,b] \overset{\text{2 Т. Вейерштрасса}}{\Rightarrow}$ $\exists\, c \in (a,b) \mid f(c) = \min\limits_{[a,b]} f$, но:

  Во-первых, $c \neq a$. В самом деле, пусть $c = a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) < 0 \Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0 \mid \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0\ \forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < f(a) = f(c) \forall x \in (a, a+\delta)$ — противоречие с тем, что c является точкой минимума.

  Во-вторых, $c \neq b$ по аналогичным соображениям.

  Таким образом, $\exists\, c \in (a,b) \mid c-$точка локального экстремума $\overset{\text{Т. Ферма}}{\Rightarrow} f'(c) = 0$.

- Общий случай: пусть $f'_+(a) < f'_-(b), M \in (f'_+(a), f'_-(b))$.
  Положим $g(x) := f(x) - Mx, x \in [a,b]$.Тогда $g \in \mathcal{D}[a,b]$ и
  $g'_+(a) = f'_+(a) - M < 0,\ g'_-(b) = f'_-(b) - M > 0 \overset{\text{Частн. случ.}}{\Rightarrow} \exists\, c \in (a,b) \mid g'(c) = 0$.

Это означает, что $\exists\, c \in (a,b) \mid f'(c) = M$. ◄

Замечание: В условии теоремы не требуется $f' \in \mathcal{C}[a,b]$

Лемма 1. *Пусть* $f \in \mathcal{C}[a,b] \cap \mathcal{D}(a,b)$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f'(x) =: A$ (*или* $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f'(x) =: B$). *Тогда* $\exists\, f'_+(a) = A$ (*или* $\exists\, f'_-(b) = B$).

► Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = A \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid \big|f'(x) - A\big| < \varepsilon\ \forall\, x \in (a, a+\delta)$. (1)
По теореме Лагранжа, $\forall\, x \in (a, a+\delta)\ \exists \xi_x \in (a,x) \subset (a, a+\delta) \mid \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_x)$. (2)
Имеем: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A\right| \overset{(1)}{=} \big|f'(\xi_x) - A\big| \overset{(2)}{<} \varepsilon\ \forall\, x \in (a, a+\delta)$. ◄

Замечание:

1) Лемма верна, если $A = \pm\infty$.

2) $f \in \mathcal{D}[a,b] \overset{\text{В. г.}}{\not\Rightarrow} \exists \lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$ $(f' \in \mathcal{C}[a,b])$.

Контрпример: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

Действительно,

$x \neq 0 : f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$x = 0 : \exists f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

Но $\nexists \lim\limits_{x\to 0+0} f'(x)$, "портит"косинус.

Пример: $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$

$x \in (-1,1) : f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

$\lim\limits_{x\to\pm 1} f'(x) = \pm\frac{\pi}{2} \overset{\text{Лемма}}{\Rightarrow} \exists f'_+(-1) = -\frac{\pi}{2}, \exists f'_-(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f \in \mathcal{D}[-1,1]$.

3) f' **может быть разрывна** на (a,b).

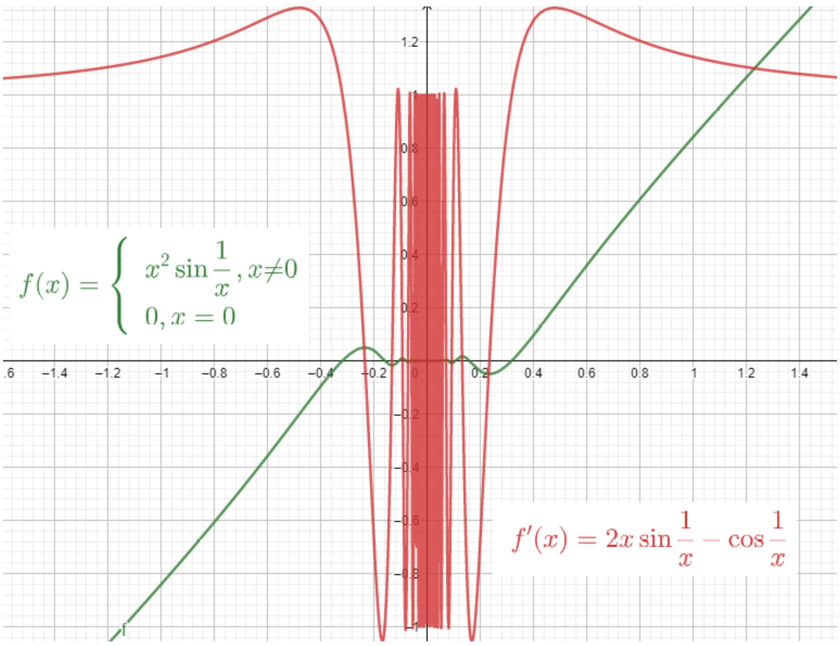


Рис. 1. Контрпример

Теорема 2. $f \in \mathcal{D}(a,b), x_0 \in (a,b), f' \notin \mathcal{C}(x_0) \Rightarrow x_0$ — *точка разрыва II-го рода.*

► От пр-го: x_0– т-ка р-ва f' I-го р. $\Rightarrow (\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = A\ (1)) \wedge (\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) = B\ (2))$

$\left.\begin{array}{l} \text{Лемма} \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists f'_+(x_0) = A \\ \text{Лемма} \overset{(2)}{\Rightarrow} \exists f'_-(x_0) = B \end{array}\right] \overset{f\in\mathcal{D}(x_0)}{\Rightarrow} f'(x_0) = A = B \Rightarrow f' \in \mathcal{C}(x_0)$ — противоречие. ◄

$\boxed{\S 2}$. Первообразные функции. Неопределённый интеграл

Пункт 1. Первообразные функции

Определение 1. *Пусть* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$*. Тогда* $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ *называется* $\boxed{\textit{первообразной}}$ *функции* f *на* (a,b)*, если*

1) $F \in \mathcal{D}(a,b)$
2) $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$

Замечание: F — первообразная f на $(a,b) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx$.
Пример:

1) $f(x) = sgn(x), x \in (-1,1)$ — нет первообразной, т.к. разрыв I рода
2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ l \neq 0, x = 0 \end{cases}$ $x \in (-1,1)$ — нет первообразной, т.к. не принимает всех промежуточных значений
3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ $x \in (-1,1)$. Имеем (см. замечание 1) к лемме 1 §1):
$\exists\ F'_+(0) = +\infty, \exists\ F'_-(0) = -\infty \Rightarrow \nexists\ F'(0)$

Замечание:

1) $f \in \mathcal{C}(a,b) \Rightarrow \exists$ первообразная (будет доказано)
2) $f \notin \mathcal{C}(a,b) \overset{\text{В. г.}}{\not\Rightarrow}$ нет первообразной (см. замечание 2) к лемме)

Лемма 1. *Пусть* $F \in \mathcal{D}(a,b)$*. Тогда* $F \equiv const$ *на* $(a,b) \Leftrightarrow F' \equiv 0$ *на* (a,b)*.*

► 1) $\boxed{\Rightarrow}$: очевидно.
2) $\boxed{\Leftarrow}$: Для произвольных $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2$ выполнены условия теоремы Лагранжа $\Rightarrow$
$F(x_1) - f(x_2) = \underbrace{F'(\xi)}_{=0}(x_1 - x_2), \xi \in (a,b) \Rightarrow F(x_1) = F(x_2)$. В силу произвольности выбора $x_1, x_2, F \equiv const$ на (a,b). ◄

Теорема 1. *Пусть* $f : (a,b) \to \mathbb{R}, f$ *имеет на* (a,b) *первообразную* $F_0 \in \mathcal{D}(a,b) \Rightarrow$ *множество всех первообразных имеет вид:* $\{F_0(x) + C, x \in (a,b), C \in \mathbb{R}\}$.

► Положим A := {множество всех первообразных f на (a,b)}
B := $\{F_0(x) + C, x \in (a,b), C \in \mathbb{R}\}$

- A $\subset$ B : Пусть $F \in$ A $\Rightarrow F' \equiv f$ на $(a,b) \Rightarrow (F - F_0)' = f - f \equiv 0$ на $(a,b) \Rightarrow$ По лемме, $F - F_0 \equiv const =: C$ на $(a,b) \Rightarrow F(x) = F_0(x) + C\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow F \in$ B.
- B $\subset$ A : Пусть $F \in$ B $\Rightarrow F(x) = F_0(x) + C\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow F' \equiv f$на$(a,b) \Rightarrow F \in$ A.

Это означает, что A=B. ◄

Пункт 2. Неопределённый интеграл

Определение 1. *Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Тогда множество всех первообразных функции f на (a, b) называется* $\boxed{\textit{неопределённым интегралом}}$ *от функции f на (a, b) и обозначается*

$$\int f(x)\,dx$$

f называется подынтегральной функцией.

Таблица неопределённых интегралов

I. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$

IX. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

II. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

VIII. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

III. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$

X. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

IV. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

XI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

V. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

XII. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$

VI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

XIII. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

VII. $\displaystyle\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 0)$

XIV. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

XV. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

(Таблица 1)

Замечание: Интеграл II. — удобная запись, но не совсем аккуратно.

Связь дифференцирования и интегрирования (или "зачем dx?"):

1) Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ имеет на (a, b) первообразную $F \in \mathcal{D}(a, b)$. Тогда $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$. Следовательно, если $\exists \int f(x)\,dx$, то $d\int \underbrace{f(x)\,dx}_{dF} = \underbrace{f(x)\,dx}_{dF}$.

2) Пусть $F \in \mathcal{D}(a, b)$. Тогда F' имеет на (a, b) первообразную F $\Rightarrow$ $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$

Обратное понятие к интегралу — дифференциал.

Пункт 3. Основные свойства неопределённого интеграла

Теорема 1 (Линейность). *Пусть* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *и* $\exists \int f(x)\,dx, \int g(x)\,dx$. *Тогда*

$$\exists \int \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx,\ x \in (a, b) \tag{1}$$

► Пусть F — первообразная f на (a, b), G — первообразная g на (a, b).
Положим $H(x) := \alpha F(x) + \beta G(x),\ x \in (a, b)$. Согласно линейности производной, имеем: $H'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) =: h(x) \Rightarrow h$ имеет первообразную H на $(a, b) \Rightarrow$ $\exists \int h(x)\,dx = H(x) + C = (\alpha F(x) + C) + \beta G(x) \in$ пр.ч. (1).
Наконец, пусть $H_1 \in$ пр.ч. (1) $\Rightarrow H_1(x) = \alpha\big(F(x)+C_1\big)+\beta\big(G(x)+C_2\big)$ для некоторых C_1 и C_2. Положив $C := \alpha C_1 + \beta C_2$, получим: $H_1(x) = H(x) + C \in$ лев. ч. (1) $\Rightarrow$ множества совпадают. ◄

Теорема 2 (Интегрирование по частям).
Пусть $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}, u, v \in \mathcal{D}(a, b),\ \exists \int u'(x)v(x)\,dx,\ x \in (a, b)$. *Тогда*

$$\exists \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \tag{2}$$

► Рассмотрим $\underbrace{\Big(u(x)v(x)\Big)'}_{\text{есть первообр.}} = \underbrace{u'(x)v(x)}_{\text{есть первообр.}} + u(x)v'(x)$. Следовательно, по Т1, как разность функций, $\exists \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$. ◄

Пример: $\int \ln x\,dx = \int \ln x (x)'\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\ln x - x + C.$

Теорема 3 (Замена переменной в неопределённом интеграле).
Пусть $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b), f : (a, b) \to \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ *и* $\exists \int f(x)\, dx = F(x) + C$ (3)
Тогда
$$\exists \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, dt = F\big(\varphi(t)\big) + C,\ t \in (\alpha, \beta) \tag{4}$$

► Дифференцируем правую часть (4):
$\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]' = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) \overset{(3)}{=} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) \Rightarrow$ равенство (4) верно. ◄

Замечание: Если выполнены условия Т3, то можно записать (4) в виде
$$\int f\big(\varphi(t)\big)\, d\varphi(t) = F\big(\varphi(t)\big) + C, t \in (\alpha, \beta)$$

Пример: $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}, \varphi(t) = t^2, t \in \mathbb{R}$.
$\exists \int e^x\, dx = e^x + C \overset{\text{T3}}{\Rightarrow} \exists \int te^{t^2}\, dt = \dfrac{1}{2}\int e^{t^2}\, d(t^2) = \dfrac{1}{2}e^{t^2} + C$

Теорема 4 (Замена переменной: подстановка).
Пусть $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b], f : [a, b] \to \mathbb{R}$,
$\varphi \in \mathcal{C}[\alpha, \beta] \cap \mathcal{D}(\alpha, \beta), \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ *(или* $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a), \varphi \upuparrows (\downdownarrows)$ *на* $[\alpha, \beta]$.
(Условия Т. о производной обратной функции)
Кроме того, пусть $\exists \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, dt = \Phi(t) + C, t \in (\alpha, \beta)$ (5)
Тогда:
$$\exists \int f(x)\, dx = \Phi\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C, x \in (a, b) \tag{6}$$

► Т. к. выполнены все условия теоремы о производной обратной функции, то:
$$\big[\varphi^{-1}(x)\big]' = \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}\ \forall x \in (a, b) \tag{7}$$

Тогда, дифференцируя правую часть (6), получим:
$$\big[\Phi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\big]' = \Phi'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot \big[\varphi^{-1}(x)\big]' \overset{(5),(7)}{=} \underbrace{f\big(\varphi(\varphi^{-1}(x))\big) \cdot \varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}_{\text{из(5)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}}_{\text{из(7)}} =$$
$$= f\big(\varphi(\varphi^{-1}(x))\big) = f(x)\ \forall x \in (a, b).$$

Это означает, что равенство (6) верно. ◄

Пример: $f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1],\ \varphi(t) = \sin t,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$$\exists \int \sqrt{1 - (\sin t)^2} \cos t dt = \int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + C \overset{\text{T4}}{\Rightarrow}$$
$$\exists \int \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}(\arcsin x + \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)) + C = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}) + C$$

Глава 2. Определённый интеграл

$\boxed{\S 1}$. Определение интеграла Римана

Пункт 1. Определение интеграла. Интегрируемость

Пусть дан отрезок [a,b].

Определение 1.

- $\boxed{\textit{Разбиением}}$ $\mathcal{P}$ *отрезка* $[a,b]$ *называется множество*

$$\big\{x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b] \mid a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\big\}$$

- *Диаметр разбиения* $d = d(\mathcal{P}) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k$, *где* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

- *Отрезки* $[x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$ — *частичные отрезки разбиения* $\mathcal{P}$

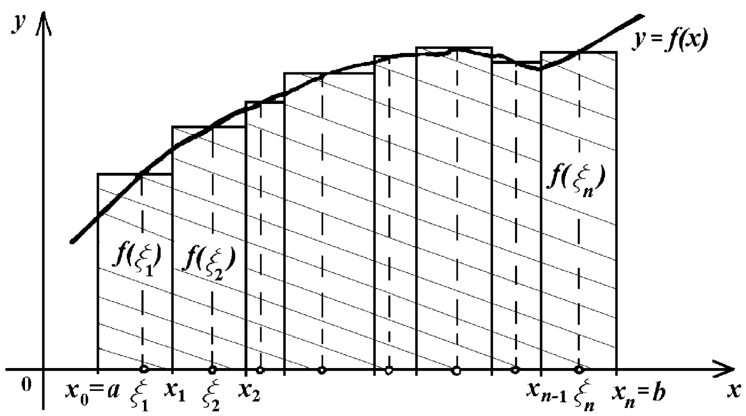
Определение 2. *Пусть* $\mathcal{P}$ — *разбиение отрезка* $[a,b]$. *Для всех* $k = 1, \ldots, n$ *фиксируем произвольно* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. *Далее, положим "метку"* $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. *Разбиение* $\mathcal{P}$ *вместе с "меткой"* ξ *называется* $\boxed{\textit{размеченным разбиением}}$ *и обозначается* $(\mathcal{P}, \xi)$.

Определение 3. *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{R}, (\mathcal{P}, \xi)$ — *произвольное размеченное разбиение* $[a,b]$. *Тогда* <u>*число*</u>

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sigma(\mathcal{P}, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется $\boxed{\textit{интегральной суммой}}$ *функции* f *для* $(\mathcal{P}, \xi)$.

Пример: $f \in \mathcal{C}[a,b], f > 0$ на (a,b).



Определение 4. *Число* $I := \lim\limits_{d(\mathcal{P})\to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \lim\limits_{d(\mathcal{P})\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid \big|I - \sigma(f, \mathcal{P}, \xi)\big| < \varepsilon\ \forall\,(\mathcal{P}, \xi)$ *с условием* $d(\mathcal{P}) < \delta$.

Рассмотрим множество размеченных разбиений $\mathscr{P}$ отрезка $[a, b]$. Построим базу $\mathbb{B}$ на этом множестве

$$\mathbb{B} := \big\{B_\delta, 0 < \delta \le b - a, \text{где } B_\delta = \{(\mathcal{P}, \xi) \mid d(\mathcal{P}) < \delta\}\big\}$$

(Убедитесь, что это действительно база). Рассматривая определение 4 как предел по базе $\mathbb{B}$, получим

Теорема 1 (Критерий Коши существования предела).

$\exists \lim\limits_{d(\mathcal{P})\to 0} \sigma(\mathcal{P}, \xi) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid \forall\,(\mathcal{P}_1, \xi_1)$ *и* $(\mathcal{P}_2, \xi_2)$ *с условием* $d(\mathcal{P}_i) < \delta, i = 1, 2$ *выполено* $\big|\sigma(\mathcal{P}_1, \xi_1) - \sigma(\mathcal{P}_2, \xi_2)\big| < \varepsilon$

Определение 5. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Тогда f — $\boxed{\textit{интегрируема (по Риману)}}$ *на* $[a, b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{d(\mathcal{P})\to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) =: I \in \mathbb{R}$
Обозначение: $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
Число I *называется интегралом (Римана) функции* f *на* $[a, b]$ *и обозначается*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = I$$

Пример:

1) $f(x) = const = c$ на $[a, b]$
$$\sigma(\mathcal{P}, \xi) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})}_{b-a} = c(b - a)$$

2) $f(x) = x, x \in [a, b]$
$$\sigma(\mathcal{P}, \xi) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\Big(\xi_k - \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\Big)\Delta x_k}_{=:A} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) + A = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + A$$

Но $\left|\xi_k - \dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}\right| < d(\mathcal{P}) \Rightarrow |A| < \sum\limits_{k=1}^{n} d(\mathcal{P})\Delta x_k = d(\mathcal{P})\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k =$

$= d(\mathcal{P})(b - a) \overset{d(\mathcal{P})\to 0}{\to} 0 \Rightarrow \int\limits_a^b x\, dx = \dfrac{1}{2}(b^2 - a^2)$

3) "Суперважный" классический пример — функция Дирихле:
$f(x) := \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$
Докажем, что $\forall [a,b]\ f \notin \mathcal{R}[a,b]$.
► Воспользуемся критерием Коши. Составим отрицание интегрируемости:
$\exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, \delta \in (0, b-a]\ \exists\, (\mathcal{P}_1, \xi_1), (\mathcal{P}_2, \xi_2) \in B_\delta$ с усл. $\big|\sigma(\mathcal{P}_1, \xi_1) - \sigma(\mathcal{P}_2, \xi_2)\big| \geq \varepsilon$.
Пусть $[a,b]$ — произвольный отрезок и пусть $\delta \in (0, b-a]$ — фикс. произвольно.
Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{P}$ с $d(\mathcal{P}) < \delta$ и выберем для $\mathcal{P}$ две метки:
$\left.\begin{array}{r} \xi' := (\xi'_1, \ldots, \xi'_n) \mid \xi'_k \in \mathbb{Q} \\ \xi'' := (\xi''_1, \ldots, \xi''_n) \mid \xi''_k \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{array}\right] \Rightarrow (\mathcal{P}, \xi'), (\mathcal{P}, \xi'') \in B_\delta$, при этом $\big|\sigma(\mathcal{P}, \xi') - \sigma(\mathcal{P}, \xi'')\big| =$
$= \left|\sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k\right| = b - a$, то есть отрицание существования предела верно для $\varepsilon = b - a$. Следовательно, функция Дирихле не является интегрируемой (по Риману) на любом отрезке $[a,b]$. ◄

Пункт 2. Необходимое условие интегрируемости функции

Теорема 1 (Необходимое условие интегрируемости).
$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{B}[a,b]$.

► От противного: пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, но $f \notin \mathcal{B}[a,b]$.

1) $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow$ для $\varepsilon = 1\ \exists\ \delta \mid \big|\sigma(\mathcal{P}, \xi) - I\big| < 1\ \forall (\mathcal{P}, \xi)$ с условием $d(\mathcal{P}) < \delta \Rightarrow$ $\big|\sigma(\mathcal{P}, \xi)\big| < |I| + 1\ \forall (\mathcal{P}, \xi)$ с условием $d(\mathcal{P}) < \delta$

2) Фикс. произ-но разб-ие $\mathcal{P}^0 = \big\{x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]\big\}$ с $d(\mathcal{P}^0) < \delta$, где δ из п.1)
$f \notin \mathcal{B}[a,b] \Rightarrow \exists\ k_0 \in \{1, \ldots, n\} \mid f \notin \mathcal{B}[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$. Рассмотрим для $\mathcal{P}^0$ метку

$$\xi = \xi(\tau) = \big(x_1, x_2, \ldots, x_{k_0-1}, \tau, x_{k_0+1}, \ldots, x_n\big), \tau \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$$

$$\text{причём } \sigma\big(\mathcal{P}^0, \xi(\tau)\big) = \underbrace{\sum_{k=1, k\neq k_0}^{n} f(x_k)\Delta x_k}_{=:\sigma^*} + f(\tau)\Delta x_{k_0} = \sigma^* + f(\tau)\Delta x_{k_0}$$

Имеем: $f \notin \mathcal{B}[a,b] \Rightarrow \exists\ \tau_0 \mid f(\tau_0) \geq \dfrac{|I| + 1 + |\sigma^*|}{\Delta x_{k_0}}$ (удобная для нас заданная наперёд константа). Тогда:

$$\Big|\sigma\big(\mathcal{P}^0, \xi(\tau_0)\big)\Big| = \sigma^* + f(\tau_0)\Delta x_{k_0} \geq \big|f(\tau_0)\big|\, \Delta x_{k_0} - |\sigma^*| \geq \frac{|I| + 1 + |\sigma^*|}{\Delta x_{k_0}}\Delta x_{k_0} - |\sigma^*| = |I| + 1$$

В итоге, имеем противоречие с пунктом 1). ◄

<u>Пункт 3</u>. Достаточное условие интегрируемости функции в терминах колебаний функции на частичных отрезках

Определение 1. *Пусть $\mathcal{P}$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Разбиение $\widetilde{\mathcal{P}}$ называется <u>измельчением</u>* $\mathcal{P} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \widetilde{\mathcal{P}} \supset \mathcal{P}$

Замечание:

1) $\mathcal{P} = \big\{x_k, k \in \{0, \ldots, n\}\big\}$, тогда $\widetilde{\mathcal{P}} = \big\{x_{k_l}, k \in \{0, \ldots, n\}, l \in \{0, \ldots, m_k\}\big\}$

2) $\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \Rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ — измельчение $\mathcal{P}_1$ и $\widetilde{\mathcal{P}}$— измельчение $\mathcal{P}_2$.

