Монотонная линейная связность и солнечность в задачах наилучшего приближения

А. Р. Алимов

Пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, – непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Кривая $k(\cdot)$ называется *монотонной*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$ (здесь и далее $\operatorname{ext} S^*$ – множество экстремальных точек сопряженной сферы S^*). Замкнутое подмножество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$. Пересечение $\mathrm{m}(M)$ всех замкнутых шаров, содержащих ограниченное множество M называется *оболочкой Банаха–Мазура*. Подмножество $M \subset X$ называется m-*связным* (*связным по Менгеру*), если $\mathrm{m}(\{x, y\}) \cap M \neq \{x, y\}$. Монотонно линейно связное множество необходимо m-связно. Напомним, что компакт Y называется *клеточноподобным* (R_δ-множеством), если существует абсолютный окрестностный ретракт Z и вложение $i : Y \to Z$ такое, что образ $i(Y)$ стягиваем в любой своей окрестности $U \subset Z$.

Множество $\varnothing \neq M \subset X$ называется солнцем, если для любого $x \notin M$ найдется ближайшая точка y из M для x, такая, что y является ближайшей точкой из M для всех точек луча $\{(1-\lambda)y + \lambda x \mid \lambda > 0\}$. Множество $\varnothing \neq M \subset X$ называется δ-*солнцем*, если для любой точки $x \notin M$ найдется последовательность $z_n \to x$ такая, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(z_n,M)-\rho(x,M)}{\|z_n - x\|} \to 1$ (здесь $\rho(\cdot, M)$ – функция расстояния до множества M). Всякое солнце является δ-солнцем. В банаховом пространстве класс δ-солнц совпадает с классом почти выпуклых множеств (т.е. таких множеств, что для любого непересекающегося с M замкнутого шара $B(x, r)$ найдется замкнутый шар $B(y, R) \supset B(x, r)$ сколь угодно большого радиуса R, также не пересекающийся с M). Множество $M \subset X$ называется *аппроксимативно компактным*, если каждая точка $x \in X$ является точкой аппроксимативной компактности, т.е. если из любой последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, удовлетворяющей соотношению $\|x - y_n\| \to \rho(x, M)$ можно выбрать сходящуюся к некоторой точке из M подпоследовательность.

Теорема 1. *Пусть X – банахово пространство и пусть множество $M \subset X$ замкнуто,* m*-связно и ограниченно компактно. Тогда M – монотонно линейно связно, пересечение M с любым замкнутым шаром клеточноподобно (и, в частности, ациклично относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) и является солнцем. Если X конечномерно, то пересечение M с любым замкнутым шаром стягиваемо и на него существует непрерывная ε-выборка для любого $\varepsilon > 0$.*

Теорема 2. *Ограниченно слабо компактное* m*-связное подмножество сепарабельного банахова пространства монотонно линейно связно.*

Теорема 3. *Аппроксимативно компактное* m*-связное подмножество банахова пространства является δ-солнцем.*

Теорема 4. *Множество экспоненциальных сумм с неотрицательными коэффициентами $E_n^+ := \left\{\sum_{j=1}^n \alpha_j e^{t_j x} \,\middle|\, \alpha_j \geqslant 0,\ t_j \in \mathbb{R}\right\}$ является чебышёвским солнцем в $C[a, b]$. На E_n^+ существует непрерывная аддитивная (мультипликативная) ε-выборка из оператора почти наилучшего ε-приближения для любого $\varepsilon > 0$.*