КАФЕДРА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Основной курс

«Механика сплошной среды»

1,5 года, 2 экзамена, 2 зачёта

Лектор: зав. каф., профессор, доктор физ.-мат. наук Д.В.Георгиевский

В курсе излагаются основы построения моделей сплошных сред и теории определяющих соотношений, а также постановки начально-краевых задач для описания движения и деформирования сплошных сред. Основное внимание уделяется классическим средам – идеальная жидкость, вязкая жидкость, совершенный газ, упругое тело, вязкоупругое тело, упругопластическое тело.

**Программа курса**

1. Единая форма записи пяти постулатов МСС. Источник величины, поток величины через поверхность, производство величины внутри объёма. Интегральная и дифференциальная формы записи.
2. Идеальная жидкость. Уравнения Эйлера. Формула Громеки – Лэмба.
3. Различные замыкания системы уравнений для идеальной жидкости.
4. Гидростатика идеальной жидкости. Необходимые условия существования равновесия. Равновесие под действием потенциальных сил. Распределение давления в тяжёлой несжимаемой неоднородной жидкости.
5. Главный вектор и главный момент сил, действующих со стороны жидкости на погруженные в неё плоскую и замкнутую поверхности. Закон Архимеда.
6. Равновесие шара на поверхности жидкости.
7. Уравнение свободной поверхности вращающейся жидкости. Геоид.
8. Функция давления. Её вид в случаях несжимаемости, изотермического и адиабатического процессов. Замкнутые системы уравнений, включающие функцию давления.
9. Совершенный газ. Уравнение состояния. Удельная газовая постоянная. Уравнение теплопроводности. Баротропный газ. Скорость звука в среде.
10. Малые возмущения и линеаризация систем уравнений для слабосжимаемой среды. Акустическое приближение.
11. Одномерное волновое уравнение. Решение Даламбера. Бегущие волны.
12. Движущийся источник возмущений в неограниченной среде. Фронт волны. Эффект Доплера. Конус Маха.
13. Установившиеся течения идеальной жидкости. Интеграл Бернулли вдоль линий тока и вихревых линий.
14. Скорость истечения несжимаемой жидкости из резервуара. Трубка Пито – Прандтля.
15. Потенциальные течения идеальной жидкости. Эквипотенциальные поверхности. Интеграл Коши – Лагранжа.
16. Трёхмерное растекание-стекание несжимаемой идеальной жидкости. Источник-сток в трёхмерном пространстве.
17. Суперпозиция источника и стока. Диполь. Суперпозиция диполя и однонаправленного течения. Обтекание сферы потоком.
18. Сила, действующая со стороны потока на обтекаемую сферу. Парадокс Эйлера – Даламбера. Движение сферы с постоянным ускорением. Присоединённая масса сферы.
19. Схлопывание одиночного сферического вакуумного пузырька под действием давления на бесконечности (задача Рэлея). Анализ размерностей.
20. Плоские потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости. Эквипотенциальные линии и линии тока. Комплексный потенциал скоростей, комплексная скорость.
21. Источник-сток на плоскости. Плоский вихрь. Вихреисточник. Плоский диполь.
22. Комплексные потенциалы, соответствующие обтеканию луча и угла.
23. Безциркуляционное и циркуляционное обтекание окружности. Критические точки. Подъёмная сила, действующая со стороны потока на окружность.
24. Источник вблизи плоской стенки. Сила, действующая со стороны потока на участок стенки.
25. Тензор-функции тензорных аргументов. Инварианты. Существование скалярного потенциала. Тензорно и скалярно линейные и нелинейные функции. Физическая линейность.
26. Ньютоновская вязкая жидкость. Сдвиговая и объёмная вязкости. Замкнутые системы уравнений.
27. Несжимаемая вязкая жидкость. Система Навье – Стокса. Граничные и начальные условия.
28. Течение Пуазейля в плоском слое и в трубе произвольного сечения. Задача Дирихле. Зависимость расхода от перепада давления.
29. Сила сопротивления при течении вязкой жидкости в трубе круглого сечения. Число Рейнольдса.
30. Течение Куэтта – Тейлора между двумя вращающимися цилиндрами.
31. Нестационарные течения вязкой несжимаемой жидкости. Диффузия вихревого слоя. Диффузия вихревой нити.
32. Горизонтальные колебания полупространства вязкой жидкости, вызванные движением границы. Сдвиг по фазе между скоростью и касательным напряжением.
33. Обтекание потоком вязкой несжимаемой жидкости плоской пластинки. Система уравнений в приближении Прандтля. Основы теории пограничного слоя.
34. Автомодельность в задаче об обтекании потоком вязкой несжимаемой жидкости плоской пластинки. Уравнение Блазиуса.
35. Линеаризованные уравнения вязкой жидкости в возмущениях вблизи невозмущённого состояния. Уравнение Орра – Зоммерфельда. Уравнение Рэлея.
36. Разные понятия и определения среднего величины. Подходы к описанию турбулентности. Тензор турбулентных напряжений. Турбулентная вязкость.
37. Физически линейные и нелинейные среды. Склерономные и реономные среды. Однородные и неоднородные среды. Композиты.
38. Упругое тело. Определяющие соотношения в линейной упругости. Материальные константы (тензор модулей упругости, тензор термомеханической связанности, теплоёмкость при постоянной деформации). Связанные и несвязанные среды.
39. Закон Гука для анизотропного упругого тела. Виды упругой симметрии. Ортотропия. Трансверсальная анизотропия.
40. Закон Гука для изотропного упругого тела. Постоянные Ламе. Технические постоянные. Модуль объёмного сжатия. Коэффициент теплового расширения. Физический смысл упругих постоянных и области их изменения. Обратная форма закона Гука.
41. Неупругое поведение материалов. Характерные диаграммы «напряжение – деформация» для растяжения стержня. Нагрузка, разгрузка и остаточные деформации в стержне.
42. Критерии пластичности Мизеса – Генки и Треска – Кулона – Сен-Венана. Их геометрические интерпретации.
43. Определяющие соотношения теории малых упругопластических деформаций при активном нагружении и разгрузке. Универсальная кривая материала.
44. Вязкоупругие модели. Модели Фойгта и Максвелла. Ползучесть и релаксация. Интегральные определяющие соотношения в теории вязкоупругости.