Определение 2. *Пусть $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Тогда* $\boxed{\textit{колебанием}}$ *f на $[a,b]$ называется*

$$\omega\big(f, [a,b]\big) := \sup_{x',x'' \in [a,b]} \big|f(x') - f(x'')\big|$$

Замечание:

1) Если $f \in \mathcal{B}[a,b]$, т.е. $\exists\, M > 0 \mid \big|f(x)\big| < M \; \forall x \in [a,b] \Rightarrow \omega\big(f,[a,b]\big) \leq 2M$

2) $\omega\big(f,[a,b]\big) = \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f$

▶ Обозначим $M := \sup\limits_{[a,b]} f, m := \inf\limits_{[a,b]} f$. Докажем сначала, что

$$\omega\big(f,[a,b]\big) \leq M - m.$$

В самом деле, имеем:
$m - M \leq f(x') - f(x'') \leq M - m \Rightarrow \big|f(x') - f(x'')\big| \leq M - m.$
Докажем теперь, что $\omega\big(f,[a,b]\big) \geq M - m.$
$\exists\, x'_n \in [a,b] \mid \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = M, \exists\, x''_n \in [a,b] \mid \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = m$
Имеем: $\omega\big(f,[a,b]\big) = \sup\limits_{x',x''\in[a,b]} \big|f(x') - f(x'')\big| \geq \big|f(x'_n) - f(x''_n)\big| \, \forall n$
Переходя к пределу, получим:
$\omega\big(f,[a,b]\big) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \big|f(x'_n) - f(x''_n)\big| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} \big(f(x'_n) - f(x''_n)\big)\right| = M - m.$ ◀

На множестве разбиений отрезка $[a,b]$ рассмотрим базу (без метки)

$$\mathbb{B}^* = \big\{B^*_\delta, \delta \in (0, b-a]\big\}, B^*_\delta = \{\mathcal{P} - \text{разбиение } [a,b] \mid d(\mathcal{P}) < \delta\}$$

Обозначение: Пусть $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Тогда $\Omega(f,\mathcal{P}) = \Omega(\mathcal{P}) := \sum\limits_{k=1}^{n} \omega\big(f,[x_{k-1},x_k]\big)\Delta x_k$

Определение 3. *Пусть $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Тогда*

$$\lim_{d(\mathcal{P})\to 0} \Omega(f,\mathcal{P}) = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \Omega(f,\mathcal{P}) < \varepsilon \; \forall \mathcal{P} \in B^*_\delta$$

Лемма 1. *Пусть* $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\lim\limits_{d(\mathcal{P})\to 0} \Omega(f,\mathcal{P}) = 0$. *Тогда* $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

▶ Доказательство по критерию Коши.

1) Пусть $\mathcal{P}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, $\widetilde{\mathcal{P}}$ — измельчение $\mathcal{P}$.
Пусть ξ — метка для $\mathcal{P}$, $\widetilde{\xi}$ — метка для $\widetilde{\mathcal{P}}$. Тогда:

$$\left|\sigma(\mathcal{P},\xi) - \sigma(\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{\xi})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k} f(\widetilde{\xi}_{k_l})\Delta x_{k_l}\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\left[f(\xi_k) - f(\widetilde{\xi}_{k_l})\right]\Delta x_{k_l}\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\left|f(\xi_k) - f(\widetilde{\xi}_{k_l})\right|\Delta x_{k_l} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\omega\big(f,[x_{k-1},x_k]\big)\Delta x_k = \Omega(f,\mathcal{P}) \qquad (1)$$

2) Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда из условий леммы следует, что

$$\exists\, \delta > 0 \mid \Omega(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall\, \mathcal{P} \in B^*_\delta \qquad (2)$$

Рассмотрим произвольные разбиения $\mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in B^*_\delta$ и соответствующие произвольные метки: ξ' — для $\mathcal{P}'$, ξ'' — для $\mathcal{P}''$. Кроме того, рассмотрим общее измельчение $\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ и соответствующую метку $\widetilde{\xi}$. Имеем:

$$\left|\sigma(\mathcal{P}',\xi') - \sigma(\mathcal{P}'',\xi'')\right| \leq \left|\sigma(\mathcal{P}',\xi') - \sigma(\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{\xi})\right| + \left|\sigma(\mathcal{P}'',\xi'') - \sigma(\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{\xi})\right| \overset{(1)}{\leq} 2\Omega(f,\mathcal{P}) \overset{(2)}{<} \varepsilon$$

Воспользовавшись критерием Коши, получим, что $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ◀

Пункт 4. Классы интегрируемых функций

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{C}[a,b]$. *Тогда* $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

▶ Согласно первой теореме Вейерштрасса, $f \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{B}[a,b]$. Кроме того, по теореме Кантора, непрерывность функции на отрезке влечёт равномерную непрерывность функции на этом отрезке. Это значит, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid \left|f(x') - f(x'')\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ \forall\, x', x'' \in [a,b] \text{ с условием } \left|x' - x''\right| < \delta \quad (1)$$

Фиксируем произвольное $\mathcal{P} \in B_\delta$. Так как $d(\mathcal{P}) < \delta$, то, используя (1), получаем, что $\omega\big(f,[x_{k-1},x_k]\big) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $k = 1,\ldots,n$. Рассмотрим $\Omega(f,\mathcal{P})$:

$$\Omega(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n}\omega\big(f,[x_{k-1},x_k]\big)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon$$

Тогда, согласно лемме из предыдущего пункта, имеем требуемое: $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ◀

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{B}[a, b], f \in \mathcal{C}\big([a, b] \setminus \{x_1^*, \dots, x_m^*\}\big)$. *Тогда* $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

▶

1) Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Положим:

$$\delta_0 := \frac{1}{2} \min_{i,j=1,\dots,m,\ i \neq j} \left| x_i^* - x_j^* \right| \text{ (хотим добиться непересечения)}$$

$$A := \bigcup_{i=1}^{m} (x_i^* - \delta_1, x_i^* + \delta_1),\ \delta_1 := \min\left\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{16cm}\right\},\ c := \sup_{[a,b]} |f|$$

$$A^* := [a, b] \setminus A. \text{ Тогда } A^* = \bigcup_{l=1}^{s} \Delta_l, \text{ где } \Delta_l \text{ — некоторый отрезок}$$

2) Имеем: $f \in \mathcal{C}(A^*), A^*$ — обединение отрезков $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на A^*. Тогда для данного ε выберем $\delta_2 > 0$ такую, что:

$$\left| f(x') - f(x'') \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\ \forall\, x', x'' \in A^* \text{ с условием } \left| x' - x'' \right| < \delta_2$$

3) В лучших традициях, положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{P} \in B_\delta^*$. Имеем:

$$\Omega(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big) \Delta x_k =: \Sigma' + \Sigma'',$$
$$\text{где } \Sigma' := \sum_{[x_{k-1}, x_k] \cap A = \varnothing} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big) \Delta x_k$$
$$\Sigma'' := \sum_{[x_{k-1}, x_k] \cap A \neq \varnothing} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big) \Delta x_k$$

Оценим Σ':

$$\Sigma' = \sum_{[x_{k-1}, x_k] \cap A = \varnothing} \underbrace{\omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)}_{< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum \Delta x_k}_{\leq b-a} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Оценим Σ'':

$$\Sigma'' = \sum_{[x_{k-1}, x_k] \cap A \neq \varnothing} \underbrace{\omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)}_{\leq 2c} \Delta x_k \leq 2c \sum \underbrace{\Delta x_k}_{< \delta \leq \delta_1} < 2c \underbrace{\sum \delta_1}_{\leq m \cdot 4\delta_1} = 8cm \frac{\varepsilon}{16cm} = \frac{\varepsilon}{2}$$

В итоге, $\Omega(f,\mathcal{P}) = \Sigma' + \Sigma'' < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ◀

Теорема 3. *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \uparrow (\downarrow)$. *Тогда* $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

▶ Не ограничивая общности, $f \uparrow, f(b) > f(a)$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Положим $\delta := \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{P} \in B_\delta$. Имеем:

$$\Omega(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\omega\big(f,[x_{k-1},x_k]\big)}_{=f(x_k)-f(x_{k-1})} \underbrace{\Delta x_k}_{<\delta} < \delta \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \big[f(x_k) - f(x_{k-1})\big]}_{=f(b)-f(a)} = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \big[f(b)-f(a)\big] = \varepsilon$$

Таким образом, согласно лемме 1, $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ◀

Пункт 5. Критерий интегрируемости по Лебегу

Обозначение: Пусть $I = (a,b)$. Тогда $|I| := b - a$.

Определение 1. *Пусть имеется система интервалов (отрезков)* $\{I_k, k \in \mathbb{N}\}$. *Тогда:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |I_k|$$

Определение 2. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}$. *Тогда* A *имеет* $\boxed{\text{лебегову меру нуль}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists$ *система интервалов* $\{I_k\}$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

- $\{I_k\}$ *не более чем счётна.*
- $A \subset \bigcup \{I_k\}$
- $\sum |I_k| < \varepsilon$

Обозначение: $\mu(A) = 0$

Замечание:

1) В определении 2 можно брать отрезки.
2) $\bigcup$ и $\sum$ в определении означают $\bigcup\limits_{k=1}^{m}$ и $\sum\limits_{k=1}^{m}$, если $\{I_k\}$ — конечна, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$, если $\{I_k\}$ — счётна.

Пример:

1) $A = \{x_1, \ldots, x_m\} \Rightarrow \mu(A) = 0$.
   ► Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Положим $I_k := \left(x_k - \dfrac{\varepsilon}{3m}, x_k + \dfrac{\varepsilon}{3m}\right)$. Тогда $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k,\ \sum\limits_{k=1}^{m} |I_k| = m\dfrac{2\varepsilon}{3m} = \dfrac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$ ◄

2) $A = \{x_k, k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \mu(A) = 0$.
   ► Снова пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Положим $I_k := \left(x_k - \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}, x_k + \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right)$.
   Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |I_k| = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot 2^k} = \dfrac{\varepsilon}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot 1 < \varepsilon$ ◄

3) $\mu(A) = 0 \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow}$ A — счётно. Контрпримером является Канторово множество (см. Зорич, глава 4, параграф 1).

4) Пусть $[a, b] \subset \bigcup\{I_k\}$. Тогда $\sum |I_k| > b - a$.
   ► По индукции. База: $m = 1, [a, b] \in (\alpha, \beta), \beta - \alpha > b - a$.
   Шаг: Пусть верно для m. Докажем для m+1. Пусть $[a, b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m+1}$.
   Без ограничения общности $I_1 = (\alpha_1, \beta_1), a \in (\alpha_1, \beta_1)$. Кроме того, можем считать, что $b < \beta_1$. Рассмотрим $[\beta_1, b] \subset \bigcup\limits_{k=2}^{m+1}$. Согласно предположению индукции, $\sum\limits_{k=2}^{m+1} < b - \beta_1$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{m+1} > \beta_1 - \alpha_1 + b - \beta_1 = b - \alpha_1 > b - a$.
   Таким образом, если $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то $\mu(A) \neq 0$. ◄

5) Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \uparrow (\downarrow)$. Тогда число точек разрыва f не более чем счётно.
   ► Доказательство этого утверждения не требуется в данном курсе ◄

Теорема 1 (Критерий Лебега). *Пусть $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow$*
$\Leftrightarrow$ множество $E := \big\{x \in [a, b] \mid f \notin \mathcal{C}(x)\big\}$ имеет лебегову меру нуль ($\mu(E) = 0$).

► Доказательство этой теоремы не требуется в данном курсе ◄

Пример:

1) $f \in \mathcal{C}[a, b]$

2) Функция Дирихле не является интегрируемой на любом отрезке $[a, b]$, так как разрывна на всей области определения.

3) Функция Римана:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, x \in \mathbb{Q} \ (x = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь}, f(0) = 1) \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Функция Римана интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, так как множество точек разрыва (рациональные точки) счётно, а следовательно, имеет лебегову меру нуль.

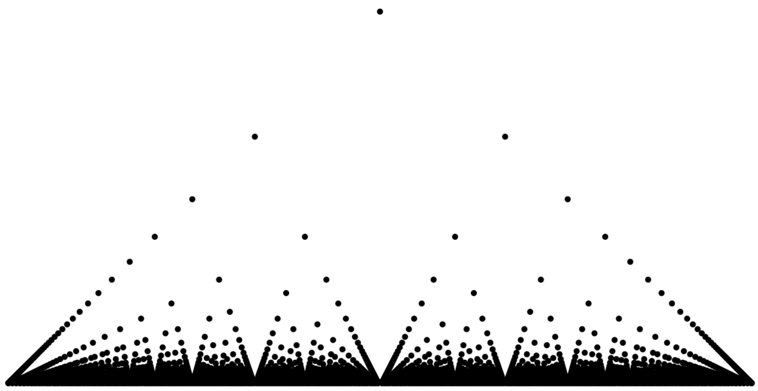


Рис. 2. Функция Римана на интервале $(0, 1)$.

Пункт 6. Два критерия интегрируемости функции на отрезке

Определение 1. *Пусть $f \in \mathcal{B}[a, b]$, пусть $\mathcal{P}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Обозначим $m_k := \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f$, $M_k := \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f$. Тогда* $\boxed{\textit{нижней и верхней суммами Дарбу}}$ *называются соответственно:*

$$s(f, \mathcal{P}) = s(\mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \quad S(f, \mathcal{P}) = S(\mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Определение 2.

$$\exists \lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} s(\mathcal{P}) =: I_s \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \lim_{\mathbb{B}^*} s(\mathcal{P}) =: I_s$$

Аналогично, $\exists \lim\limits_{d(\mathcal{P}) \to 0} S(\mathcal{P}) =: I_S$

Теорема 1 (Критерий Дарбу интегрируемости f на отрезке).
Пусть $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists \lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} s(\mathcal{P}) =: I_s) \wedge (\exists \lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} S(\mathcal{P}) =: I_S) \wedge (I_s = I_S)$$

► Предварительное замечание:

$$s(\mathcal{P}) \leq \sigma(\mathcal{P}, \xi) \leq S(\mathcal{P}) \ \forall \mathcal{P} \in \mathscr{P}, \ \forall \text{ метки } \xi \text{ разбиения } \mathcal{P}$$

1) $\boxed{\Rightarrow}$: Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно критерию супремума,

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathscr{P}\ \exists\ \text{ метка } \xi' \mid f(\xi'_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}\ \forall\, k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{Тогда } S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sigma(\mathcal{P}, \xi') + \varepsilon$$

По условию, $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)\,dx := I \Rightarrow$ для данного $\varepsilon\ \exists\ \delta > 0 \mid \big|\sigma(\mathcal{P}, \xi) - I\big| < \varepsilon\ \forall\, (\mathcal{P}, \xi) \in B_\delta$. Имеем:

$$I - \varepsilon < \sigma(\mathcal{P}, \xi) \leq S(\mathcal{P}) < \sigma(\mathcal{P}, \xi') + \varepsilon < I + 2\varepsilon$$

Следовательно, $\big|S(\mathcal{P}) - I\big| < 2\varepsilon\ \forall \mathcal{P} \in B^*_\delta$
Применяя аналогичные рассуждения, получим, что $\lim\limits_{d(\mathcal{P}) \to 0} s(\mathcal{P}) = I$.

2) $\boxed{\Leftarrow}$: Обозначим $I_S = I_s =: I$ Зафиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, из условий теоремы будем иметь:

$$\exists\, \delta_1 > 0 \mid \big|S(\mathcal{P}) - I\big| < \varepsilon\ \forall\, \mathcal{P} \in B^*_{\delta_1} \Rightarrow S(\mathcal{P}) < I + \varepsilon\ \forall\, \mathcal{P} \in B^*_{\delta_1}$$
$$\exists\, \delta_2 > 0 \mid \big|s(\mathcal{P}) - I\big| < \varepsilon\ \forall\, \mathcal{P} \in B^*_{\delta_2} \Rightarrow s(\mathcal{P}) > I - \varepsilon\ \forall\, \mathcal{P} \in B^*_{\delta_2}$$

Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall\, (\mathcal{P}, \xi) \in B_\delta$:

$$I - \varepsilon < s(\mathcal{P}) \leq \sigma(\mathcal{P}, \xi) \leq S(\mathcal{P}) < I + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} \sigma(\mathcal{P}, \xi) = I \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)\,dx = I$$

Значит, $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ◄

Теорема 2 (Предельный критерий интегрируемости по Риману).
Пусть $f \in \mathcal{B}[a,b]$. *Тогда* $f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \lim\limits_{d(\mathcal{P}) \to 0} \Omega(f, \mathcal{P}) = 0$

► 1) $\boxed{\Rightarrow}$: Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b] \overset{\text{T1}}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{d(\mathcal{P}) \to 0} \big[S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P})\big] = I - I = 0$.

Но $\Omega(f, \mathcal{P}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{\omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)}_{M_k - m_k} \Delta x_k \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P})$. Значит,

$$\lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} \Omega(f, \mathcal{P}) = \lim_{d(\mathcal{P}) \to 0} \big[S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P})\big] = 0.$$

2) $\boxed{\Leftarrow}$: См. лемму. ◄

Следствие 1: $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b]$

► Так как $\forall x', x'' \in [a,b]$ справедливо неравенство $\big||x'| - |x''|\big| \le |x' - x''|$, то:

$$\omega\big(|f|, [x_{k-1}, x_k]\big) \le \omega\big(|f|, [x_{k-1}, x_k]\big)\ \forall k \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le \sum_{k=1}^{n} \omega\big(|f|, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k = \Omega(f, \mathcal{P}) \overset{d(\mathcal{P})\to 0}{\to} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{d(\mathcal{P})\to 0} \Omega\big(|f|, \mathcal{P}\big) = 0$$

Значит, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. ◄

Замечание: Обратное, вообще говоря, неверно.

Следствие 2: $f \in \mathcal{R}[a,b], g : [a,b] \to \mathbb{R}, g \equiv f$ на $[a,b] \setminus A$, где $A = \{x_1^*, \ldots, x_l^*\} \Rightarrow$
$\Rightarrow g \in \mathcal{R}[a,b]$, причём $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

►

1) Докажем, что $g \in \mathcal{R}[a,b]$. Так как $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Положим $c := \max\{\sup\limits_{[a,b]}|f|, \max\limits_{k=1,\ldots,l}\big|g(x_k^*)\big|\}$. Тогда $\big|g(x)\big| \le c\ \forall x \in [a,b]$.

   Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда $\exists \delta_1 > 0 \mid \Omega(f, \mathcal{P}) < \dfrac{\varepsilon}{2}\ \forall \mathcal{P} \in B_\delta^*$. Кроме того, положим $\delta_2 := \dfrac{\varepsilon}{8cl}$. Как и раньше, положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{P} \in B_\delta$. Имеем:

$$\Omega(g, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \omega\big(g, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k =: \Sigma' + \Sigma'',$$

   где $\Sigma' := \displaystyle\sum_{[x_{k-1},x_k]\cap A = \varnothing} \omega\big(g, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k, \quad \Sigma'' := \sum_{[x_{k-1},x_k]\cap A \ne \varnothing} \omega\big(g, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k$

   Рассмотрим Σ':

$$\Sigma' \le \sum_{k=1}^{n} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k = \Omega(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Оценим Σ'':

$$\Sigma'' \le 2c \cdot \sum_{[x_{k-1},x_k]\cap A \ne \varnothing} \delta \le 2c \cdot 2\delta l < \frac{\varepsilon}{2}$$

2) Докажем, что $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Согласно предыдущему пункту,

$$\exists \lim_{d(\mathcal{P})\to 0} \sigma(g, \mathcal{P}, \xi) = I \overset{\xi_k' \notin A}{\Rightarrow} \exists \lim_{d(\mathcal{P})\to 0} \sigma(g, \mathcal{P}, \xi') = \lim_{d(\mathcal{P})\to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = I$$ ◄

$\boxed{§2}$. Свойства интеграла Римана

Пункт 1. Линейность интеграла Римана. Интегрируемость произведения и частного

Теорема 1 (Линейность).
Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда* $h(x) := \alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, *причём*

$$\int\limits_a^b h(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{1}$$

► $\sigma(h, \mathcal{P}, \xi) = \alpha\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) + \beta\sigma(g, \mathcal{P}, \xi) \overset{d(\mathcal{P})\to 0}{\to}$ (пр.ч.(1)) ◄

Лемма 1. $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$

► Так как $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f \in \mathcal{B}[a,b]$. Положим $M := \sup\limits_{[a,b]}|f|$. Тогда $\forall x', x'' \in [a,b]$ справедливо неравенство: $\big|f^2(x') - f^2(x'')\big| \le 2M\big|f(x') - f(x'')\big|$. Поэтому

$$0 \le \Omega(f^2, \mathcal{P}) \le 2M \sum_{k=1}^{n} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k \ = \Omega(f, \mathcal{P}) \overset{d(\mathcal{P})\to 0}{\to} 0$$

Таким образом, $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$. ◄

Теорема 2. $f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$

► $f \cdot g = \frac{1}{4}\big[(f+g)^2 - (f-g)^2\big] \in \mathcal{R}[a,b]$ ◄

Лемма 2. $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\big|f(x)\big| \ge m > 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$

►$\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ для произвольного k справедливо неравенство:

$$\left|\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')}\right| \le \frac{\big|f(x') - f(x'')\big|}{m^2} \le \frac{\omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)}{m^2} \text{ Поэтому}$$

$$0 \le \Omega\Big(\frac{1}{f}, \mathcal{P}\Big) \le \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{n} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k = \frac{1}{m^2}\Omega(f, \mathcal{P}) \overset{d(\mathcal{P})\to 0}{\to} 0$$

Таким образом, $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$. ◄

Теорема 3. $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\big|g(x)\big| \ge m > 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \dfrac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$

► . . . ◄

Пункт 2. Интегрируемость на подотрезке

Теорема 1. $f \in \mathcal{R}[a,b],\ [\alpha,\beta] \in [a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$

► Обозначим $\mathcal{P}_{[a,b]}$ разбиение отрезка $[a,b]$.
$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow$ Для фиксированного произвольного $\varepsilon > 0$:

$$\exists \delta > 0 \mid \Omega(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) < \varepsilon\ \forall \mathcal{P}_{[a,b]} \in B^*_\delta[a,b]$$

Рассмотрим произвольное $\mathcal{P}_{[\alpha,\beta]} \in \mathscr{P}_{[\alpha,\beta]}$, а именно $\mathcal{P}_{[\alpha,\beta]} \in B^*_\delta[\alpha,\beta]$. К разбиению $\mathcal{P}_{[\alpha,\beta]}$ добавим точки $x'_1, \ldots, x'_m \in [a,b] \setminus [\alpha,\beta]$. Получили $\mathcal{P}'_{[a,b]} \in B^*_\delta[a,b]$. Тогда

$$0 \le \Omega\big(f, \mathcal{P}_{[\alpha,\beta]}\big) = \sum_{k=1}^{n} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k \le \Omega(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) < \varepsilon$$

Следовательно, $\Omega\big(f, \mathcal{P}_{[\alpha,\beta]}\big) \to 0$ при $d\big(\mathcal{P}_{[\alpha,\beta]}\big) \to 0$. ◄

Теорема 2. *Пусть* $f : [a,c] \to \mathbb{R}, a < b < c$. *Тогда* $f \in \mathcal{R}[a,c] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}[a,b]) \wedge (f \in \mathcal{R}[b,c]) \wedge \Big(\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad (1) \Big)$$

► 1) $\boxed{\Rightarrow}$: Пусть $f \in \mathcal{R}[a,c] \overset{\text{T1}}{\Rightarrow} (f \in \mathcal{R}[a,b]) \wedge (f \in \mathcal{R}[b,c])$. Докажем (1).
Выбрав произвольное $\varepsilon > 0$, имеем:

$$\exists\, \delta_1 > 0 \mid \left| \sigma_1(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}, \xi') - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, (\mathcal{P}'_{[a,b]}, \xi') \in B_{\delta_1}[a,b]$$

$$\exists\, \delta_2 > 0 \mid \left| \sigma_2(f, \mathcal{P}''_{[b,c]}, \xi'') - \int_b^c f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, (\mathcal{P}''_{[b,c]}, \xi'') \in B_{\delta_2}[b,c]$$

Как и ранее, положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Рассмотрим произвольное разбиение $(\mathcal{P}_{[a,c]}, \xi) B^[_\delta a, c]$ с условием: $\exists k_0 \in \{1, \ldots, n\} \mid b = x_{k_0}$. Тогда для соответствующей интегральной суммы $\sigma^*(\mathcal{P}_{[a,c]}, \xi)$ имеем:

$$\left| \sigma^*(\mathcal{P}_{[a,c]}, \xi) - \Big(\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \Big) \right| =$$

$$= \left| \Big[\sigma_1(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}, \xi') - \int_a^b f(x)\,dx \Big] + \Big[\sigma_2(f, \mathcal{P}''_{[b,c]}, \xi'') - \int_b^c f(x)\,dx \Big] \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно, так как $f \in \mathcal{R}[a,c]$, то

$$\exists \lim_{d(\mathcal{P})\to 0} \sigma(\mathcal{P}_{[a,c]}, \xi) = \lim_{d(\mathcal{P})\to 0} \sigma^*(\mathcal{P}_{[a,c]}, \xi) = \int\limits_a^c f(x)\,dx$$

2)$\boxed{\Leftarrow}$: $(f \in \mathcal{R}[a,b]) \wedge (f \in \mathcal{R}[b,c]) \Rightarrow f \in \mathcal{B}[a,c] \Rightarrow \exists M < 0 \mid \forall x \in [a,c] \ \big|f(x)\big| < M$. Выбрав произвольное $\varepsilon > 0$, имеем:

$$\exists\, \delta_1 > 0 \mid \ \Omega(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall\, \mathcal{P}'_{[a,b]} \in B^*_{\delta_1}[a,b]$$
$$\exists\, \delta_2 > 0 \mid \ \Omega(f, \mathcal{P}''_{[b,c]}) < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall\, \mathcal{P}''_{[b,c]} \in B^*_{\delta_2}[b,c]$$

