09.02.16

Интегральное исчисление функций одной переменной.

Глава 1. Неопределенный интеграл.

§1. Св-ва производных дифференцируемых функций.

Напоминание: $f \in D[a;b] \overset{def}{\Longleftrightarrow} (f \in D(a,b)) \wedge (\exists f'_+(a) \in \mathbb{R}) \wedge (\exists f'_-(b) \in \mathbb{R})$ $f'(a) := f'_+(a)$, $f'(b) := f'_-(b)$

ТЕОРЕМА 1 (о промежут. значениях произв-ой): $f \in D[a,b]$. Тогда $f'(a) \underset{(>)}{<} f'(b) \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall M \in (f'(a), f'(b))$ $(f'(b), f'(a))$ $\exists c \in (a,b) / f'(c) = M$.

▶ Не огранич. общн., $f'(a) < f'(b)$.

1) Частный случай: $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$.

Докажем, что $\exists c \in (a,b) / f'(c) = 0$.

Имеем: $f \in D[a,b] \Rightarrow f \in C[a,b] \overset{\text{II теор. Вейер.}}{\Longrightarrow} \exists c \in [a,b] / f(c) = \min\limits_{[a,b]} f$.

a) $c \neq a$. В самом деле, $\exists$ $c = a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ $\forall x \in [a,b]$. (1)

С другой стороны, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$ $\forall x \in (a, a+\delta)$

$f(x) - f(a) < 0$ $\forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow$ противор. (1).

b) $c \neq b$. В сам. деле, $\exists$ $c = b \Rightarrow f(x) \geq f(b)$ $\forall x \in [a,b]$. С другой стор., $f'(b) = \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ $\frac{f(b)-f(x)}{b-x} > 0$ $\forall x \in (b-\delta, b) \Rightarrow f(x) < f(b)$ – против.

c) Итак, $c \in (a,b)$. Тогда $f \in D(a,b)$, c – точка экстремума $\overset{\text{т. Ферма}}{\Longrightarrow} f'(c) = 0$

2) Общий случай: $f'(a) < f'(b)$. Рассм. вспом. ф-цию $g(x) := f(x) - Mx$.
$\exists M \in (f'(a), f'(b))$ - произв-но

Тогда $g \in D[a,b]$, $g'(x) = f'(x) - M \Rightarrow g'(a) < 0$, $g'(b) > 0 \overset{\text{п.1)}}{\Longrightarrow} \exists c \in (a,b) / g'(c) = f'(c) - M = 0 \Rightarrow f'(c) = M$ ◀

ЗАМЕЧ: $f \in D(a,b) \overset{\text{в.о.}}{\not\Rightarrow} f' \in C(a,b)$. Например, $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Тогда: $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cancel{x^2} \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}}$. $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f'(x)$

$x = 0$ $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$.

ЛЕММА: $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$, $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) := A \Rightarrow f'_+(a) = A$.
$(\exists \lim\limits_{x \to b-0} f'(x) := B \in \mathbb{R} \Rightarrow f'_-(b) = B.)$

▶ Услов. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $/ |f'(x) - A| < \varepsilon$, $\forall x \in (a, a+\delta)$. (2)

Далее, имеем: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_x)$ (т. Лагранжа), где $\xi_x \in (a,x)$, $x > a$

$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A\right| < \varepsilon$, $\forall x \in (a, a+\delta')$, т.к. $\xi_x \in (a, a+\delta')$ в силу (2). ◀

ЗАМЕЧ[1]: $f \in D[a,b] \overset{\text{в.п.}}{\not\Rightarrow} \exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$ (см. пред. пример)

2) Лемма верна и для $A(b) = \underset{(-)}{+}\infty$. А именно $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = \underset{(-)}{+}\infty$ $\Rightarrow f'_+(a) = \underset{(-)}{+}\infty$ Пример: $\sqrt{x}$

ПРИМЕР: $f(x) = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $f \in C[-1,1] \cap D(-1,1)$

Имеем $x \neq \underset{(-)}{+}1$, $f'(x) = \arcsin x \xrightarrow[x\to \underset{(-)}{+}1]{} \underset{(-)}{+}\frac{\pi}{2} \overset{\text{Лемма}}{\Rightarrow} f'_+(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $f'_-(+1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f \in D[a,b]$.

ТЕОРЕМА2: $f \in D(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $f' \notin C(x_0) \Rightarrow x_0$ – точка разрыва второго рода.

▶ От противного: x_0 – точка разр I-го рода $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) \overset{\text{ЛЕММА}}{=} f'_+(x_0) = f'(x_0)$,
$\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) \overset{\text{ЛЕММА}}{=} f'_-(x_0) = f'(x_0)$ $\Rightarrow f' \in C(x_0) \Rightarrow$ противоречие. ◀

СЛЕД-ИЕ: $f \in D(a,b) \Rightarrow f'$ может иметь на (a,b) разрывы только второго рода.

§2. Первообразная функции. Неопределенный интеграл.

Пункт 1. Первообразная функции.

ОПРЕД: Пусть $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Тогда ф-ия $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ – (точная) $\boxed{\text{первообразная}}$ ф-ии f на (a,b) $\overset{def}{\iff} (F \in D(a,b)) \wedge (F' = f$ на $(a,b))$.

ЗАМЕЧ: Опред $\Rightarrow dF = f dx$

ПР-РЫ:

1. $F(x) := x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + 1$
   $f(x) := \arcsin x$
   Тогда F – п/о-ая f на $(-1,1)$.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$
   Тогда $F(x) := \ln x$, $x>0$ – п/о-я f на $\mathbb{R}_+$
   $F_1(x) := \ln(-x)$, $x<0$ – п/о-ая f на $\mathbb{R}_-$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A \in \mathbb{R}, & x = 0 \end{cases}$
   $\nexists$ п/обр-ей F для f на $(-1,1)$, т.к. (см. замеч. к лемме) $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty \Rightarrow$ если $\exists F(x)$ на $(-1,1)$, то $F'(0) = +\infty$.

4. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$
   а) $F(x) = x + C_1$ – п/обр-я f на $\mathbb{R}_+$
   $\Phi(x) = -x + C_2$ – п/обр-я f на $\mathbb{R}_-$

ЗАМЕЧ-Я: ① Дальше будет доказано: $f \in C(a,b) \Rightarrow \exists$ п/обр-я F на (a,b).

② $f \notin C(a,b) \not\Rightarrow$ в.о. $\nexists$ п/обр-я F на (a,b)

③ Отыскание пер/обр-ой ф-ии f на (a,b) может быть интерпретировано как отыскание решения обыкновенного дифференциального ур-ия I рода $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$, где f - известная ф-ия $(F = ?)$

$f \in C(a,b) \Rightarrow \exists$ решение (1) (не единственно)

$\exists F$-реш., $F+C$-реш., $C \in \mathbb{R}$

12.02.16

ЛЕММА: Пусть $F \in D(a,b)$. Тогда $F \equiv const$ на $(a,b) \Leftrightarrow F' \equiv 0$ на (a,b).

▶ 1) $(\Rightarrow)$ $F \equiv const$ на $(a,b) \overset{очев.}{\Rightarrow} F' \equiv 0$ на (a,b)

2) $(\Leftarrow)$ Пусть $F' \equiv 0$ на (a,b). От противного: $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ / $F(x_1) \neq F(x_2)$ (*)

Имеем: $F(x_2) - F(x_1) = F'(x_1 + \Theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) = 0$; $\Theta \in (0,1) \Rightarrow F(x_2) = F(x_1) \Rightarrow$ противор-е (*) ◀

$(F \in C[x_1, x_2] \cap D(x_1, x_2))$

ТЕОРЕМА: Пусть $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, f имеет на (a,b) п/обр-ю $F_0: (a,b) \to \mathbb{R} \Rightarrow$ Мн-во всех п/обр-х ф-ий f на (a,b) есть мн-во $\{F_0(x) + C, x \in (a,b), C \in \mathbb{R}\}$.

▶ Обозн. $A := \{$мн-во всех п/обр-х f на $(a,b)\}$

$B := \{F_0(x) + C, x \in (a,b), C \in \mathbb{R}\}$

1) $A \subset B$: Пусть $F \in A \Rightarrow F' \equiv f$ на $(a,b) \Rightarrow (F_0 - F)' \equiv 0 \overset{ЛЕММА}{\Rightarrow} F_0 - F \equiv const = C$ на (a,b).

$F \equiv F_0 - C$ на (a,b)

2) $B \subset A$: Пусть $F \in B \Rightarrow F = F_0 + C \Rightarrow F' \equiv f$ на $(a,b) \Rightarrow F$ - п/обр f на $(a,b) \Rightarrow F \in A$ ◀

Задача: Точка движется по прямой со скоростью, заданной как функция времени $t \geq 0$: $v(t) = t^2$, $t > 0$. Положение в начальн. момент времени $s(0) = 0 \Rightarrow$ Найти положение точки в любой момент времени $t > 0$.

Математ. модель: Найти решение уравнения $s'(t) = t^2$, $t > 0$, (1) с начальным $(s(t), t > 0)$ условием $s(0) = 0$ (0)(2) — задача Коши для ОДУ (отыскание ф-ии s)

Решение: решение (1) есть мн-во ф-ий $s(t) = \frac{t^3}{3} + C$ (общее решение (1)).

Условие (2) $\Rightarrow s(0) = 0 + C \Rightarrow 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$ Ответ: $s(t) = \frac{t^3}{3}$.

Пункт 2. Неопределенный интеграл.

ОПР-ИЕ: Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ имеет на (a,b) п/обр-ую. Тогда $\boxed{\text{неопредел. интегралом}}$ от ф-ии f на (a,b) наз. мн-во всех п/обр-ых ф-ии f на (a,b). Обозн. $\int f(x)\,dx$.

ЗАМ-ИЯ: ① Пусть F – п/обр.-ая f на (a,b) $\Rightarrow \int f(x)dx = \{F(x)+C,\ x\in(a,b),\ C\in\mathbb{R}\} = F(x)+C$.

Например, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad n\neq -1$.

② Знак dx означает, что рассматр. ф-ия от $\underline{x}$.

Например, $\int zx^2dx = \frac{zx^3}{3}+C(z)$

$\int zx^2 dz = \frac{z^2}{2}\cdot x^2 + C(x)$.

③ $\exists \int f(x)dx \Leftrightarrow f$ имеет на (a,b) п/обр-ую.

Таблица неопред. $\int$-ов (примеры)

1) $\int\frac{dx}{x} = \begin{cases}\ln x + C_1, & x>0\\ \ln(-x)+C_2, & x<0\end{cases}$

2) $\alpha\neq -1$ $\quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}+C,\ x>0$

$\alpha\neq-1$, α такое, что определена ф-ия $x\in\mathbb{R}\to x^\alpha$ (напр., $\alpha=\frac{1}{3}, \alpha=n\in\mathbb{N}$)

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}+C,\ x\in\mathbb{R}$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,\ x\in(-1,1)$

ЗАМ-ИЕ: (элем. ф-ия)' = элем. ф-ия

$\int$ элем. ф-ия не всегда (в.г.)! элем. ф-ей

Например, $\int e^{x^2}dx$, $\int\frac{\sin x}{x}dx$ не берутся.

Обозначения: Пусть $A=\underbrace{\{f:(a,b)\to\mathbb{R}\}}_{\text{мн-во}}$, $B:=\underbrace{\{g:(a,b)\to\mathbb{R}\}}_{\text{мн-во}}$. Тогда $dA:=\{df:(a,b)\to\mathbb{R}\}$.

$\frac{dA}{dx} := \{f':(a,b)\to\mathbb{R}\}$. $\quad \alpha A+\beta B = \{\alpha f+\beta g\}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА (связь дифференцирования и интегрирования): Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, f имеет на (a,b) п/обр-ую $F:(a,b)\to\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ 1) $d\int f(x)dx = f(x)dx,\ x\in(a,b)$

2) $\int dF(x) := \int F'(x)dx = F(x)+C$.

▶ 1) Рассм. $\int f(x)dx := \int F'(x) = F(x)+C$. Тогда $d(F(x)+C) = f(x)dx$

2) $\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$ ◀

Сл-е: 1) $\Rightarrow \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),\ x\in(a,b)$.

Пункт 3. Основные свойства неопределённого интеграла.

ТЕОРЕМА 1 (линейность неопред. интегр.): $\exists f:(a,b)\to\mathbb{R},\ g:(a,b)\to\mathbb{R},\ \exists\int f dx,$
$\exists\int g dx \Rightarrow \exists\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx,\ x\in(a,b),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$ (1)

▶ Положим $\underset{\text{(произв.)}}{F(x)}$ – п/обр. $f(x)$, $\underset{\text{(произв.)}}{G(x)}$ – п/обр. $g(x)$, $x\in(a,b)$.

$H(x) := \alpha F(x) + \beta G(x),\ x\in(a,b)$. Имеем: а) $H'(x) = \alpha f(x)+\beta g(x),\ x\in(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \{H(x)+C,\ x\in(a,b),\ C\in\mathbb{R}\}$

б) С другой стороны, (правая часть (1)) $= \{\alpha\cdot(F(x)+C_1)+\beta(G(x)+C_2),\ C_1, C_2\in\mathbb{R}\} =$
$= \{\alpha F(x)+\beta G(x) + C,\ C\in\mathbb{R}\} = H(x)+C,\ C\in\mathbb{R} \overset{\text{см. а) д-ва}}{\Longrightarrow}$ правая часть (1) $= \int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx =$
$=$ (левая часть (1)). ◀

ТЕОРЕМА 2 (интегрирование по частям): $\exists\ u, v:(a,b)\to\mathbb{R},\ u,v\in D(a,b),$
$\exists\int u'(x)v(x)dx,\ x\in(a,b) \Rightarrow \exists\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\quad x\in(a,b)$ (2)

▶ $\frac{d}{dx}$(правая часть (2)) $= u'(x)v(x) + u(x)\cdot v'(x) \underset{\text{см. Т.1 а), сл-е}}{-} u'(x)v(x) = \underset{\text{есть п/обр}}{u(x)v'(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\int u(x)v'(x)dx =$ (правая часть (2)), $x\in(a,b)$ ◀.

ЗАМ-ИЕ: (2) пишут в виде $\int u\,dv := \int u(x)\boxed{v'(x)dx} = uv - \underbrace{\int v\,du}_{:=\int v(x)u'(x)dx}$

ПР-Р: $\int \ln x\,dx = \int \ln x\cdot \underset{\frac{d}{dx}x}{1}\,dx = x\cdot\ln x - \underset{\int dx = x+C}{\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx} = x(\ln x - 1) + C.$

16.02.16.

Напоминание: (дифференцирование композиции):

$\left.\begin{matrix}\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b), & F:(a,b)\to\mathbb{R}.\\ \varphi\in D(\alpha,\beta) & F\in D(a,b).\end{matrix}\right\} \Rightarrow F\circ\varphi\in D(\alpha,\beta)$, причём $\frac{d}{dt}(F\circ\varphi)(t) =$
$= F'(\varphi(t))\,\varphi'(t),\ t\in(\alpha,\beta).$

ТЕОРЕМА 3 (замена переменной в неопределенном интеграле):

$\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.

$\varphi\in D(\alpha,\beta)$, $\exists \int f(x)\,dx = F(x)+C,\ x\in(a,b)$ (3) $\Longrightarrow \exists\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C$,

(т.е. f имеет на (a,b) п/обр-ую $F:(a,b)\to\mathbb{R}$). $t\in(\alpha,\beta), C\in\mathbb{R}$ (4).

▶ Дифференц. правую часть (4): $(\text{прав. часть (4)})'_t = \underbrace{F'(\varphi(t))}_{\text{см. 3}}\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$= f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \Rightarrow$ (4) ◀

ЗАМ-ИЯ: 1) Обозначим $\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) := \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \Rightarrow$ ф-ла (4) принимает вид $\exists\int f(\varphi(t))dt = F(\varphi(t))+C,\ t\in(\alpha,\beta)$.

2) В теореме 3 не требуется $\exists\,\varphi^{-1}$.

ПРИМЕР: $I(x)=\int e^{x^2}x\,dx$

Положим $\varphi(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$, $f(y)=e^y, y\in\mathbb{R}$ $\overset{\text{ТЕОР.3}}{\Rightarrow} \exists\int f(x^2)\cdot\underbrace{2x}_{\varphi'(x)}\cdot dx =$

$\varphi\in D(\mathbb{R})$, $\exists\int f(y)dy = \int e^y dy = e^y + C, y\in\mathbb{R}$.

$=\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx = e^{x^2}+C \Rightarrow I(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C, x\in\mathbb{R}, C\in\mathbb{R}$.

На практике: $\int e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2}+C, x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\begin{array}{l} y=x^2 \\ dy=2x\,dx\end{array}}$

Или: $\int e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

ТЕОРЕМА 4 (замена переменной подстановкой):

$\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.