Основной курс

«Основы механики сплошной среды»

1 год, 1 экзамен, 1 зачёт

Лектор: зав. каф., профессор, доктор физ.-мат. наук Д.В.Георгиевский

В курсе излагаются кинематика сплошной среды, теория напряжённого состояния в точке, основные постулаты механики сплошной среды – законы о сохранении массы, об изменении количества движения, об изменении момента количества движения, об изменении внутренней энергии, об изменении энтропии. Даются основы теории определяющих соотношений, позволяющие переходить к построению конкретных моделей сплошных сред.

**Программа курса**

1. Скалярное, векторное, тензорное (диадное) умножения векторов и тензоров второго ранга.
2. Оператор набла. Дифференциальные операторы дивергенция, ротор, градиент. Дифференциальные тождества.
3. Тензоры второго и четвёртого рангов и их возможные свёртки. Единичные тензоры второго и четвёртого рангов. Символы Леви-Чивиты и их связь с символами Кронекера.
4. Инварианты тензора второго ранга. Формула Гамильтона – Кели.
5. Девиатор и шаровая часть. Собственные значения, собственные векторы и пространства.
6. Ортогональные криволинейные системы координат. Фундаментальная матрица. Ковариантные и контравариантные компоненты векторов и тензоров. Символы Кристоффеля, коэффициенты Ламе. Физические компоненты. Цилиндрическая и сферическая системы координат.
7. Лагранжев и эйлеров подходы для описания движения сплошной среды и их эквивалентность. Закон движения.
8. Скорость и ускорение. Полная (субстанциональная), частная и конвективная производные по времени. Представление конвективной производной от скорости в форме Громеко – Лэмба.
9. Меры конечных деформаций. Тензоры деформаций Лагранжа и Альманзи.
10. Тензор бесконечно малых деформаций. Формулы Коши. Тензор и вектор вращения.
11. Формулы Чезаро. Уравнения совместности деформаций.
12. Физический смысл компонент тензора малых деформаций.
13. Понятия потока векторного поля через поверхность и циркуляции вдоль кривой. Формулы Стокса и Гаусса – Остроградского. Линии тока и траектории. Трубки тока и струи. Первая теорема Гельмгольца.
14. Тензор скоростей деформаций и физический смысл его компонент. Вихрь, вихревая линия, вихревая трубка. Вторая теорема Гельмгольца. Теорема Кельвина.
15. Распределение масс в сплошной среде. Правило дифференцирования по времени интеграла по подвижному объёму. Закон сохранения массы в интегральной и дифференциальной формах (I постулат МСС). Уравнение неразрывности. Условие несжимаемости.
16. Объёмные, массовые и поверхностные силы. Вектор напряжения на площадке. Нормальное и касательное напряжения на площадке. Тензор напряжений Коши.
17. Физический смысл компонент тензора напряжений. Главные напряжения. Главные площадки.
18. Закон сохранения количества движения в интегральной и дифференциальной формах (II постулат МСС). Уравнения движения.
19. Закон сохранения момента количества движения в интегральной и дифференциальной формах (III постулат МСС). Симметрия тензора напряжений.
20. Максимальные касательные напряжения и расположение площадок, на которых они реализуются. Главные касательные напряжения. Круги Мора.
21. Закон сохранения механической энергии в интегральной форме (теорема «живых сил»). Случаи потенциальности.
22. Вектор потока тепла. Массовые источники тепла. Изменение энергии за счёт притока тепла. Первый закон термодинамики в интегральной форме (IV постулат МСС). Удельная внутренняя энергия. Локальное уравнение энергии.