Теперь же положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \dfrac{\varepsilon}{18M}\}$ и рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{P}_{[a,c]} \in B^*_\delta[a,c]$ с условием:

$\diamond$ $\exists k_0 \in \{1, \dots, n\} \mid b = x_{k_0}$. В этом случае

$$\Omega(f, \mathcal{P}_{[a,c]}) = \sum_{k=1}^{k_0} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k + \sum_{k_0+1}^{n} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k =$$
$$= \Omega(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) + \Omega(f, \mathcal{P}''_{[b,c]}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,\ \mathcal{P}_{[a,c]} = \mathcal{P}'_{[a,b]} \cup \mathcal{P}''_{[b,c]}$$

$\diamond$ $\exists k_0 \in \{1, \dots, n\} \mid b \in (x_{k_0-1}, x_{k_0})$. Имеем в этом случае

$$\Omega(f, \mathcal{P}_{[a,c]}) = \Big[\sum_{k=1}^{k_0-1} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k + \omega\big(f, [x_{k_0-1}, b]\big)(b - x_{k_0-1})\Big] +$$
$$+ \Big[\sum_{k_0+1}^{n} \omega\big(f, [x_{k-1}, x_k]\big)\Delta x_k + \omega\big(f, [b, x_{k_0}]\big)(x_{k_0} - b)\Big] +$$
$$+ \Big[\omega\big(f, [x_{k_0-1}, x_{k_0}]\big)\Delta x_{k_0} - \omega\big(f, [x_{k_0-1}, b]\big)(b - x_{k_0-1}) - \omega\big(f, [b, x_{k_0}]\big)(x_{k_0} - b)\Big]$$
$$=: A_1 + A_2 + A_3 \text{ соответственно}$$

Оценим A_1, A_2, A_3 :
$|A_1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $|A_2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $|A_3| \le 2M\delta + 2M\delta + 2M\delta = 6M\delta < 6M\dfrac{\varepsilon}{18M} = \dfrac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Omega(f, \mathcal{P}_{[a,c]}) < \varepsilon$ ◀

Пример:

$$f(x) = sgn(x) \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx = 0$$

Определение 1. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b], c \in [a,b]$. *Тогда*

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx := -\int\limits_a^b f(x)\,dx,\ \int\limits_c^c f(x)\,dx := 0$$

Теорема 3. *Пусть* $f : [A, B] \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}[A, B], a, b, c \in [A, B]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$$

► См. теорему 2 и определение 1 ◄

Пункт 3. Интегрирование и неравенства

Лемма 1. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a, b],\ m \le f(x) \le M\ \forall\, x \in [a, b]$. *Тогда*

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \tag{1}$$

► $m(b-a) \le \sigma(\mathcal{P}, \xi) \le M(b-a)$. Переходя к пределу при $d(\mathcal{P}) \to 0$, получим (1). ◄

Следствие: $f \in \mathcal{R}[a, b], f \ge 0\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow \displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$

Теорема 1. *Пусть* $f, g \in \mathcal{R}[a, b], f(x) \ge g(x)\ \forall\, x \in [a, b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge \int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{2}$$

► Положим $h(x) := f(x) - g(x), h(x) \ge 0\ \forall\, x \in [a, b]$. Тогда, используя следствие из леммы 1, получим

$$\int\limits_a^b h(x)\,dx \ge 0 \Leftrightarrow \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \ge 0 \Leftrightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx \ge 0$$

Таким образом, имеем (2). ◄

Следствие: $f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a, b]$ (было доказано). Кроме того,

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\,dx \tag{3}$$

▶ $\forall\, x \in [a,b]:\ -\left|f(x)\right| \le f(x) \le \left|f(x)\right|$. Тогда, согласно теореме 1,

$$-\int\limits_a^b \left|f(x)\right|\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b \left|f(x)\right|\,dx,$$

что равносильно (3). ◀

Лемма 2. $f \in \mathcal{R}[a,b],\, f > 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$ (4)

▶ Исходя из леммы 1, $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$. Будем доказывать от противного: пусть (4) неверно, т.е. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Так как $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то, по критерию Дарбу,

$$\lim_{d(\mathcal{P})\to 0} S(f,\mathcal{P}) = \lim_{d(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = 0,\ \text{ где } M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$$

Тогда, для $\varepsilon = b-a,\ \exists$ разбиение $\mathcal{P}^{(1)}$ отрезка $[a,b]$ с условием: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k^{(1)} \Delta x_k^{(1)} < b-a$.
Значит, $\exists\, k_1 \mid M_{k_1}^{(1)} < 1$ (иначе $\forall\, k M_{k_1}^{(1)} \ge 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k^{(1)} \Delta x_k^{(1)} \ge b-a$).
Обозначим за $[a_1, b_1] := [x_{k_1-1}, x_{k_1}]$ и заметим, что

$$\underbrace{\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx}_{\ge 0} = \underbrace{\int\limits_a^b f(x)\,dx}_{=0} - \underbrace{\int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx}_{\ge 0} - \underbrace{\int\limits_{b_1}^{b} f(x)\,dx}_{\ge 0} \Rightarrow \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = 0$$

Далее применим рассуждение, использующее критерий Дарбу, для функции f на отрезке $[a_1, b_1]$, т.е.

$$\exists\, [a_2,b_2] \subset [a_1,b_1] \mid M^{(2)} := \sup_{[a_2,b_2]} f < \frac{1}{2}\ \left(\text{для } \varepsilon = \frac{b-a}{2}\right)$$

$$\cdots$$

$$\exists\, [a_n,b_n] \subset [a_{n-1},b_{n-1}] \mid M^{(n)} := \sup_{[a_n,b_n]} f < \frac{1}{n}\ \left(\text{для } \varepsilon = \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\cdots$$

Построили систему вложенных отрезков. Следовательно, по лемме Кантора о вложенных отрезках, $\exists c \in [a_n, b_n] \; \forall n \in \mathbb{N}$. Кроме того, $c \in [a, b] \Rightarrow f(c) > 0$.
В итоге, $0 < f(c) \leq M^{(n)} < \dfrac{1}{n} \; \forall \in \mathbb{N}$. Перейдём к пределу:
$0 < f(c) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, т.е. $0 < f(c) \leq 0$ — имеем противоречие. ◀

Теорема 2. *Пусть* $f, g \in \mathcal{R}[a, b], f(x) > g(x) \; \forall \, x \in [a, b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

▶ Рассматриваем $h(x) := f(x) - g(x)$ и применяем лемму для h, используя линейность интеграла. ◀

Следствия:

1) $f \in \mathcal{C}[a, b], f \geq 0 \; \forall x \in [a, b], \displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \; \forall x \in [a, b]$.

   ▶ Достаточно доказать, что $f(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$, тогда $f(a) = f(b) = 0$ в силу непрерывности. От противного: пусть $\exists x_0 \in [a, b] \mid f(x_0) > 0 \overset{f\in\mathcal{C}(x_0)}{\Rightarrow} \exists [\alpha, \beta] \subset [a, b] \mid f(x) > 0 \; \forall x \in [\alpha, \beta]$. Тогда, согласно лемме 2,

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0 \Rightarrow 0 = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx}_{>0} - \underbrace{\int\limits_\beta^b f(x)\,dx}_{\geq 0} > 0$$

   Получили противоречие. ◀

2) $f \in \mathcal{C}[a, b], \forall [\alpha, \beta] \subset [a, b], \displaystyle\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \; \forall x \in [a, b]$.

   ▶ От противного: $\exists x_0 \in [a, b] \mid f(x_0) > 0 \overset{f\in\mathcal{C}(x_0)}{\Rightarrow} \exists [\alpha, \beta] \subset [a, b] \mid f(x) > 0 \; \forall x \in [\alpha, \beta] \overset{\text{Л2}}{\Rightarrow} \displaystyle\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$ — противоречие. ◀

<u>Пункт 4.</u> Теоремы о среднем

Теорема 1 (Первая теорема о среднем).

Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b], g \overset{(\leq)}{\geq} 0\ \forall x \in [a,b], M := \sup\limits_{[a,b]} f, m := \inf\limits_{[a,b]} f$. *Тогда* $\exists\ \mu \in [m, M]$ *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{1}$$

► Не ограничивая общности, считаем, что $g \geq 0\ \forall x \in [a,b]$. Имеем:

$$m\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq M g(x)\ \forall x \in [a,b] \overset{\text{T1 п.3}}{\Rightarrow}$$

$$\overset{\text{T1 п.3}}{\Rightarrow} m \int\limits_a^b g(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{2}$$

Возможны два случая:

а) $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$. Но тогда, по следствию из T1 п.3,

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\,g(x)\,dx \leq \sup\limits_{[a,b]}|f| \int\limits_a^b g(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

То есть (1) верно.

б) $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$. Тогда поделим (2) на это выражение: $m \leq \underbrace{\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{=:\mu} \leq M$

Имеем: $m \leq \mu \leq M$, $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx \Leftrightarrow (1)$. ◄

Следствия:

1) $f \in \mathcal{R}[a,b], M := \sup\limits_{[a,b]} f, m := \inf\limits_{[a,b]} f \Rightarrow \exists\ \mu \in [m, M]\ \mid\ \int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$

   ► $g = 1$ ◄

2) Пусть $f \in \mathcal{C}[a,b], g \in \mathcal{R}[a,b], g \overset{(\le)}{\ge} 0\ \forall x \in [a,b]$. Тогда $\exists\ c \in [a,b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{3}$$

► Так как f непрерывна, то к ней применима 2-ая теорема Вейерштрасса, а значит $\exists x_1, x_2 \in [a,b] \mid f(x_1) = \max\limits_{[a,b]} f =: M, f(x_2) = \min\limits_{[a,b]} f =: m$.

а)Если $f \equiv const$ на $[a,b]$, то (3) верно.

б) Если же это не так, то M>m, тогда из T1 получаем, что

$$\exists\ \mu \in [m,M] \mid \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$$

- $\mu \in [m,M]$. Тогда по Т. о промежуточных значениях, $\exists c \in (a,b) \mid f(c) = \mu$
- $\mu = M \Rightarrow c := x_1$
- $\mu = m \Rightarrow c := x_2$

В итоге, имеем (3). ◄

3) $f \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] \mid \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

Теорема 2 (Вторая теорема о среднем).
Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b], g \uparrow (\downarrow)$ на $[a,b]$. Тогда $\exists\ c \in [a,b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx$$

► Доказательство этой теоремы не требуется в рамках данного курса, заинтересованные могут посмотреть в Зориче ◄

$\boxed{\S 3}$. Интеграл Римана как функция верхнего (нижнего) предела

Пункт 1. Непрерывность интеграла по верхнему (нижнему) пределу

Определение 1. *Пусть* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. *Тогда* f *удовл.* $\boxed{\text{условию Липшица}}$ *на* $\mathbb{X} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists c > 0 \mid \left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leq c\,|x_2 - x_1| \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}$
Обозначается: $f \in \operatorname{Lip}\mathbb{X}$

Замечание: 1) $f \in \mathcal{C}[a,b] \cup \mathcal{D}(a,b), f' \in \mathcal{B}(a,b) \Rightarrow f \in \operatorname{Lip}[a,b]$
► Из теоремы Лагранжа следует, что

$$\left|f(x_2) - f(x_1)\right| = \left|f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))\right|\left|x_2 - x_1\right|, \theta \in (0,1)$$

Положив $c := \sup\limits_{(a,b)}|f'| \in \mathbb{R}$ ($f' \in \mathcal{B}(a,b)$), получим условие Липшица. ◄

2) $f \in \operatorname{Lip}[a,b] \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in \mathcal{D}(a,b)$
Например, $f(x) = |x|, f \notin \mathcal{D}(0)$, но $\big||x_2| - |x_1|\big| \leq 1 \cdot |x_2 - x_1|$

Лемма 1. *Пусть* $f \in \operatorname{Lip}\mathbb{X}$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. *Тогда* f *равномерно непрерывна на* $\mathbb{X}$.

► Имеем:

$\forall \varepsilon > 0 \ \left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leq c\,|x_2 - x_1| < \varepsilon$ при $\delta := \dfrac{\varepsilon}{c} \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ с усл. $|x_2 - x_1| < \delta$

◄

Замечание: f — равномерно непрерывна на $\mathbb{X} \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in \operatorname{Lip}\mathbb{X}$
Например, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$

В итоге, $\mathcal{C}^1[a,b] \subset \operatorname{Lip}[a,b] \subset \mathcal{C}[a,b]$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\Phi(x) := \displaystyle\int\limits_a^x f(t)\,dt$, $\Psi(x) := \displaystyle\int\limits_x^b f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$.

Тогда $\Phi, \Psi \in \operatorname{Lip}[a,b]$.

► 1) Докажем, что $\Phi \in \operatorname{Lip}[a,b]$. Пусть x_1, x_2 — произв. с усл. $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Имеем:

$$\left|\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right| = \left|\int\limits_a^{x_2} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_1} f(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \leq \int\limits_{x_1}^{x_2} \left|f(t)\right|\,dt \leq M\,|x_2 - x_1|,$$

где $M := \sup\limits_{[a,b]}|f| \in \mathbb{R}$, так как $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{B}[a,b]$

2) $\Psi \in \operatorname{Lip}[a,b]$ аналогично. ◄

Следствие: Φ, Ψ — равномерно непрерывны на $[a,b]$, $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}[a,b]$.

Пункт 2. Дифференцируемость интеграла по верхнему (нижнему) пределу

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b], f \in \mathcal{C}(x_0), x_0 \in [a,b]$.

$$\textit{Тогда } \Phi \in \mathcal{D}(x_0), \Phi'(x_0) = f(x_0), \textit{ где } \Phi(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

► Имеем:

$$(*) := \left| \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)} \right| = \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int\limits_{x_0}^{x} \big[f(t) - f(x_0)\big]\,dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|} \begin{cases} \int\limits_{x_0}^{x} \big|f(t) - f(x_0)\big|\,dt, \text{ если } x > x_0 \\ \int\limits_{x}^{x_0} \big|f(t) - f(x_0)\big|\,dt, \text{ если } x < x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Но $f \in \mathcal{C}(x_0) \Rightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 \mid \big|f(t) - f(x_0)\big| < \varepsilon\ \forall t \in O_\delta(x_0)$

Поэтому $\underline{\forall\, x \in O_\delta(x_0)}$ имеем (см. (1)): $(*) < \dfrac{\varepsilon|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon$ ◄

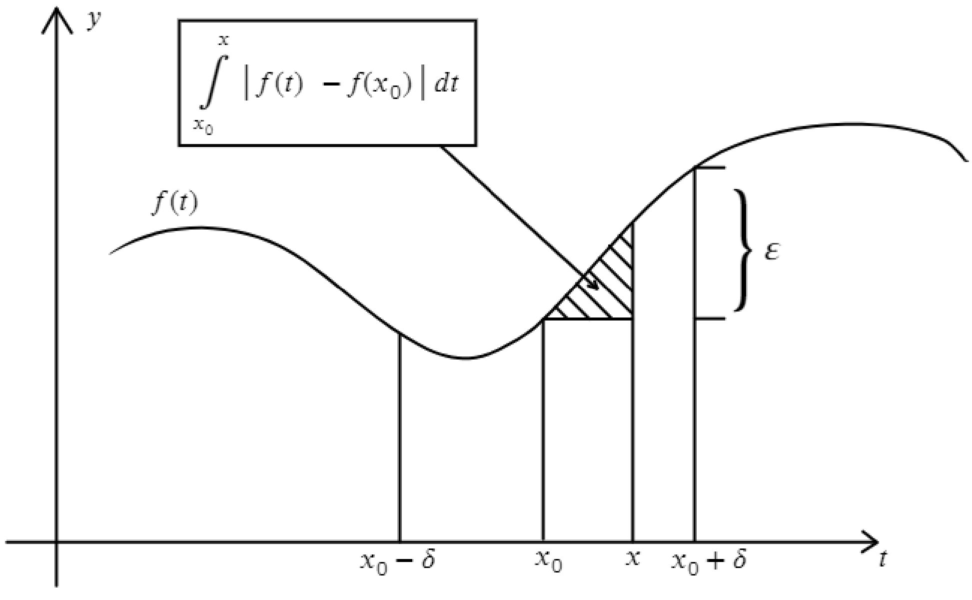


Рис. 3. Иллюстрация к теореме 1

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b], f \in \mathcal{C}(x_0), x_0 \in [a,b]$.

$$\textit{Тогда } \Psi \in \mathcal{D}(x_0), \Psi'(x_0) = -f(x_0), \textit{ где } \Psi(x) := \int\limits_x^b f(t)\,dt$$

► $\Psi(x) := \int\limits_a^b f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt = \underbrace{I}_{\text{число}} - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x_0) = -\Phi'(x_0) = -f(x_0)$ ◄

Пример:

1) $\Phi(x) = \int\limits_0^{\cos x} \sin\frac{1}{t}\,dt, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

   Тогда по Т1 и по Т о производной композиции, $\Phi'(x) = \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)(-\sin x)$

2) $F(x) := \int\limits_{x^{1/2}}^{x^{1/3}} e^{t^2}\,dt,\ x > 0$

   Представим $F(x) = \int\limits_0^{x^{1/3}} e^{t^2}\,dt - \int\limits_0^{x^{1/2}} e^{t^2}\,dt$. Тогда $F'(x) = \frac{1}{3}e^{x^{2/3}}x^{-2/3} - \frac{1}{2}e^{x}x^{-1/2}$

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathcal{C}(a,b)$. *Тогда* $\exists\, \Phi \in \mathcal{D}(a,b) \mid \Phi'(x) = f(x)\ \forall\, x \in (a,b)$, *т.е. существует первообразная* f *на* (a,b).

► Положим $\Phi(x) := \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(t)\,dt,\ x \in (a,b)$. Такая запись корректна, так как для любого отрезка внутри интервала f интегрируема. Кроме того, по Т1 $\Phi'(x) = f(x)\ \forall\, x \in (a,b)$. ◄

Теорема 4. *Пусть* $f \in \mathcal{C}[a,b]$. *Тогда функция* $\Phi(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b]$, *является первообразной* f *на* (a,b), *причём* $\Phi \in \mathcal{D}[a,b]$ *и* $\Phi'(x) = f(x)\ \forall\, x \in [a,b]$

► Следует из Т1. ◄

$\boxed{\S 4}$. Формула Ньютона-Лейбница для интегрируемой функции

Пункт 1. Теорема об интеграле для функции, равной 0 почти всюду

Теорема 1. *$f \in \mathcal{R}[a,b], f \equiv 0$ на $[a,b] \setminus A$, где $\mu(A) = 0 \Rightarrow$*

$$\Rightarrow \text{ интеграл не зависит от этих точек, т.е. } \int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$$

► $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{d(\mathcal{P})\to 0} s\big(|f|\,,\mathcal{P}\big) = \lim\limits_{d(\mathcal{P})\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\,dx$, где $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} |f|$.

Но $\forall [\alpha,\beta] \in [a,b]$ $\inf\limits_{[\alpha,\beta]} |f| = 0$, т.к. иначе $\exists\ [\alpha,\beta] \in [a,b] \mid \inf\limits_{[\alpha,\beta]} |f| > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \big|f(x)\big| > 0\ \forall x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow [\alpha,\beta] \subset A \Rightarrow \mu(A) \neq 0$ — противоречие с условием.

Тогда $s\big(|f|\,,\mathcal{P}\big) = 0$ и $\lim\limits_{d(\mathcal{P})\to 0} s\big(|f|\,,\mathcal{P}\big) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \le \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\,dx = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = 0 \ ◄$$

Замечание: $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \equiv 0$ на $[a,b] \setminus A$, где $\mu(A) = 0 \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in \mathcal{R}[a,b]$
Например, функция Дирихле.

Следствие: $f, g \in \mathcal{R}[a,b], f \equiv g$ на $[a,b] \setminus A$, где $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$

Пример: Функция Римана $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (см. стр. 17). Кроме того, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$

Пункт 2. $\boxed{\text{Формула Ньютона-Лейбница}}$

Теорема 2 (Формула Ньютона-Лейбница). *Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\exists F \in \mathcal{C}[a,b] \mid F$ — первообразная f на (a,b). Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b \tag{1}$$

Кроме того, $\Phi(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ обладает следующими свойствами:

$\Phi(x) \in \mathcal{C}[a,b], \Phi$ — первообразная f на (a,b).

▶ 1) $\forall \mathcal{P}$ можем представить $F(b)-F(a)=\sum\limits_{k=0}^{n}\big[F(x_k)-F(x_{k-1})\big]$.

Но $F\in\mathcal{C}[x_{k-1},x_k]\cap\mathcal{D}(x_{k-1},x_k)$ $\forall k$, а значит, по Т. Лагранжа, $\exists\,\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ $|$ $F(x_k)-F(x_{k-1})=f(\xi_k)\Delta x_k$. Следовательно, так как $f\in\mathcal{R}[a,b]$,

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=0}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\to\int\limits_a^x f(t)\,dt \text{ при } d(\mathcal{P})\to 0$$

2) Рассмотрим $\Phi(x):=\int\limits_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)$ $\forall x\in[a,b]$ по п.1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\Phi'(x)=F'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$. Таким образом, Φ — первообразная f на (a,b). (Непрерывность была доказана). ◀

Замечание:

1) $f\in\mathcal{R}[a,b]\overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow}\exists F\in\mathcal{C}[a,b]$ $|$ F — первообразная f на (a,b).
   Например, функция Римана (см. стр. 17).
   Предположим, что $\exists F\in\mathcal{C}[a,b]$ $|$ F — первообразная f на (a,b). Тогда
   $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)\,dx=0$ (см. пункт 1 данного параграфа), причём, по T1,
   $\Phi'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$. Значит, $f(x)=(0)'=0$ $\forall x\in[a,b]$, однако это не так.

2) $\exists F\in\mathcal{C}[a,b]$ $|$ F — первообразная f на $(a,b)\overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow}f\in\mathcal{R}[a,b]$. Например,

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}\qquad x\in[-1,1]$$

   - $F\in\mathcal{C}[-1,1]$
   - $F'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0$
   - $F'(0)=0$

   При этом $f(x):=F'(x), x\in[-1,1]$ не является ограниченной $\Rightarrow f\notin\mathcal{R}[-1,1]$.

3) $f\in\mathcal{C}[a,b]\Rightarrow$ выполнены все условия для формулы Ньютона-Лейбница.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \qquad x \in [-1, 1]$$

Во-первых, $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Действительно, выпишем f явно:

$f(x) = -\dfrac{1}{(1+2^{1/x})^2}\, 2^{1/x} \ln 2 \, \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{2^{1/x} \ln 2}{(1+2^{1/x})^2 x^2}, x \neq 0$

$f(0+) = 0, f(0-) = 0$ (показательная "круче") $\Rightarrow f \in \mathcal{C}[-1, 1] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[-1, 1]$.

Значит, можем рассмотреть $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Однако $F(x) = \dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ не является непрерывной в нуле, так как $F(0+) = 0$, а $F(0-) = 1$, поэтому формулу Ньютона-Лейбница применять напрямую нельзя.