$\varphi\in C[\alpha,\beta]\cap D(\alpha,\beta)$, $\varphi'>0$ $(<)$, причем $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ (или $\varphi(\alpha)=b, \varphi(\beta)=a$)

и $\exists\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t)+C, t\in(\alpha,\beta)$ (5) $\Longrightarrow \exists\int f(x)dx = \Phi(\varphi^{-1}(x))+C$,

(сущ. первообразн. этой ф-ии) $x\in(a,b), C\in\mathbb{R}$

(6)

▶ Дифференцируем по x (правую часть (6)):

$(\text{правая часть (6)})'_t = \underbrace{\Phi'(\varphi^{-1}(x))}_{\text{см. (5)}}\cdot\frac{1}{\varphi'(\underbrace{\varphi^{-1}(x)}_{=t})} = f(x) \Rightarrow$ (6) ◀

ПР-Р: $F(x)=\int\sqrt{1-x^2}$; $x\in(-1,1)$.

Положим $\varphi(t)=\sin t$, $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\varphi:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}\,dx, x\in(-1,1)$

Имеем: $\varphi\in C[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\cap D(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\varphi'(t)=\cos t>0$ на $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ и $\exists\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=$

$=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

ТЕОРЕМА4 $\Longrightarrow$ $\exists\int f(x)dx=F(x)=\frac{1}{2}\left(\varphi^{-1}(x)+\frac{1}{2}\sin 2\varphi^{-1}(x)\right)=\frac{1}{2}\left[\arcsin x+x\cdot\sqrt{1-x^2}\right]+C,\ x\in(-1,1)$.

На практике: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos^2 t\,dt=\dots$

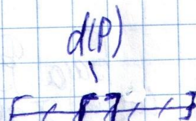
$\boxed{x\in(-1,1)\ \ x=\sin t,\ dx=\cos t\,dt,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$

Глава 2. Определенный интеграл.

§1. Определение интеграла Римана.

Пункт 1. Определение интеграла. Интегрируемость.

Рассматриваем отрезок $[a,b]$.



ОПРЕД-ИЕ1: • $\boxed{\text{Разбиением } P}$ отрезка $[a,b]$ называется множество $\{x_0,x_1,\dots,x_n\in[a,b]\ /\ a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$

• $\boxed{\text{Диаметром}}$ разбиения P называется число $d(P)=\max\limits_{k=\overline{1,n}} x_k-x_{k-1}$

• $\boxed{\text{Частичными отрезками}}$ разбиения P называются отрезки $[x_{k-1},x_k]$, $k=\overline{1,n}$.

Обозначение: $\Delta x_k:=x_k-x_{k-1}$, так что $d(P)=\max\limits_{k=\overline{1,n}}\Delta x_k$.

ОПРЕД-ИЕ2: Пусть P — разбиение отрезка $[a,b]$, см. Опред-ие 1.

$\forall k\in\{1,\dots,n\}$ фиксируем пр-но $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$. Обозначение $\xi:=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ "метки"

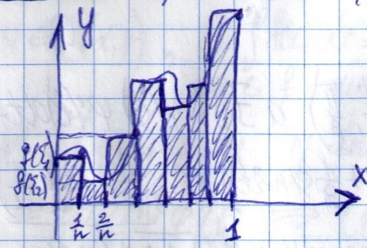
$\boxed{\text{Размеченным разбиением } (P,\xi)}$ называют разбиение P вместе с ("метками") ξ.

ОПРЕД-ИЕ3: Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (P,ξ) — размеченное разбиение отрезка $[a,b]$.

$\boxed{\text{Интегральной суммой}}$ ф-ии f, соответствующей размеченному разбиению

(P, ξ) называется число $\sigma(f; P, \xi) = \sigma(P, \xi) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

<u>ПРИМЕР</u>: 1) Пусть $f \in C[0,1]$, $f > 0$ на $(0,1)$.



$x_k = \frac{k}{n}$, $k = \overline{1,n}$

$\xi_k = x_k$, $k = \overline{1,n}$

$\sigma(P, \xi)$ = сумма площадей прямоугольников.

<u>ОПРЕД-ИЕ 4</u>: Число I называется $\boxed{\text{пределом интегральных сумм}}$ при $d(P) \to 0$, обозначается $I = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi)$, $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ |\sigma(P,\xi) - I| < \varepsilon$, $\forall (P,\xi)$ с $d(P) < \delta$.

Рассмотрим мн-во всех размеченных разбиений (P,ξ) отрезка $[a,b]$. Положим $B_\delta := \{(P,\xi)$ отрезка $[a,b]$ с $d(P) < \delta\}$, $\delta \in (0, b-a]$

$\mathcal{B} = \{B_\delta, \delta \in (0, b-a]\}$. Тогда $\mathcal{B}$ – база: 1) $B_\delta \neq \emptyset$ $\forall \delta \in (0, b-a]$

2) $\forall \delta_1, \delta_2 \in (0, b-a]$, $B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2} = B_{\delta_3}$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

База $\mathcal{B} := \{B_\delta;\ 0 < \delta \in [b-a]\}$, $B_\delta := \{(P,\xi) / d(P) < \delta\}$.

19.02.16 Иначе $I = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ ||\sigma(P,\xi) - I| < \varepsilon\ \forall (P,\xi) \in B_\delta$

Т.о. $\lim\limits_{d(P)\to 0}$ из Опр. 4 есть $\lim\limits_{\mathcal{B}} \ldots$, поэтому $\mathcal{B}$ наз. $\boxed{d(P) \to 0}$.

<u>ЗАМЕЧ-ИЕ</u>: $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi) =: I_1$, $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi) =: I_2 \Rightarrow I_1 = I_2 \Rightarrow$ Опр. 4 корректно.

lim по базе

<u>ОПРЕД-ИЕ 5</u>: Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

1) f называется $\boxed{\text{интегрируемой}}$ по Риману на $[a,b]$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists I := \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(f; P, \xi)$

2) Число I называется $\boxed{\text{интегралом}}$ Римана на $[a,b]$ от ф-ции f и обозначается $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

a (b) называется <u>нижним (верхним)</u> пределом интегрирования, f называется <u>подынтегральной ф-цией</u>

$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(y)\,dy$ – число, в то время как неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ – множество функций.

Обозначения: $R[a,b] = \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \,/\, f$ интегрируема на $[a,b]$ по Риману$\}$.

ТЕОРЕМА 1 (Критерий Коши существования $\int_a^b$): Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Тогда $f\in R[a,b]$ $\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \,/\, |\sigma(P^{(1)},\xi^{(1)}) - \sigma(P^{(2)},\xi^{(2)})| < \varepsilon,\ \forall (P^{(1)},\xi^{(1)}), (P^{(2)},\xi^{(2)}) \in B_\delta$.

▶ Критер. Коши $\exists \lim$ по базе ◀

ТЕОРЕМА 2: $f,g\in R[a,b] \Rightarrow \alpha f+\beta g\in R[a,b]\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, причем
$\int_a^b(\alpha f+\beta g)dx = \alpha\underbrace{\int_a^b f dx}_{=I_1} + \beta\underbrace{\int_a^b g dx}_{=I_2}$. предел по базе

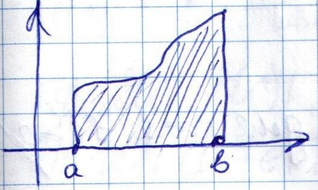
▶ $f\in R[a,b] \Rightarrow \exists I_1 = \lim\sigma(f,P,\xi)\in\mathbb{R} \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0 \,/\, |\sigma(f,P,\xi)-I_1|<\varepsilon\ \forall(P,\xi)\in B_{\delta_1}$

$g\in R[a,b] \Rightarrow \exists I_2 = \lim\sigma(g,P,\xi)\in\mathbb{R} \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0 \,/\, |\sigma(g,P,\xi)-I_2|<\varepsilon\ \forall(P,\xi)\in B_{\delta_2}$. Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \,/\, |\sigma(P,\xi)-(I_1+I_2)|<\varepsilon,\ \forall(P,\xi)\in B_\delta$, где $\sigma(P,\xi) = f+g \Rightarrow \exists I = \lim\limits_{d(P)\to0}\sigma(P,\xi) = I_1+I_2$

Т.к. интеграл линеен, то $\alpha\int_a^b f dx + \beta\int_a^b g dx = \int_a^b \alpha f dx + \int_a^b \beta g dx = \int_a^b(\alpha f+\beta g)dx$ ◀

ПРИМЕРЫ: 2) (См. пример 1)). Пусть $f\in C[a,b]$, $f>0$ на (a,b). Тогда можно определить $S_{\text{трапеции}} := \int_a^b f(x)dx$.



3) $f(x) = const =: c,\ x\in[a,b) \Rightarrow \forall(P,\xi),\ \sigma(P,\xi) = c\underbrace{\sum_{k=1}^n\Delta x_k}_{b-a} = c(b-a)\ \left(= cx\Big|_a^b\right)$.

В частности, $\int_a^b dx = b-a$.

4) $f(x) = x,\ x\in[a,b]$. В этом случае интегральную сумму запишем в виде: $\sigma(P,\xi) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{x_k+x_{k-1}}{2}\Delta x_k}_{\frac{x_k^2-x_{k-1}^2}{2}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n\left(\xi_k - \frac{x_k+x_{k-1}}{2}\right)\Delta x_k}_{=:A} = \frac{b^2-a^2}{2}+A$

x_{k-1} x_k

Но $\left|\xi - \frac{x_k+x_{k-1}}{2}\right| \le \frac{\Delta x_k}{2} \le d(P) \Rightarrow |A| \le d(b-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sigma(P,\xi) - \frac{b^2-a^2}{2}\right| \le d(P)\underbrace{const}_{b-a} \xrightarrow[d(P)\to0]{} 0 \Rightarrow \int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}\ \left(= \frac{x^2}{2}\Big|_a^b\right)$.

5) Ф-ия Дирихле: $f(x) = \begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$!

$\forall[a,b],\ f\notin R[a,b]$

▶ Пусть $[a,b]$ — какой-то отрезок. $\forall$ разбиения P отрезка $[a,b]$ выбираем две метки $\xi^{(1)} := (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)})$, где $\xi_k^{(1)} \in \mathbb{Q}$. Тогда: $\sigma(P, \xi^{(1)}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b-a$

$\xi^{(2)} := (\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)})$, где $\xi_k^{(2)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\sigma(P, \xi^{(2)}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$

В итоге: $\exists \varepsilon = \frac{b-a}{2} \;/\; \forall \delta > 0 \;\exists (P, \xi^{(1)}), (P, \xi^{(2)}) \in B_\delta$, такие что

$$|\sigma(P, \xi^{(1)}) - \sigma(P, \xi^{(2)})| \geq \varepsilon \overset{\text{критерий Коши}}{\Longrightarrow} f \notin \mathcal{R}[a,b] \;◀$$

Пункт 2. Необходимое условие интегрируемости.

Обозначение: $\underset{(\text{bounded})}{B}[a,b] := \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \;/\; f$ — ограничена на $[a,b] \}$.

ТЕОРЕМА (необходимое условие интегрируемости по Риману):

$f \in \mathcal{R}[a,b] \Longrightarrow f \in B[a,b]$

▶ От противного: $\exists f$ — неограничена на $[a,b]$.

1) Условие теоремы $\Longrightarrow \exists \int_a^b f(x)dx =: I = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(P, \xi) \Longrightarrow$ для $\varepsilon = 1 \;\exists \delta > 0 \;/$
$|\sigma(P, \xi) - I| < 1 \;\forall (P, \xi) \in B_\delta$.

Фиксируем произвольно разбиение $P^{(0)}$ с $d(P^{(0)}) < \delta$. Тогда $|\sigma(P^{(0)}, \xi)| < |I| + 1$, $\forall$ метки ξ, соответствующей $P^{(0)}$. (1)

2) f неограничена на $[a,b] \Longrightarrow \exists k_0 \in \{1, \dots, n\} \;/\; f$ неограничена на $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$
$(P^{(0)} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$

Теперь будем рассматривать метки, соответствующие разбиению $P^{(0)}$, следующего вида: $\xi = \xi(\tau) = (\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$, где $\xi_k = \begin{cases} x_k, & \text{если } k \neq k_0 \\ \tau, & \text{если } k = k_0,\; \tau \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}] \end{cases}$.

Соответствующую интегральную сумму запишем в виде:

$$\sigma(P^{(0)}, \xi(\tau)) = \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{n} f(x_k)\Delta x_k}_{=: \sigma^*(P^{(0)}) = \sigma^*} + f(\tau)\Delta x_{k_0} \quad (2)$$

Имеем: f неограничена на $[x_{k_0-1}, x_{k_0}] \Longrightarrow \forall C > 0 \;\exists \tau \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}] \;/$

$/\ |f(\tau)| > C \xRightarrow{\text{в частности}} \exists \tau_0 \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}] \ / \ |f(\tau_0)| > \dfrac{|I|+1+|\sigma^*|}{\Delta x_{k_0}}$.

Тогда из (2) $\Longrightarrow |\sigma(P^{(0)}, \xi(\tau_0))| \geq |f(\tau_0)|\Delta x_{k_0} - |\sigma^*| > |I|+1 \Longrightarrow$ противоречие (1) ◀

ЗАМЕЧАНИЕ: $f \in B[a,b] \overset{\text{в.г.}}{\not\Longrightarrow} f \in R[a,b]$ (функция Дирихле).
необходимое условие не является достаточным.

26.02.16

Пункт 3. Достаточное условие интегрируемости по Риману в терминах колебаний функции на частичных отрезках.

Разб-е P отр. $[a,b]$ – мн-во т-к $\{x_i \in [a,b], i=\overline{1,n} \ / \ a = x_0 = x_{1k} < \ldots < x_n = b\}$

ОПР.1 $\exists P$ – р-е $[a,b]$. Тогда р-е $\tilde{P}$ отр-а $[a,b]$ – $\boxed{\text{измельчение}}$ разбиения $P \overset{def}{\Longleftrightarrow}$
Мн-во $\tilde{P} = \{x_{1}, 1=\overline{0,m}\} \supset P = \{x_k, k=\overline{0,n}\}$

ОПР.2. $\exists f \in B[a,b]$. Тогда $\boxed{\text{колебанием}}$ f на $[a,b]$ наз. число $\omega(f; [a,b])$:
$\sup |f(x') - f(x'')|, \ x', x'' \in [a,b]$

ЗАМ-ИЯ: ① $f \in B[a,b] \Rightarrow \exists M > 0 \ / \ |f(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \omega(f, [a,b]) \leq 2M$.

② $f \in B[a,b] \Rightarrow \omega(f, [a,b]) = \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f$, где $\sup\limits_{[a,b]} (\inf\limits_{[a,b]}) f := \sup(\inf)(f[a,b])$.

▶ Положим $M := \sup\limits_{[a,b]} f$, $m := \inf\limits_{[a,b]} f$.

а) Докажем, что $\omega(f, [a,b]) \leq M - m$ (1):
$\overset{\text{имеем}}{-(M-m)} \leq f(x') - f(x'') \leq M - m \Longleftrightarrow |f(x') - f(x'')| \leq M - m, \ \forall x', x'' \in [a,b] \Rightarrow (1)$

б) Докажем, что: $\omega(f, [a,b]) \geq M - m$ (2).

Имеем: $\bullet \exists (x_n^{(1)} \in [a,b], n \in \mathbb{N}) \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(1)}) = M$

$\bullet \exists (x_n^{(2)} \in [a,b], n \in \mathbb{N}) \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(2)}) = m$.

Из определения колебания $\Rightarrow \omega(f; [a,b]) \geq |f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})|, \forall n \in \mathbb{N}. \Rightarrow$
↑ переходим к $\lim\limits_{n\to\infty}$

$\Rightarrow \omega(f, [a,b]) \geq |M - m| = M - m \Rightarrow (2)$ ◀

Рассмотрим базу $B^* := \{B^*_\delta, 0<\delta\le[b-a]\}$, где $B_\delta := \{P$ отрезка $[a,b]$ с $d(P)<\delta\}$.

ОПРЕД-ИЕ 3: $\exists f\in B[a,b]$, $\exists \Omega(f,P)=\Omega(P) := \sum_{k=1}^{n} \omega(f,[x_{k-1},x_k])\cdot\Delta x_k$.

Тогда $\lim_{d(P)\to 0}\Omega(P)=0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{B^*}\Omega(P)=0$ (т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 / \Omega(P)<\varepsilon\ \forall P$ с $d(P)<\delta$) $(P\in B^*_\delta)$

ЛЕММА: $f\in B[a,b]$, $\lim_{d(P)\to 0}\Omega(P)=0 \Rightarrow f\in R[a,b]$.