23. Закон Фурье. Тензор теплопроводности. Пары сопряжённых термодинамических параметров в МСС. Температура и энтропия. Второй закон термодинамики (V постулат МСС). Неубывание энтропии.
24. Единая форма записи пяти постулатов МСС.
25. Термодинамические функции состояния (свободная энергия Гельмгольца, свободная энергия Гиббса; энтальпия). Зависимые и независимые термодинамические параметры. Получение определяющих соотношений сплошной среды.
26. Физически линейные и нелинейные среды. Склерономные и реономные среды. Однородные и неоднородные среды. Композиты.
27. Упругое тело. Определяющие соотношения в линейной упругости. Материальные константы (тензор модулей упругости, тензор термомеханической связанности, теплоёмкость при постоянной деформации). Связанные и несвязанные среды.
28. Закон Гука для анизотропного упругого тела. Виды упругой симметрии. Ортотропия. Трансверсальная анизотропия.
29. Закон Гука для изотропного упругого тела. Постоянные Ламе. Технические постоянные. Модуль объёмного сжатия. Коэффициент теплового расширения. Физический смысл упругих постоянных и области их изменения. Обратная форма закона Гука.
30. Идеальная жидкость. Уравнения Эйлера. Уравнения движения в форме Громеки – Лэмба. Баротропная среда.
31. Гидростатика идеальной жидкости. Необходимые условия существования равновесия. Равновесие под действием потенциальных сил. Распределение давления в тяжёлой несжимаемой неоднородной жидкости.
32. Главный вектор и главный момент сил, действующих со стороны жидкости на погруженные в неё плоскую и замкнутую поверхности. Закон Архимеда.
33. Совершенный газ. Уравнение состояния. Постоянная Больцмана. Удельная газовая постоянная. Уравнение теплопроводности. Баротропный газ. Скорость звука в среде.
34. Задача о высоте равновесной политропной атмосферы.
35. Функция давления. Её вид в случаях несжимаемости, изотермического и адиабатического процессов. Замкнутые системы уравнений, включающие функцию давления.
36. Вязкая жидкость и вязкий газ. Объёмная и сдвиговая вязкости. Уравнения Навье – Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости. Зависимость динамической и кинематической вязкости от температуры.
37. Течение Пуазейля в трубе произвольного сечения. Постановка задачи Дирихле. Зависимость расхода от перепада давления.
38. Течение тяжёлого вязкого слоя вдоль наклонной плоскости. Зависимость расхода от толщины слоя.
39. Диффузия вихревого слоя в вязкой полуплоскости. Автомодельные переменные.
40. Размерности физических величин. Классы систем единиц измерения. Базис для обезразмеривания. Формулировка Пи-теоремы.
41. Примеры использования Пи-теоремы в задачах механики (период колебаний математического маятника; скорость распространения фронта сферической волны при сильном взрыве в атмосфере; сила, действующая со стороны потока вязкой жидкости на обтекаемую сферу).
42. Числа Рейнольдса, Фруда, Струхаля, Эйлера. Масштабное моделирование. Масштабно подобные явления. Задача о времени истечения тяжёлой вязкой жидкости из резервуара.
43. Неупругое поведение материалов. Характерные диаграммы «напряжение – деформация» для растяжения стержня. Нагрузка, разгрузка и остаточные деформации в стержне.
44. Критерии пластичности Мизеса – Генки и Треска – Кулона – Сен-Венана. Их геометрические интерпретации.
45. Определяющие соотношения теории малых упругопластических деформаций при активном нагружении и разгрузке. Универсальная кривая материала.
46. Вязкоупругие модели. Модели Фойгта и Максвелла. Ползучесть и релаксация. Интегральные определяющие соотношения в теории вязкоупругости.