Определим

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}}, x > 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}}, x < 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{d}{dx} F_1(x)\, dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{d}{dx} F_2(x)\, dx = F_2(x)\Big|_{-1}^{0} + F_1(x)\Big|_{0}^{1}$$

$\boxed{\S 5}$. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле

Пункт 1. Замена переменной

Напоминание:

- $f \in \mathcal{D}[a,b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (f \in \mathcal{D}(a,b)) \wedge (\exists\, f'_+(a) \in \mathbb{R}) \wedge (\exists\, f'_-(b) \in \mathbb{R})$
- $f \in \mathcal{C}^1[a,b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (f \in \mathcal{D}[a,b]) \wedge (f' \in \mathcal{C}[a,b])$

Теорема 1. $f \in \mathcal{C}[a,b], \varphi \in \mathcal{C}^1[\alpha,\beta], \varphi\big([\alpha,\beta]\big) \subset [a,b]$, *причём* $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \tag{1}$$

► Так как $f \in \mathcal{C}[a,b]$, то $\exists$ первообразная F для f на (a,b), причём $F \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Положим $g(t) := f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t), t \in [\alpha,\beta]$. Имеем: $g \in \mathcal{C}[\alpha,\beta] \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ первообразная G для g на $(\alpha,\beta), G \in \mathcal{C}[\alpha,\beta]$. Докажем, что $G(t) = F\big(\varphi(t)\big)$.
В самом деле, $G'(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = g(t)$. Поэтому

$$\int\limits_\alpha^\beta g(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha) = F\big(\underbrace{\varphi(\beta)}_{=b}\big) - F\big(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=a}\big) = F(b) - F(a)$$

С учётом (2), это даёт требуемое утверждение (1). ◄

Пример:

1) $f \in \mathcal{C}[-a,a], a > 0, f$ — нечётная $\Rightarrow I := \displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

► Имеем: $I = \underbrace{\displaystyle\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{=:I_1} + \displaystyle\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$. Сделаем в I_1 замену:

$$\begin{cases} x = -t \\ dx = -dt \end{cases} \Rightarrow I_1 = -\int\limits_a^0 \underbrace{f(-t)}_{-f(t)}\,dx = \int\limits_a^0 f(x)\,dx = -\int\limits_0^a f(x)\,dx \text{ ◄}$$

2) Проведите похожие рассуждения, если f — чётная.

3) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), f$ — T-периодическая, $T > 0 \Rightarrow \int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx \ \forall a \in \mathbb{R}$

▶ $\cdots$ ◀

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b], \varphi \in \mathcal{D}[\alpha,\beta], \varphi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta], \varphi \upuparrows (\downdownarrows)$ *на* $[\alpha,\beta]$, $\varphi\big([\alpha,\beta]\big) \subset [a,b], \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$$

▶ Камынин, Том 1, стр. 238 ◀

Пункт 2. Интегрирование по частям

Теорема 1. $u, v \in \mathcal{D}[a,b], u', v' \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx \qquad (1)$$

▶

$$(1) \Leftrightarrow \int\limits_a^b \Big[\underbrace{\frac{d}{dx}\big(u(x)v(x)\big)}_{=:f(x)}\Big]\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

Имеем: $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Пусть $F(x) = u(x)v(x), x \in [a,b]$.
Тогда $F'(x) = f(x), x \in [a,b], F \in \mathcal{C}[a,b]$(т.к. $F \in \mathcal{D}[a,b]$). Использовав формулу Ньютона-Лейбница, получим (1). ◀

Определение 1. 1)$f \in \mathcal{D}^1[a,b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f \in \mathcal{D}[a,b]$
2) $n \geq 0, f \in \mathcal{D}^n[a,b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \big(f \in \mathcal{D}^{n-1}[a,b]\big) \wedge \big(f^{(n-1)} \in \mathcal{D}[a,b]\big)$

Теорема 2 (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме).

Пусть $f \in \mathcal{D}^{n+1}[a,b], f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a,b], n \geq 0, x_0 \in (a,b)$. *Тогда*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x,x_0) \ (2),$$

$$\text{где } r_n(x,x_0) := \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\ x \in [a,b]$$

► Будем проводить доказательство по индукции:

- $n = 0$: тогда $f \in \mathcal{D}[a,b], f' \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0) \Rightarrow$

  $\Rightarrow$ (2) для $n = 0$, т.к. $f' \in \mathcal{R}[a,b], f'$ имеет первообразную f, причём $f \in \mathcal{C}[a,b]$.

- Пусть (2) верно для $n \geq 0$. Докажем для $n+1$. Рассмотрим $r_n(x,x_0)$:

$$r_n(x,x_0) := \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{v'(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{u(t)}\,dt = |\text{ по частям }| =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{n+1}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{n+1}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt}_{=r_{n+1}(x,x_0)}$$

Следовательно, представление (2) верно для $n+1$. ◄

Замечание: $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b] \Rightarrow$ формула (2) $\overset{\text{Т о среднем}}{\Rightarrow}$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$\boxed{\S 6}$. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пункт 1. Определение. Критерий Коши

Определение 1. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b]\ \forall b > a$. *Тогда*

1) $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *(1)*

2) *Если предел (1) существует, то говорят, что* $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*

3) *Если же предел (1) не существует, то говорят, что* $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится*

4) f $\boxed{\text{интегрируема по Риману в несобственном смысле}}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ сходится}$$

Замечание:

1) Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b], f \geq 0$ на $[a,b]$. Тогда можно использовать следующие обозначения:
   - Если $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то пишем $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$
   - Если же $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то пишем $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty$

2) Пусть $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Тогда $\exists \displaystyle\lim_{c\to+\infty} \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

   ► а) $\displaystyle\int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^c f(x)\,dx \overset{b\to+\infty}{\to} \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int\limits_a^c f(x)\,dx \Rightarrow \exists \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx.$

   б) $\displaystyle\int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int\limits_a^c f(x)\,dx \overset{c\to+\infty}{\to} \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ ◄

Пример: $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}, x \geq 1, \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} < \infty, \text{ если } \alpha > 1 \\ = \infty, \text{ если } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

► а) Пусть $\alpha > 1$. Имеем:

$$\int\limits_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\Big[\overbrace{b^{-\alpha+1}}^{\overset{b\to+\infty}{\to} 0} - 1\Big] = \frac{1}{\alpha - 1} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}$$

б) Пусть $\alpha = 1$. Тогда:

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^b = \ln b \overset{b\to+\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ — расходится}$$

б) Пусть $\alpha < 1$. Тогда:

$$\int\limits_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\Big[b^{1-\alpha} - 1\Big] \overset{b\to+\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ — расходится}$$

◄

Определение 2. *Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]\ \forall b < a$. Тогда*

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx := \lim_{b\to-\infty} \int\limits_b^a f(x)\,dx$ *(2)*

2) Если предел (2) существует, то говорят, что $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$ <u>*сходится*</u>

3) Если же предел (2) не существует, то говорят, что $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$ <u>*расходится*</u>

4) f $\boxed{\text{интегрируема по Риману в несобственном смысле}}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$ *сходится*

Определение 3. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b]\ \forall a < b$. *Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ сходится} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx \text{ сходится}\right) \wedge \left(\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ сходится}\right),$$

причём $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$

Теорема 1 (Критерий Коши). *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b]\ \forall b > a$. *Тогда*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, B > a \mid \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon\ \forall\, b_1, b_2 > B$$

► Положим $F(x) := \displaystyle\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt, x \geq a$. Тогда $\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Согласно критерию Коши для $F(x)$ при $x \to +\infty$,

$$\exists \lim_{x\to+\infty} F(x) \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, B > a \mid \big|F(x_1) - F(x_2)\big| < \varepsilon\ \forall\, x_1, x_2 > B \qquad (*)$$

Но

$$\big|F(x_1) - F(x_2)\big| = \left|\int\limits_{a}^{x_2} f(x)\,dx - \int\limits_{a}^{x_1} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right|$$

С учётом (*), это и есть требуемое утверждение. ◄

Определение 4. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b]\ \forall b > a$. *Тогда*

1) $\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *<u>сходится абсолютно</u>* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx < \infty$

2) $\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *<u>сходится условно</u>* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ сходится}\right) \wedge \left(\int\limits_{a}^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx \text{ расходится}\right)$$

Теорема 2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится абсолютно* $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.*

► Пусть $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right|\,dx$ сходится. Тогда, по Т1,

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,B > a \mid \int\limits_{b_1}^{b_2} \left|f(x)\right|\,dx < \varepsilon\;\forall\,b_1, b_2 > B, b_2 > b_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \left|f(x)\right|\,dx\right| \le \int\limits_{b_1}^{b_2} \left|f(x)\right|\,dx < \varepsilon\;\forall\,b_1, b_2 > B, b_2 > b_1$$

Применив критерий Коши в обратную сторону, получим утверждение теоремы. ◄

Пример: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится условно (доказательство ниже).

Свойства:

1) Линейность

2) Замена переменной

3) По частям

► Зорич, стр. 460 ◄

Пункт 2. Признаки сходимости

Теорема 1 (Признак сравнения/мажорантный).
Пусть $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{R}[a, b]\ \forall b > a, 0 \le f(x) \le g(x)\ \forall x \ge a$ *Тогда:*

1) $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx < \infty \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$

2) $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx = \infty$

► 1) Пусть $G(x) := \displaystyle\int\limits_a^{x} g(t)\,dt, x \ge a$. Тогда, т.к. $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx < \infty$, то $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$, и, т.к. $g(x) \ge 0\ \forall x \ge a, G \uparrow$ на $[a, +\infty)$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, $\exists\, M > 0 \mid 0 \le G(x) \le M\ \forall x \ge a$.

Теперь положим $F(x) := \displaystyle\int\limits_a^{x} f(t)\,dt, x \ge a$, тогда, т.к. $f(x) \le g(x)\ \forall x \ge a$, имеем:

$F(x) \le G(x)\ \forall x \ge a \Rightarrow F(x) \le M\ \forall x \ge a$ и $F \uparrow$ на $[a, +\infty)$.

По теореме Вейерштрасса, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \Rightarrow \displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

2) Обращённое утверждение (от противного). ◄

Пример: $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \underbrace{\sin x \cdot x^n \cdot e^{-x^2}}_{=:f(x)}\,dx, n \ge 0$

Имеем $\big|f(x)\big| \le \dfrac{1}{x^2} x^{n+2} e^{-x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$, если заметить, что

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n+2} e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \exists\, B > 0 \mid x^{n+2} e^{-x^2} \le 1\ \forall\, x > B.$$

Применив Т1 и вспомнив пример из пункта 1, получаем: $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx$ сходится, а значит сходится и $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Теорема 2. *Пусть* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]\ \forall b > a, f, g \ge 0$ *на* $[a, +\infty)$ *и* $f \sim g$ *при* $x \to +\infty$. *Тогда* $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *и* $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

► Т1+определение эквивалентности ◄

Теорема 3 (Признак Дирихле). *Пусть* $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{R}[a, b]\ \forall b > a$, *причём:*

1) *функция* $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt, x \geq a$ *ограничена*

2) $g \downarrow 0$ *(монотонно стремится к 0) при* $x \to +\infty$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *сходится.*

► Исходя из условий теоремы, имеем:

$$1) \Rightarrow \exists\ M > 0 \mid \left|F(x)\right| < M\ \forall x \geq a$$
$$2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists B > 0 \mid \left|g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4M}\ \forall x > B$$

Тогда, согласно критерию Коши и Т2 о среднем,

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx\right| = \left|g(b_1)\int\limits_{b_1}^{c} f(x)\,dx + g(b_2)\int\limits_{c}^{b_2} f(x)\,dx\right| \text{ для некоторого } c \in (b_1, b_2)$$

Заметим, что

$$\left|\int\limits_{b_1}^{c} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx - \int\limits_{a}^{b_1} f(x)\,dx\right| \leq \left|\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{a}^{b_1} f(x)\,dx\right| \leq 2M$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx\right| \leq \underbrace{\left|g(b_1)\right|2M}_{<\frac{\varepsilon}{4M}} + \underbrace{\left|g(b_2)\right|2M}_{<\frac{\varepsilon}{4M}} < \varepsilon\ \forall b_1, b_2 > B$$

По критерию Коши, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dt$ сходится. ◄

Пример:

1) $\int\limits_a^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}\,dx$, где $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

   Т. к. $\sin\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то, по Т2, интеграл 1) сходится.

2) Классичесий пример: $I_\alpha = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{сходится абсолютно, если } \alpha > 1 \\ \text{сходится условно, если } 0 < \alpha \le 1 \end{cases}$

▶ **1.** Для $\boxed{\alpha > 1}$ имеем: $\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$.

Тогда, т.к. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$, то по Т1, сходится и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$

2.a) I_α сходится при $\boxed{\alpha > 0}$. В самом деле, рассмотрим

$F(x) := \int\limits_1^{+\infty} \sin x\,dx, x \ge 1, g(x) := \frac{1}{x^\alpha}, x \ge 1.$Тогда $\big|F(x)\big| = |\cos 1 - \cos x| \le 2$, а $g \downarrow 0$ при $x \to +\infty$. Следовательно, по Т3, I_α сходится.

2.б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$ расходится при $\boxed{0 < \alpha \le 1}$.

Имеем: $|\sin x| \le 1 \Rightarrow \sin x \ge \sin^2 x$. Но интеграл

$\int\limits_1^{b} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{b} \frac{1}{x^\alpha}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_1^{b} \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\,dx$ расходится, т.к. расходится первое слагаемое. Значит, по Т1, расходится и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$. ◀

Замечание: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow}$ $\int\limits_a^{+\infty} f^2(x)\,dx$ сходится

Например, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. В этом случае $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится по признаку Дирихле, но $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится.

$\boxed{§7}$. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пункт 1. Определение. Критерий Коши

Определение 1. *Пусть $f \in \mathcal{R}[a+\varepsilon, b]$ $\forall\, \varepsilon \in (0, b-a)$. Тогда*

1) $$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$ *если этот lim существует.*

2) 3) Аналогично прошлому параграфу даются определения сходимости/расходимости в несобственном смысле.

Определение 2. *Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b-\varepsilon]$ $\forall\, \varepsilon \in (0, b-a)$. Тогда*

1) $$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$ *если этот lim существует.*

2) 3) Аналогично прошлому параграфу даются определения сходимости/расходимости в несобственном смысле и в этом случае.

Определение 3. *Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b-\varepsilon_1]$ $\forall\, \varepsilon_1 \in (0, b-a)$, $f \in \mathcal{R}[b+\varepsilon_2, c]$ $\forall\, \varepsilon_2 \in (0, c-b)$ Тогда*

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx,$$

если оба интеграла справа существуют.

Замечание:

1) Пусть $f \geq 0$ на $[a, b]$. Тогда можно использовать следующие обозначения:
   - Если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то пишем $\int\limits_a^b f(x)\,dx < \infty$
   - Если же $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится, то пишем $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \infty$

2) $\exists \int\limits_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \exists \int\limits_a^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$, причём $\int\limits_a^{a+\varepsilon} f(x)\,dx \to 0$ при $\varepsilon \to +0$ ► $\cdots$ ◄

3) Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \to \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ при $\varepsilon \to +0$. (Непрерывность интеграла Римана по нижнему пределу)

4) Пусть $f : (a,b] \to \mathbb{R}, g \in \mathcal{R}[a,b], f \equiv g$ на $[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} g(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$

В таком случае говорят, что $\exists \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ в <u>собственном</u> смысле (как интеграл Римана).

Например, $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int\limits_{0}^{1} \sin\frac{1}{x}\,dx$ можно доопределить.

Пример: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} < \infty, & \text{если } \alpha < 1 \\ = \infty, & \text{если } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

► см. случай для бесконечных пределов. ◄

Теорема 1 (Критерий Коши). *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a+\varepsilon, b]\ \forall\,\varepsilon \in (0, b-a)$. *Тогда*

$$\exists \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 \mid \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon\ \forall\,x_1, x_2 \in (a, a+\delta)$$

► см. ранее ◄

Определение 4. *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b]\ \forall b > a$. *Тогда*

1) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ *<u>сходится абсолютно</u>* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \int\limits_{a}^{b} \big|f(x)\big|\,dx$ *существует*

2) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ <u>*сходится условно*</u> $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx \ \textit{существует} \right) \wedge \left(\int\limits_a^b \bigl|f(x)\bigr|\,dx \ \textit{не существует} \right)$$

Замечание: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится.

► Использовать критерий Коши ◄

Свойства:

1) Линейность

2) Замена переменной

3) По частям

Пример: $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,dx$ сходится.

Сделав замену $x = \frac{1}{y}, dx = -\frac{dy}{y^2}$, получим $\int\limits_\varepsilon^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,dx = \int\limits_1^{1/\varepsilon} \frac{\sin y}{y}\,dy$, который при $\varepsilon \to +0 (1/\varepsilon \to +\infty)$ сходится.

Пункт 2. Признаки сходимости

Сформулируйте и докажите признаки сходимости, опираясь на пункт 2 параграфа 6.

Пример: $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^{1/2}\sin(\pi/2 - x)}$ расходится. Имеем:

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/4} f(x)\,dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)\,dx =: I_1 + I_2$$

1) I_1 сходится, т.к. при $x \to 0$ $f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}}, \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^{1/2}}$ сходится.

2) I_2 расходится, т.к. при $x \to \pi/2 - 0$ $f(x) \sim \frac{1}{\pi/2 - x}$, а $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\pi/2 - x}$ расходится.

Пункт 3. Несобственный интеграл в смысле главного значения (по Коши)

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x} =: I_1 + I_2$

$I_1 = \lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} \ln \varepsilon_1 = -\infty$; $I_2 = \lim\limits_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon_2 \to +0} - \ln \varepsilon_2 = +\infty$

$I_1 + I_2 = \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Определение 1. *Пусть* $f : [a, b) \cup (b, c] \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}[a, b - \varepsilon],\ f \in \mathcal{R}[b + \varepsilon, c]$ $\forall \varepsilon \in (0, \min\{b - a, c - b\})$. *Тогда*

$$\text{(Valeur principale) V.p.} \int\limits_{a}^{c} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{b+\varepsilon}^{c} f(x)\, dx \right],$$

если этот предел существует, а его значение в таком случае называется интегралом в смысле $\boxed{\textit{главного значения}}$.

Пример: $V.p. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 1$

$\boxed{\S 8}$. Некоторые приложения интеграла

Пункт 1. Аддитивная функция отрезка

Определение 1. *Функция* $I : (\alpha, \beta) \in [a,b] \times [a,b] \to I(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$ *называется* $\boxed{\textit{аддитивной функцией отрезка}}$*, если она удовлетворяет условию:*

$$\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in [a,b]\ I(\alpha,\gamma) = I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma)$$

Пример: $f \in \mathcal{R}[a,b]$. $I(\alpha,\beta) := \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx, \alpha,\ \beta \in [a,b]$.

Свойства:

1) $I(\alpha,\alpha) = 0$ ► $I(\alpha,\alpha) = I(\alpha,\alpha) + I(\alpha,\alpha) \Rightarrow I(\alpha,\alpha) = 0$ ◄

2) $I(\alpha,\beta) = -I(\beta,\alpha)$ ► $I(\alpha,\alpha) = I(\alpha,\beta) + I(\beta,\alpha)$ ◄

3) Пусть $F(x) = I(a,x), x \in [a,b]$. Тогда $I(\alpha,\beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.
► $I(\alpha,\beta) = I(a,\beta) + I(\alpha,a) = I(a,\beta) - I(a,\alpha) = F(b) - F(a)$ ◄

Лемма 1. *Пусть* $I : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ *— аддитивная функция отрезка, причём* $\exists\, f \in \mathcal{R}[a,b] \mid \forall\, \alpha,\beta \in [a,b], \alpha < \beta\ \ (\beta-\alpha)\inf\limits_{[a,b]} f \le I(\alpha,\beta) \le (\beta-\alpha)\sup\limits_{[a,b]} f \Rightarrow$

$$\Rightarrow I(a,b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

► Имеем: $\forall$ разбиения $\mathcal{P}$ отрезка $[a,b]$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le I(a,b) = \sum_{k=1}^{n} I(x_{k-1},x_k) \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Переходя к пределу при $d(\mathcal{P}) \to 0$, получим: $\int\limits_a^b f(x)\,dx \le I(a,b) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx$ ◄

Пункт 2. Длина кривой

Рассмотрим кривую $L = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [t_0,T]\big\}$, где $\varphi, \psi \in \mathcal{C}[t_0,T]$, т.е. L задана параметрически.

Определение 1. *Точка $c = (x_c, y_c) \in L$ называется* <u>*кратной точкой*</u> *кривой L, если $\exists\, t_1, t_2 \in [t_0, T], t_1 \neq t_2 \mid \begin{cases} \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x_c \\ \psi(t_1) = \psi(t_2) = y_c \end{cases}$*

Определение 2. *Кривая L называется* <u>*простой*</u>*, если у неё нет кратных точек, кроме, быть может, концов прямой $A\big(\varphi(t_0), \psi(t_0)\big), B\big(\varphi(T), \psi(T)\big)$.*

Определение 3. *Кривая L называется* <u>*замкнутой*</u>*, если $A = B$.*

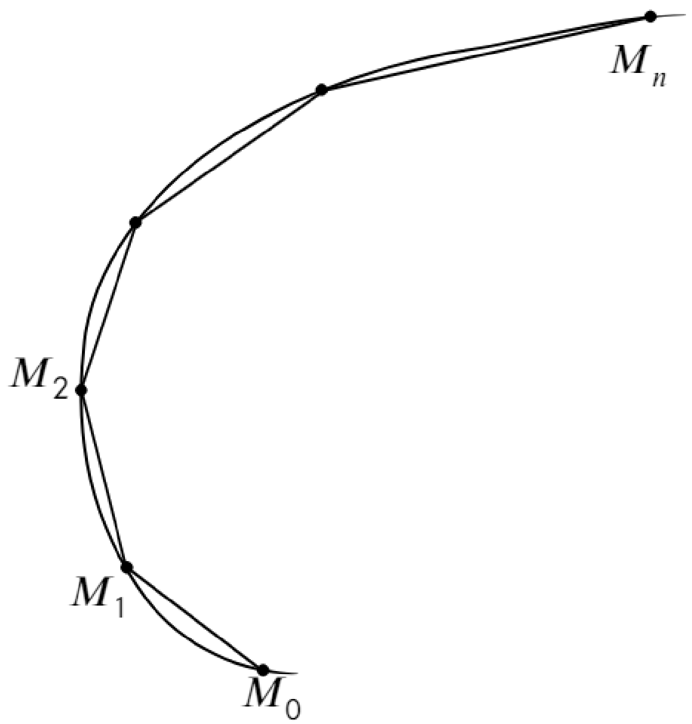
Рассмотрим простую кривую $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$

Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ отрезка $[t_0, T]$. Разбиение $\mathcal{P}$ индуцирует разбиение кривой L точками $M_k = \big(x(t_k), y(t_k)\big), k = 0, \dots, n$. Соединим точки M_{k-1} и M_k прямолинейными отрезками. Получим ломанную l, которая называется <u>вписанной ломанной</u> в кривую L (с длиной $|l|$).

Определение 4.

1) *Простая кривая L называется* <u>*спрямляемой*</u>*, если множество длин всевозможных вписанных в эту кривую ломанных ограничено (сверху, снизу — 0).*

2) *Точная верхняя грань* (sup) *этого множества называется* <u>*длиной*</u> *кривой L. Обозначается: $|L|$.*



Теорема 1. *Пусть L — простая кривая, заданная параметрически:*
$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [t_0, T]$, *где* $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1[t_0, T]$. *Тогда L спрямляема, причём*

$$|L| = \int\limits_{t_0}^{T} \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt \tag{1}$$

►

1) Докажем, что L спрямляема. Пусть l — произвольная ломанная, вписанная в L. Оценим $|l|$:

$$|l| = \sum_{k=1}^{n} |M_{k-1}M_k| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\big)^2 + \big(\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\big)^2} = |\text{Т.Лагранжа}| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi'(\tau_k)\big)^2 + \big(\psi'(\tau_k^*)\big)^2}\, \Delta t_k \le (T - t_0) \sup_{[t_0,T]} \sqrt{\big(\varphi'\big)^2 + \big(\psi'\big)^2} \in \mathbb{R}$$

Итак, $\forall\ l\ |l| \le const \Rightarrow L$ спрямляема.

2) Теперь докажем (1). Рассмотрим аддитивную функцию отрезка, определённую формулой:

$$I(\alpha, \beta) = \big|M(\alpha)M(\beta)\big|\,,\ \text{где } M(\alpha) = \big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big), M(\beta) = \big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$$

Докажем, что это аддитивная функция отрезка, т.е.

$$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in [t_0, T]\ I(\alpha, \gamma) = I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma) \tag{2}$$

Во-первых,$\forall\ l\ |l| \le |l_1| + |l_2|$ для нек. $l_1, l_2 \Rightarrow \sup|l| \le \sup|l_1| + \sup|l_2|$, т.е. $I(\alpha, \gamma) \le I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma)$
Во-вторых, рассмотрим произвольные l_1 и l_2: $|l_1| + |l_2| = |l_1 \cup l_2| \le \sup|l| \Rightarrow \sup|l_1| + \sup|l_2| \le \sup|l|$, т.е. $I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma) \le I(\alpha, \gamma)$.
В итоге,

$$I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma) \le I(\alpha, \gamma) \le I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma) \Rightarrow (2)$$

Наконец, положим $f(t) := \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}, t \in [t_0, T]$. Тогда выполнены все условия для леммы из пункта 1:

- $I(\alpha, \beta)$ — аддитивная функция отрезка.
- $f \in \mathcal{C}[t_0, T]$
- Из п.1) следует, что
$(\beta - \alpha) \inf\limits_{[t_0,T]} f \le I(\alpha, \beta) \le (\beta - \alpha) \sup\limits_{[t_0,T]} f\ \ \forall\ \alpha, \beta \in [a, b], \alpha < \beta$

Воспользовавшись леммой, получаем: $|L| = I(t_0, T) = \int\limits_{t_0}^{T} \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt$ ◄

Следствия:

1) Если кривая задана в явном виде: $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \quad x \in [a, b], f \in \mathcal{C}^1[a, b],$

   то $|L| = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx$

2) В полярных координатах: $r = r(\varphi)$, то $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad ,\varphi \in [\varphi_0, \Phi], r \in \mathcal{C}^1[\varphi_0, \Phi]$

   Тогда $\begin{cases} x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow$

   $$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + r^2 \Rightarrow |L| = \int\limits_{\varphi_0}^{\Phi} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi$$

Пункт 3. Площадь криволинейной трапеции

Пусть $f \in \mathcal{C}[a,b]$, $f \geq 0$ на $[a,b]$. Тогда $S_1 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (см. Рис. 1).