▶ а) $\exists P$ – произвольн. разбиение $[a,b]$, $\tilde P$ – произвольн. измельч. P. Тогда докажем, что: $|\sigma(P,\xi)-\sigma(\tilde P,\tilde\xi)|\le\Omega(P)$ (3)

Имеем: $|\sigma(P,\xi)-\sigma(\tilde P,\tilde\xi)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k} f(\xi_{kl})\underbrace{[x_{kl}-x_{k,l-1}]}_{=:\Delta x_{kl}}\right| =$ $\left(\underset{x_{k-1}\quad x_k}{|\cdots|}\right)$

$= \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}[f(\xi_k)-f(\xi_{kl})]\Delta x_{kl}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\underbrace{|f(\xi_k)-f(\xi_{kl})|}_{\le\omega(f;[x_{k-1},x_k])}\Delta x_{kl} \le$ $\qquad \Delta x_k=\sum_{l=1}^{m_k}\Delta x_{kl}$

$\le \sum_{k=1}^{n}\omega(f;[x_{k-1},x_k])\underbrace{\sum_{l=1}^{m_k}\Delta x_{kl}}_{=\Delta x_k} = \sum_{k=1}^{n}\omega(f,[x_{k-1},x_k])\Delta x_k = \Omega(P) \Rightarrow (3)$

б) Докажем, что $f\in R[a,b]$ (по Критерию Коши):

$\exists\varepsilon>0$ произвольно. Условие леммы $\Rightarrow \exists\delta>0 / \Omega(P)<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall P\in B^*_\delta$. (4) $(\forall P$ с $d(P)<\delta)$.

$\exists(P',\xi'), (P'',\xi'')\in B_\delta$, $\exists \tilde P = P'\cup P''$ – разбиение. Заметим, что $\tilde P$ – измельчение как P', так и P''.

Имеем: $|\sigma(P',\xi')-\sigma(P'',\xi'')| \le |\sigma(P',\xi')-\sigma(\tilde P,\tilde\xi)|+|\sigma(P'',\xi'')-\sigma(\tilde P,\tilde\xi)| \le \Omega(P')+$
$+\Omega(P'') \underset{\text{см.}(4)}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ◀ (см Крит. Коши).

ПРИМЕР: Ф-ия Римана $f(x) := \begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{если } x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},\ x=\frac{m}{n} \text{ – несократ.}\\ 0, & \text{если } x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\{0\}\end{cases}$

Докажем, что $f\in R[0,1]$:

а) Докажем, что $\forall a\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x)=0$ (5)

▶ $\exists a\in\mathbb{R}$ – произвольно, $\exists\varepsilon\in(0,1)$ произвольн., $\exists N\in\mathbb{N} / \frac{1}{N+1}<\varepsilon$.

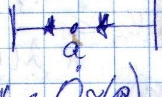
Рассмотр. отрезок $[a-1,a+1]$ и точки $x\in[a-1,a+1]$:

$\exists x=\frac{m}{n}\in[a-1,a+1]$

- $n\ge N+1 \Rightarrow f(x)=f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}\le\frac{1}{N+1}<\varepsilon$.
- $n\le N \Rightarrow f(x)=f\left(\frac{m}{n}\right)$, причем $\left|\frac{m}{n}\right|\le|a|+1$, откуда $\Rightarrow$

$(|m| \le (|a|+1)N) \wedge (n \le N) \Rightarrow f(x)$ может быть $\ge \varepsilon$ в конечном числе точек

$\{x: x_i, i=\overline{1,k}\}$ $(k \le N^2(|a|+1))$



Положим $\delta := \min\limits_{\substack{i=\overline{1,k} \\ x_i \ne a}} |a - x_i|$. Тогда $\forall x \in \mathring{O}_\delta(a)$ $0 \le f(x) < \varepsilon \Rightarrow (5)$.

б) п. а) $\Rightarrow f \in C(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cup\{0\})$

$f \notin C(\mathbb{Q}\setminus\{0\})$

в) Докажем, что $f \in R[0,1]$:

Сумму $\Omega(P)$ запишем в виде:

$$\Omega(P) = \sum_{\omega(\,)\le \frac{1}{M}} \underbrace{\omega(f;[x_{k-1},x_k])}_{\le \frac{1}{M}}\Delta x_k + \sum_{1>\omega(\,)>\frac{1}{M}} \omega(f;[x_{k-1},x_k])\Delta x_k,$$

(где $M>1$ будет выбрано ниже.

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно) $=: \Sigma' + \Sigma''$.

Рассмотр. Σ'': сумма Σ'' содержит только $[x_{k-1},x_k]$, которые включают в себя точки $x=\frac{m}{n}$ с $n<M$

(в самом деле, если $n \ge M \Rightarrow f(x) = f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n} \le \frac{1}{M}$). При этом $0<\frac{m}{n} \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (0<m\le M)\wedge(n<M) \Rightarrow$ всего точек $\frac{m}{n}$ с $n<M$ имеется $\le M^2$.

Итак, в Σ'' имеется $\le M^2$ слагаемых.

Пусть P — разбиение $[0,1]$ с $d(P)<\delta$. Тогда $\Omega(P) \le \Sigma' + \Sigma'' \le \frac{1}{M}\cdot 1 + M^2\cdot\delta < \varepsilon \Rightarrow$

Теперь выберем $M>1 \,/\, \frac{1}{M} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\delta>0 \,/\, M^2\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0}\Omega(P)=0$ ◄

Пункт 4. Классы интегрируемых функций. 01.03.16

ТЕОРЕМА 1: $f\in C[a,b] \Rightarrow f\in R[a,b]$

► $f\in C[a,b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно $\xRightarrow{f \text{ р/н на } [a,b]}$

$\Rightarrow \exists\delta>0 \,/\, |f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $\forall x',x''\in[a,b]$ с услов. $|x'-x''|<\delta$. (1)

] P - произвольн. разб-ие $[a,b]$ / $P \in B_\delta^*$.

Имеем $\Omega(P) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k])\Delta x_k \overset{\text{см.}(1)}{<} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Итак, $\lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0$

$\overset{\text{н.з (дост. услов.)}}{\Longrightarrow}$ $f \in R[a,b]$. ◀

ТЕОРЕМА 2: $f \in C([a,b]\setminus\{x_1, \dots, x_m\}) \cap B[a,b] \Longrightarrow f \in R[a,b]$.

▶ Положим $\delta_0 := \frac{1}{2} \min\limits_{i,j=\overline{1,m},\ i\neq j} |x_i - x_j|$ и пусть $A := \bigcup\limits_{i=1}^{m} O_{\delta_0}(x_i)$.

Тогда f равномерно непрерывна на $A^* := [a,b]\setminus A$, т.к. A^* - объединение отрезков $A^* = \bigcup\limits_{l=1}^{s} \Delta l$, где Δl - отрезок, принадлеж. $[a,b] \Longrightarrow$] $\varepsilon > 0$ - произвольно. Тогда (f равномерн. непр. на A^*) $\exists \delta_1 > 0$ / $\omega(f; [x_{k-1}, x_k]) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $\forall$ отрезка $[x_{k-1}, x_k] \in A^*$, с $\Delta x_k < \delta_1$. (2)

] $\delta_2 := \min\left(\delta_0, \frac{1}{8Cm}\right)$,] $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, где $C := \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

] $P \in B_\delta^*$. Имеем $\Omega(P) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \cdot \Delta x_k = \sum\limits_{[x_{k-1}, x_k]\cap A = \varnothing} \omega(f; [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k +$

$+ \sum\limits_{[x_{k-1}, x_k]\cap A \neq \varnothing} \omega(f; [x_{k-1}, x_k]) \cdot \Delta x_k =: \sum' + \sum''$.

Оценим $\sum'$:

$$\sum' \underset{\text{см.}(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k}_{b-a} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим $\sum''$:

содержит конечное число слагаемых $\leq 2m \Longrightarrow \sum'' \leq 2m \cdot \overset{2C}{\omega(f, [a,b])} \cdot \delta \leq$

$\leq 4mC \cdot \frac{\varepsilon}{8mC} = \frac{\varepsilon}{2}$.

В итоге, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ / $\Omega(P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall P \in B_\delta^* \Longrightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ по достаточн. признаку, $f \in R[a,b]$ ◀

ТЕОРЕМА 3: $f \in M[a,b] \Longrightarrow f \in R[a,b]$.

Обозначения: $M[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ (f\uparrow) \vee (f\downarrow) \text{ на } [a,b]\}$

▶ $\forall [x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$, $\underbrace{\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = f(x_k) - f(x_{k-1}) \geq 0}_{(3)}$

Не ограничивая общности, считаем $f\uparrow$

Не ограничивая общности, считаем, $f(b) > f(a)$ (строго)

$\sqrt{}$ Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольно. Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

Имеем:

$$\Omega(P) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] \cdot \underbrace{\Delta x_k}_{<\delta} < \delta \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \delta [f(b) - f(a)] = \varepsilon, \forall P \in B_\delta^*.$$

f интегрируема по дост. признаку ◀

Пункт 5. Критерий интегрируемости по Лебегу.

ОПРЕДЕЛ-Е: Пусть $A \subset [a,b]$. Тогда мн-во A имеет (лебегову) меру нуль (обознач. $\boxed{\mu(A) = 0}$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ система интервалов $\{I_k\}$ / 1) $\{I_k\}$ не более чем счетная

2) $A \subset \bigcup_k I_k$, (т.е. A покрывается системой $\{I_k\}$).

3) $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|I_k|}_{:= \text{длина } I_k} < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В определении $\mu(A) = 0$ в качестве I_k можно брать отрезки.

ПРИМЕРЫ: ① Пусть $A = \{x_1, \dots, x_m\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольно. Положим $I_k := (x_k - \frac{\varepsilon}{3m}, x_k + \frac{\varepsilon}{3m})$, $k = \overline{1,m}$.

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_m$

Тогда 1) $\{I_k, k = \overline{1,m}\}$ - конечна

2) $A \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k$

3) $\sum_{k=1}^{m} \frac{2\varepsilon}{3m} < \varepsilon$

② Пусть $A = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольно.

Рассмотрим систему $\{I_k, k \in \mathbb{N}\}$, где $I_k := (x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}})$.

Тогда 1) $\{I_k\}$ - счетная

2) $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$

3) $\sum_{k=1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}) \longrightarrow \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\mu(A) = 0 \overset{в.о.}{\not\Rightarrow} A$ не более чем счетно. (см. Зорич, глава 6 §1, задача 2)

▶ ✗ ◀

ТЕОРЕМА 1: $f \in M[a,b] \Longrightarrow A := \{x \in [a,b] \,/\, f \notin C(x)\}$ - не более чем счетно.

▶ 1) A - конечно - все доказано.

2) A - бесконечно. Докажем, что A - счетно.

Не ограничивая общности, $f \uparrow$.

По теореме о точках разрыва монот. ф-ии $\Longrightarrow \forall x \in A, \exists f(x-0), \exists f(x+0)$,

причем $f(x+0) > f(x-0)$.
(т.к. $f \uparrow$ строго)

Рассмотрим отображение $F: x \in A \to (f(x-0), f(x+0)) \in B := \{ (f(x-0), f(x+0)), x \in A \}$.

Тогда F – сюръективно, F – инъективно, т.к. $(x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1-0), f(x_2+0)) \cap (f(x_2-0), f(x_2+0)) = \varnothing$.

Следовательно $A \underset{\uparrow \text{равномощно}}{\sim} B$.

$\forall x \in A$ выберем $q_x \in (f(x-0), f(x+0)) \cap \mathbb{Q}$.

Пусть $C := \{ q_x \in (f(x-0), f(x+0)) \cap \mathbb{Q}, x \in A \} \subset \mathbb{Q} \Longrightarrow C$ – счетно $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow B$ – счетно $\Longrightarrow A$ – счетно ◀

ТЕОРЕМА 2 (критерий Лебега интегрируемости ф-ии):

Пусть $f \in B[a,b]$. Тогда $f \in R[a,b] \Longleftrightarrow$ мн-во $\{ x \in [a,b] / f \notin C(x) \}$ имеет меру нуль. ▶ X ◀

04.03.16

Пусть $f \in B[a,b]$, $A := \{ x \in [a,b] / f \notin C(x) \}$. Тогда $f \in R[a,b] \Longleftrightarrow \mu(A) = 0$

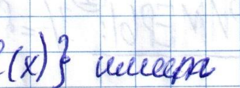
ПР-РЫ: 1) Т. 1-3 п.4 $\Longleftarrow$ Кр. Л.

2) Функция Римана интегрируема на $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

ЛЕММА: Пусть $[a,b] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} J_l$, где J_l – интервал, $\forall l = \overline{1,m} \Longrightarrow \sum\limits_{l=1}^{m} |J_l| > b - a$.

▶ Индукцией по числу m:

- $m = 1 \Longrightarrow [a,b] \subset (\alpha, \beta) \Longrightarrow |(\alpha, \beta)| > b - a$
- Предположим, лемма верна для некоторого $m \geqslant 1$.



- Пусть $[a,b] \subset \bigcup\limits_{l=1}^{m+1} J_l \subset \bigcup\limits_{l=1}^{m+1} J_l^*$, где $J_l^* = [\alpha_l, \beta_l]$, $J_l = (\alpha_l, \beta_l)$. Не ограничивая общности, считаем, что $a \in J_1 = (\alpha_1, \beta_1)$.

Тогда $\alpha_1' < a < \beta_1'$, где $\alpha_1 < \alpha_1' < a$, $a < \beta_1' < \beta_1$.

Рассм. отрезок $[\beta_1', b] \subset \bigcup\limits_{l=2}^{m+1} J_l$. Предположение индукции $\Longrightarrow \sum\limits_{l=2}^{m+1} |J_l| > b - \beta_1' \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sum\limits_{l=1}^{m+1} |J_l| > (b - \beta_1') + (\beta_1' - a) = b - a$ ◀ $\Longrightarrow$ покрывается с перекрытием.

ТЕОРЕМА 3: $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mu([a,b]) \neq 0$.

▶ От противного: $\mu([a,b]) = 0 \Rightarrow$ Для $\varepsilon = b-a$ $\exists$ система интервалов $\{I_k\}$ / 1) система $\{I_k\}$ не более чем счетная
2) $[a,b] \subset \sum_k I_k$
3) $\sum_k |I_k| < b-a \Longleftrightarrow \underbrace{\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}}_{\sup_n \sum_{k=1}^{n} |I_k|} |I_k| < b-a$.

Тогда: а) система $\{I_k\}$ — конечная, т.е. $k = \overline{1,m} \Rightarrow [a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k \xRightarrow{\text{ЛЕММА}} \sum_{k=1}^{m} |I_k| > b-a$
С другой стороны, $\sum_{k=1}^{m} |I_k| < b-a$ (см. 3) — противоречие.

б) система $\{I_k\}$ — счетная, т.е. $k \in \mathbb{N}$.

т.о. покрытие отрезка интервалами $\Rightarrow [a,b] \subset \bigcup_{l=1}^{m} \underbrace{I_{k(l)}}_{=J_l} = \bigcup_{l=1}^{m} J_l \Rightarrow \sum_{l=1}^{m} |J_l| > b-a \Rightarrow$
$\Rightarrow$ противоречие (см. а)). ◀

ПРИМЕР: $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — ф-ия Дирихле. Тогда $f \notin C(x), \forall x \in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{крит. Лебега}} \forall [a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \notin \mathcal{R}[a,b]$. (нарушен. услов. достаточн. условия интегриров.)

Пункт 6. Два критерия интегрирования ф-ии на отрезке.

ОПРЕД-ИЕ 1: $\exists f \in B[a,b]$, $P = \{x_k, k = \overline{0,m}\}$ — произвольн. разбиение $[a,b]$, $m_k := \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$, $M_k := \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$. Тогда числа $s(P) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ и $S(P) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ называются, соответственно $\boxed{\text{нижней и верхней суммой Дарбу.}}$

$\boxed{\omega(f; [x_{k-1}, x_k]) = M_k - m_k}$

ЗАМЕЧ-ИЕ: $\forall P \in B^*$, $\forall$ отметки (ξ) $\quad s(P) \leq \sigma(P, \xi) \leq S(P)$. (1)

ТЕОРЕМА 1: (Критерий Дарбу): $\exists f \in B[a,b]$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a,b] \Longleftrightarrow$
$(\exists \lim_{d(P)\to 0} s(P) = \lim_{B^*} s(P) =: I_s) \wedge (\exists \lim_{d(P)\to 0} S(P) = \lim_{B^*} S(P) =: I_S) \wedge (I_s = I_S)$.

▶ ① $(\Rightarrow)$ $\exists f \in \mathcal{R}[a,b]$. а) Докажем, что $\exists \lim_{d(P)\to 0} S(P) = I := \int_a^b f(x)dx$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Рассмотр. частичный подотрезок $[x_{k-1}, x_k]$:

$\forall k\ \exists \bar{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k] \,/\, f(\bar{\xi}_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \implies \forall P$ – разб-ие $[a,b]$, $S(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k <$

$< \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)\Delta x_k}_{\sigma(P,\bar{\xi}),\ \text{где}\ \bar{\xi}=(\bar{\xi}_1,\dots,\bar{\xi}_n)} + \frac{\varepsilon}{2} = \sigma(P,\bar{\xi}) + \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

С другой стороны (см. (1)), $\sigma(P,\bar{\xi}) \le S(P)\ \forall P$. (3)

Выберем $\delta > 0 \,/\, |\sigma(P,\bar{\xi}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall P \in B^*_\delta \iff I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(P,\bar{\xi}) < I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда, в силу (2) и (3) получим

$\underbrace{I - \frac{\varepsilon}{2}}_{< I-\varepsilon} < \sigma(P,\bar{\xi}) \overset{(\text{см}(3))}{\le} S(P) \overset{(\text{см}(2))}{<} \sigma(P,\bar{\xi}) + \frac{\varepsilon}{2} < I + \varepsilon \iff |S(P) - I| < \varepsilon\ \forall P \in B^*_\delta \implies$

в силу произв-ти ε $\exists \lim\limits_{B^*_\delta} S(P) = I$.

