Программа вступительного экзамена в аспирантуру (отделение математики)

ОБЩАЯ ЧАСТЬ (только то, что относится к анализу):

1. Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теоремы о сжимающем отображении и вложенных шарах. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Непрерывность функции одной переменной. Свойства непрерывных функций на компактах. Определенный интеграл Римана. Критерий интегрируемости функции по Риману. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций. Формула Ньютона-Лейбница.

2. Функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций. Локальный экстремум функции многих переменных. Условный экстремум функции многих переменных. Метод множителей Лагранжа. Криволинейные интегралы первого и второго рода, формула Грина. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса в трехмерном пространстве.

3. Мера Лебега. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега и его основные свойства. Тригонометрические ряды Фурье. Условия сходимости в точке. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении тригонометрическими многочленами. Преобразование Фурье в $L_1(R)$. Гильбертовы пространства. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

4. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплексного переменного и конформные отображения. Дробно-линейные преобразования. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Область сходимости степенного ряда. Теорема Вейерштрасса о голоморфности суммы ряда из голоморфных функций. Принцип максимума модуля. Теорема единственности. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Теорема Коши о вычетах.

Дополнительные вопросы к программе вступительных экзаменов в аспирантуру по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
2. Абсолютно непрерывные и сингулярные функции, их связь с интегралом Лебега.
3. Банаховы пространства. Три принципа линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе).
4. Слабая сходимость. Теорема о слабой компактности шара в гильбертовом пространстве.
5. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах. Компактные операторы.
6. Спектр оператора. Простейшие свойства спектра. Теорема Гильберта-Шмидта о компактных самосопряженных операторах.
7. Преобразование Фурье в $L_2(R)$. Теорема Планшереля.
8. Обобщенные функции и действия над ними. Преобразование Фурье в S'.
9. Неравенства Коши, теорема Лиувилля, нули полиномов в C.
10. Принцип аргумента и теорема Руше.
11. Принцип симметрии Римана-Шварца.
12. Аналитическая функция в целом (по Вейерштрассу). Точки ветвления.
13. Аналитическое продолжение по гомотопным путям. Теорема о монодромии.
14. Модулярная функция и малая теорема Пикара.

Литература:

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.
2. Богачев В.И., Смолянов О.Г., Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва-Ижевск, РХД, 2009.
3. Гелбаум Б., Омстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
4. Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу. М., 2004.
5. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998, 2002.
6. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. В 2-х ч. Изд. 2-е. М.: Изд-во МГУ, 1985, 1987.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. М.: Наука, Физматлит. Ч. 1. 1982; Ч. 2. 1980.
8. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1981, 1989.
10. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М., 1978.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., 1984.
12. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
13. Ульянов П.Л. и др., Действительный анализ в задачах, М., Физматлит, 2005.
14. Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб: Лань, 2005.
15. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу, МЦНМО, 2004.
16. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т. 1. М., 1986.