Если же $f \in \mathcal{C}[a,b]$, $f \leq 0$ на $[a,b]$, то $S_2 = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (см. Рис. 2).

В свою очередь, имеет место формула: $S_3 = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$ (см. Рис. 3).

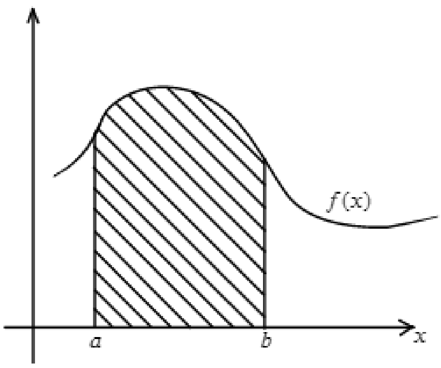


Рис. 1

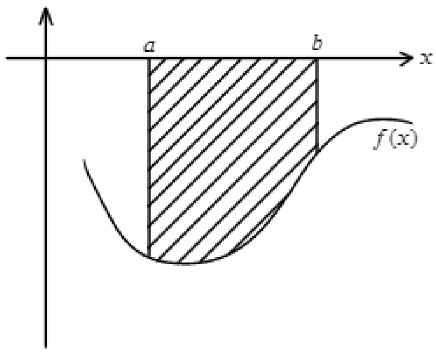


Рис. 2

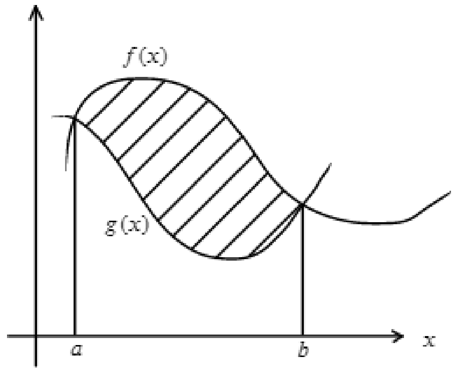


Рис. 3

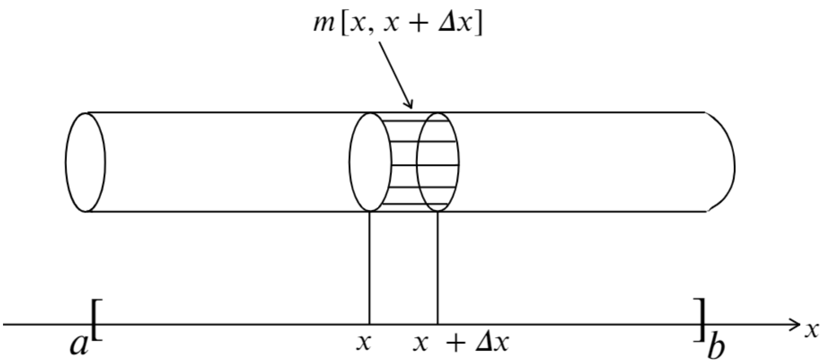
Пункт 4. Некоторые механические приложения интеграла

см. Камынин, стр. 249

Масса неоднородного стержня

Рассмотрим тонкий стержень, расположим его на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. (Масса и др. характеристики не меняются в поперечном сечении). Плотность стержня $\rho = \rho(x), x \in [a, b]$. Предполагаем, что $\rho \in \mathcal{C}[a, b]$

$\rho(x) := \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{m[x, x + \Delta x]}{\Delta x} \Rightarrow m[x, x + \Delta x] = \rho(x)\Delta x + o(1)\Delta x$



Имеем:

$$M = m[a, b] = \sum_{k=1}^{n} m[x_{k-1}, x_k] = \sum_{k=1}^{n} \rho(x_{k-1})\Delta x_k + o(1)\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \to \int\limits_a^b \rho(x)\, dx \text{ при } d(\mathcal{P}) \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \int\limits_a^b \rho(x)\, dx$$

Центр тяжести неоднородного стержня

Если имеется конечный набор материальных точек, то координаты центра масс такой системы вычисляется по формуле:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m(x_k)x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m(x_k)}$$

Полагаем, что $m(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m[x, x + \Delta x]$.

Далее, рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{P}$ отрезка $[a, b]$.

$m_k := m[x_{k-1}, x_k] = \int\limits_{x_k - 1}^{x_k} \rho(x)\, dx = \rho(\xi_k)\Delta x_k$ по Т. о среднем $(\rho \in \mathcal{C}[x_{k-1}, x_k])$

Кроме того, $M = \int\limits_a^b \rho(x)\,dx$. В итоге:

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k \cdot \xi_k}{M} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} x\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx} = \frac{\int\limits_a^b x\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx}$$

<u>Работа переменной силы</u>

Пусть материальная точка перемещается по отрезку $[a,b]$ под действием переменной силы $F(x), x \in [a,b]$. Имеем: работа силы на участке $[x_{k-1}, x_k] \approx F(x_k)\Delta x_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{[a,b]} \approx \sum_{k=1}^{n} F(x_k)\Delta x_k \to \int\limits_a^b F(x)\,dx \text{ при } F \in \mathcal{C}[a,b]$$

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Конспект лекций по математическому анализу

Лектор Бадерко Е.А.

Часть 3
Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Отделение механики, 1 курс, 2 семестр, 2019-2020 уч. г.

Об опечатках большая просьба сообщать составившему конспект Некрасову Всеволоду на почту vsevolod.nekrasov@math.msu.ru

Содержание

Глава 1. Непрерывные функции многих переменных

$\boxed{\S 1}$. Линейные, нормированные, метрические и евклидовы пространства

Определение 1. *Множество* $\mathbb{E} \neq \varnothing$ *называется* $\boxed{\textit{линейным пространством}}$, *если*

1) $\forall x, y \in \mathbb{E}$ *однозначно определяется* $z := x + y \in \mathbb{E}$, *причём*

- *а)* $x + y = y + x \; \forall x, y \in \mathbb{E}$ *(коммутативность)*
- *б)* $x + (y + z) = (x + y) + z \; \forall x, y, z \in \mathbb{E}$ *(ассоциативность)*
- *в)* $\exists\, 0 \in \mathbb{E} \mid x + 0 = x \; \forall x \in \mathbb{E}$ *(существование нейтрального элемента)*
- *г)* $\forall\, x \in \mathbb{E} \; \exists!\, (-x) \in \mathbb{E} \mid x + (-x) = 0$

2) $\forall x \in \mathbb{E}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *однозначно определён элемент* $\alpha x \in \mathbb{E}$, *причём*

- *а)* $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \; \forall x \in \mathbb{E}, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- *б)* $1 \cdot x = x \; \forall x \in \mathbb{E}$
- *в)* $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \; \forall x \in \mathbb{E}, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- *г)* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \; \forall x, y \in \mathbb{E}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

Определение 2. *Элементы* $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{E}$ $\boxed{\textit{линейно независимы}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \; \forall k = 1, \ldots, m$

Пример: $\mathbb{E} = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n, \mathcal{C}(a, b), \mathcal{C}[a, b], \mathcal{D}(a, b), \mathcal{R}[a, b]$ — линейные пространства

Определение 3. *Пусть* $\mathbb{E}$ *— линейное пространство.*
Функция $\| \cdot \| : x \in \mathbb{E} \to \|x\| \in \mathbb{R}$ *называется* $\boxed{\text{нормой}}$ *на пространстве* $\mathbb{E}$, *если:*

1) $\|x\| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{E}$, *причём* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(положительность нормы)*

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall x, y \in \mathbb{E}$ *(неравенство треугольника)*

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \; \forall\, x \in \mathbb{E}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

Линейное пространство, снабжённое нормой, называется $\boxed{\textit{нормированным пространством}}$.

Замечание: Из требования 2) для нормы следует непрерывность нормы:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \; \forall x, y \in \mathbb{E}$$

► $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Аналогично $\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\|$ ◄

Примеры:

1) $\mathbb{E} = \mathbb{R}, \|x\| := |x|$

2) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$

а) $\|(x_1, x_2)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

б) $\|(x_1, x_2)\| := |x_1| + |x_2|$

в) $\|(x_1, x_2)\| := \max\{|x_1|, |x_2|\}$

Определение 4. *Пусть $\mathbb{E}$ — некоторое непустое множество. Функция $\rho : (x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \rho(x, y) \in \mathbb{R}$ называется $\boxed{\text{расстоянием (метрикой)}}$ на $\mathbb{E}$, если*

1) $\rho(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in \mathbb{E}$, *причём* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \forall x, y \in \mathbb{E}$

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \ \forall x, y, z \in \mathbb{E}$

Множество $\mathbb{E}$, снабжённое расстоянием, называется $\boxed{\text{метрическим пространством}}$

Замечание:

1) Пусть $\mathbb{E}$ — нормированное пространство. Тогда $\rho(x, y) := \|x - y\|$, т.е. любое нормированное пространство можно превратить в метрическое.

2) На любом множестве $\mathbb{E}$ можно ввести метрику $\rho(x, y) := \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$

3) Не в любом метрическом пространстве можно ввести норму. Например, в $\mathbb{R}^2$: $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := |x_1 - y_1|^{1/2} + |x_2 - y_2|^{1/2}$ — метрика, но для нормы не выполнено свойство 3): $\|\alpha(x - y)\| \neq |\alpha| \, \|x - y\|$

Определение 5. *Пусть $\mathbb{E}$ — линейное пространство. Функция $(\cdot, \cdot) : x, y \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to (x, y) \in \mathbb{R}$ называется* $\boxed{\text{скалярным произведением}}$ *на пространстве $\mathbb{E}$, если:*

1) $(x, x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{E}$, *причём* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $(x, y) = (y, x) \ \forall x, y \in \mathbb{E}$

3) $(\alpha x' + \beta x'', y) = \alpha(x', y) + \beta(x'', y) \ \forall x', x'', y \in \mathbb{E}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Линейное пространство, снабжённое скалярным произведением, называется $\boxed{\text{евклидовым пространством}}$.

Замечание: Любое евклидово пространство можно превратить в нормированное, введя на нём норму $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ (неравенство треугольника будет вытекать из след. теорем)

Теорема 1 (Неравенство Коши-Буняковского).
Пусть $\mathbb{E}$ *— евклидово пространство. Тогда справедливо неравенство*

$$\big|(x,y)\big| \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \tag{1}$$

► (1) $\Leftrightarrow (x,y)^2 \leq (x,x)\cdot(y,y)$ (2)
Если $x=0$, то (2) верно. Иначе рассмотрим $(tx+y, tx+y), t \in \mathbb{R}$. Имеем:

$$(tx+y, tx+y) = t^2(x,x) + 2t(x,y) + (y,y) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ по акс. 1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{D}{4} = (x,y) - (x,x)(y,y) \leq 0$$

Полученное неравенство равносильно (2) ◄

Теорема 2 (Неравенство Минковского).
Если $\mathbb{E}$ *— евклидово пространство и* $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$, *то*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{E} \tag{3}$$

►

$$(1) \Leftrightarrow (x+y, x+y) \leq \left(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq (x,x) + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + (y,y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big|(x,y)\big| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$$

Но это — неравенство Коши-Буняковского. ◄

Следовательно, $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ является нормой.
Пример:

1) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$
   а) $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$
   б) $\|x\| := \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$
   в) $\rho(x,y) := \|x-y\|$
2) $\mathbb{E} = \mathcal{C}[a,b]$
   а) $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$
   б) $\|f\| := \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$
   в) Верны неравенства Коши-Буняковского и Минковского для интегралов

$\boxed{§2}$. Топология метрического пространства

Пункт 1. Окрестности в метрическом пространстве

Пусть $\mathbb{X}$ — метрическое пространство с метрикой ρ. Говорим, что дано метрическое пространство $(\mathbb{X}, \rho)$.
Пусть $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}, \mathbb{X}_1 \neq \varnothing$. Тогда метрическое пространство $(\mathbb{X}_1, \rho)$ — подпространство $(\mathbb{X}, \rho)$ (или просто $\mathbb{X}_1$ — подпространство $\mathbb{X}$). $\mathbb{X}$ — метрическое пространство всюду далее.

Определение 1. *Пусть $a \in \mathbb{X}, r > 0$.*

1) *Множество $B(a, r) := \{x \in \mathbb{X} \mid \rho(a, x) < r\}$ называется $\boxed{\textit{открытым шаром}}$*

2) *Множество $B[a, r] := \{x \in \mathbb{X} \mid \rho(a, x) \leq r\}$ называется $\boxed{\textit{замкнутым шаром}}$*

3) *Множество $S(a, r) := \{x \in \mathbb{X} \mid \rho(a, x) = r\}$ называется $\boxed{\textit{сферой}}$*

Определение 2. *Пусть $a \in \mathbb{X}$.*

1) *$\boxed{\textit{Окрестностью}}$ $O(a)$ точки a называется любой открытый шар $B(b, r)$, содержащий a.*

2) *$\boxed{\textit{Центрированной окрестностью}}$ $O_\delta(a)$ точки a называется $B(a, \delta)$.*

3) *$\boxed{\textit{Проколотой окрестностью}}$ $\mathring{O}(a)$ точки a называется множество $O(a) \setminus \{a\}$.*

Пример:

1) $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2, \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. (Рис. 1)

2) $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2, \rho(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. (Рис. 2)

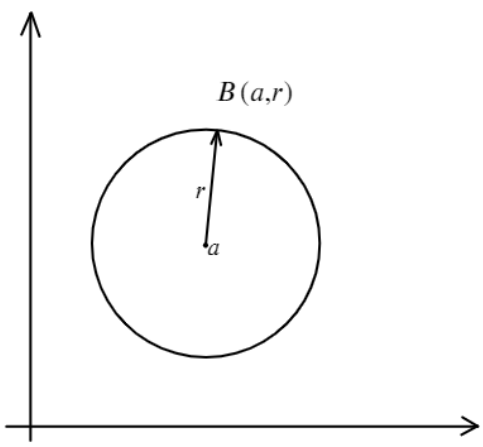


Рис. 1

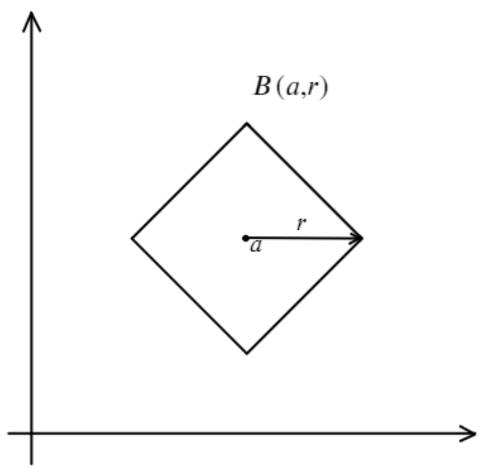


Рис. 2

3) $\mathbb{X} = \mathbb{N}, \rho(x, y) = |x - y|, O_{1/2}(n) = \{n\}, O_2(n) = \{n - 1, n, n + 1\}$

Теорема 1 (Свойства окрестностей в метрическом пространстве).

1) $O(a) \neq \varnothing$

2) $\forall\, O(a)\ \exists\, \delta > 0 \mid O_\delta(a) \subset O(a)$

3) *а)* $\forall\, O_1(a), O_2(a)\ \exists\, O(a) \mid O(a) \subset O_1(a) \bigcap O_2(a)$

б) $\forall\, O_k(a), k = 1, \ldots, n\ \exists\, O(a) \mid O(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} O_k(a)$

4) *(Принцип отделимости Хаусдорфа)*
$\forall\, a, b \in \mathbb{X}, a \neq b\ \exists\, O(a), O(b) \mid O(a) \bigcap O(b) = \varnothing$

5) *а)* $\forall\, b \in O(a), O(a)$ *— окрестность точки* b

б) $\forall\, b \in \mathring{O}(a)\ \exists\, O_\delta(b) \subset O(a) \mid a \notin O_\delta(b)$

►

1) $O(a) \neq \varnothing$, т.к. $a \in O(a)$.

2) Пусть $O(a)$ — окр. т. a. Тогда $\exists\, b \in O(a), r > 0 \mid O(a) = B(b, r), a \in B(b, r)$. Положим $\delta := r - \rho(a, b), O_\delta(a)$ — искомая окрестность. В самом деле, пусть $x \in O_\delta(a) \Rightarrow \rho(x, b) \leq \underbrace{\rho(x, a)}_{<\delta} + \rho(a, b) < r \Rightarrow x \in B(b, r)$

3) Для каждой из $O_1(a), O_2(a)$ по пред. пункту $\exists O_{\delta_1} \subset O_1(a), O_{\delta_2} \subset O_2(a)$. Положив $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $O(a) = O_\delta(a)$, имеем требуемое.

4) Пусть $a, b \in \mathbb{X}, a \neq b$. Положим $\delta := \dfrac{\rho(a, b)}{3}$, тогда $O_\delta(a) \bigcap O_\delta(b) = \varnothing$. Действительно, предположим противное: $\exists\, c \in O_\delta(a) \bigcap O_\delta(b)$. Но из этого следует, что $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b) < \dfrac{2\rho(a, b)}{3}$ — противоречие.

5) а) В самом деле, для $O(a)\ \exists c \in O(a), r > 0 \mid O(a) = B(c, r) = O(b)$

б) Из п. а) + п. 2) следует, что $\exists \delta_1 > 0 \mid O_{\delta_1}(b) \subset O(a)$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \rho(a, b)\}$, тогда $O_\delta(b) \subset O_{\delta_1}(b) \subset O(a)$ и, т.к. $\delta < \rho(a, b)$, то $a \notin O_\delta(b)$

Все определения и теоремы, использующие понятия окрестности, переносятся со случая $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ на произвольное метрическое пространство. ◄

Пункт 2. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве $\mathbb{X}$

Всюду далее $A \subset \mathbb{X}$.

Определение 1.

1) a — $\boxed{\text{внутренняя точка}}$ $A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, O(a) \mid O(a) \subset A$

2) $A_i = \{x \in \mathbb{X} \mid x$ — *внутренняя точка* $A\}$ *(внутренность A)*

3) A — $\boxed{\text{открытое множество}}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A = A_i$

Замечание:

1) $a \in A_i \Rightarrow a \in A$

2) $x \in \mathbb{X} \Rightarrow x \in \mathbb{X}_i$, т.к. $\mathbb{X}_i = \mathbb{X}$

Определение 2.

1) a — $\boxed{\text{внешняяя точка}}$ $A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, O(a) \mid O(a) \bigcap A = \varnothing$, *т.е.* $O(a) \subset \mathbb{X} \setminus A = CA$

2) $A_e = \{x \in \mathbb{X} \mid x$ — *внешняя точка* $A\}$ *(внешность A)*

Замечание: $a \in A_e \Rightarrow a \notin A$
Пример: 1) $\mathbb{X} = \mathbb{N}, \rho(x,y) = |x-y|\,.\forall A \subset \mathbb{N}\ A_i = A, A_e = \mathbb{N} \setminus A$
2) $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ — про интервалы см. 1 семестр, Часть 1

Определение 3.

1) a — $\boxed{\text{граничная точка}}$ $A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, O(a),\ O(a) \bigcap A \neq \varnothing, O(a) \bigcap CA \neq \varnothing$

2) *Граница* A $\partial A = \{x \in \mathbb{X} \mid x$ — *граничная точка* $A\}$

Пример: 1) $A = B(a,r), \partial A = S(a,r)$; 2)$\mathbb{X} = \mathbb{R}, A = \mathbb{N}, \partial A = A$

Определение 4.

1) a — $\boxed{\text{точка прикосновения}}$ $A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, O(a),\ O(a) \bigcap A \neq \varnothing$

2) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{X} \mid x$ — *точка прикосновения* $A\}$ — *замыкание* A

3) A — $\boxed{\text{замкнутое множество}}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A = \overline{A}$

Замечание: $A \subset \overline{A}, \partial A \subset \overline{A}$

Определение 5. *1)* a — $\boxed{\text{предельная точка}}$ $A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, \mathring{O}(a),\ \mathring{O}(a) \bigcap A \neq \varnothing$

2) $A' = \{x \in \mathbb{X} \mid x$ — *предельная точка* $A\}$ — *производное множество*

Для доказательства следующих теорем воспользуйтесь свойствами окрестностей, обратитесь к соответствующим доказательствам в 1 семестре (вместо $|\ |$ — ρ).

Теорема 1. $\forall\, O(a)$ — *открытое множество.*

► ... ◄

Теорема 2. A — *замкнуто* $\Leftrightarrow A \supset A'$.

► ... ◄

Теорема 3. A — *замкнуто* $\Leftrightarrow CA$ — *открыто.*

► ... ◄

Пример:

1) $\mathbb{X}, \varnothing$ — замкнуты и открыты
2) $CB[a, r]$ — открыто.
3) $B[a, r]$ — замкнуто, т.к. $CB[a, r]$ — открыто.

Теорема 4. *Пусть* $A_k \subset \mathbb{X}, k = 1, \ldots, m$

1) A_k — *открыто,* $k = 1, \ldots, m \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ — *открыто.*

2) A_k — *замкнуто,* $k = 1, \ldots, m \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ — *замкнуто.*

► ... ◄

Теорема 5. *Пусть* $A \subset \mathbb{X}$. *Тогда* $\overline{A}, \partial A, A'$ — *замкнутые множества.*

► ... ◄

Теорема 6. *Пусть* $A' \neq \varnothing$. *Тогда* $\forall\, a \in A', \forall\, O(a)\, :\, \mathring{O}(a) \bigcap A$ — *бесконечное множество.*

► ... ◄

Замечание: A — конечно $\Rightarrow A' = \varnothing$.

$\boxed{§3}$. Последовательности в метрическом пространстве

Пункт 1. Предел последовательности

Рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{X}, \rho)$ и последовательность $(a_n \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N})$ элементов из $\mathbb{X}$.

Определение 1. *Последовательность $(a_n \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N})$ $\boxed{\textit{сходится}}$ к $a \in \mathbb{X} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \rho(a_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е.:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \mid \rho(a_n, a) < \varepsilon \, \forall n > N \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall O(a) \, \exists N \in \mathbb{N} \mid a_n \in O(a) \, \forall n > N$$

Определение 2. *Пусть $A \subset \mathbb{X}$. Тогда A — $\boxed{\textit{ограничено}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists B[a, r] \mid A \subset B[a, r]$*

Все теоремы о пределе последовательности переносятся со случая $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ на произвольное метрическое пространство.

Пункт 2. Фундаментальные последовательности в метрическом пространстве

Определение 1. *Последовательность $(a_n \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N})$ — $\boxed{\textit{фундаментальная}}$ (последовательность Коши) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \mid \rho(a_n, a_m) < \varepsilon \, \forall n, m > N$*

Теорема 1. *Последовательность $(a_n \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N})$ сходится $\Rightarrow (a_n)$ —фундаментальная.*

► . . . (“костыль”) ◄

Замечание: Обратное, вообще говоря, неверно. Например, в пространстве $\mathbb{X} = \left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ последовательность $\left(a_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right)$ является фундаментальной, однако (a_n) не сходится в $\mathbb{X}$.