б) Докажем, что $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} s(P) = I$. (б = а)

② $\Leftarrow$ Пусть $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P) = \lim\limits_{d(P)\to 0} s(P) =: J$. Докажем, что $f \in R[a,b]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда

- $\exists \delta_1 > 0 \,/\, |S(P) - J| < \varepsilon, \forall P \in B^*_{\delta_1}$.
- $\exists \delta_2 > 0 \,/\, |s(P) - J| < \varepsilon, \forall P \in B^*_{\delta_2}$.

Пусть $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда (см. (1)):

$J - \varepsilon < s(P) \le \sigma(P,\xi) \le S(P) < J + \varepsilon,\ \forall (P,\xi) \in B_\delta \iff$

$\iff |\sigma(P,\xi) - J| < \varepsilon,\ \forall (P,\xi) \in B_\delta \iff \lim\limits_{B} \sigma(P,\xi) = J \iff \exists I := \int_a^b f dx = J$ ◀

! ЗАМ-ИЕ: $\exists f \in R[a,b] \implies I_s = I_S = I := \int_a^b f(x)dx$.

ТЕОРЕМА 2 (специальный признак интегрируемости по Риману на $[a,b]$):

$\rceil f \in B[a,b]$. Тогда $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(f;P) = 0$.

▶ ① $(\Rightarrow)$ $\rceil f \in R[a,b]$ $[S(P) - s(P)] = \sum\limits_{k=1}^{m} \underbrace{(M_k - m_k)}_{\omega(f;[x_{k-1},x_k])} \Delta x_k = \Omega(P)$

По Т1. $\Rightarrow \exists \lim [S(P) - s(P)] = 0$.

Следов-но, в силу (*), $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0$

② $(\Leftarrow)$ Доказано, см. п.3. ◀

! СЛ-ИЕ: ① $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$

▶ Заметим, что $\forall [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $||f(x')| - |f(x'')|| \le |f(x') - f(x'')| \le$ $\quad ||a|-|b|| \le |a-b|$

$\le \omega(f;[\alpha,\beta])$, $\forall x', x'' \in [\alpha,\beta] \Rightarrow \underbrace{\omega(|f|;[\alpha,\beta])}_{\sup} \le \omega(f;[\alpha,\beta])$.

Поэтому $\Omega(|f|,P) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(|f|,[x_{k-1},x_k])\Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f;[x_{k-1},x_k])\Delta x_k =$

$= \Omega(f,P) \underset{\text{т.к. } f \in R[a,b]}{\xrightarrow{T.2}} 0$, $d(P)\to 0$. $\Rightarrow \Omega(|f|,P) \to 0$, $d(P) \to 0 \xRightarrow{T.2} |f| \in R[a,b]$ ◀

! ЗАМЕЧ-ИЕ: $|f| \in R[a,b] \overset{\text{в.2.}}{\not\Rightarrow} f \in R[a,b]$.

Например, $f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ (не интегрируема по критерию Дарбу)

Тогда $f \notin R[a,b]$. (например, т.к. $S(P) = b-a$, $s(P) = -(b-a)$, но $|f| = 1 \in R[a,b]$

② $f \in R[a,b]$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b] \setminus \underbrace{\{x_1^*, \dots, x_m^*\}}_{\text{кон. число точек}} \Rightarrow g \in R[a,b]$,

причем $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$ (5)

▶ 1) Докажем, что $g \in R[a,b]$.

Имеем: $f \in R[a,b] \Rightarrow f \in B[a,b] \Rightarrow \sup\limits_{[a,b]} |f| < +\infty$.

Положим $M := \max\{\sup\limits_{[a,b]} |f|, |g(x_i^*)|, i = \overline{1,m}\}$. Тогда $|g(x)| \le M$, $\forall x \in [a,b]$.

Далее, $\rceil \varepsilon > 0$ произвольно. $f \in R[a,b] \xRightarrow{T.2} \exists \delta_1 > 0 \,/\, \Omega(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall P \in B^*_{\delta_1}$. (6)

Положим $\delta_2 := \frac{\varepsilon}{8mM}$, $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, $A := \{x_1^*, \dots, x_m^*\}$.

Представим $\Omega(g,P)$ в виде $\Omega(g;P) = \sum\limits_{[x_{k-1};x_k] \cap A = \varnothing} \omega(f;[x_{k-1},x_k]) \cdot \Delta x_k +$

$+ \sum\limits_{[x_{k-1},x_k] \cap A \neq \varnothing} \omega(g;[x_{k-1},x_k]) \cdot \Delta x_k =: \Sigma' + \Sigma''$

Оценим Σ' и Σ'' отдельно:

m-число точек

- $0 \le \Sigma' \le \Omega(f;P) \underset{\uparrow \text{сл.}(б)}{<} \frac{\varepsilon}{2}, \forall P \in B_\delta^*$

- $0 \le \Sigma'' \le 2M \cdot \delta \cdot 2m \le 4 \cdot Mm \cdot \frac{\varepsilon}{8Mm} = \frac{\varepsilon}{2}, \forall P \in B_\delta^* \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le \Omega(g;P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall P \in B_\delta^* \Rightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(g;P) = 0 \overset{\text{т.2.}}{\Rightarrow} g \in R[a,b]$

2) Докажем (5). Доказали, что $g \in R[a,b] \Rightarrow \exists \int\limits_a^b g(x)\,dx = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(g;P,\xi) =$

$= \lim\limits_{\substack{d(P)\to 0 \\ \xi_k \notin A}} \sigma(g;P,\xi) = \lim\limits_{\substack{d(P)\to 0 \\ \xi_k \notin A}} \sigma(f;P,\xi) \underset{\uparrow \text{т.к. } f \in R[a,b]}{=} \int\limits_a^b f(x)\,dx \Rightarrow (5)$ ◀

ЗАМЕЧ-ИЕ: В условиях следствия 2 утвержд. $g \in R[a,b]$ сразу вытекает из критерия Лебега.

§2. Свойства интеграла Римана.

Пункт 1. Линейность интеграла. Интегрирование произведения и частного.

ТЕОРЕМА 1 (линейность $\int$-ла): $f, g \in R[a,b] \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha f + \beta g \in R[a,b]$, причем $\int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x) + \beta \int\limits_a^b g(x)\,d(x)$.

▶ переход к lim в $\sigma()$ ◀

ЛЕММА 1: $f \in R[a,b] \Rightarrow f^2 \in R[a,b]$.

▶ Имеем $|f^2(x') - f^2(x'')| = \underbrace{|f(x') - f(x'')|}_{\omega(f;[\alpha,\beta])} \cdot \underbrace{|f(x') + f(x'')|}_{\le 2M} \le 2M \cdot \omega(f;[\alpha,\beta])$,

$\forall x', x'' \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $M := \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Следоват., $\Omega(f^2;P) \le 2M \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f,[x_{k-1},x_k])\,\Delta x_k \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0 \Rightarrow \Omega(f^2;P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0$

$\overset{\text{след. кр.}}{\Longrightarrow} f^2 \in R[a,b]$ ◀

Listoff

ТЕОРЕМА 2 (интегрируемость произведения): $f, g \in R[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow f\cdot g \in R[a,b]$.

▶ Имеем $f\cdot g = \frac{1}{4}\left[\underbrace{(f+g)^2}_{\substack{\in R[a,b] \\ \text{см. Т2, п.1}}} - (f-g)^2\right] \underset{\uparrow \text{Т.1}}{\in} R[a,b]$ ◀

ЛЕММА 2: $f \in R[a,b]$, $f(x) \geq m > 0$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \frac{1}{f} \in R[a,b]$.

▶ Имеем $\left|\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')}\right| \leq \frac{|f(x') - f(x'')|}{|f(x')|\cdot|f(x'')|} \leq \frac{1}{m^2}\omega(f;[\alpha,\beta]), \forall x', x'' \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$

$\Rightarrow 0 \leq \Omega(\frac{1}{f};P) \leq \frac{1}{m^2}\Omega(f,P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0 \Rightarrow \Omega(\frac{1}{f};P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0 \xRightarrow{\text{спец. крит.}}$

$\Rightarrow \frac{1}{f} \in R[a,b]$ ◀

ТЕОРЕМА 3 (интегрируемость частного): $f, g \in R[a,b]$, $g(x) \geq m > 0$ $\forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow \frac{f}{g} \in R[a,b]$

▶ ...

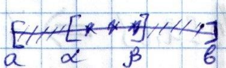
ОБОЗНАЧ: $]\ P_{[a,b]} :=$ разбиение отрезка $[a,b]$

$B^*_{\delta,[a,b]} := \{P_{[a,b]} / d(P_{[a,b]}) < \delta\}$

$B_{\delta,[a,b]} := \{(P_{[a,b]},\xi) / d(P_{[a,b]}) < \delta\}$.

ТЕОРЕМА 1: $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $f \in R[\alpha,\beta]$.

▶ $]\ \varepsilon > 0$ произвольно. Имеем $f \in R[a,b] \xRightarrow{\text{спец. крит.}} \exists \delta > 0 / 0 \leq \Omega(f;\tilde{P}_{[a,b]}) < \varepsilon$,
$\forall \tilde{P} \in B^*_{\delta,[a,b]}$.



Пусть $P \in B^*_{\delta,[\alpha,\beta]}$ ($P = \{x_0, \dots, x_n\}$) произвольно. Составим разб-е $\tilde{P} \in B^*_{\delta,[a,b]}$
добавлением точек $x_l \in [a,b] \setminus [\alpha,\beta]$. Тогда $\Omega(f;P) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\omega(f;[x_{k-1},x_k])}_{\text{отрезки на } [\alpha,\beta]} \Delta x_k \leq$
$\leq \Omega(f,\tilde{P}) < \varepsilon$, $\forall P \in B^*_{\delta,[\alpha,\beta]}$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и P, получаем:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \Omega(f;P) < \varepsilon\ \forall P \in B^*_{\delta,[\alpha,\beta]} \Rightarrow \Omega(f,P) \xrightarrow[\substack{d(P)\to 0 \\ B^*_{[\alpha,\beta]}}]{} 0 \xRightarrow{\text{спец. крит.}}$

$\Rightarrow f \in R[\alpha,\beta]$. ◀

ТЕОРЕМА 2: $\exists a<b<c$. Тогда $f\in R[a,c] \Longleftrightarrow (f\in R[a,b])\wedge(f\in R[b,c])$, причем
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

▶ ① $\Rightarrow$ $\exists f\in R[a,c] \overset{T1.}{\Longrightarrow} (f\in R[a,b])\wedge(f\in R[b,c])$. Докажем (1):
$\exists \varepsilon>0$ произвольно. Тогда

- $\exists \delta_1>0 \,/\, \left|\sigma(f;P',\xi')-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall(P',\xi')\in B_{\delta_1,[a,b]}$.
- $\exists \delta_2>0 \,/\, \left|\sigma(f;P'',\xi'')-\int_b^c f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall(P'',\xi'')\in B_{\delta_2,[b,c]}$.

$\exists \delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

Далее, рассмотрим $\underset{=\{x_0,\dots,x_n\}}{P}\in B^*_{\delta,[a,c]}$ со свойством:

$\exists k_0\in\{1,\dots,n-1\} \,/\, x_{k_0}=b$ (✱)

$[a \quad b \quad c]$

P индуцирует разбиение $P'\in B^*_{\delta,[a,b]}$, $P''\in B^*_{\delta,[b,c]} \,/\, P'=\{a=x_0,\dots,x_m=b\}$,
$P''=\{b=x_m,x_{m+1},\dots,c=x_n\}$. Тогда $|\sigma(f;P,\xi)-(\text{прав. часть }(1))|\le\left|\sigma(f;P',\xi')-\int_a^b f dx\right|+\left|\sigma(f;P'',\xi'')-\int_b^c f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, $\forall(P,\xi)\in B_{\delta,[a,c]}$ с условием (✱).

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{d(P)\to0\\ P \text{ с услов. } (✱)}}\sigma(f;P,\xi)=(\text{правая часть }(1))$.

Наконец, $\exists \int_a^c f(x)dx=\lim\limits_{d(P)\to0}\sigma(f;P,\xi)=\lim\limits_{\substack{d(P)\to0\\ \text{усл. } (✱)}}\sigma(f;P,\xi)=(\text{правая часть }(1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (1)$

② $\Leftarrow$ $\underbrace{f\in R[a,b]}_{f\in B[a,b]},\ \underbrace{f\in R[b,c]}_{f\in B[b,c]}$

a) $f\in B[a,c] \Rightarrow \exists M>0 \,/\, |f(x)|\le M\ \ \forall x\in[a,c]$

b) $\forall\varepsilon>0$

- $\exists\delta_1>0 \,/\, \sum\limits_{i=1}^{l}\omega(f;[x'_{i-1},x'_i])\cdot\Delta x'_i<\frac{\varepsilon}{3},\ \forall P'\in B^*_{\delta_1,[a,b]}$
- $\exists\delta_2>0 \,/\, \sum\limits_{j=1}^{m}\omega(f;[x''_{j-1},x''_j])\cdot\Delta x''_j<\frac{\varepsilon}{3},\ \forall P''\in B^*_{\delta_2,[b,c]}$

Положим $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\frac{\varepsilon}{12M})$

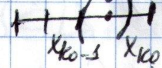
c) Рассм. произвольн. разб-ие $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)\in B^*_{\delta,[a,c]}$.

• Если $\exists k_0 \in \{1,\dots,n-1\} / b = x_{k_0}$.

Тогда $0 \le \Omega(f;P) = \underbrace{\sum_{k=1}^{k_0} \omega(f,[x_{k-1},x_k])\cdot \Delta x_k}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{b} \omega(f,[x_{k-1},x_k])\Delta x_k}_{<\frac{\varepsilon}{3}} <$

$< \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

• Если $\exists k_0 \in \{1,\dots,n\} / b \in (x_{k_0-1}, x_{k_0})$,



то полагаем $0 \le \Omega(f;P) = \left\{\sum_{k=1}^{k_0-1} \omega(f,[x_{k-1},x_k])\Delta x_k + \omega(f;[x_{k_0-1},b])(b-x_{k_0-1})\right\}$

$+\left\{\sum_{k=k_0+1}^{n} \omega(f;[x_{k-1},x_k])\Delta x_k + \omega(f;[b,x_{k_0}])(x_{k_0}-b)\right\}$ +

$+\left\{\omega(f;[x_{k_0-1},x_{k_0}])\Delta x_{k_0} - \omega(f;[x_{k_0-1},b])(b-x_{k_0-1}) - \omega(f,[b,x_{k_0}])(x_{k_0}-b)\right\} =$

$= \{\ \} + \{\ \} + \{\ \} =: A_1 + A_2 + A_3$

Имеем:

$0 \le A_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, $0 \le A_2 < \frac{\varepsilon}{3}$, $|A_3| \le 2M\cdot\delta + 2M\cdot\delta = 4M\cdot\delta < 4M\cdot\frac{\varepsilon}{12M} < \frac{\varepsilon}{3}$

Итак, $\forall P \in B^{*}_{\delta,[a,c]}$ $\quad 0 \le \Omega(f;P) < \varepsilon$ ◀

ПРИМЕР: $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in [-1,1] \Rightarrow \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} \operatorname{sgn} x\,dx}_{-1} + \underbrace{\int_{0}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx}_{1} = 0$

ОПРЕД-ИЕ: 1) $f \in R[a,b]$. Тогда $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

2) $\exists f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X$. Тогда $\int_a^a f(x)\,dx := 0$.

ТЕОРЕМА 2': $\exists f \in R[A,B]$, и $a,b,c \in [A,B]$. Тогда $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

▶ $\exists x_1 < x_2 < x_3$. Рассмотр. варианты:

	x_1	x_2	x_3
(1)	a	b	c
(2)	a	c	b
	b	a	c
	b	c	a
	c	a	b
	c	b	a

(1) случай – ТЕОРЕМА 2

Достаточно рассм. (2).

Имеем (см. ТЕОР. 2): $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx =$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ ◀

Пункт 3. Интегрирование и неравенства.

ЛЕММА 1: $f \in R[a,b]$, $m = f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

▶ $\forall$ разбиения (P,ξ) отрезка $[a,b]$ (т.е. $(P,\xi) \in B_\delta$ для некоторого $\delta \in (0, b-a)$) имеем:

$$m(b-a) \le \sigma(P,\xi) = \sum_1^n \overbrace{\underbrace{f(\xi_k)}_{\le M}}^{\ge m} \Delta x_k \le M(b-a).$$

Переходим к $\lim_{\mathcal{B}}$ по базе $\mathcal{B}$ $(d(P) \to 0)$ в этих нер-вах:

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ ◀

СЛЕД-ИЕ: $f \in R[a,b]$, $f \ge 0$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$.