Специальный курс по выбору кафедры

«**Механика деформируемого твёрдого тела**»

год, экзамен

Лектор: зав. каф., профессор, доктор физ.-мат. наук Д.В.Георгиевский

Основная часть курса посвящена постановкам и решению задач линейной теории упругости, включая задачу Кельвина, задачу Буссинеска – Черутти, контактную задачу Герца, задачи технической теории балок, пластин и оболочек, плоскую задачу, динамические проблемы, моделирующие распространение возмущений. В курсе также излагается теория малых упругопластических деформаций, теория вязкопластического течения.

**Программа курса**

1. Постановки задач теории упругости для изотропного тела. Три формулы Бетти. Теорема взаимности. Изменение объёма и линейных размеров тела под действием массовых и поверхностных сил.

2. Действие сосредоточенной силы в неограниченном упругом пространстве. Тензор перемещений Кельвина и его симметрия. Тензор напряжений Кельвина. Формула Сомильяны. Представление и вектор Галёркина. Решение задачи Кельвина. Выражение для компонент тензора перемещений Кельвина. Выражение для компонент тензора напряжений Кельвина.

3. Матрица источников. Двойная сила без момента. Центр дилатации. Двойная сила с моментом. Центр вращения. Решение для полуоси, состоящей из центров дилатации.

4. Задача Буссинеска. Задача Черутти.

5. Контактная задача Герца. Гипотезы. Математическая постановка задачи. Анализ размерностей. Решение задачи Герца. Случаи поверхностей вращения и взаимодействия упругого тела с жёсткой плоскостью. Задача о соударении упругих тел. Время соударения.

6. Техническая теория балок. Главные векторы силы и момента. Статические моменты инерции. Изгиб балки. Гипотеза плоских сечений. Упругая линия. Вывод уравнения изгиба балки с помощью вариационного принципа Лагранжа. Изгибная жёсткость балки. Распределённые нагрузки и сосредоточенные силы. Перерезывающие силы.