Определение 2.
Пусть $(\mathbb{X}, \rho)$ — метрическое пространство. Тогда $(\mathbb{X}, \rho)$ — $\boxed{\textit{полное (банахово)}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ имеет место импликация: $(a_n \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N})$ — фундаментальная $\Rightarrow (a_n)$ сходится

Пример:

1) $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$

2) $\mathcal{C}[a, b], \|f\| = \max\limits_{[a,b]}|f|\,, \rho(f, g) = \|f - g\| = \max\limits_{[a,b]}|f - g|$ — полное (3семестр)

3) $\mathcal{C}[a, b], \|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx},\ \rho(f, g) = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x) - g(x))^2(x)\,dx}$ — неполное (3сем)

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$

Теорема 2. *Пусть* $(a_m \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N})$ *— последовательность в* $\mathbb{R}^n$, $a_m = (a_m^{(1)}, \ldots, a_m^{(n)})$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{m\to\infty} a_m = a = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(k)} = a^{(k)}, k = 1, \ldots, n$

► 1)$\boxed{\Rightarrow}$: пусть $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \rho(a_m, a) = \sqrt{(a_m^{(1)}-a^{(1)})^2+\ldots+(a_m^{(n)}-a^{(n)})^2} < \varepsilon\ \forall m > N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall k = 1, \ldots, n\ \left|a_m^{(k)} - a^{(k)}\right| = \sqrt{(a_m^{(k)}-a^{(k)})^2} \leq \rho(a_m, a) < \varepsilon\ \forall m > N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_m^{(k)} \to a^{(k)}, k = 1, \ldots, n$$

2)$\boxed{\Leftarrow}$: пусть $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(k)} = a^{(k)}, k = 1, \ldots, n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall k = 1, \ldots, n : \forall \varepsilon > 0\ \exists N_k \in \mathbb{N} \mid \left|a_m^{(k)} - a^{(k)}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\ \forall m > N_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ положив } N := \max_k N_k \text{ имеем: } \rho(a_m, a) < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon\ \forall m > N$$

◄

Следствие: $\mathbb{R}^n$ — полное пространство $\forall\, n$.

$\boxed{\text{§4}}$. Предел отображения

Пункт 1. Общие определения

Пусть $(\mathbb{X}_1, \rho_1), (\mathbb{X}_2, \rho_2)$ — метрические пространства, $A \subset \mathbb{X}_1$

Определение 1. *Пусть дано отображение* $f : A \to \mathbb{X}_2, a \in A'$. *Тогда*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \underbrace{O(b)}_{\text{метр. } \rho_1} \ \exists \underbrace{O(a)}_{\text{метр. } \rho_2} \mid f(x) \in O(b)\ \forall x \in \mathring{O}(a) \cap A$$

Можно так же как и ранее записать определения в терминах ε-δ, используя соответствующие метрики ρ_1, ρ_2. Кроме того, все теоремы о пределе функции переносятся на общий случай. Например, единственность предела:

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \Rightarrow b = c$

► … ◄

Теорема 2 (определение предела по Гейне).
Пусть дано отображение $f : A \to \mathbb{X}_2, a \in A'$. *Тогда*

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\, (x_n \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N}) \mid x_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *имеем:* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$

► . . . ◄

Рассмотрим частный случай: $\mathbb{X}_2 = \mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой ρ. Отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$, т.е. $x \in \mathbb{X}_1 \to f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$ — "вектор-функция"

Пункт 2. Функции двух переменных. Двойные и повторные пределы.

$\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}^2, \mathbb{X}_2 = \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$, где $A \subset \mathbb{R}^2$. $(x, y) \in A$
$f(x, y)$ — функция двух переменных.
Пусть $(x_0, y_0) \in A'$. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ — $\boxed{\text{двойной предел}}$ (1)
Фиксируем $y \neq y_0$ и рассмотрим предел: $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y)\ \forall\, y \neq y_0$
Если $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \Big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)\Big) =: \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$, то это $\boxed{\text{повторный предел}}$ (2)
Если, наоборот, рассмотреть $f(x, \cdot) : y \to f(x, y)\ \forall x \neq x_0$ и $\exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y) = \psi(x)$, то можно рассмотреть повторный предел в другом порядке:
$\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \Big(\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)\Big) =: \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ (3)
Пример:

1) $\exists$ (1), но $\nexists$ (2), $\nexists$ (3)

2) $\exists$ (2), $\exists$ (3), (2)=(3), но $\nexists$ (1)

3) $\exists$ (2), $\exists$ (3), (2)$\neq$(3) и $\nexists$ (1)

см. примеры на страницах далее

1)

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{y}+y\cdot\sin\frac{1}{x}, \text{ если } xy\neq 0\\ 0, \text{ если } xy=0\end{cases}\qquad (x_0,y_0)=(0,0)$$

$\left|f(x,y)\right|\leq|x|+|y|\to 0$ при $(x,y)\to(0,0)\Rightarrow\exists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$,

однако при фиксированном $x\neq 0\ \nexists\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)\Rightarrow\nexists$ (3), аналогично $\nexists$ (2)

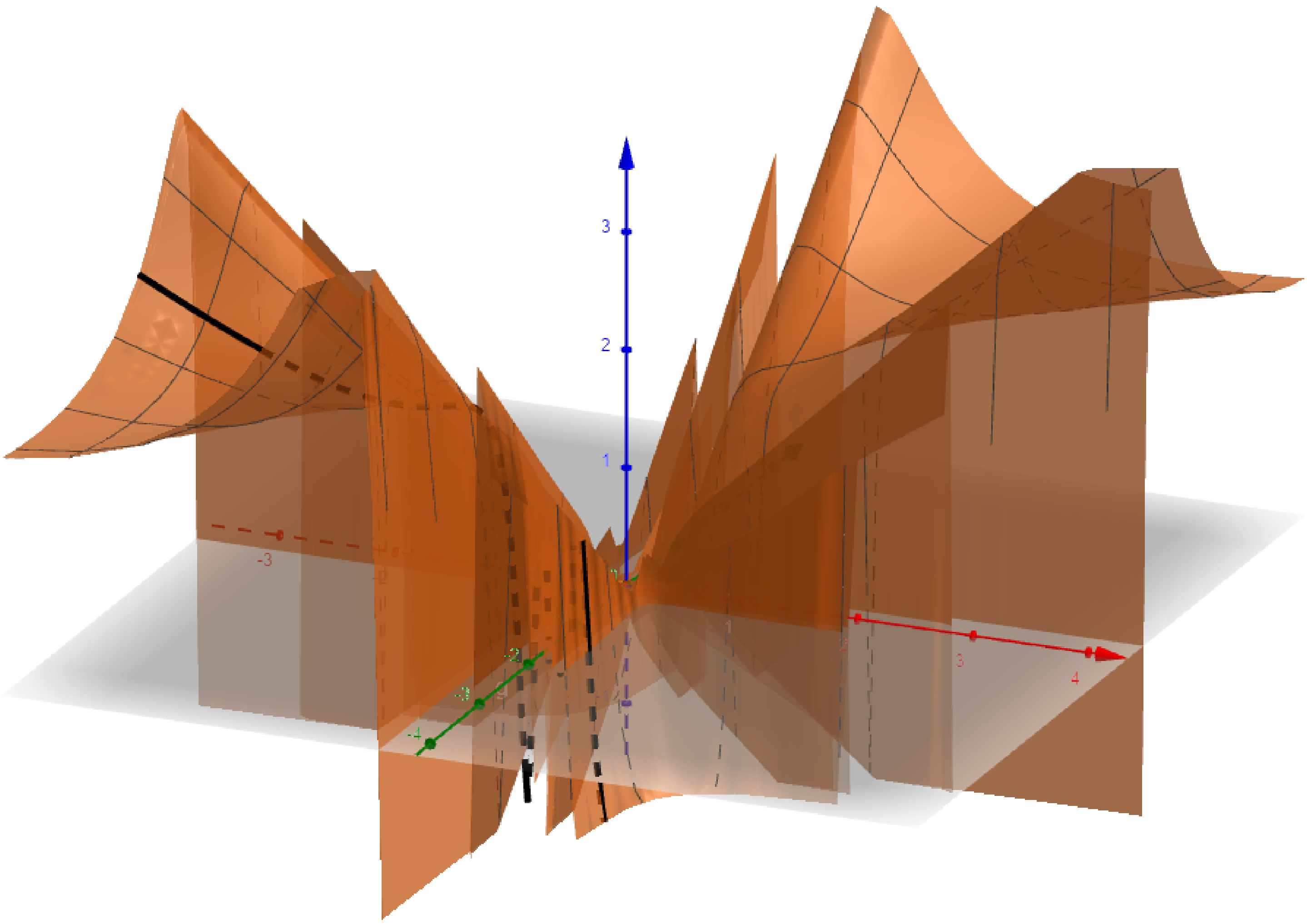


Рис. 1. Пример 1)

2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{если } x = y = 0 \end{cases} \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$$

$\forall\, x \neq 0 \ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0, \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

Аналогично $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

Но $f(x,0) = 0, f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

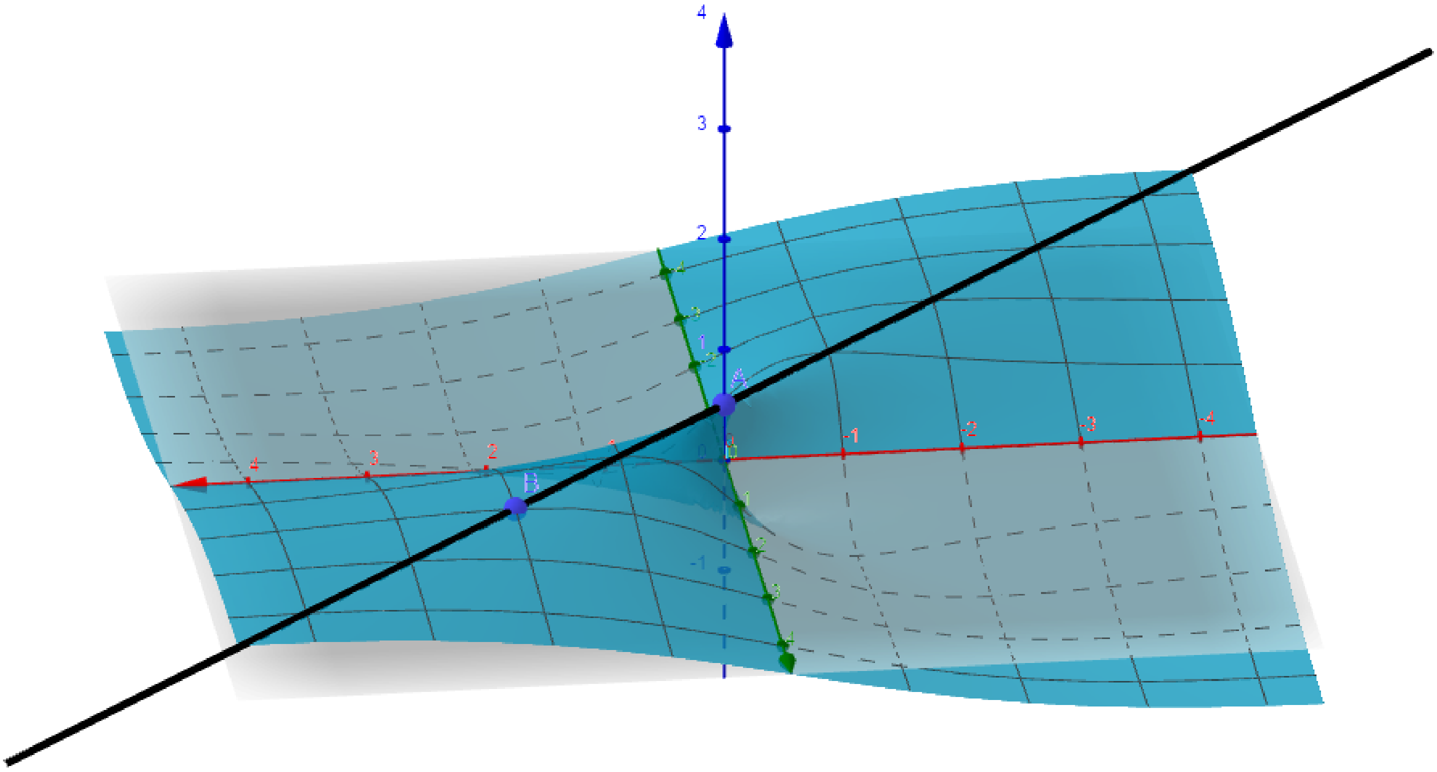


Рис. 2. Пример 2)

3)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ если } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \text{ если } x=y=0\end{cases} \qquad (x_0,y_0)=(0,0)$$

$$\forall\, x\neq 0 \ \lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1\Rightarrow \exists\ (3)=1$$

$$\forall\, y\neq 0 \ \lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1\Rightarrow \exists\ (2)=-1$$

Но $\nexists$ (1) $f(x,0)=1, f(0,y)=-1$

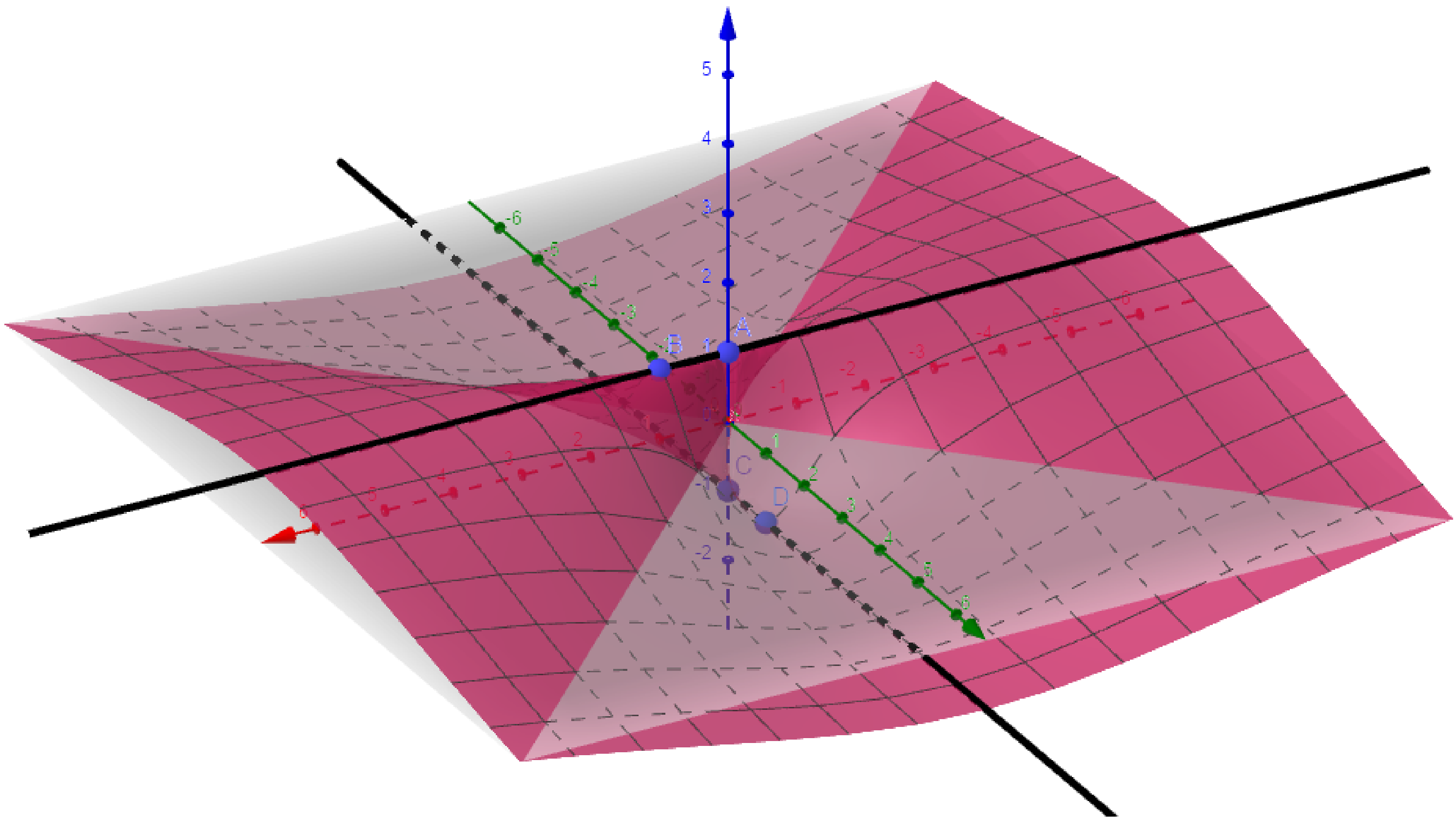


Рис. 3. Пример 3)

Теорема 1. *Пусть* $p_0 = (x_0, y_0) \in A'$, $f : A \setminus p_0 \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^2$. *Тогда*

$$\left(\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b\right) \wedge \left(\exists \lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)\ \forall\, y \neq y_0\right) \Rightarrow \exists \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = b$$

Аналогично в другом порядке.

► Фиксируем $\varepsilon > 0$ произвольно. По определению двойного предела,

$$\exists\delta > 0 \mid \left|f(x,y) - b\right| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\,(x,y) \in \mathring{O}_\delta \cap A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f(x,y) - b\right| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, x : 0 < |x - x_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \forall\, y : 0 < |y - y_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

(вписанный в окр. квадрат)

$$\text{Перейдём к } \lim_{x\to x_0}\left|f(x,y) - b\right| = \left|\varphi(y) - b\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ \forall\, y : 0 < |y - y_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid \left|\varphi(y) - b\right| < \varepsilon \forall\, y : 0 < |y - y_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

По определению это означает, что $\exists \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = b$ ◄

$\boxed{\text{§5}}$. Непрерывные отображения в метрических пространствах

Пункт 1. Непрерывность в точке

$(\mathbb{X}_1, \rho_1), (\mathbb{X}_2, \rho_2)$ — метрические пространства, $A \subset \mathbb{X}_1, f : A \to \mathbb{X}_2$ Точка $a \in A$ называется $\boxed{\text{изолированной}}$ точкой, если $\exists\, O(a) \mid O(a) \cap A = \{a\}$

Определение 1. *Отображение f называется $\boxed{\textit{непрерывным}}$ в точке $a \in A$ ($f \in \mathcal{C}(a)$), если*

$$\forall\, O\big(f(a)\big)\ \exists O(a) \mid f(x) \in O\big(f(a)\big)\ \forall x \in O(a) \cap A$$

Если a — изолированная точка, то $f \in \mathcal{C}(a)$

Теорема 1 (Предельный критерий непрерывности отображения в точке).

Пусть $f : A \to \mathbb{X}_2, a \in A \cap A'$. Тогда $f \in \mathcal{C}(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Справедливы теоремы о локальной ограниченности, о сохранении знака, об арифметических операциях для непрерывных отображений.

Теорема 2 (Непрерывность композиции).
Пусть $(\mathbb{X}_1, \rho_1), (\mathbb{X}_2, \rho_2), (\mathbb{X}_3, \rho_3)$ — метрические пространства, $A \subset \mathbb{X}_1, B \subset \mathbb{X}_2$, $f : A \to B, g : B \to \mathbb{X}_3, a \in A, b = f(a) \in B$. Если $f \in \mathcal{C}(a), g \in \mathcal{C}(b)$, то $g \circ f \in \mathcal{C}(a)$

► $g \in \mathcal{C}(b) \Rightarrow \forall\, O\big(g(b)\big)\ \exists O(b) \mid g(y) \in O\big(g(b)\big)\ \forall\, y \in O(b) \cap B$
$f \in \mathcal{C}(a) \Rightarrow \forall\, O(b)\ \exists O(a) \mid f(x) \in O(b)\ \forall x \in O(a) \cap A$
В итоге: $\forall\, O\big(g(b)\big)\ \exists O(a) \mid g\big(f(x)\big) \in O\big(g(b)\big)\ \forall x \in O(a) \cap A$ ◄

Теорема 3. *Пусть $f : A \to \mathbb{X}_2, a \in A \cap A'$. Тогда $f \in \mathcal{C}(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall (a_n), a_n \in A \mid \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$*

► Следует из утверждения теоремы об эквивалентности понятий предела по Коши и по Гейне, т.к. в случае $a_n = a$ $f(a_n) = f(a) \in O\big(f(a)\big)$ ◄

Пункт 2. Непрерывные отображения на множестве

Определение 1. $f \in \mathcal{C}(A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f \in \mathcal{C}(a)\ \forall a \in A$

$(\mathbb{X}_1, \rho_1), (\mathbb{X}_2, \rho_2)$ — метрические пространства, $f : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$

Определение 2. *Пусть $B \subset \mathbb{X}_2$. $\boxed{\textit{Полным прообразом}}$ множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{X}_1 \mid f(x) \in B\}$*

Замечание: $f^{-1}(CB) = Cf^{-1}(B)$
Действительно, $f^{-1}(CB) := \{x \in \mathbb{X}_1 \mid f(x) \in CB\} = \{x \in \mathbb{X}_1 \mid f(x) \notin B\} =$
$= \{x \in \mathbb{X}_1 \mid x \notin f^{-1}(B)\} = Cf^{-1}(B)$

Теорема 1 (Критерий непрерывности отображения на всём пространстве).

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{X}_1) \Leftrightarrow \Big(\forall\, B \subset \mathbb{X}_2, B\text{—}\textit{открытое} \Rightarrow f^{-1}(B)\text{—}\textit{также открытое}\Big)$

► 1)$\boxed{\Rightarrow}$: докажем, что если $f \in \mathcal{C}(\mathbb{X}_1)$ и $B \subset \mathbb{X}_2$ —открытое, то $f^{-1}(B)$ — открытое. Пусть $x_0 \in f^{-1}(B), y_0 = f(x_0) \in B$. Так как B — открытое, то $\exists O(y_0) \mid O(y_0) \subset B$. Используем, что $f \in \mathcal{C}(x_0)$: для $O(y_0)$ $\exists O(x_0) \mid f(x) \in O(y_0)$ $\forall x \in O(x_0)$, т.е. $\exists\, O(x_0) \mid\subset f^{-1}(B)$. В силу произвольности x_0, это означает, что $f^{-1}(B)$ — открытое.
2)$\boxed{\Leftarrow}$: пусть $f^{-1}(B)$ открыто $\forall B \subset \mathbb{X}_2$, где B — открыто. Докажем, что $f \in \mathcal{C}(x_0)$ $\forall x_0 \in \mathbb{X}_1$.
Пусть $x_0 \in \mathbb{X}_1, y_0 = f(x_0)$. Рассмотрим в качестве B произвольную $O(y_0)$. В силу предположения, $f^{-1}(B) = f^{-1}(O(y_0))$ — открытое, а значит для $x_0 \in f^{-1}(O(y_0))$ $\exists\, O(x_0) \mid O(x_0) \subset f^{-1}(O(y_0))$. Итак, $\forall\, O(y_0)$ $\exists O(x_0) \mid f(x) \in O(y_0)$ $\forall x \in O(x_0)$
Это и означает, что $f \in \mathcal{C}(x_0)$. ◄

Следствие: $f \in \mathcal{C}(\mathbb{X}_1) \Leftrightarrow \Big(\forall\, B \subset \mathbb{X}_2, B\text{—замкнутое} \Rightarrow f^{-1}(B)\text{—также замкнуто}\Big)$ ►
Для доказательства необходимо воспользоваться замечанием выше и теоремой:
A — замкнуто $\Leftrightarrow CA$ — открыто. ◄

Замечание: Пусть $f \in \mathcal{C}(\mathbb{X}_1)$

1) Если $A \subset \mathbb{X}_1$ открыто, то $f(A)$, вообще говоря, не обязательно открыто. Например, $f(x) = \sin x, A = (0, 2\pi), f(A) = [-1, 1]$
2) Если $A \subset \mathbb{X}_1$ замкнуто, то $f(A)$, вообще говоря, не обязательно замкнуто. Например, $f(x) = e^x, A = \mathbb{R}, f(A) = (0, +\infty)$

Пункт 3. Непрерывность вектор-функции

Пусть $(\mathbb{X}_1, \rho_1)$ — метрические пространство, $A \subset \mathbb{X}_1, f : A \to \mathbb{R}^n, f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$
Свойства вектор-функции f можно изучать по свойствам её компонент.

Теорема 1. *Пусть* $f : A \to \mathbb{R}^n$. *Тогда* $f \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow f_i \in \mathcal{C}(A)$ $\forall i = 1, \ldots, n$

► Пусть $a \in A$.