ТЕОРЕМА 1: $f, g \in R[a,b]$, $f \le g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

▶ лемма 1

СЛЕДСТВ: $f \in R[a,b] \Rightarrow$ 1) $|f| \in R[a,b]$

2) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ (1).

▶ 1) доказано ранее.

2) Имеем: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow (1)$ ◀

ЛЕММА 2: $f \in R[a,b]$, $f > 0$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$.

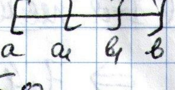
▶ Заметим, что из леммы 1 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$. Предположим, что $\int_a^b f(x)dx = 0$. Т.к. $f \in R[a,b]$, то $S(f;[a,b]) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \xrightarrow{d(P)\to 0} 0$,

где $M_k := \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$.

1) Для $\varepsilon = b-a$ $\exists$ разбиение $B^{(1)} = (x_0^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ отрезка $[a,b]$ / $0 < \sum_1^n M_k^{(1)} \cdot \Delta x_k^{(1)} < b-a \Rightarrow \exists k_0 \in \{1, \dots, n\} / M_{k_0}^1 < 1$.

(иначе $\forall k=\overline{1,n}$, $M_k^{(1)} \geq 1 \Rightarrow \sum_1^n M_k^{(1)} \Delta x_k^{(1)} \geq b-a$).

Положим $[a_1,b_1]=[x_{k_0-1},x_{k_0}]$ и $M_1 := \sup\limits_{[a_1,b_1]} f$.



Далее, имеем $\underset{(\text{по лемме 1})}{0 \leq} \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{=0} - \underbrace{\int_a^{a_1} f(x)dx}_{\geq 0} - \underbrace{\int_{b_1}^b f(x)dx}_{\geq 0} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = 0 \xRightarrow[\text{предыдущие шаги}]{\text{повторяем}} \exists [a_2,b_2] \subset [a_1,b_1] \,/\, M_2 := \sup\limits_{[a_2,b_2]} f < \frac{1}{2}$.

....

В итоге, получаем систему вложенных отрезков $[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N} \,/\, M_n < \frac{1}{n}$.

Тогда, по лемме о вложенных отрезках, $\Rightarrow \exists c \in [a_n,b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Имеем $0 \underset{\text{усл. 1.2}}{<} f(c) \leq \sup\limits_{[a_n,b_n]} f = M_n < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}$

$\Rightarrow 0 < f(c) \leq 0 \Rightarrow 0<0 \Rightarrow$ противоречие ◀

ТЕОРЕМА 2: $f,g \in R[a,b]$, $f>g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

СЛ-ИЯ: ① $f \in C[a,b]$, $f \geq 0$ на $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ на $[a,b]$.

▶ Достаточно док-ть, $f \equiv 0$ на (a,b) (по непрерывности и на концах).

От противного: $\exists x_0 \in (a,b) \,/\, f(x_0) \neq 0$. Не ограничивая общн., $f(x_0) > 0 \Rightarrow$ $\exists [\alpha,\beta] \subset [a,b] \,/\, f(x) > 0$ на $[\alpha,\beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^\alpha f(x)dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_\alpha^\beta f(x)dx}_{>0} + \underbrace{\int_\beta^b f(x)dx}_{\geq 0} > 0 \Rightarrow$ противоречие ◀

② $f \in C[a,b]$, $\forall [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ на $[a,b]$.

▶ ...

Пункт 4. Теоремы о среднем.

ТЕОРЕМА 1 (I-я теорема о среднем): $f, g \in R[a,b]$, $g \geq (\leq) 0$ на $[a,b]$, $m := \inf\limits_{[a,b]} f$, $M := \sup\limits_{[a,b]} f$ $\Rightarrow \exists \mu \,/\, m \leq \mu \leq M$ $\underbrace{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx}$ (1).

▶ Не ограничивая общн., $g \geq 0$ на $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b g(x)\,dx \geq 0$.

Рассм. 2 случая:

1) $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$. Тогда $0 \leq \left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b \underbrace{|f(x)|}_{C,\ т.к.\ |f(x)| \in B[a,b]} \cdot g(x)\,dx \leq C \cdot \underbrace{\int\limits_a^b g(x)\,dx}_{0} =$

$= 0 \Rightarrow \overset{0=0}{(1)}$

2) $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$. Т.к. $g \geq 0$ на $[a,b]$, то $m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \overset{dx}{\leq} M g(x)$, $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \underbrace{m \int\limits_a^b g(x)\,dx}_{>0} \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \underbrace{M \int\limits_a^b g(x)\,dx}_{>0} \Rightarrow m \leq \underbrace{\boxed{\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}}_{=:\mu} \leq M$.

Тогда: $m \leq \mu \leq M$, (1) верно ◀

СЛЕД-ИЯ: ① $\exists f$ удовлетв. услов. теор 1 ($g = 1$) $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$, где $m \leq \mu \leq M$

② $f \in C[a,b]$, $g \in R[a,b]$, $g \geq (\leq) 0$ на $[a,b]$ $\Rightarrow \exists c \in [a,b] \,/\, \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx =$
$= f(c) \cdot \int\limits_a^b g(x)\,dx$, (2) !!!

▶ Если $f \equiv const$ на $[a,b]$, то (2) очевидно.

Поэтому предположим, что $f \not\equiv const$ на $[a,b]$. Тогда

- $\exists x_1 \in [a,b] \,/\, f(x_1) = m := \min\limits_{[a,b]} f$
- $\exists x_2 \in [a,b] \,/\, f(x_2) = M := \max\limits_{[a,b]} f$

(II теорема Вейерштрасса)

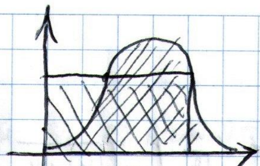
- $m < M$

По теореме 1, $\exists \mu \in [m, M] \,/\, \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Но $\exists c \in [a,b] \,/\, f(c) = \mu \Rightarrow (2)$ ◀

③ $f \in C[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] \,/\, \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

Геометрически :



ТЕОРЕМА 2: $f\in R[a,b]$, $g\uparrow(\downarrow)$ на $[a,b]$ $\Rightarrow \exists\, c\in[a,b] \,/\, \int\limits_a^b f(x)g(x)dx =$
$= g(a)\cdot\int\limits_a^c f(x)dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)dx.$

▶ Факультативно ◀

§3. Интеграл Римана как функция верхнего (нижнего) предела.

Пункт 1. Непрерывность интеграла по верхнему (нижнему) пределу

ОПРЕД-ИЕ: Пусть $f: X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Тогда f удовлетворяет $\boxed{\text{условию Липшица}}$ на X ($f\in Lip(X)$) $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists C>0,\ |f(x_1)-f(x_2)|\le C|x_1-x_2|,\ \forall x_1,x_2\in X$

ЗАМЕЧ-Я: ① $f\in C[a,b]\cap D(a,b)$, $f'\in B(a,b) \Rightarrow f\in Lip(a,b)$.

▶ $f'\in B(a,b)\Rightarrow \exists C>0 \,/\, |f'|\le C$ на (a,b).

Далее, по теореме Лагранжа, $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1\ne x_2$, $|f(x_1)-f(x_2)| = \underbrace{|f'(x_1+\theta(x_2-x_1))|}_{\le C}\cdot$
$\cdot|x_1-x_2|$, где $\theta\in(0,1)$ $\Rightarrow$ $|f(x_1)-f(x_2)|\le C|x_1-x_2|$ ◀

② $f\in Lip[a,b] \overset{в.ч.}{\not\Rightarrow} f\in D(a,b)$. Например, $f(x)=|x|,\ x\in[-1,1]$

Тогда $f\notin D(0)$. Однако $\big||x_1|-|x_2|\big|\le|x_1-x_2| \Rightarrow f\in Lip[-1,1]$.

ЛЕММА: $f\in Lip(X)\Rightarrow f$ – равномерно непрерывна на X.

▶ Имеем: $\exists C>0 \,/\, |f(x_1)-f(x_2)|\le C|x_1-x_2|,\ \forall x_1,x_2\in X$.

$\forall\varepsilon>0$ положим $\delta=\frac{\varepsilon}{2C}$. Тогда $|f(x_1)-f(x_2)|\le C\cdot\delta=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ с усл. $|x_1-x_2|<\delta$ ◀

ЗАМЕЧ-Е: f равномерно непрерывна на $X \overset{в.ч.}{\not\Rightarrow} f\in Lip(X)$. (услов. липшиц.) плохое – нет

Например, рассм. $f(x)=x^{\frac{1}{2}},\ x\in[0,1]$

① $\exists C>0 \,/\, |f(x_1)-f(x_2)|\le C|x_1-x_2|^{\frac{1}{2}}$. (2)

В самом деле, пусть $0\le x_1=:x<x+\Delta x=:x_2$.

• Если $x\le\Delta x$ ($x \quad x+\Delta x$) $\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|=|x^{\frac{1}{2}}-(x+\Delta x)^{\frac{1}{2}}|\le$

$\leq \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{\Delta x} + (\underbrace{x}_{\Delta x} + \Delta x)^{\frac{1}{2}} \leq (\Delta x)^{\frac{1}{2}}[1+\sqrt{2}]$

• Если $x > \Delta x$, то по теор. Лагранжа: $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = |\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}| = \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{(x+\Theta\Delta x)^{\frac{1}{2}}} <$ $\Theta \in (0,1)$

$< \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{x^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{2}(\Delta x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (2)$.

② Оценка (2) $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[0,1]$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \frac{\varepsilon^2}{4C^2} \ / \ |f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}} < C\delta^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}$ см(2)

③ Однако $f \notin Lip(X)$.

Докажем, что $\forall C \geq 1 \ \exists x_1, x_2 \in [0,1] \ / \ |f(x_1) - f(x_2)| > C|x_1 - x_2|$:

В самом деле, $\exists C \geq 1$ произвольно. Положим $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4C^2}$

Тогда $|f(x_1) - f(x_2)| = x_2^{\frac{1}{2}} = |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{x_2} = |x_1 - x_2| \cdot \frac{1}{x_2^{\frac{1}{2}}} = 2C > C|x_1 - x_2|$ ◀

Итак: $C[a,b] \not\supseteq Lip[a,b] \not\supseteq C^1[a,b]$.

ТЕОРЕМА 1: $f \in R[a,b]$, $\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt$, $\Psi(x) := \int_x^b f(t)dt$, $x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi \in Lip[a,b]$, $\Psi \in Lip[a,b]$.

▶ 1) Докажем, что $\Phi \in Lip[a,b]$. Усл. Т1 $\Rightarrow \exists C > 0 \ / \ |f(x)| \leq C$, $\forall x \in [a,b]$

Имеем: $|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| = \left|\int_a^{x_1} f(t)dt - \int_a^{x_2} f(t)dt\right| = \left|\int_{x_2}^{x_1} f(t)dt\right| \leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|dt \leq$

Не ограничив. общн. $x_2 < x_1$

$\leq C(x_1 - x_2) = C|x_1 - x_2| \Rightarrow \Phi \in Lip[a,b]$

2) Докажем, что $\Psi \in Lip[a,b]$. Услов. Т1 $\Rightarrow \exists C > 0 \ / \ |f(x)| \leq C$, $\forall x \in [a,b]$

Имеем: $|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)| = \left|\int_{x_1}^b f(t)dt - \int_{x_2}^b f(t)dt\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \leq$

$\leq C(x_1 - x_2) = C|x_1 - x_2| \Rightarrow \Psi \in Lip[a,b]$

СЛЕДСТ-Е: Услов ТЕОР. 1 $\Rightarrow \Phi, \Psi \in C[a,b]$.

ПРИМЕР: $f(x) := \operatorname{sgn} x$, $x \in [-1,1]$.

$F(x) = \int_{-1}^x \operatorname{sgn} t\, dt = \begin{cases} -1 \cdot (x+1), & x < 0 \\ \int_{-1}^0 \operatorname{sgn} t\, dt + \int_0^x \operatorname{sgn} t\, dt = -1 \cdot 1 + x \cdot 1 = -1 + x, & x > 0 \end{cases} = -1 + \operatorname{sgn} x \cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow F \in C[-1,1]$

Дифференцируема во всех точках, кроме 0.

Пункт 2. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу.

ТЕОРЕМА 1: $f \in R[a,b]$, $\exists x_0 \in (a,b) / f \in C(x_0)$, $\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt$, $\Psi(x) := \int_x^b f(t)dt$, $x \in [a,b]$

$\Rightarrow \Phi \in D(x_0)$, $\Psi(x) \in D(x_0)$, причем $\Phi'(x_0) = f(x_0)$, $\Psi'(x_0) = -f(x_0)$.

▶ ① Докажем, что $\exists \Phi'(x_0) = f(x_0)$. Имеем: $f \in C(x_0) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in O_\delta(x_0)$ (1).

Тогда $\left|\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\left[\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt\right| =$

$= \frac{1}{|x-x_0|} \cdot \left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right| \le \begin{cases} \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt, & x \ge x_0 \\ \frac{1}{|x-x_0|}\int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|dt, & x < x_0 \end{cases} \le$

$\le \frac{1}{|x-x_0|}|x-x_0| \cdot \varepsilon, \ \forall x \in \mathring{O}_\delta(x_0) \Rightarrow \exists \Phi'(x_0) = f(x_0)$

② Докажем, что $\exists \Psi'(x_0) = -f(x_0)$. Из (1): $\left|\frac{\Psi(x) - \Psi(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0} \cdot \right.$

$\left. \cdot \left[\int_x^b f(t)dt - \int_{x_0}^b f(t)dt\right] + \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_x^{x_0} f(t)dt + \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt\right| =$

$= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_x^{x_0} f(t)dt - \int_x^{x_0} f(x_0)dt\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_x^{x_0} (f(t) - f(x_0))dt\right| \le \frac{1}{x-x_0}\int_x^{x_0}|f(t) - f(x_0)|dt, x \ge x_0$

$\le \frac{1}{x-x_0}|x-x_0| \cdot \varepsilon, \forall x \in \mathring{O}_\delta(x_0) \Rightarrow \exists \Psi'(x_0) = -f(x_0)$ ◀

см. док-во Т.1

СЛЕД-ИЯ: ① Условие теор 1 с $x_0 = a \Rightarrow \exists \Phi'_+(a) = f(a)$, $\exists \Psi'_+(a) = -f(a)$.

② Условие теор. 1 с $x_0 = b \Rightarrow \exists \Phi'_-(b) = f(b)$, $\exists \Psi'_-(b) = -f(b)$

ПРИМЕРЫ: ① $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sin\frac{1}{t}\right)dt \overset{T.1}{\underset{x\ne0}{=}} \sin\frac{1}{x}, x \ne 0$

② $\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x} \sin\frac{1}{t}dt = \sin\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$!!

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

③ $\frac{d}{dx}\int_{x^{\frac{1}{2}}}^{x^{\frac{1}{3}}} e^{t^2}dt \underset{x>0}{=} \frac{d}{dx}\left(\int_{x^{\frac{1}{2}}}^0 e^{t^2}dt + \int_0^{x^{\frac{1}{3}}} e^{t^2}dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_0^{x^{\frac{1}{2}}} e^{t^2}dt + \int_0^{x^{\frac{1}{3}}} e^{t^2}dt\right) =$

$= -e^{x}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + e^{x^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$.

Т.1 $\Rightarrow$ <u>ТЕОРЕМА 2</u> (к шаге 2): $f\in C[a,b]$, $\Phi(x):=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow \Phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ является п/образной f на (a,b), причем $\Phi \underset{(T.1)}{\in} C[a,b]$

▶ ...

<u>ЗАМЕЧ</u>: Усл. Т.2 $\Rightarrow \Phi\in D[a,b]$

<u>ТЕОРЕМА 3</u> ! (к шагу 1): $f\in C(a,b) \Rightarrow f$ имеет на (a,b) п/образную.

▶ Рассм. ф-ию $F(x):=\int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(t)dt$, $x\in(a,b)$. Тогда $\forall x\in(a,b)\ \exists F'(x)=f(x)$. (см. теор. 1) ◀

$a \quad \frac{a+b}{2} \quad b$

§4. Формула Ньютона-Лейбница для интегрируемой функции.

Пункт 1. Теорема об интеграле для функции равной нулю почти всюду.

<u>ОПРЕД-Е</u>: $\exists f: A\to\mathbb{R}$. Тогда св-во (*) выполняется $\boxed{\text{почти всюду}}$ на $A \Leftrightarrow \mu(B)=0$, где $B:=\{x\in A \mid$ для x верно $]*\}$

<u>I.</u> (с обоснованием) $f\in R[a,b]$, $g(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]\setminus\{x_1,..,x_m\} \Rightarrow$ 1) $g\in R[a,b]$, 2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

<u>СЛ-ИЕ</u>: $f\in R[a,b]$, $f=0\ \forall x\in[a,b]\setminus\{x_1,..,x_m\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=0$

<u>ТЕОРЕМА</u>: $f\in R[a,b]$, $f(x)=0\ \forall x\in[a,b]\setminus A$, где $\mu(A)=0$ (т.е. $f\equiv 0$ почти всюду на $[a,b]$) $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=0$.

