

Ускорение сходимости
последовательностей, сходящихся
линейно и квадратично (часть 2)

Павел Николаевич Антонюк

Краткая история ускорения сходимости последовательностей

- Христиан Гюйгенс (1629-1695)
- Секи Кова (1642-1708)
- Александр Эйткен (1895-1967) – метод 1926
- Йохан Стефенсен (1873-1961)
- Жорж Леметр (1894-1966) [Валле-Пуссен]

Ускорение квадратичной сходимости

- $a, b, c, d, \dots \rightarrow x_*$
- $\varepsilon, \delta, \gamma, \dots \rightarrow 0$
- $E, \Delta, \Gamma, \dots \rightarrow 0$
- $\varepsilon = |a - b|, \delta = |b - c|, \gamma = |c - d|, \dots$
- $E = |a - x_*|, \Delta = |b - x_*|, \Gamma = |c - x_*|, \dots$
- Скорость сходимости послед-ти: $\delta \sim A \varepsilon^k$
- **Теорема.** Последовательности малых и больших греческих букв сходятся с одинаковой скоростью:
 $\delta \sim A \varepsilon^k, \Delta \sim A E^k$

Корректор линейной сходимости (метод Эйткена)

$$X = \frac{ac - b^2}{a + c - 2b}$$

Задача: извлечение квадратного корня

$$x_* = \sqrt{u} \quad x \mapsto \frac{u}{x}$$

$$x \mapsto \frac{u}{x} \mapsto x \mapsto \dots$$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{u}{x} \right) \quad (\text{ф-ла Герона})$$

Корректор квадратичной сходимости

$$X = c + \frac{\delta^3}{\varepsilon^2}$$

$$Y = c + \frac{\delta^3}{(\varepsilon + \delta)^2}$$

$$Z = X \cap Y$$

Скорость сходимости: $k = 2 \Rightarrow k = \sqrt{5}$