1) Если a — изолированная точка, то $f \in C(a)$ и $f_i \in \mathcal{C}(a)$ $\forall i = 1, \ldots, n$
2) Если $a \in A \cap A'$, то $f \in C(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f_i(x) = f_i(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f_i \in \mathcal{C}(a)$ $\forall i = 1, \ldots, n$

В 2) мы воспользовались доказанной теоремой для последовательностей (Т2 п.2 пар.3) и Т3 из п.1 данного параграфа. ◄

$\boxed{\S 6}$. Компактность

Пункт 1. Определение и основные свойства компакта

$(\mathbb{X}, \rho)$ — метрическое пространство, $K \subset \mathbb{X}$.
Открытым покрытием K называется множество

$$\Big\{U_\alpha \subset \mathbb{X} \mid \big(U_\alpha \text{— открыто}\big) \wedge \big(\bigcup_\alpha U_\alpha \supset K\big)\Big\}$$

Определение 1. *Пусть $K \subset \mathbb{X}$. Множество K называется* $\boxed{\textit{компактом}}$*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

Пример:

1) $\mathbb{X} = \mathbb{R}, K = [a, b]$ — компакт

2) $\mathbb{X}$ — метр. пр-во, $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — компакт

Лемма 1. *Пусть $A \subset \mathbb{X}$. Тогда $a \in A' \Leftrightarrow \exists\, (x_n \in \mathbb{A}, n \in \mathbb{N}) \mid \lim\limits_{n\to\infty} = a, x_n \neq a$.*

► 1)$\boxed{\Rightarrow}$: пусть $a \in A'$. По определению, $\forall\, O_{1/n}(a) \mid \mathring{O}_{1/n}(a) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \exists\, x_n \in \mathring{O}_{1/n}(a)$. Получаем последовательность, предел которой равен a.
2)$\boxed{\Leftarrow}$: пусть $\exists\, (x_n \in \mathbb{A}, n \in \mathbb{N})$ с условием $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid 0 < \rho(x_n, a) < \varepsilon\ \forall\, n > N$. Тогда $x_n \in \mathring{O}_\varepsilon(a) \cap A$. Если $\mathring{O}(a)$ — произвольная окрестность, то $\exists\, \mathring{O}_\varepsilon(a) \subset \mathring{O}(a) \Rightarrow x_n \in \mathring{O}(a)\ \forall n > N \Rightarrow a \in A'$ ◄

Теорема 1 (О существовании предельной точки).
Пусть $K \subset \mathbb{X}, K$ — компакт, $A \subset K$, A бесконечно. Тогда $\exists\, a \in A' \cap K$.

► От противного: допустим, $A' \cap K = \varnothing$. Это значит, что $\forall\, x \in K \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow \exists\, \mathring{O}(x) \mid \mathring{O}(x) \cap A = \varnothing$. Получили $\{\mathring{O}(x) \mid x \in K\}$ — открытое покрытие компакта $K \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие $\{\mathring{O}(x_k) \mid k = 1, \ldots, m\} \mid \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathring{O}(x_k) \supset K \supset A$. Но $\mathring{O}(x) \cap A = \varnothing$, следовательно, A содержит не более m точек, то есть A конечно. Имеем противоречие ◄

Теорема 2 (ограниченность и замкнутость компакта).
Пусть $K \subset \mathbb{X}, K$ — компакт. Тогда K ограничено и замкнуто.

▶

1) Докажем, что K ограничено. Рассмотрим систему $\big\{B(x_0, n), n \in \mathbb{N}\big\}$, где x_0 — фикс. произв. Система $\big\{B(x_0, n), n \in \mathbb{N}\big\}(*)$ — открытое покрытие всего $\mathbb{X}$ (иначе существовал бы $x \in \mathbb{X} \mid x \notin B(x_0, n)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \rho(x, x_0) \geq n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow \rho(x_0, x) = \infty \Rightarrow$ противоречие, т.к. $\rho(x, x_0)$ — конечное число).

   В частности, $(*)$ — открытое покрытие компакта K, а значит можно выделить конечное подпокрытие $\big\{B(x_0, n_k), k = 1, \ldots, m\big\}$, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_m \Rightarrow$ $\Rightarrow K \subset B(x_0, n_m) \Rightarrow K$ ограничено.

2) Докажем, что K замкнуто. Достаточно доказать, что $CK = \mathbb{X} \setminus K$ открыто. Фикс. произвольно $y \in CK$ и докажем, что $\exists\, O(y) \subset CK$.

   Рассмотрим произвольно $x \in K$ и обозначим $\delta(x) := \rho(x, y) > 0$. Имеем: $B(x, \frac{\delta(x)}{2}) \cap B\big(y, \frac{\delta(x)}{2}\big) = \varnothing$. Система $\Big\{B\big(x, \frac{\delta(x)}{2}\big), x \in K\Big\}$ — открытое покрытие компакта K, следовательно, существует конечное подпокрытие $\Big\{B\big(x_k, \frac{\delta(x_k)}{2}\big), k = 1, \ldots, m\Big\}$. Положим $\delta := \min\limits_{k=1,\ldots,m} \frac{\delta(x_k)}{2}$. Тогда $B(y, \delta) \cap b(x_k, \delta) = \varnothing\ \forall k = 1, \ldots, m \Rightarrow$ $B(y, \delta) \cap K = \varnothing \Rightarrow B(y, \delta) \subset CK$

В итоге, $\forall y \in CK\ \exists\, O(y) \subset CK$ ◀

Замечание: Обратное, вообще говоря, неверно (см. ниже).

Теорема 3. *$A \subset K \subset \mathbb{X}, K$ — компакт, A — замкнуто $\Rightarrow A$ — компакт.*

▶ Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие A. Рассмотрим систему $\{U_\alpha, CA\}$ — открытое покрытие всего $\mathbb{X}$, и в частности открытое покрытие компакта K. В таком случае, существует конечное подпокрытие $\{U_\alpha^{(k)}, CA, k = 1, \ldots, m\}$ компакта K. Но $A \subset K \Rightarrow A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_\alpha^{(k)}$ — конечное подпокрытие A ◀

Пункт 2. Компактность в $\mathbb{R}^n$

Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ записывается как $(x_1, \ldots, x_n)$ или $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Определение 1. *Множество*

$$I := \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k \leq b_k, a_k < b_k, k = 1, \ldots, n\big\}$$

называется (n-мерной) $\boxed{\textit{клеткой}}$ *(брусом, параллелепипедом, замкнутым промежутком). I — обобщенный отрезок для $n \geq 2$.*

Определение 2. *Система клеток* $\{I_m, m \in \mathbb{N}\}$ *— система* $\boxed{\text{вложенных клеток}}$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} I_{m+1} \subset I_m\ \forall m \in \mathbb{N}$

Теорема 1 (о системе вложенных клеток).
$\{I_m, m \in \mathbb{N}\}$ *— система вложенных клеток* $\Rightarrow \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} I_m \neq \varnothing$

►

$$I_m = [a_1^{(m)}, b_1^{(m)}] \times [a_2^{(m)}, b_2^{(m)}] \times \ldots \times [a_n^{(m)}, b_n^{(m)}]$$

Для произвольного $k = 1, \ldots, n$ система отрезков $\{[a_k^{(m)}, b_k^{(m)}], m \in \mathbb{N}\}$ является системой вложенных отрезков. Следовательно, по лемме Кантора о вложенных отрезках, $\exists\, c_k \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}] \Rightarrow$ точка $c := (c_1, \ldots, c_n) \in I_m\ \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} I_m$ ◄

Теорема 2 (компактность n-мерной клетки).
I *— n-мерная клетка* $\Rightarrow I$ *— компакт.*

► От противного: пусть существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ клетки I, не допускающее выделения конечного подпокрытия. Для всех $k = 1, \ldots, n$ разделим $[a_k, b_k]$ пополам $\Rightarrow$ получим 2^n меньших клеток. Обозначим I_2 ту клетку, которая не допускает конечного подпокрытия.

Продолжая этот процесс, получаем с-му вложенных клеток $\{I_m, m \in \mathbb{N}\}, I_1 := I$. По Т1, $\exists c \in I_m\ \forall\, m \in \mathbb{N}$. Имеем: $c \in I \Rightarrow \exists\, \alpha \mid c \in U_\alpha$ — открыто $\Rightarrow \exists\, O(c) \subset U_\alpha \Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N} \mid I_m \subset O(c) \subset U_\alpha \Rightarrow$ клетка I_m покрывается одним открытым множеством U_α — противоречие с определением $I_m \Rightarrow \{U_\alpha\}$ допускает выделение конечного подпокрытия. ◄

Теорема 3 (критерий компактности в $\mathbb{R}^n$).
Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда* K *— компакт* $\Leftrightarrow K$ *ограничено и замкнуто.*

► 1)$\boxed{\Rightarrow}$: Доказано ранее.

2)$\boxed{\Leftarrow}$: Пусть K ограничено и замкнуто. Т.к. K ограничено, то $\exists$ клетка $I \mid K \subset I$. Имеем: K — замкнутое подмножество компакта. По Т3 п.1, K — компакт. ◄

Замечание: $K \subset \mathbb{X}$ — метр. пр-во. K ограничено и замкнуто $\overset{\text{в.г.}}{\nRightarrow} K$ — компакт.
Например, пусть $\mathbb{X}$ — множество всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ с нормой $\|x\| := \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ и метрикой $\rho(x, y) := \|x - y\|$

Рассмотрим множество $K := \{e^{(m)} \in \mathbb{X}, m \in \mathbb{N}\}$, где $e^{(1)} := (1, 0, \ldots, 0, \ldots),\ \ldots\ ,$
$e^{(m)} := (\underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{m}, 0, \ldots),\ \ldots$

Имеем: K — ограничено, т.к. $\|e^{(m)}\| = 1\ \forall\, m$; K — замкнуто, т.к. $K' = \varnothing$. В с. д., $\forall\, m \in \mathbb{N}\ \mathring{O}_{1/2}(e^{(m)}) \cap K = \varnothing$, т.к. $\|e^{(m)} - e^{(l)}\| = 1$ при $m \neq l \Rightarrow K' \subset K \Rightarrow K$ — замк. Но K— не компакт: рассм. с-му $\{O_{1/2}(e^{(m)}), m \in \mathbb{N}\}$—открытое покрытие K. Предп., что $\exists$ конеч. п-ие $\{O_{1/2}(e^{(m_s)}), s = 1, \ldots, l\}(*)$ и рассм. $e^{(m_0)}, m_0 \notin \{m_1, \ldots, m_l\} \Rightarrow \|e^{(m_0)} - e^{(m_s)}\| = 1 > 1/2$, т.е. $e^{(m_0)} \notin (*)$

$\boxed{\S 7}$. Непрерывные функции на компакте

Пункт 1. Сохранение компактности при непрерывном отображении

Замечание: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
Рассмотрим два метрических пространства $(\mathbb{X}_1, \rho_1), (\mathbb{X}_2, \rho_2)$

Теорема 1 (о сохранении компактности при непрерывном отображении).

Пусть $K \subset \mathbb{X}_1, K$ *— компакт,* $f : K \to \mathbb{X}_2, f \in \mathcal{C}(K)$.
Тогда $f(K)$ *— компакт в* $\mathbb{X}_2$.

► Пусть $\{V_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие $f(K)$. Рассмотрим произвольно фиксированный $x \in K$, тогда $f(x) \in f(K) \Rightarrow \exists\, \alpha \mid f(x) \in V\alpha \Rightarrow \exists\, O\big(f(x)\big) \subset V_\alpha$, т.к. V_α — открыто. В силу непрерывности f в точке x, для данной $O\big(f(x)\big)$

$$\exists\, O(x) \mid f\big(O(x) \cap K\big) \subset O\big(f(x)\big) \subset V_\alpha \tag{1}$$

Рассмотрим систему $\{O(x), x \in K\}$ — открытое покрытие K. Т.к. K — компакт, то можно выделить конечное подпокрытие $\{O(x_i), i = 1, \ldots, m\} \mid K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} O(x_i)$. Тогда

$$f(K) = f\Big(\bigcup_{i=1}^{m} O(x_i) \cap K\Big) = \bigcup_{i=1}^{m} f\big(O(x_i) \cap K\big) \overset{(1)}{\subset} \bigcup_{i=1}^{m} V_\alpha^{(i)}$$

Получили $\{V_\alpha^{(i)}, i = 1, \ldots, m\}$ — конечное подпокрытие ◄

Следствия:

1) Условия Т $\Rightarrow f(K)$ — ограниченное множество $\Rightarrow f$ — ограниченное отображение (см. 1-ую Т. Вейерштрасса).

2) Условия Т, $\mathbb{X}_2 = \mathbb{R}$, т.е. $f : K \to \mathbb{R}$ — функция $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in K \mid f(x_1) = \sup\limits_K f, f(x_2) = \inf\limits_K f$

   ► sup существует в силу следствия 1), обозначим $y = \sup\limits_K f$. Тогда, согласно критерию супремума, $\exists y_n \in f(K), n \in \mathbb{N} \mid |y - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow y_n \to y \overset{\S 6 \text{ п.1 л.1}}{\Rightarrow}$
   $y \in \big[f(K)\big]' \subset f(K)$, т.к. $f(K)$ замкнуто $\Rightarrow \exists\, x \in K \mid f(x) = y$

   Аналогично для inf ◄

Пункт 2. Равномерная непрерывность

Рассмотрим два метрических пространства $(\mathbb{X}_1, \rho_1), (\mathbb{X}_2, \rho_2)$

Определение 1.
Пусть $A \subset \mathbb{X}_1, f : A \to \mathbb{X}_2$. *Тогда* f $\boxed{\text{равномерно непрерывна}}$ *на* $A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid \rho_2\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon\ \forall x, y \in A \text{ с условием } \rho_1(x, y) < \delta$$

Теорема 1. *Пусть* $K \subset \mathbb{X}_1, K$ *— компакт,* $f : K \to \mathbb{X}_2, f \in \mathcal{C}(K)$.
Тогда f *равномерно непрерывна на* K.

► Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. $f \in \mathcal{C}(K)$, то

$$\forall\, x \in K\ \exists\, \delta(x) > 0 \mid \rho_2\big(f(x'), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, x' \in K \text{ с усл. } \rho_1(x, x') < \delta(x)$$

Рассмотрим систему окрестностей $\big\{O_{\delta(x)/2}(x), x \in K\big\}$ — открытое покрытие компакта K $\Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие $\big\{O_{\delta_i/2}(x_i), i = 1, \ldots, m\big\}$, где $\delta_i := \delta(x_i)$. Следуя традиции, положим $\delta := \min\limits_{i=1,\ldots,m} \delta_i/2$.

Теперь пусть $x, y \in K$ с условием $\rho_1(x, y) < \delta$. Так как $x \in K$, то $\exists\, i \in \{1, \ldots, m\} \mid x \in O_{\delta_i/2}(x_i)$. Тогда

$$\rho_1(x_i, y) \le \underbrace{\rho_1(x_i, x)}_{<\delta_i/2} + \underbrace{\rho_1(x, y)}_{<\delta} < \delta_i/2 + \delta \le \delta_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \in O_{\delta_i}(x_i) \Rightarrow \rho_2\big(f(x_i), f(y)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Поэтому $\rho_2\big(f(x), f(y)\big) \le \rho_2\big(f(x), f(x_i)\big) + \rho_2\big(f(x_i), f(y)\big) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ◄

$\boxed{\S 8}$. Непрерывные функции на связном множестве в $\mathbb{R}^n$

I — промежуток в $\mathbb{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} I$ — полуинтервал $\vee$ I — интервал $\vee$ I — отрезок.

Определение 1. *Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$.*

1) *Непрерывное отображение $\varphi : I \to \mathbb{R}^n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\boxed{\text{путь}}$ в $\mathbb{R}^n$*

2) *Если $I = [\alpha, \beta]$, то точки $\varphi(\alpha), \varphi(\beta)$ называются $\boxed{\text{концами}}$ пути*

Определение 2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда A — $\boxed{\text{(линейно) связно}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, a, b \in A$ $\exists$ путь $\varphi : [\alpha, \beta] \to A \mid \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$*

Теорема 1 (о промежуточных значениях непрерывной функции).
Пусть $A \subset \mathbb{R}^n, A$ — связно, $f : A \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(A)$. Пусть $a, b \in A, f(a) < f(b)$. Тогда $\forall\, M \in \big(f(a), f(b)\big)\ \exists\, c \in A \mid f(c) = M$

► Пусть $M \in \big(f(a), f(b)\big)$. Рассмотрим композицию $f \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to f(A) \subset \mathbb{R}$. Тогда, по Т. о непрерывности композиции, $f \circ \varphi \in \mathcal{C}[\alpha, \beta]$, причём

$$\big(f \circ \varphi\big)(\alpha) = f(a) < f(b) = \big(f \circ \varphi\big)(\beta).$$

Используя Т. о промежуточных значениях для $f \circ \varphi$ (1 сем., Часть 1), получим:

$$\exists\, \gamma \in (\alpha, \beta) \mid \big(f \circ \varphi\big)(\gamma) = f\big(\underbrace{\varphi(\gamma)}_{=:c}\big) = M$$

Это означает, что $\exists\, c \in A \mid f(c) = M$ ◄

Глава 2. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

$\boxed{\S 1}$. Производные и дифференциалы первого порядка

Пункт 1. Частные производные

Определение 1.
Пусть $A \subset \mathbb{R}^n, A = A_i$ *(т.е.* A *открыто),* $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A, f : A \to \mathbb{R}$.
Тогда $\boxed{\text{частной производной}}$ f *по* x_k $(k = 1, \dots, n)$ *в точке* x^0 *называется*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = f'_{x_k}(x^0) = \partial_k f(x^0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_k^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)}{h},$$

если этот предел существует.

Замечание: $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\ \forall\, k = 1, \dots, n \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in \mathcal{C}(x^0)$. Например, для $n = 2$

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, xy \neq 0 \\ 0, xy = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow f \notin \mathcal{C}(0,0), \text{ но } \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Пункт 2. Дифференциал первого порядка

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n, A = A_i, x^0 \in A$

Определение 1. *Пусть* $f : A \to \mathbb{R}$. *Тогда:*

1) f $\boxed{\text{дифференцируема}}$ *в точке* $x^0 \in A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - x_k^0) + o(\|x - x^0\|) \text{ при } x \to x^0, \tag{1}$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}$ *— некоторые постоянные. Обозначение:* $f \in \mathcal{D}(x^0)$

2) *Пусть* $f \in \mathcal{D}(x^0)$. *Тогда выражение (главная линейная часть приращения)*

$$\mathrm{d}f(x^0) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - x_k^0)$$

называется $\boxed{\text{дифференциалом}}$ *функции* f *в точке* x^0.

Замечание: п. 1) в опр. означает следующее: $\exists\, O(x^0) \mid$ верно (1) $\forall\, x \in O(x^0)$.

Теорема 1 (непрерывность дифференцируемой функции).

$$f \in \mathcal{D}(x^0) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(x^0)$$

► $x^0 \in A_i \Rightarrow x^0 \in A' \Rightarrow \Big(f \in \mathcal{C}(x^0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)\Big)$. Имеем:

$$f(x) - f(x^0) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - x_k^0)}_{\to 0} + \underbrace{o(\|x - x^0\|)}_{\to 0} \to 0 \text{ при } x \to x^0$$

Это означает, что $\lim\limits_{x \to x^0} \big(f(x) - f(x^0)\big) = 0$ ◄

Замечание: $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\ \forall k = 1, \ldots, n \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in \mathcal{D}(x^0)$ (см. замечание в п.1 и T1)

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости).

$$f \in \mathcal{D}(x^0) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\ \forall k = 1, \ldots, n,\ \textit{причём}\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lambda_k\ \textit{из}\ (1)$$

► Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_k^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0)}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\lambda_k \cdot h + o(\|h\|)}{h} = \lambda_k$$

$\forall k = 1, \ldots, n$ ◄

Теорема 3. $\left.\begin{array}{l} 1)\exists\, O(x^0) \mid \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\ \forall k = 1, \ldots, n, \forall x \in O(x^0) \\ 2) \frac{\partial f}{\partial x_k} \in C(x^0)\ \forall k = 1, \ldots, n \end{array}\right] \Rightarrow f \in \mathcal{D}(x^0)$

► Для $x \in O(x^0)$ имеем:

$$f(x) - f(x^0) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = \big[f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)\big] + \big[f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)\big] =$$

$$= \mid \text{Т. Лагранжа} \mid =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2\Big) \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big(x_1^0, x_2^0 + \theta(x_2 - x_2^0)\Big) \cdot (x_2 - x_2^0) =$$

$$= \left| \text{ используем } \frac{\partial f}{\partial x_k} \in C(x^0) \right| =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + o(1)\right](x_1 - x_1^0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + o(1)\right](x_2 - x_2^0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \cdot (x_2 - x_2^0) + o(\|x - x^0\|)$$

$$\text{при } x \to x^0$$

Для $n \geq 3$ доказательство аналогично. ◄

Замечание: Пусть $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)\ \forall\, k = 1, \dots, n, \forall\, x \in O(x^0)$ и $f \in \mathcal{C}(x^0) \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in \mathcal{D}(x^0)$
Например, $n = 2, f(x, y) = \sqrt{|xy|}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$
$f \in \mathcal{C}(0, 0)$, частные производные по x, y разрывны в (0,0) и обе равны 0 в этой точке. Если бы f была дифференцируема в (0,0), то $f(x, y) - 0 = 0 + o(\|(x, y)\|)$, однако $f(x, y) - 0 = \sqrt{|xy|} = x$, если $y = x > 0$. Следовательно, $f \notin \mathcal{D}(0, 0)$

Определение 2. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in A_i = A, f : A \to \mathbb{R}^m$. *Тогда* f *— дифференцируема в точке* $x^0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f_i : A \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в т.* $x^0, i = 1, \dots, m$

Пусть $f : x \in A \to f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big) \in \mathbb{R}^m$, пусть $f \in \mathcal{D}(x^0) \Rightarrow \exists \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$
$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$

$\boxed{\text{Матрицей Якоби}}$ называется матрица

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Если $m = n$, то определитель матрицы Якоби называется $\boxed{\text{якобианом}}$ $\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$
Пример: В полярных координатах $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$\boxed{\S 2}$. Дифференцирование сложной функции

Теорема 1. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n, A = A_i, x_0 \in A, B \subset \mathbb{R}^m, B = B_i, y_0 \in B.$
$f : A \to B, g : B \to \mathbb{R}, y^0 = f(x^0)$, *причём* $f \in \mathcal{D}(x^0), g \in \mathcal{D}(y^0)$. *Тогда* $h := g \circ f \in \mathcal{D}(x^0)$.

► Запишем $h(x) - h(x^0)$ в случае $n = m = 2$ для простоты:

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(x^0)\big) = g(y) - g(y^0) = |g \in \mathcal{D}(y^0)| =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^0)\Big[f_1(x) - f_1(x^0)\Big] + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^0)\Big[f_2(x) - f_2(x^0)\Big] + o\big(f(x) - f(x^0)\big) = |f \in \mathcal{D}(x^0)| =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^0)\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + o(\|x - x^0\|)\right] +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^0)\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + o(\|x - x^0\|)\right] + \underbrace{o\big(\|f(x) - f(x^0)\|\big)}_{o(\|x - x^0\|)} =$$

$$= \left[\frac{\partial g}{\partial y_1}(y^0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^0) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0)\right](x_1 - x_1^0) +$$

$$+ \left[\frac{\partial g}{\partial y_1}(y^0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^0) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0)\right](x_2 - x_2^0) + o(\|x - x^0\|) \text{ при } x \to x^0$$

Таким образом, $h \in \mathcal{D}(x^0)$ ◄

Следствия:

1) пусть выполнены условия теоремы, $n = m = 2$. Тогда

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^0) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) = \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^0) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) = \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2}$$

   В общем случае,

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

   т.е.

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_m}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2) Инвариантность формы первого дифференциала

$$\mathrm{d}h = \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \mathrm{d}f_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} \cdot \mathrm{d}f_2$$

3) Правила дифференцирования линейной комбинации, произведения и частного записываются аналогично случаю одной переменной.

$\boxed{\S 3}$. Производная по направлению. Градиент

Определение 1. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n, A = A_i, x^0 \in A, f : A \to \mathbb{R}, \ell = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n) = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$. *Тогда* $\boxed{\text{производной по направлению}}$ *называется*

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + t\ell) - f(x^0)}{t},$$

если этот предел существует.