7. Растяжение стержня. Зоны краевого эффекта. Вертикальный стержень в поле силы тяжести. Задача о равнопрочных сечениях. Статически определимые и статически неопределимые системы. Нахождение реакций.

8. Кручение стержня. Гипотеза плоских сечений. Функция напряжений и краевая задача для неё. Формула Прандтля. Кинематика в задаче о кручении. Крутка. Жёсткость при кручении. Циркуляция касательных напряжений. Кручение стержня с неодносвязным сечением. Решение задачи в случае полого эллиптического сечения.

9. Теория пластин. Тензоры усилий и моментов. Вектор перерезывающих сил. Изгиб пластины. Кинематика деформирования. Срединная плоскость и прогиб. Гипотеза плоской нормали. Связь моментов и кривизн при изгибе пластины. Изгибная жёсткость пластины.

10. Вывод уравнения изгиба пластины (уравнения Софи Жермен) с помощью вариационного принципа Лагранжа. Кинематические граничные условия. Защемление пластины по контуру.

Специальный курс по выбору студента

«**Теория вязкоупругости**»

½ года, экзамен

Лектор: зав. каф., профессор, доктор физ.-мат. наук Д.В.Георгиевский

В курсе излагаются основы теории вязкоупругости, моделирующей реономное поведение деформируемых твёрдых материалов под нагрузкой. Определяются простейшие модели, состоящие из пружин и поршней, модели с интегральными определяющими соотношениями, описывающие ползучесть и релаксацию. Анализируются различного рода временные процессы, включая циклику и монотонные процессы.

**Программа курса**

1. Оператор дифференцирования по времени. Обратный оператор. Замена переменных. Интегрирование по частям. Функция Хевисайда. Дельта-функция Дирака.

2. «Наивные» модели. Пружинка и поршенёк. Их комбинации. Общий вид записи линейных определяющих соотношений в вязкоупругости. Ядра ползучести и релаксации разностного типа. Их взаимообратность. Функции ползучести и релаксации. Их взаимообратность и связь с ядрами ползучести и релаксации.

3. Модель Фойгта. Модель Максвелла. Трёхэлементные модели. Четырёхэлементное стандартное тело. Связные модели из M пружинок и N поршеньков. Дифференциальная и интегральная запись определяющих соотношений. Экспериментальное определение функций ползучести и релаксации.

4. Мгновенное и предельное поведение вязкоупругих тел. Линейность и нелинейность определяющих соотношений в вязкоупругости. Ступенчатый процесс напряжения. Обратная ползучесть.

5. Циклические процессы нагружения. Отставание деформаций по фазе. Установившиеся колебания. Комплексный модуль и комплексная податливость.

6. Операторы неразностного типа. Их взаимообратность. Стареющие материалы. Экспериментальное определение ядер неразностного типа. Инвариантность операторов относительно сдвига по времени. Коммутативность опреаторов.

7. Определяющие соотношения трёхмерной теории вязкоупругости. Операторный формализм. Оператор Пуассона. Оператор "жэ-бетта" Ильюшина и его свойства.

8. Постановки квазистатической и динамической задач для изотропной среды. Принцип Вольтерры. Расшифровка операторов. Примеры решения задач вязкоупругости на основе имеющихся решений задач теории упругости.

9. Метод аппроксимаций Ильюшина. Метод Победри численной реализации упругого решения. Преобразование Лапласа – Карсона и его свойства. Теорема о свёртке. Обратное преобразование.

10. Нелинейные теории вязкоупругости. Ядра релаксации n-ого порядка. N-кратные теории. Главная квазилинейная теория вязкоупругости. Главная квадратичная по девиаторам теория вязкоупругости. Условие взаимности.

11. Общее представление Победри нелинейных определяющих соотношений в вязкоупругости. Экспериментальное определение ядер. Трёхмерный случай.

12. Зависимость материальных функций от температуры и дозы облучения. Температурно-временная и радиационно-временная аналоги.