▶ (*) $\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{d(P)\to 0}\sum_{k=1}^n m_k\Delta x_k$, где $m_k:=\inf_{[x_{k-1},x_k]}|f|$. Но $\sum_{k=1}^n m_k\Delta x_k=0\ \forall P$ - разбиения отрезка $[a,b]$.

От противного: в самом деле, $\sum_{k=1}^n m_k\Delta x_k>0 \Rightarrow \exists k_0\in\{1,..,k\} / m_{k_0}>0$.

(*) $f\in R[a,b] \Rightarrow |f|\in R[a,b]$

$\Rightarrow |f(x)|>0$ на $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$, но $\mu[x_{k_0-1}, x_{k_0}] \neq 0$, и $[x_{k_0-1}, x_{k_0}] \subset A \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu(A) \neq 0 \Rightarrow$ противоречие с условием $\mu(A)=0$ ◀

СЛЕД-ИЕ: $f, g \in R[a,b]$, $f=g$ на $[a,b] \setminus A$, где $\mu(A)=0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

▶ ... переход к разности $f-g$

ПРИМЕР: Функция Римана $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x=\frac{m}{n} \text{ - несокр.} \in \mathbb{Q}\setminus\{0\} \\ 0, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \cup \{0\} \end{cases}$.

Тогда $f \in R[a,b]$, причем $f=0$ почти всюду на $[a,b]$. Мн-во рац. точек в пересечении с отрезком - счетно $\int_a^b f(x)dx = 0$

Пункт 2. Формула Ньютона - Лейбница.

ТЕОРЕМА 1: $f \in R[a,b]$, $\exists$ первообразная $\Phi(x)$ для f на (a,b), причем $\Phi \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(x)\Big|_a^b$. (1)

▶ Имеем: $\Phi(b)-\Phi(a) = \sum_{k=1}^{n} [\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})]$. (2)
для $\forall$ разб-ия $P = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

Но $\Phi \in D(x_{k-1}, x_k) \cap C[x_{k-1}, x_k] \xrightarrow{\text{т. Лагранжа}}$ (прав. часть (2)) $= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\Phi'(\xi_k)}_{f(\xi_k)} \Delta x_k \xrightarrow[d(P)\to 0]{}$
$\to \int_a^b f(t)dt \Rightarrow (1)$ ◀

ЗАМЕЧ-ИЯ: ① $f \in R[a,b] \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} \exists$ п/образная F для f на (a,b).
Например, ф-ия Римана $f(x)$ не имеет первообразной ни на каком интервале (a,b).

От противного: $\exists (a,b)$, $\exists F(x)$, $x \in (a,b)$ / F - п/образная для f на (a,b)

▶ Не ограничивая общности, можно считать, что $F \in C[a,b]$.
$(F' = f$ на $(a,b) \Rightarrow F \in D(a,b) \Rightarrow F \in C[a,b]) \xrightarrow{\text{ТЕОР. 1}} \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = 0$ $\forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow F(x) = F(a)$ на $[a,b] \Rightarrow f(x) = F'(x) = 0$ на (a,b). С другой стороны, $f \not\equiv 0$ на (a,b) (см. определение f) $\Rightarrow$ противоречие ◀

② f имеет на (a,b) первообразную F, причем $F \in C[a,b] \overset{\text{в.л.}}{\not\Rightarrow} f \in R[a,b]$

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad x \in [-1,1]$$

Тогда $F \in C[-1,1]$.

Имеем: • $x \neq 0$, $F'(x) = \underbrace{2x \cdot \sin\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - 2x^2 \cos\frac{1}{x^2} \ldots = \overbrace{\underbrace{2x \sin\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - \underbrace{2\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}}_{\text{не является огран. в } [-1,1]\setminus\{0\}}}^{=:\, f(x),\ x \neq 0}$

• $x = 0$ $\quad F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x^2} = 0 =: f(0)$

ПРИМЕР: $I := \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right]\right) dx =$

где $g(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right], & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Имеем: $g(x) = -\frac{1}{(1+2^{\frac{1}{x}})^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}}\left(+\frac{1}{x^2}\right) \cdot \ln 2$, $x \neq 0$

• $x > 0$ $\qquad |g(x)| \leq C \frac{2^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{2^{\frac{2}{x}}} = C \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to +0}{\longrightarrow} 0$

x стремится к $+0$

• $x < 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to -0} g(x) = \lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot C = 0$

Следовательно, $g \in C[-1,1]$.

$g \in R[-1,1]$, g имеет первообразную на $(-1,0)$ и на $(0,1)$.

Положим $F_1(x) := \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow F_1 \in C[-1,0]$.

$F_2(x) := \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow F_2 \in C[0,1] =$

$= \left[\text{По теореме 1 (ф. Н-Л)}\right] = \left(\int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}\right) g(x)\,dx = F_1(x)\Big|_{-1}^{-0} + F_2(x)\Big|_{+0}^{1} =$

$= \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

§5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пункт 1. Замена переменной.

Напоминание: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Тогда

1) $f\in D[a,b] \overset{def}{\Longleftrightarrow} (f\in D(a,b))\wedge(\exists f'_+(a))\wedge(\exists f'_-(b))$.

2) $f\in C^1[a,b] \overset{def}{\Longleftrightarrow} (f\in D[a,b])\wedge(f'\in C[a,b])$.

ТЕОРЕМА1: $\exists f\in C[a,b],\ \varphi\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b],\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, причем $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta \overbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}^{=:g(t)}dt$ (1).

▶ ① $f\in C[a,b] \overset{\text{см. т.2}}{\Longrightarrow} \exists$ п/образная F для f на $[a,b]$, причем $F\in C[a,b] \Rightarrow f\in R[a,b]$.

Следовательно, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ (ф-ла Н.-Л.).

② $g\in C[\alpha,\beta] \Rightarrow g\in R[\alpha,\beta]$. Рассм. ф-цию $\mathbb{G}(t):=(\varphi(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$

Имеем: $\mathbb{G}'(t)=g(t),\ t\in(\alpha,\beta)$. Причем $g\in C[\alpha,\beta]$, (т.к. $F\in C[a,b]$ (см. п.1)), $\varphi\in C[\alpha,\beta]$ (по теореме о композиции непрер. ф-ций).

Тогда, по ф. Н.-Л., $\int_\alpha^\beta g(t)dt=\mathbb{G}(t)\Big|_\alpha^\beta=F(\underbrace{\varphi(\beta)}_{b})-F(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{a})=F(b)-F(a)$.

$\Rightarrow$ (см. п.1) (1) ◀

ТЕОРЕМА2: $\exists f\in R[a,b],\ \varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b],\ \varphi\in D[a,b],\ \varphi'\in R[\alpha,\beta],\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, $\varphi\ M(\downarrow\downarrow)$ на $[\alpha,\beta] \Rightarrow (f\circ\varphi)\varphi'\in R[\alpha,\beta]$, причем $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

▶ ✗ ◀ Кам., стр. 238

ПРИМЕРЫ: ① $f\in R[-a,a],\ a>0$, f-нечетная $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx=0$

▶ Имеем: $\overset{\text{т.2}}{\int_{-a}^a} f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=:I_1+I_2$.

Рассм. I_1. Замена $\boxed{\begin{matrix}x=-t\\ dx=-dt\end{matrix}} \Rightarrow I_1=-\int_a^0 \underbrace{f(-t)}_{-f(t)}dt=-\int_0^a f(t)dt=-I_2$ ◀

② $f\in R[-a,a]$, f-четная $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

▶

③ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in R[0,T]$, f – периодична с периодом $T>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall a\in\mathbb{R}$, $\exists \int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$.

▶ ...

Пункт 2. Интегрирование по частям.

<u>ТЕОРЕМА 1 (интегрирование по частям)</u>: Пусть $u,v\in D[a,b]$, $v',u'\in R[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (1)$$

▶ $$(1) \Longleftrightarrow \int\limits_a^b \underbrace{\left\{\frac{d}{dx}[u(x)\cdot v(x)]\right\}}_{=:f(x)} dx = \underbrace{u(x)\cdot v(x)}_{=:\Phi(x)}\Big|_a^b \quad (2)$$

Имеем: $f\in R[a,b]$, Φ – п/образная f на (a,b), причем $\Phi\in C[a,b]$ $\xRightarrow{\text{ф-ла Н.-Л.}}$

<u>ЗАМЕЧ-ИЕ</u>: Ф-лу (1) пишут в виде $\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

$\Rightarrow$ (2) ◀

<u>Обозначение</u>: $0! = 1$

<u>ТЕОРЕМА 2 (Формула Тейлора с остаточным членом в $\int$-й форме)</u>:

Пусть $f\in D^{n+1}[a,b]$, $f^{(n+1)}\in R[a,b]$ $\Rightarrow \forall x_0\in(a,b)$, $f(x)=f(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k +$

$+ r_n(x)$, $x\in[a,b]$, где $r_n(x) := \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. (3)

▶ Индукцией по $n\in\mathbb{N}^* := \{0\}\cup\mathbb{N}$.

• $n=0$ $\quad (3) \Longleftrightarrow f(x)=f(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt \quad (4)$.

Но по условию $f'\in R[a,b]$, $f\in C[a,b]$ $\xRightarrow{\text{ф-ла Н.-Л.}}$ $\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt =$

$= f(x)-f(x_0) \Rightarrow (4)$

• Предположим, (3) верно для $n=m$, где $m\geq 0$ – некоторое число $\in\mathbb{N}^*$

Д-ем (3) для <u>$n=m+1$</u>

Условие теоремы $\Rightarrow f\in D^{m+2}[a,b]$, $f^{(m+2)}\in R[a,b]$ $\Rightarrow$

предп-е индукции

$\Rightarrow$ (3) для $n=m$:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^m}_{=:dv} \underbrace{f^{(m+1)}(t)}_{=:u}\, dt}_{=:r_m(x)} \qquad (4)$$

Имеем: интегрир-ем по частям в $r_m(x)$:

$$r_m(x) = \frac{1}{m!}\left\{ -\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1} \cdot f^{(m+1)}(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{m+1}}{m+1} \cdot f^{(m+2)}(t)\,dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} \cdot f^{(m+1)}(x_0) + r_{m+1}(x) \xRightarrow{\text{подставляем в (4)}}$$ получаем ф-лу (3) для $n=m+1$ ◀

ЗАМЕЧ-ИЕ: Пусть $f\in C^{n+1}[a,b] \xRightarrow{\text{Т.1 и Т. о среднем}} f(x) = \underbrace{P_n(x)}_{\text{полином Тейлора}} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)}_{r_n(x)}$,

(следств. 2)

где $r_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x} (x-t)^n\, dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

§6. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.

Пункт 1. Определение. Критерий Коши.

интегральные суммы ни при чём

ОПРЕДЕЛ-Е 1: Пусть $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f\in R[a,b]$, $\forall b>a$.

Тогда ① $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ (если этот $\lim \exists$ конечный);

② $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $\boxed{\text{сходится}}$ ($\boxed{\text{расходится}}$) $\overset{def}{\iff} \exists \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ($\nexists \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$);

③ $\boxed{f \text{ интегрируема (по Риману) в несобственном смысле на } (a,+\infty)}$ $\overset{def}{\iff} \exists \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

В этой теме f всегда интегрируема на всяком подотрезке.

ЗАМЕЧ-ИЯ: ① Пусть $f\geq 0$ на $(a,+\infty)$. Тогда $\exists\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \iff \boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty}$ (сходится).

② $\exists \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \forall c>a, \exists \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$, причем $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx\to 0$ при $c\to+\infty$.

▶ Имеем: $\forall b>c$, $\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx \xrightarrow[b\to+\infty]{} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$

$\Rightarrow \exists \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x) =: \int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Переходя к $\lim_{c\to+\infty}$, получим $\exists \lim_{c\to+\infty}\int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = 0$. ◀

! ПРИМЕР: $\int\limits_{1\,(a>0)}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ $\begin{cases} \text{сходится, если } \alpha>1 \\ \text{расходится, если } \alpha\le 1 \end{cases}$

▶ • $\alpha\ne 1$: $b>1$ $\int\limits_1^b x^{-\alpha}dx = \frac{1}{-\alpha+1}x^{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{1-\alpha}\cdot \frac{1}{b^{\alpha-1}} \to$

$\to \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1 \\ +\infty, & \alpha<1 \end{cases}$

• $\alpha=1$ $\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^b = \ln b \to +\infty,\ b\to b$

Суперпозиция интегрируемых функций (дополнение к предыдущ.)

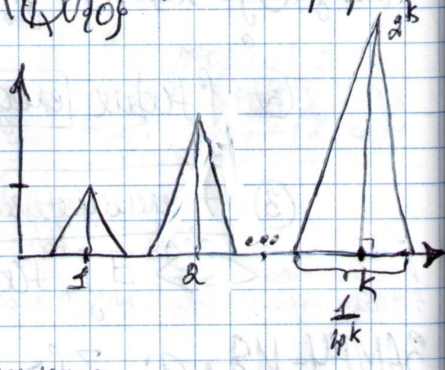
① $f\in R[a,b],\ g\in R[\alpha,\beta],\ g:[\alpha,\beta]\to[a,b] \overset{\text{в.с.}}{\not\Rightarrow} f\circ g\in R[\alpha,\beta]$

$f\in R[a,b],\ g\in C[\alpha,\beta],\ g:[\alpha,\beta]\to[a,b] \Rightarrow f\circ g\in R[\alpha,\beta]$ (Архип., Чеб., Саф.)

Например, $\underset{\text{ф-ция Римана}}{g(t)} := \begin{cases} \frac{1}{n}, & t=\frac{m}{n}\ (\text{несокр}) \in \mathbb{Q}\setminus\{0\} \\ 0, & t\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cup\{0\} \end{cases}$

• $f(x) = \operatorname{sgn} x \Rightarrow f(g(t)) = \begin{cases} 1, & t\in\mathbb{Q}\setminus\{0\} \\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cup\{0\} \end{cases}$ не интегр.

② $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f\in B[a,+\infty)$



▶ Например, ... Тогда $f\in C[0,b] \Rightarrow f\in R[0,b],$ $\forall b>a.$

$\exists\ F(x) := \int\limits_0^x f(t)dt.$

Тогда $\exists \int\limits_0^{+\infty} f(t)dt \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \Leftrightarrow F$ — ограничена.

$\forall x>0\ \exists n\in\mathbb{N} \,/\, 0\le F(x) \overset{\text{т.к. } F\uparrow}{\le} \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 2^k\cdot\frac{1}{4^k}}_{\text{площади } \Delta\text{-ов}} = \frac{1}{2}\ \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ ограничена ◀

ОПРЕД-ИЕ 2: 1) $\exists f\in R[a,b],\ \forall a<b.$ Тогда $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ (если этот предел существует)

2) ... (по аналогии)

ОПРЕД-ИЕ 3: Пусть $f \in R[a,b]$, $\forall a,b$, $b>a$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$
(если оба $\int$-ла справа существуют).

ТЕОРЕМА 1 (Критерий Коши): Пусть $f \in R[a,b]$, $\forall b>a$. Тогда $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists b>a \ / \ \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon, \ \forall b_1, b_2 > b$

▶ Пусть $F(b) := \int\limits_a^b f(x)dx$, $b>a$. Тогда $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{b\to+\infty} F(b) \in \mathbb{R} \xLongrightarrow{\text{Кр. Коши по } (b\to+\infty)}$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists b>0 \ / \ \underbrace{|F(b_1)-F(b_2)|}_{\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|} < \varepsilon, \ \forall b_1,b_2>b$ ◀

ОПРЕДЕЛ-Е 4: Пусть $f \in R[a,b]$, $\forall b>a$. Тогда ① f – $\boxed{\text{абсолютно интегрируема}}$ на $(a;+\infty) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

② Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ $\boxed{\text{сходится абсолютно}}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f абсолютно интегрируема на $(a;+\infty)$

③ Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ $\boxed{\text{сходится условно}}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right) \wedge$

$\wedge \left(\nexists \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx\right)$. св-во $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$ не переносится на ∞

ТЕОРЕМА 2: Пусть $f \in R[a,b]$, $\forall b>a$, $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx < \infty$ (сходится для пол. ф-ций) $\Longrightarrow \exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (интеграл сходится)

▶ $\exists \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx \xLongrightarrow{T.1} \forall \varepsilon>0 \ \exists b>a \ / \ \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon$, но не $<\infty$ $\forall b_1,b_2>b \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \le \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon, \ \forall b_1,b_2>b \xLongrightarrow{T.1} \exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ◀

! **ЗАМЕЧ-Я**: ① Условие Т.2 $\Longrightarrow \left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$

▶ К $\lim\limits_{b\to+\infty}$ в нерав-ве $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$ ◀

② $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \overset{в.1.}{\not\Longrightarrow} \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Например, $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно (док-во ниже)
(см. признак Дирихле).