Теорема 1. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n, A = A_i, x^0 \in A, f : A \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}(x^0)$.
Тогда $\forall\, \ell = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n) = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$

$$\exists\, \frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \cdot \cos\alpha_k$$

►

$$f \in \mathcal{D}(x^0) \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + t\ell) - f(x^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \cdot (x_k - x_k^0) + o(\|x - x^0\|)}{t} =$$

$$= |\text{ т.к. } x_k = x_k^0 + t\cos\alpha_k| = \lim_{t \to 0} \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \cdot t\cos\alpha_k}{t} + o(1) \right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \cdot \cos\alpha_k$$

◄

Определение 2.
Пусть $A \subset \mathbb{R}^n, A = A_i, x^0 \in A, f : A \to \mathbb{R}$ *и* $\exists\, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\ \forall\, k = 1, \ldots, n$. *Тогда* $\boxed{\text{градиентом}}$ f *в т.* x^0 *называется вектор*

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \nabla f(x^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

Замечание:

1) В условиях Опр.2 и $f \in \mathcal{D}(x^0)$ утв. Т1 запишется как скалярное произведение

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = \Big(\operatorname{grad} f(x^0), \ell \Big) \tag{1}$$

2) Формула (1) $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = \left| \operatorname{grad} f(x^0) \right| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между направлением градиента и ℓ. Следовательно, наибольшая скорость изменения f достигается на $\ell = \operatorname{grad} f(x^0)$.

$\boxed{\S 4}$. Производные и дифференциалы высших порядков

Пункт 1. Теоремы о смешанных производных

Определение 1. *Пусть* $A_i = A, x^0 \in A, f : A \to \mathbb{R}$,

пусть для $i = 1, \ldots, n \; \exists \, \dfrac{\partial f}{\partial x_i} : O(x^0) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) := \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x^0)$, *если* $j = 1, \ldots, n$

2) $i \neq j \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = f''_{x_i x_j}(x^0) = \partial_{ij} f(x^0)$ *называется* $\boxed{\text{смешанной производной}}$.

3) *При* $i = j$ *обознач.* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x^0) =: \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^0)$

Определение 2.

1) *Определение 1 обобщается на производную любого порядка* ≥ 3

2) $k = (k_1, \ldots, k_n), k_i \in \mathbb{Z}_+$ — $\boxed{\text{мультииндекс}}$.
   - $|k| := k_1 + \ldots + k_n$
   - $\forall \, \sigma \in \mathbb{R}^n, \sigma^k := \sigma_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_n^{k_n}$
   - $k! = k_1! \ldots k_n!$
   - $\partial^k f(x^0) := \dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}(x^0)$

Замечание: Возможно, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$. Например,

$$f(x,y) := \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Тогда $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

►

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} =$$

$$\text{Но: } x \neq 0 : \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y \to 0} x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x$$

$$x = 0 : \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$

С другой стороны, аналогично получаем $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ (см. Рис.) ◄

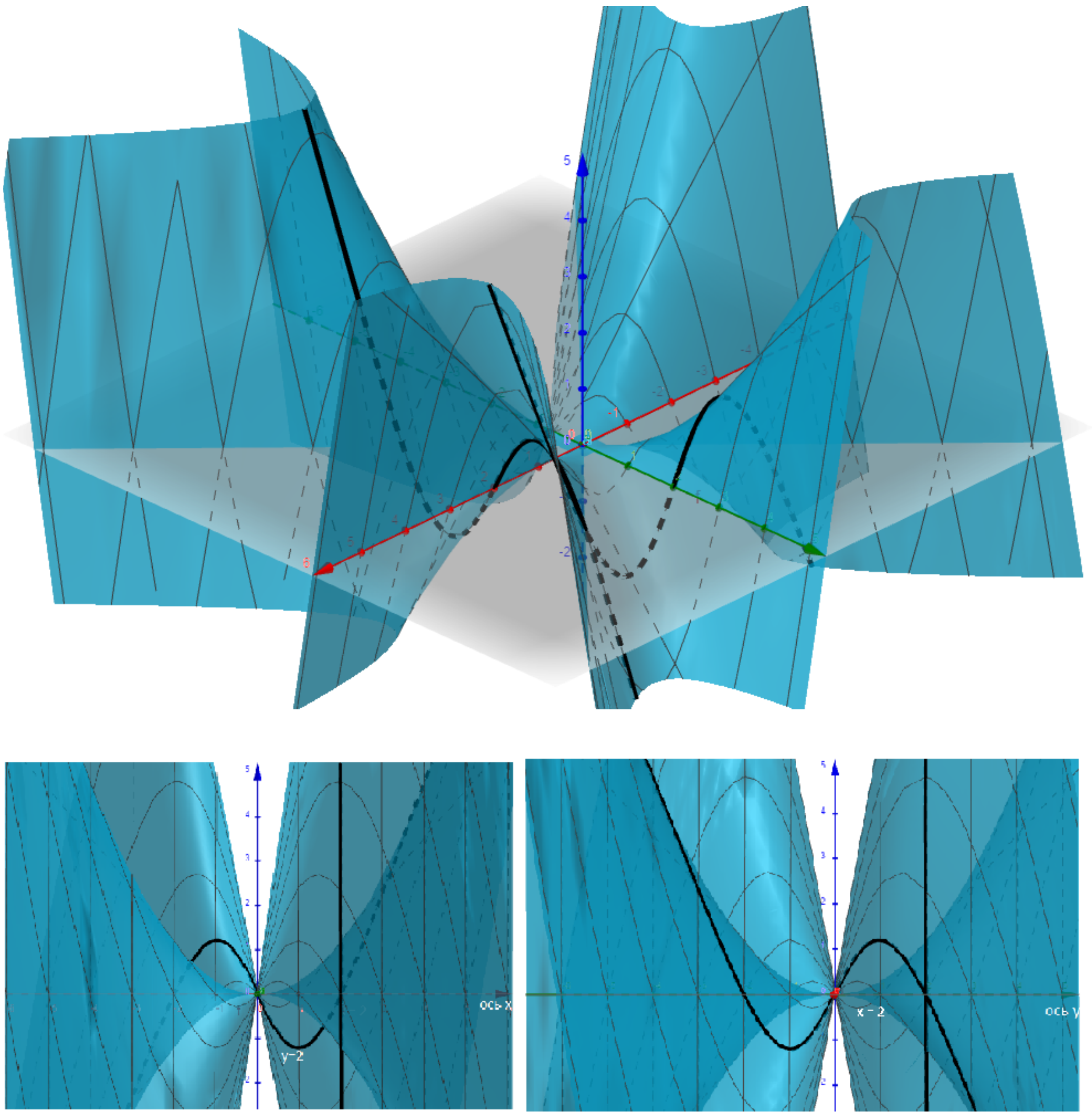


Рис. 4. Рис. к замечанию

Теорема 1 (Шварца). *Пусть* $x^0 \in \mathbb{R}^2, f : O(x^0) \to \mathbb{R}$,
$\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} : O(x^0) \to \mathbb{R},$ *причём* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \in \mathcal{C}(x^0)$. *Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0) \tag{1}$$

► Введём функцию

$$F(h_1, h_2) := f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) - f(x_1^0 + h_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 + h_2) + f(x_1^0, x_2^0),$$

где h_1, h_2 — достаточно малы.

1) Определим функцию одной переменной

$$\varphi(t) := f(x_1^0 + th_1, x_2^0 + h_2) - f(x_1^0 + th_1, x_2^0)$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_1)(1-0) = \varphi'(\theta_1) = \\ = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0)\right] h_1 = \\ = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + \theta_2 h_2)\right] \underbrace{(x_2^0 + h - x_2^0)}_{=h_2} h_1, \text{ где } 0 < \theta_1, \theta_2 < 1 \end{aligned}$$

2) Определим функцию

$$\psi(t) := f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + th_2) - f(x_1^0, x_2^0 + th_2)$$

Тогда в этом случае

$$\begin{aligned} F(h_1, h_2) = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(\xi_2)(1-0) = \psi'(\xi_2) = \\ = \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + \xi_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0 + \xi_2 h_2)\right] h_2 = \\ = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^0 + \xi_1 h_1, x_2^0 + \xi_2 h_2)\right] h_1 h_2, \text{ где } 0 < \xi_1, \xi_2 < 1\ (h_1, h_2 \neq 0) \overset{1),2)}{\Rightarrow} \\ \overset{1),2)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^0 + \xi_1 h_1, x_2^0 + \xi_2 h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + \theta_2 h_2) \end{aligned}$$

Следовательно, переходя к $\lim$ при $h_1, h_2 \to 0$ и используя непрерывность смешанных производных в т. (x_1^0, x_2^0), имеем равенство (1). ◄

Теорема 2 (Юнга). *Пусть* $x^0 \in \mathbb{R}^2, f : O(x^0) \to \mathbb{R}$,
$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2} : O(x^0) \to \mathbb{R}$, *причём* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \in \mathcal{D}(x^0)$. *Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0)$$

► Не требуется в рамках данного курса, см. А.С.Ч., Л.23 ◄

Замечание: Из Т2 не следует Т1, а из Т1 не следует Т2.

Определение 3. *Пусть* $A = A_i \subset \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$.

$$f \in \mathcal{C}^m(A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \partial^k f \in \mathcal{C}(A) \;\forall\, k \;|\, |k| \le m$$

Теорема 3 (обобщение теоремы Шварца). *Пусть* $x^0 \in \mathbb{R}^n, f : O(x^0) \to \mathbb{R}$,
$\exists\, \partial^k f : O(x^0) \to \mathbb{R} \;\forall\, k \;|\, |k| \le m, m \ge 2$, *причём* $\exists\, k^{(1)}, k^{(2)} \;|\; \partial^{k^{(1)}} f, \partial^{k^{(2)}} f \in \mathcal{C}(x^0)$ *Тогда*

$$\partial^{k^{(1)}} f(x^0) = \partial^{k^{(2)}} f(x^0)$$

т.е. $\partial^k f(x^0)$ *не зависит от порядка дифференцирования по* $x_1, \ldots, x_k$

► 1) $n \ge 3, |k| = 2$ следует из Т1
2) $n \ge 2, |k| \ge 3$ индукцией по числу $m = |k|$ ◄

Пункт 2. Дифференциалы высших порядков

Определение 1. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n, A = A_i, x^0 \in A, f : A \to \mathbb{R}$

1) f $\boxed{\text{дважды дифференцируема}}$ *в т.* $x^0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ *функция* $\mathrm{d}f : O(x^0) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в* x^0. *Обозначения:* $f \in \mathcal{D}^2(x^0), \mathrm{d}^2 f(x^0) := \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x^0)$

2) f *m раз дифференцируема в т.*x^0 $(f \in \mathcal{D}^m(x^0)) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ *определена функция* $\mathrm{d}^{m-1} f : O(x^0) \to \mathbb{R}$, *причём эта функция дифференцируема в* x^0, *т.е.* $\exists\, \mathrm{d}(\mathrm{d}^{m-1} f)(x^0) =: \mathrm{d}^m f(x^0)$

Замечание:

1) $f \in \mathcal{D}^2(x^0) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{D}(x^0), i = 1, \ldots, n$

2) $f \in \mathcal{D}^m(x^0) \Leftrightarrow \partial^k f \in \mathcal{D}(x^0) \;\forall\, k \;|\, |k| = m - 1$

3) $f \in \mathcal{D}^2(x^0) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0)$ (т. Юнга)

4) $f \in \mathcal{D}^2(x^0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{d}^2 f(x^0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \right) \mathrm{d}x_j =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n \right)^2 f$$

Пункт 3. Формулы Тейлора

Лемма 1. *Пусть* $x \in \mathbb{R}^n, k = (k_1, \ldots, k_n)$ *— мультииндекс. Тогда*

$$(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} x^k = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1! \ldots k_m!} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \ \forall\, m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

► $(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum\limits_{|k|=m} A_k x^k$. Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n), |l| = |k| - m$

Имеем: $\partial^l \big[(x_1 + \ldots + x_n)^m\big] = m!$

С другой стороны,

$$\partial^l \big[\sum_{|k|=m} A_k x^k\big] = A_k \prod_{i=1}^{n} k_i! = A_k k!$$

Значит, $A_k = \dfrac{m!}{k!}$ ◄

Лемма 2. $f : O_\varepsilon(x^0) \to \mathbb{R}, x^0 \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{D}^p\big(O_\varepsilon(x^0)\big), p \geq 1.$

Тогда, полагая $F(t) := f(x^0 + th), t \in [-1 - \delta, 1 + \delta], h$ *фикс., дост. мало*

$$F^{(s)}(t) = \frac{\mathrm{d}^s F}{\mathrm{d}t^s}(x^0 + th) = \sum_{|k|=s} \frac{s!}{k!} h^k \partial^k f(x^0 + th), 1 \leq s \leq p \tag{2}$$

► Имеем:

$$F^{(s)}(t) = \sum_{|k|=s} B_k h_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot h_n^{k_n} \partial^k f(x^0 + th), \tag{3}$$

Коэффициенты B_k в (3) не зависят от f, x^0. Рассмотрим $x^0 = (0, \ldots, 0)$ и $f(x_1, \ldots, x_n) = e^{x_1 + \ldots + x_n}$. В этом случае

$$F(t) = e^{t(h_1 + \ldots + h_n)}$$
$$F'(t) = (h_1 + \ldots + h_n) e^{t(h_1 + \ldots + h_n)}$$
$$\ldots$$
$$F^{(s)} = (h_1 + \ldots + h_n)^s e^{t(h_1 + \ldots + h_n)} = \sum_{|k|=s} B_k h^k \partial^k f(x^0 + th) \Rightarrow$$

согласно лемме 1, $B_k = \dfrac{s!}{k!} \Rightarrow$ утверждение леммы 2 ◄

Теорема 1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

Пусть $f : O_\varepsilon(x^0) \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}^{m+1}\big(O_\varepsilon(x^0)\big), m \geq 0$ *Тогда* $\exists\, \varepsilon > 0 \mid$

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{s=1}^{m} \sum_{|k|=s} \frac{(x-x^0)^k}{k!} \partial^k f(x^0) + \underbrace{\sum_{|k|=m+1} \frac{(x-x^0)^k}{k!} \partial^k f\big(x^0 + \theta(x-x^0)\big)}_{=:r_{m+1}}, \theta \in (0,1)$$

► Положим $F(t) := f(x^0 + th)$, где $h := x - x^0, t \in [-1-\delta, 1+\delta], \delta := \frac{\varepsilon - \|h\|}{\|h\|}$.
Тогда $F \in \mathcal{D}^{m+1}(-1-\delta, 1+\delta)$
Имеем: $F(0) = f(x^0), F(1) = f(x^0 + h) = f(x)$. Из формулы Тейлора для функции одной переменной $\Rightarrow$

$$F(1) = F(0) + \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s!} F^{(s)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(\theta), \theta \in (0,1) = \mid \text{Л2} \mid =$$

$$= f(x^0) + \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s!} \sum_{|k|=s} \frac{s!}{k!} h^k \partial^k f(x^0) + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{|k|=m+1} \frac{(m+1)!}{k!} h^k \partial^k f(x^0 + \theta h),$$

откуда следует утверждение теоремы ◄

Теорема 2 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).
Пусть $f : O_\varepsilon(x^0) \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}^m(x^0), m \geq 1$ *Тогда*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{s=1}^{m} \sum_{|k|=s} \frac{(x-x^0)^k}{k!} \partial^k f(x^0) + o(\|x - x^0\|^m) \text{ при } x \to x^0$$

► $\underline{m = 1}$: верно определение того, что $f \in \mathcal{D}(x^0)$
$\underline{m \geq 2}$: положим

$$g(x) := f(x) - P_m(x),\ P_m(x) := f(x^0) + \sum_{s=1}^{m} \sum_{|k|=s} \frac{(x-x^0)^k}{k!} \partial^k f(x^0)$$

— полином Тейлора. Надо доказать, что $g(x) = o(\|x - x^0\|^m)$ при $x \to x^0$
Имеем:

- $g(0) = 0$
- $(\partial^l P_m)(x^0) = (\partial^l f)(x^0), 0 \leq |l| \leq m$ В самом деле,
  $|l| = 0 \Rightarrow P_m(x^0) = f(x^0)$
  $|l| = 1, \ldots, m \Rightarrow [\partial^l (x-x^0)^k](x^0) = \begin{cases} 0, l \neq k \\ l_1! \ldots l_k! = l!, l = k \end{cases}$

- $g \in \mathcal{D}^{m-1}\big(O(x^0)\big)$. Тогда по Т1 (Т+Л)

$$g(x) = g(x^0) + \sum_{s=1}^{m-2} \sum_{|k|=s} \frac{(x-x^0)^k}{k!} \partial^k g(x^0) + \sum_{|k|=m-1} \frac{(x-x^0)^k}{k!} \partial^k g\big(x^0 + \theta(x-x^0)\big) =$$

$$= 0 + 0 + \sum_{|k|=m-1} \frac{(x-x^0)^k}{k!} \partial^k g\big(x^0 + \theta(x-x^0) =$$

$$= \sum_{|k|=m-1} o(\|x-x^0\|)\|x-x^0\|^{m-1} \frac{(x-x^0)^k}{\|x-x^0\|^{m-1}} = o(1)\|x-x^0\|^m = o(\|x-x^0\|^m)$$

◀

Формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме предлагается посмотреть в Зориче на странице 535.

$\boxed{\S 5}$. Локальный экстремум функций многих переменных

Определение 1. $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n, x^0 \in A_i$

1) x^0 — $\boxed{\textit{точка локального максимума (минимума)}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, O(x^0) \subset A \mid f(x) \le f(x^0)\ \big(f(x) \ge f(x^0)\big)\ \forall x \in O(x^0)$$

2) x^0 — $\boxed{\textit{точка локального максимума (минимума)}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, O(x^0) \subset A \mid f(x) < f(x^0)\ \big(f(x) > f(x^0)\big)\ \forall x \in O(x^0)$$

3) x^0 — $\boxed{\textit{точка локального экстремума}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^0$ — *т. лок. макс. или мин.*

Теорема 1 (необходимое условие локального экстремума).
$f : O(x^0) \to \mathbb{R}, x^0$ — *точка локального экстремума*, $\exists\, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0), i = 1, \ldots, m \Rightarrow$

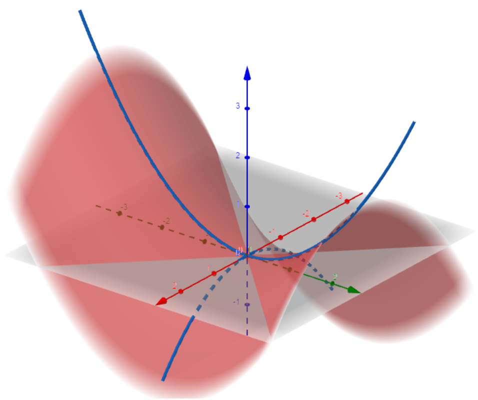
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0$$

▶ Фиксируем произвольно $i = \{1, 2, \ldots, n\}$ и рассматриваем функцию одного переменного $x_i : F(x_i) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Тогда по Т. Ферма $F'(x_i^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0$ ◀

Замечание: 1) $f \in \mathcal{D}(x^0) \Rightarrow \forall\, \ell \dfrac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \cdot \cos \alpha_k = 0$

2) В условии Т1 достаточно рассмотреть одну производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$

3) $\operatorname{grad} f(x^0) = 0 \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} x^0$ — точка локального экстремума. Например,
$f(x, y) = y^2 - x^2$ (седло), т.(0,0) не явл. точкой локального экстремума.



Теорема 2 (достаточное условие локального экстремума).
Пусть $f : O(x^0) \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}^2(x^0), \mathrm{grad} f(x^0) = 0$. *Тогда*

1) *Если квадратичная форма*

$$\varphi(h) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \tag{1}$$

положительно (отрицательно) определена, то x^0 *— т. лок. мин. (макс.)*

2) *Если квадратичная форма (1) меняет знак, то* x^0 *не явл. т. экстремума*

►

1) Пусть квадратичная форма $\varphi(h)$ положительно определена.
Предварительное замечание: Ф. Тейлора можно переписать в виде

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^s f(x) + r_{m+1}(x, x^0), h_i = x_i - x_i^0$$

Далее,

$$f(x) - f(x^0) = f(x^0 + h) - f(x^0) = \left| \text{ так как } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0 \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(\|h\|^2) = \frac{1}{2} \|h\|^2 \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{h_i h_j}{\|h\| \|h\|} + o(1) \right] \text{ при } h \to 0$$

Кроме того, рассмотрим сферу $S(0,1)$ — компакт, а значит

$$\exists\, m \in S(0,1) \mid m = \min_{S(0,1)} \varphi(h)$$

Имеем:

$$\varphi(h^*) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i^* h_j^* \geq m \overset{\varphi > 0}{>} 0 \;\forall\, h^* \in S(0,1)$$

Поэтому

$$f(x^0 + h) - f(x^0) \geq \frac{1}{2} \|h\|^2 \Big[m + o(1) \Big] > \frac{1}{2} \|h\|^2 > 0 \text{ при } h \to 0$$

Следовательно, x^0 — точка локального минимума.

2) Пусть теперь квадратичная форма (1) меняет знак. Тогда исходя из аналогичных п.1) выкладок, $\exists h^*_{max}, h^*_{min} \in S(0,1)$, при которых достигается положительное и отрицательное изменение значения функции.

◄

$\boxed{\S 6}$. Неявные функции

Пункт 1. Случай одного уравнения

Пусть $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$, задана функция $F\big(O(x^0, y^0)\big) \to \mathbb{R}$. Предполагаем, что $F(x^0, y^0) = 0$.

Определение 1. *Пусть* $\exists\, O(x^0), \exists\, f : O(x^0) \to \mathbb{R} \mid F\big(x, f(x)\big) = 0 \;\forall\, x \in O(x^0)$, *тогда говорят, что уравнение* $F(x, y) = 0$ *задаёт* $\boxed{\textit{неявно}}$ *функцию* f.

Теорема 1.

$$\begin{array}{rcc} 1) F \in \mathcal{C}^1\big(O(x^0, y^0)\big) & & \exists\, O(x^0),\ \exists!\, f : O(x^0) \to \mathbb{R} \\ 2) F(x^0, y^0) = 0 & \Rightarrow & a) f(x^0) = y^0 \\ 3) \frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) > 0 & & b) F\big(x, f(x)\big) = 0 \;\forall\, x \in O(x^0) \end{array}$$

▶

1) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) > 0 \Rightarrow \exists$ квадрат с ц. в (x^0, y^0), стор. $2h \mid \frac{\partial F}{\partial y} \geq m > 0 \;\forall (x, y) \in K$

2) Имеем: $F(x^0, y^0) = 0, \dfrac{\partial F}{\partial y}(x^0, y) > 0 \Rightarrow F(x^0, y^0 - h) < 0, F(x^0, y^0 + h) > 0$

3) Непрерывность по x даёт
   а) $F(x^0, y^0 + h) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 F(x, y^0 - h) > 0 \;\forall\, x \in [x^0 - \delta, x^0 + \delta]$
   б) $F(x^0, y^0 - h) < 0 \Rightarrow F(x, y^0 - h) < 0 \;\forall\, x \in [x^0 - \delta, x^0 + \delta]$

4) Фиксируем произвольно $x \in (x^0 - \delta, x^0 + \delta)$ и рассматриваем отрезок l, соединяющий точки $A_- = (x, y^0 - h)$ и $A_+ = (x, y^0 + h)$
   Так как $F(A_-) < 0, F(A_+) > 0 F$ возрастает по y (производная>0), то $\exists! y = y(x) \mid F\big(x, y(x)\big) = 0$

5) $\forall\, x \in (x^0 - \delta, x^0 + \delta)$ опр. единственным образом $f(x) := y(x) \Rightarrow f$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

◀

Замечание:

1) Условия $\dfrac{\partial F}{\partial x} \in \mathcal{C}\big(O(x^0)\big)$ можно заменить на $F \in \mathcal{C}\big(O(x^0)$

2) Условия Т $\Rightarrow \exists O(x^0) f \in \mathcal{C}^1\big(O(x^0)\big)$

3) Теорема обобщается на случай, когда $x = (x_1, \ldots, x_n)$

Пункт 2. Неявная функция для системы уравнений

Теорема 1. *Пусть*

1) $F, G \in \mathcal{C}^1\big(O(x^0, y^0, z^0)\big), (x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{R}^3$
2) $F(x^0, y^0, z^0) = G(x^0, y^0, z^0) = 0$
3) *Якобиан*
$$\frac{D\big(F, G\big)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда $\exists!\, f, g : O(x^0) \to \mathbb{R}$ *с условиями:*

- $f(x^0) = y^0, g(x^0) = z^0$
- $F\big(x, f(x), g(x)\big) = G\big(x, f(x), g(x)\big) = 0$
- $f, g \in \mathcal{C}^1\big(O(x^0)\big)$

► без доказательства ◄