Св-ва $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx, \ldots$

① $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \iff \exists \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$ для некоторого $b > a$, при этом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx =$

$= \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$

(Зорич, стр. 460)

② Линейность.

③ Замена переменных.

④ Интегрирование по частям.

Пункт 1. Признаки сходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Напоминание: $\exists F: (a;+\infty) \to \mathbb{R}$, $F\uparrow$ на $(a;+\infty) \Longrightarrow (\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \Longleftrightarrow F$ ограничен$)$

при этом $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \sup\limits_{(a;+\infty)} F}$.

ТЕОРЕМА 1 (мажорантный признак сравнения): $\exists f, g \in R[a,b]$, $\forall b > a$, причем

(1): $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x > a$.

Тогда ① $\int_a^{+\infty} g(x)dx < \infty$ (мажоранта) $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$

② $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ (миноранта) $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty$.

► ① $\exists \int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty$. Положим $G(x) := \int_a^x g(t)dt$. Тогда $G\uparrow$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ $\Longrightarrow G \in B(a,+\infty)$. Далее, положим $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Тогда $F\uparrow$ и $\underbrace{0 \le F(x) \le G(x)}_{\text{из услов. (1)}}$, $\forall x > a \Longrightarrow F \in B(a;+\infty) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$.

② От противного: $\exists \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx < \infty \Longrightarrow$ противоречие п. 1) ◄

ПРИМЕР: $\int_0^{+\infty} \underbrace{(\sin x)\cdot x^n e^{-x^2}}_{=: f(x)} dx$ $\quad f \in R[a,b]$

Исследовать на сходимость $\boxed{n > 0}$

Заметим, что $|f(x)| = \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot \underbrace{|\sin x|}_{\le 1} \cdot \underbrace{x^{n+2}\cdot e^{-x^2}}_{\le C} \le \frac{1}{x^2}$, $\forall x > b$.

(1) Напоминание, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n+2} e^{-x^2} = 0 \Longrightarrow 0 \le x^{n+2} e^{-x^2} \le 1$, $\forall x \ge b$, для некотор. $b > 1$

2) Посчитать (по прав. Лопиталя) производную и найти max ф-ии.)

Но $\int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty \Longrightarrow \int_b^{+\infty} |f(x)|dx < \infty \Longrightarrow \int_b^{+\infty} |f(x)|dx < \infty \Longrightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ ◄

СЛЕД-ИЯ: ① $f, g \in R[a,b]$, $\forall b > a$. $f, g \ge 0$ на $(a;+\infty)$ для достат. больших b,

причем $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда инт-лы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

▶ Достаточно доказать: ① $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx < \infty \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$

② $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty$.

Имеем:

① $f \sim g$ при $x \to +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = \alpha(x) g(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 1 \Rightarrow \exists b > 0 /$

$/ \ 0 \le f(x) \le |\alpha(x) g(x)| \le 2g(x)$, $\forall x > b$. Но $\int\limits_b^{+\infty} 2g(x)dx < +\infty \overset{T.1.}{\Longrightarrow} \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx < +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$.

② От противного: $\int\limits^{+\infty} f(x)dx = +\infty$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx < \infty \Rightarrow$ противоречие п.1). ▼

<u>ОПРЕД-ИЕ</u>: $f = O^*(g)$ при $x \to +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists K \in (0; +\infty) / f \underset{x\to+\infty}{\sim} Kg$.

Тогда <u>СЛ: ②</u>: $f, g \in R[a,b]$, $\forall b > a$, <u>$f, g \ge 0$</u> на $(a; +\infty)$

$f = \underset{x\to+\infty}{O^*}(g)$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

<u>ПРИМЕР</u>: $I = \int\limits_{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}^{+\infty} \underset{>0}{\sin\frac{1}{x^2}}$

1) $\sin\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ $x \to +\infty$

2) $\int\limits_{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{dx}{x^2} < \infty$ сход

(признак Дирихле)

$\Rightarrow I < \infty$

ТЕОРЕМА2: $f, g : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a,b]$, $\forall b > a$, причем

1) ф-ия $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$, $x \ge a$ ограничена

2) $g \downarrow 0$ (монотонно стремится к 0) при $x \to +\infty$ $\Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

▶ Услов. $\Rightarrow$ • $\exists M > 0 / |F(x)| \le M$, $\forall x \ge a$;

• $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b > 0 / |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$, $\forall x > b$.

Имеем: (см. критерий Коши) и 2-ю теорему о среднем):

$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|\underbrace{g(b_1)\int_{b_1}^{c} f(x)dx + g(b_2)\int_c^{b_2} f(x)dx}_{\text{2-я теорема о средних } g\downarrow}\right|$, для некотор. $c \in (b_1, b_2)$

Заметим, что $\left|\int_{b_1}^{c} f(x)dx\right| = \left|\int_a^{c} f(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx\right| \le \left|\int_a^{c} f(x)dx\right| + \left|\int_a^{b_1} f(x)dx\right| = 2M.$

Поэтому $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| \le \underbrace{|g(b_1)|}_{<\frac{\varepsilon}{4M}} 2M + \underbrace{|g(b_2)|}_{<\frac{\varepsilon}{4M}}\cdot 2M \le \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 4M = \varepsilon,\ \forall b_1, b_2 > b$ ◀

ПРИМЕР: интеграл $I_\alpha := \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ $\begin{cases} \text{сходится абсолютно, если } \alpha > 1 \\ \text{сходится условно, если } 0 < \alpha \le 1 \end{cases}$

▶ ① $\boxed{\alpha > 1}$ Имеем: $\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} < \infty$, т.к. $\alpha > 1 \xRightarrow{\text{признак сравнения}}$

$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} < \infty$

② а) I_α сходится при $\alpha > 0$. В самом деле, $\exists\ F(x) = \int_1^x \sin t\,dt$, $x \ge 1$, $g(x) := \frac{1}{x^\alpha}$, $x \ge 1$. Тогда $|F(x)| = \left|-\cos t\,\Big|_1^x\right| \le 2$, $\frac{1}{x^\alpha} \downarrow 0, x \to \infty$, т.к. $\alpha > 0$

$\xRightarrow{\text{Т.Д.}} \int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится

б) $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx = +\infty$

Имеем: $|\sin x| \le 1 \Rightarrow \underline{|\sin x| \ge \sin^2 x}$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx = +\infty$, т.к. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ и $\int_1^b \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}}_{\to +\infty} -$

$- \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{x^\alpha}dx}_{\text{сходится по призн. Дирихле}} \xrightarrow[b \to +\infty]{} +\infty$ ◀

ЗАМЕЧ-Е: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\overset{\text{в.г.}}{\not\Longrightarrow} \int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ сходится.

Например, $f(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Тогда $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится по т. Дирихле,

но $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = +\infty$.

§7. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Пункт 1. Определение. Критерий Коши.

ОПРЕД-Е 1: $f\in R[a+\varepsilon,b]$ $\forall\varepsilon\in(0,b-a)$. Тогда:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx := \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, если этот $\lim\ \exists$.

2) сход. } в несобств. смысле

3) расх.

ОПРЕД-Е 2: $f\in R[a,b-\varepsilon]$, $\forall\varepsilon\in(0,b-a)$. Тогда

1) $\int\limits_a^b f(x)dx := \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, если этот $\lim\ \exists$.

2)

3)

$a\quad b\quad c$

ОПРЕД-Е 3: $f\in R[a,b-\varepsilon_1]$, $\forall\varepsilon_1\in(0,b-a)$, $f\in R[b+\varepsilon_2,c]$, $\forall\varepsilon_2\in(0,c-b)$.

Тогда $\int\limits_a^c f(x)dx := \int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_b^c f(x)dx$, если оба интеграла справа $\exists$.

ЗАМЕЧ-Я: ① $f\geq 0$ на (a,b). Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \int\limits_a^b f(x)dx=+\infty$

② $\exists\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow \exists\int\limits_a^{a+\varepsilon} f(x)dx$, причем $\int\limits_a^{a+\varepsilon} f(x)dx \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0$ ▶…◀

③ $\exists f\in R[a,b]$. Тогда $\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \int\limits_a^b f(x)dx$ (непрерывность $\int$-ла Римана по нижнему пределу интегр.)

④ $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, $\exists\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$, $g\in R[a,b]$, $f\equiv g$ на $(a,b]$.

Тогда $\exists\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b g(x)dx$.

Рассм. $f_1(x):=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b] \\ A, & x=a\end{cases}$, $(f\in R[a+\varepsilon,b],\ \forall\varepsilon\in(0,b-a))$

Например, $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ „интегрируема по Риману", т.к. её можно доопределить в конечном числе точек.

⑤ $f \in R[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$
$f \in B(a, b)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx := \int_a^b g(x)dx$ – „интеграл Римана".

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ на } (a,b] \\ A, \ x = a \end{cases}$$

Например, $\int_0^1 \left(\sin\frac{1}{x}\right)dx$, разрывна в 0, можно доопределить.

!ПРИМЕР: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится, если } \alpha < 1 \\ = +\infty, \text{ если } \alpha \geq 1 \end{cases}$

► $\alpha \neq 1$ $\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha} \to \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, \ \alpha < 1 \\ +\infty, \ \alpha > 1 \end{cases}$

$\alpha = 1$ $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_\varepsilon^1 = 0 - \ln\varepsilon \to +\infty$ ◄

ТЕОРЕМА 1 (Критерий Коши): $f \in R[a+\varepsilon, b]$, $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$.
Тогда $\int_a^b f(x)dx$ сходится $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / \left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$ $\forall \delta_1, \delta_2 \in (0, \delta)$

► ... ◄

$F(x) := \int_{a+x}^{b}$

ОПРЕД-ИЕ 4: $f \in R[a+\varepsilon, b]$, $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$. Тогда 1) f $\boxed{\text{абсолютно интегрируема}}$ (в несобственном смысле) на $[a, b]$ (или $\int_a^b f(x)dx$ $\boxed{\text{сходится абсолютно}}$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$.

2) $\int_a^b f(x)dx$ $\boxed{\text{сходится условно}}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\left(\int_a^b f(x)dx \text{ сходится}\right) \wedge \left(\int_a^b |f(x)|dx = +\infty\right)$.

ТЕОРЕМА 2: $f \in R[a+\varepsilon, b]$, $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$, $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ сходится, причем $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. ► ... кр. Коши ◄

Свойства $\int_a^b f(x)dx$; $f \in R[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon \in (0, b-a)$:

① $\int_a^b f(x)dx$ сходится $\Longleftrightarrow$ $\int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx$ сходится

② Линейность

► ... ◄

③ $f \in R[a+\varepsilon, b]$, $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ – сход-ся $\Longleftrightarrow$ $\int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx$ сход-ся, причем $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

④ Замена переменной

⑤ Инт-ие по частям.

ПРИМЕРЫ: ① $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,dx$. сходится

Имеем: $\int\limits_\varepsilon^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,dx = \int\limits_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin y}{y}\,dy \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} A \in \mathbb{R}$

$$\boxed{x = \frac{1}{y}\ ,\ dx = -\frac{1}{y^2}dy}$$

② а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx =$

б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx = \int\limits_0^1 \underset{x\to 0}{\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\sim\frac{1}{x}}}dx + \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$

Пункт 2. Признаки сравнения.

ТЕОРЕМА 1 (мажорантный признак ср-ия)

СЛ-ИЕ (экв-й признак ср-ия)

ПРИМЕР: $\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^{\frac{2}{3}} x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}_{=:f(x)}$ $=:I$ сходится $\iff$ (сходится $\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx}_{=:I_1}$) $\wedge$ (сход. $\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx}_{=:I_2}$)

Имеем: 1) $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$ сход. $\Rightarrow I_1$ сходится

2) $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}-0}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$, $\int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{\pi}{2}-x} = +\infty \Rightarrow I_2$ расходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow I$ расходится.

Пункт 3. Несобственный интеграл в смысле главного значения.

Рассм. интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; $\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} = \ln\varepsilon_1 = -\ln\frac{1}{\varepsilon_1} \to -\infty$, $\varepsilon_1 \to +0$

$\int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x} = -\ln\varepsilon_2 = \ln\frac{1}{\varepsilon_2} \to +\infty$, $\varepsilon_2 \to 0$

ОПРЕД-ИЕ: $f \in R[a, b-\varepsilon]$, $f \in R[b+\varepsilon, c]$, $\forall\varepsilon>0$. Тогда

V.p. $\int_a^c f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{b-\varepsilon} f dx + \int_{b+\varepsilon}^{c} f dx\right)$, если этот lim $\exists$, и это (value principe)

значение называется интегралом в $\boxed{\text{смысле главного значения}}$

ПРИМЕР: V.p. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1}\right)\frac{dx}{x} = 0$

§6. Некоторые приложения интеграла.

Пункт 1. Аддитивная функция отрезка.

ОПРЕД-ИЕ: Пусть задан отрезок $[a,b]$ и ф-ция $I: (\alpha,\beta) \in [a,b]\times[a,b] \to$
$\to I(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$. Ф-ция I называется аддитивной ф-цией отрезка,
если она удовлетворяет условию:
$\forall \alpha,\beta,\gamma \in [a,b]$, $I(\alpha,\gamma) = I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma)$.

Свойства I:

1) $I(\alpha,\alpha)=0$ ► $I(\alpha,\alpha) = I(\alpha,\alpha)+I(\alpha,\alpha) = 2I(\alpha,\alpha) \Rightarrow I(\alpha,\alpha)=0$ ◄

2) $I(\alpha,\beta) = -I(\beta,\alpha)$ ▶ $I(\alpha,\beta) + I(\beta,\alpha) = I(\alpha,\alpha) = 0$ ◀

3) $\exists F(x) := I(a,x)$. Тогда $I(\alpha,\beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

▶ $F(\beta) - F(\alpha) = I(a,\beta) - I(a,\alpha) = I(\alpha,\beta)$ ◀

ПРИМЕР: $f \in R[a,b] \Rightarrow I(\alpha,\beta) := \int_\alpha^\beta f(x)dx$ — аддитивная функция на $[a,b]$.

ЛЕММА: $\exists I : (\alpha,\beta) \in [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ — аддитивная ф-ия отрезка, и $\exists f \in R[a,b] \,/\, \forall \alpha,\beta \in [a,b],\ \alpha < \beta,\quad (\beta-\alpha)\inf\limits_{[\alpha,\beta]} f \le I(\alpha,\beta) \le (\beta-\alpha)(\sup\limits_{[\alpha,\beta]} f)$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow I(a,b) = \int_a^b f(x)dx$ (2).

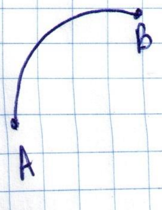
▶ Имеем: $\forall$ разбиения $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ отрезка $[a,b]$, $\Longrightarrow$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k}_{\xrightarrow[d(P)\to 0]{} \int_a^b f(x)dx} \le I(a,b) \underset{\text{аддит-ть}}{=} \sum_{k=1}^{n} I(x_{k-1}, x_k) \underset{\text{услов.(1)}}{\le} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k}_{\xrightarrow[d(P)\to 0]{} \int_a^b f(x)dx}$$

$\Rightarrow$ переходя к lim при $d(P) \to 0$: $\int_a^b f(x)dx \le I(a,b) \le \int_a^b f(x)dx \Rightarrow (2)$ ◀

Пункт 2. Длина кривой

Рассм. кривую L на плоскости xOy, заданную параметрическими уравнениями:



$$\begin{cases} x = x(t) = \varphi(t) \\ y = y(t) = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \le t \le T, \text{ причем } \varphi, \psi \in C[t_0, T] \ (1)$$

Итак, $L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (1)\}$.

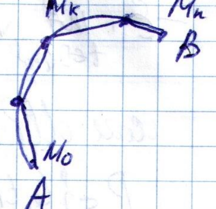
Точка $c \in L$ называется $\boxed{\text{кратной}}$, если $\exists t_1, t_2 \in [t_0, T]$, $t_1 \ne t_2 \,/\, (\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2)) = c$.

Кривая L называется $\boxed{\text{простой}}$, если она не имеет кратных точек, кроме, б.м., концов кривой $A = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $B = (\varphi(T), \psi(T))$.

Кривая L наз. $\boxed{\text{замкнутой}}$, если $A = B$

Рассмотрим простую кривую L. $\exists P=\{t_0,t_1,\dots,T\}$ – произвольное разбиение $[t_0,T]$ и $\exists M_k := (\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $k=\overline{0,n}$.

Рассмотрим соответств. ломаную l, $(M_0M_1\dots M_n)$ длины $|l|$. Тогда l называется $\boxed{\text{вписанной}}$ ломаной в кривую L и L называется $\boxed{\text{спрямляемой}}$, если множество длин всех вписанных ломаных ограничено.



Точная верхняя грань (sup) этого множества называется $\boxed{\text{длиной}}$ L и обозначается $|L|$.

ТЕОРЕМА: $\exists L$ – простая кривая $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t_0\le t\le T\}$ с условием $\varphi,\psi\in C^1[t_0,T] \Longrightarrow$ 1) L – спрямляемая

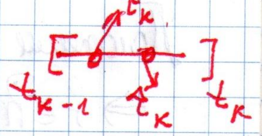
2) $|L| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$. (1).

▶ (1) Докажем, что L – спрямляема. $\exists l=(M_0,M_1,\dots,M_n)$ – произвольная ломаная, вписанная в кривую L. Тогда $|l|=\sum_{k=1}^{n}|[M_{k-1},M_k]|=$ аккуратно

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\underbrace{\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})}_{\varphi'(\tau_k)\Delta t_k})^2+(\underbrace{\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})}_{\psi'(\hat{\tau}_k)\Delta t_k})^2}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2+[\psi'(\hat{\tau}_k)]^2}\cdot\Delta t_k\le$$

$$\le\left\{\left(\max_{[a,b]}|\varphi'|\right)^2+\max_{[a,b]}|\psi'|^2\right\}\cdot(b-a)=:M(L),\ \forall l,\ \text{вписанных в } L\Longrightarrow$$

$\Longrightarrow L$ – спрямляема.



(2) Заметим, что из док-ва Леммы п.2 вытекает

СЛЕД-ИЕ: $\exists I(\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta)\in[a,b]^2$, аддитивная ф-ия отрезка $[a,b]$, причем $\exists f\in R[a,b]\ /\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, для которого

$|\hat{\tau}_k-\tau_k|<\delta = d(P)$

$$-\varepsilon+\inf_{(\alpha,\beta)}f\,(\beta-\alpha)\le I(\alpha,\beta)\le\left(\sup_{(\alpha,\beta)}f\right)(\beta-\alpha)+\varepsilon,\ \forall\alpha,\beta\in[a,b],\ \text{с условием}\ \begin{matrix}a\le\alpha<\beta\le b\\ \beta-\alpha<\delta\end{matrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I(a,b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$|A|<\varepsilon$

Из п.1 получаем $|l|=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2+[\psi'(\tau_k)]^2}\,\Delta t_k+A$, где

$$A=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2+[\psi'(\hat{\tau}_k)]^2}-\sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2+[\psi'(\tau_k)]^2}\right)\Delta t_k$$ и, следоват.,

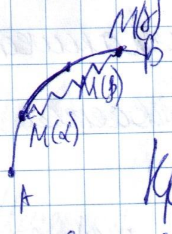
$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ /

$$-\varepsilon + \inf_{t\in[t_0,T]} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,(T_0-t_0) \le |l| \le \sup_{t\in[t_0,T_0]} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,(T_0-t_0)+\varepsilon,$$

если $d(P)<\delta$. Аналогичное нер-во верно и для $[\alpha,\beta]\subset[t_0,T]$

$P=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$

③ Определим ф-цию $I(\alpha,\beta) := |\overset{\frown}{M(\alpha)M(\beta)}|$, $(\alpha,\beta)\in[t_0,T]^2$



Заметим, что $\overset{\frown}{M(\alpha)M(\beta)}$ спрямляема, в силу п.1)

Кроме того $I(\alpha,\beta)$ – аддитивная ф-ция отрезка, т.к. для справедливы нерав-ва:

$$|\overset{\frown}{M(\alpha)M(\beta)}| + |\overset{\frown}{M(\beta)M(\gamma)}| \overset{(5)}{\le} |\overset{\frown}{M(\alpha)M(\gamma)}| \overset{(4)}{\le} |\overset{\frown}{M(\alpha)M(\beta)}| + |\overset{\frown}{M(\beta)M(\gamma)}|$$

Т.к. $l := \overset{\frown}{M(\alpha)M(\gamma)}$

$l_1 := \overset{\frown}{M(\alpha)M(\beta)}$, $l_2 = \overset{\frown}{M(\beta)M(\gamma)}$

$|l| = |l_1|+|l_2| \le \sup|l_1| + \sup|l_2| = |\overset{\frown}{M(\alpha)M(\beta)}| + |\overset{\frown}{M(\beta)M(\gamma)}|$

$|l| = |l_1|+|l_2| \le$ (прав. часть 4) $\Rightarrow \sup|l| \le$ (прав. часть (4)) $\Longleftrightarrow$ (4)

Проверим (5): $|l_1|+|l_2| = |l| \le \sup_{\forall l} |l| = |\overset{\frown}{M(\alpha)M(\gamma)}|$

↑ составлена из l_1 и l_2

Т.к. sup суммы равен сумме sup $\Longrightarrow$ (5).

Положим $f(t) := \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$, $t\in[t_0,T]$, $f\in C[t_0,T] \Rightarrow$
$\Rightarrow f\in R[t_0,T]$.

См. след-вие из п. 2) док-ва: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ /

$-\varepsilon + (\inf f(t))(\beta-\alpha) \le I(\alpha,\beta) := |\overset{\frown}{M(\alpha)M(\beta)}| \le (\sup f(t))(\beta-\alpha)+\varepsilon$, $\forall \alpha,\beta\in[t_0,T]^2$ с условием $0<\beta-\alpha<\delta$. Поэтому $I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ ◀

СЛЕД-ИЯ: ① L задана уравнением (в явной форме), $y=y(t)$, $t\in[t_0,T]$

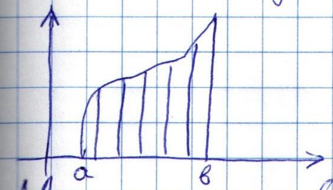
$f(t) = \sqrt{[y'(t)]^2+1}$, $t\in[t_0,T] \Rightarrow |L| = \int_{t_0}^{T} \sqrt{1+[y'(t)]^2}\,dt$

② L задана уравнением в полярных коорд., $r=r(\varphi)$, $\varphi_0\le\varphi\le\varphi_1$

Имеем: $\begin{cases} x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi \\ y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi \end{cases}$, $\varphi_0\le\varphi\le\varphi_1$

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi \\ y'_\varphi = r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow f(\varphi) = \sqrt{(r')^2 + r^2}$$

Пункт 3. Площадь криволинейной трапеции.



$$S_{тр} := \int_a^b f(x)dx,\ f \geq 0,\ f \in C[a,b] \quad (1)$$

ЗАМЕЧ-Е: Фигура Ф плоская, если Ф ограничена.

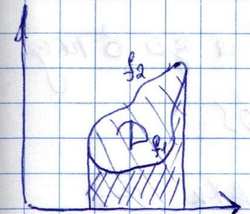
M_*: многоуг., вписанный в Ф

M^*: многоуг., описанный около Ф

Ф - квадрируема $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \sup\limits_{M_*} S_{M_*} = \inf\limits_{M^*} S_{M^*}$

$S_Ф := \sup\limits_{M_*} S_{M_*}$

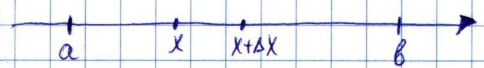
Доказывается ф-ла (1).



$$S_Ф = \int_a^b (f_2 - f_1)dx$$

Пункт 4. Некоторые механические приложения интегралов.

(a) Масса неоднородного стержня.

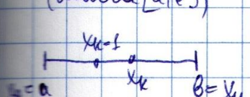


Имеем: $\rho(x) := \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{m[x, x+\Delta x]}{\Delta x} \Rightarrow m[x, x+\underset{dx}{\Delta x}] = \Delta x[\rho(x) + \bar{o}(1)]$ при $\Delta x \to 0$

$M_{отрезка}$ (масса $[a,b]$) $= \sum\limits_{k=1}^{n} m[x_{k-1}, x_k] = \sum\limits_{k=1}^{n} [\rho(x) + \bar{o}(1)]\Delta x_k \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(x_k)\Delta x_k \xrightarrow[d(P) \to 0]{} \int_a^b \rho(x)dx$

$d(P) \to 0$

$P = \{x_0, \dots, x_n\}$



$(\approx)$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /\ M_{отр} = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(x_k)\Delta x_k + \underline{A}$, где $|A| < \varepsilon$, $\forall P : d(P) < \delta$.

$$s + \varepsilon \leq M_{отрезка} \leq S + \varepsilon$$

в) Координата центра тяжести стержня.

Если имеется система n матер-ых точек x_k, $k=\overline{1,n}$, то центр тяжести системы (координата) $x_c = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{m(x_k)\,x_k}{M_{сист.} = \sum_k m(x_k)}$

$m(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m[x, x+\Delta x]$.

Рассм. разбиение $P = \{\underset{a}{x_0}, \dots, x_n = b\}$ отрезка $[a,b]$.

$\exists m_k := m[x_{k-1}, x_k] = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx = \rho(\xi_k)\,\Delta x_k$

$M = \int\limits_a^b \rho(x)\,dx$ Следоват. $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow x_c \approx \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}} \frac{\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx\right)\rho(x_k)\cdot x_k}{M} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} x\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx} = \frac{\int\limits_a^b x\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx}.$$

с) Работа силы.

Пусть матер. точка перемещается по оси X от a до b под под воздействием переменной силы $F(x)$, $x \in [a,b]$.

Имеем: работа силы F на участке $[x_{k-1}, x_k] \approx F(x_k)\cdot\Delta x_k \Longrightarrow$ работа $F(x)$ на $[a,b]$: $A \approx \sum\limits_{k=1}^{n} F(x)\,\Delta x_k \longrightarrow \int\limits_a^b F(x)\,dx$.

при условии непрерывности $F(x)$

в) Координата центра тяжести стержня.

Если имеется система n матер-ых точек x_k, $k=\overline{1,n}$, то центр тяжести системы (координата) $x_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m(x_k) x_k}{M_{сист.} = \sum_k m(x_k)}$

$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} m[x, x+\Delta x]$.

Рассм. разбиение $P = \{x_0, \dots, x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$.

$\exists m_k := m[x_{k-1}, x_k] = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)dx = \rho(\xi_k)\Delta x_k$

$M = \int_a^b \rho(x)dx$ Следоват $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow x_c \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx\right) \rho(x_k) \cdot x_k}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx} = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}.$$

с) Работа силы.

Пусть матер. точка перемещается по оси X от a до b под воздействием переменной силы $F(x)$, $x \in [a, b]$.

Имеем: работа силы F на участке $[x_{k-1}, x_k] \approx F(x_k) \cdot \Delta x_k \Longrightarrow$ работа $F(x)$ на $[a, b]$; $A \approx \sum_{k=1}^{n} F(x)\Delta x_k \longrightarrow \int_a^b F(x)dx$

при условии непрерывности $F(x)$

Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Глава 1. Непрерывные функции многих переменных

§1. Линейные, нормированные, метрические и евклидовы пространства.

ОПРЕД-ИЕ 1: Пусть дано мн-во $E \neq \varnothing$. E назыв. линейным пространством, если ① $\forall x, y \in E$ однозначно определяется $z = \underbrace{x+y}_{\text{сумма } x \text{ и } y} \in E$, причем

a) $x+y = y+x$, $\forall x, y \in E$ (коммут.)

b) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x, y, z \in E$ (ассоц.)

c) $\exists$ элем. $0 \in E$ / $0+x = x$, $\forall x \in E$ ($\exists$ „нуля")

d) $\forall x \in E$ $\exists (-x)$ / $x+(-x) = 0$

② $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ однозначно определен эл-т $\alpha x \in E$, причем:

a) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\forall x \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in E$

c) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$

d) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$

(c, d) — дистрибут.

ОПРЕД-ИЕ 2: Пусть E — линейн. простр-во. Элем-ты $x_1, \dots, x_n \in E$ — линейно зависимы $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ / $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$.

ЗАМ-ИЯ: $x_1, \dots, x_n$ — линейно независимы $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha_k = 0$, $\forall k = \overline{1, n}$.

ПРИМЕРЫ: ① $E = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$

② $C(a,b)$
$C[a,b]$ — классы ф-ций
$R[a,b]$
$\mathcal{D}[a,b]$, $C^n(a,b)$

ОПРЕД-ИЕ 3: Пусть E — линейное пр-во. ① Ф-ция $\|\cdot\| : x \in E \to \|x\| \in \mathbb{R}$ — $\boxed{\text{норма}}$ в E $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ a) $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in E$, причем $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (положит.)

b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$ (однородность)

c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$ (нер-во треугольника)

② Пр-во E, снабженное нормой, называется $\boxed{\text{нормированным пространством}}$

ПРИМЕРЫ: ① $E=\mathbb{R}$; $\|x\|=|x|$

② $E=\mathbb{R}^2$; $\|x\|_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\|x\|_2:=\max\limits_{k=1,2}|x_k|$

$\|x\|_3:=|x_1|+|x_2|$

$\mathbb{R}^n$: ....

$\|x\|_1, \|x\|_2, \|x_3\|$ – эквивалентные нормы (проверить)

ОПРЕД-ИЕ: Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в E – эквивалентны $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists c, C>0$ / $\boxed{c\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C\|x\|_2}$

③ $E=C[a,b]$

$\|f\|:=\max\limits_{[a,b]}|f|$

ЗАМЕЧ-Е: $\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\|$ (1) (непрер-ть нормы)

▶ (1) $\Longleftrightarrow$ $-\|x-y\| \overset{③}{\le} \|x\|-\|y\| \overset{②}{\le} \|x-y\|$

• (2) $\|x\| \le \|x-y\|+\|y\|$ – верно $(x=(x-y)+y)$

• (3) $\|y\| \le \|x\|+\|y-x\|$ – верно ◀

ОПРЕД-ИЕ 4: $\exists E$ – мн-во, $E\ne\emptyset$. ① Ф-ия $\rho: (x,y)\in E^2=E\times E \to$ $\to \rho(x,y)\in\mathbb{R}$ – $\boxed{\text{расстояние}}$ (метрика) в E $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ a) $\rho(x,y)\ge 0$, $\forall x,y\in E$, причем $\rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$.

b) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ – симметр-ть

c) $\rho(x,z) \le \rho(x,y)+\rho(y,z)$, $\forall x,y,z\in E$

② Мн-во E, снабженное расстоянием, называется $\boxed{\text{метрическим пространством}}$.

ПРИМЕРЫ: ① $\exists E$ – нормированное пр-во: $\rho(x,y):=\|x-y\|$ – расстояние.

② $\exists E=\mathbb{R}^2$, $\rho(x,y):=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|^{\frac{1}{2}}$

$\|x\|:=|x_1|+|x_2|^{\frac{1}{2}}$ – не норма (нет умножения на число)

$x=(x_1,y_1)$, $y=(x_2,y_2)$

③ $\exists E \neq \varnothing$ $\rho(x,y) := \begin{cases} 1, \text{если } x \neq y \\ 0, \text{если } x = y \end{cases}$

$\rho(x,z) \leq \rho(x+y) + \rho(y,z)$

ОПРЕД-Е 5: $\exists E$ – линейное пр-во ① Функция $(\cdot,\cdot): E^2 \to \mathbb{R}$ –

$\boxed{\text{скалярное произведение}} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ a) $(x,x) \geq 0$, причем $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

b) $(x|y) = (y|x)$, $\forall x,y \in E$

c) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$

② Линейное пр-во E, снабженное $(\cdot,\cdot)$, называется $\boxed{\text{евклидовым пр-вом}}$ (предгильбертовым).

ЗАМЕЧ: $\exists E$ – евклидово простр. Тогда $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ – норма.

ПРИМЕРЫ: ① $\mathbb{R}^n$: $(x,y) := \sum_{i=1}^{n} = x_i y_i$

② $(f,g) := \int_a^b f(x) g(x) dx$.

$C[a,b]$: $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2 dx}$ – норма, см. ниже

ТЕОРЕМА 1 (нер-во Коши-Буняковского): $\exists E$ – евклидово простр-во.

Тогда $|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$ (4)

▶ (4) $\Longleftrightarrow$ $(x,y)^2 \leq (x,x)\cdot(y,y)$ (5)

Имеем: $\underbrace{(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y)}_{\geq 0} = \alpha^2(x,x) + 2\alpha\beta(x,y) + \beta^2(y,y) \geq 0$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, – $\forall x,y \in E$

квадратичная форма (относит. $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$) положительно определена.

$$\begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (x,y) & (y,y) \end{vmatrix} = (x,x)(y,y) - (x,y)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow (5) ◀$$

ТЕОРЕМА 2 (нер-во Минковского): $\exists E$ – евклидово пр-во $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \|x\| := (x,x)^{\frac{1}{2}}$, $x \in E$ – норма.

▶ 1) Очевидно, что аксиомы a), b) справ-вы

2) Докажем нер-во тр-ка: $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (6)

(6) $\Leftrightarrow (x+y, x+y) \le (\|x\|+\|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$ (7).

Но $(x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + \underbrace{2(x,y)}_{\le 2\|x\|\cdot\|y\|} + \|y\|^2 \le$

$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow$ (7) ◄

СЛЕД-ИЕ: $E := C[a,b]$ с $(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Тогда $\|f\| := \sqrt{\int_a^b f^2 dx}$ — норма (Т.2)

ПРИМЕР: ① Простр-во $C[a,b]$, $\|f\|_\infty := \max\limits_{[a,b]} |f|$

② Пр-во $C[a,b]$ $(f,g) := \int_a^b f\cdot g\,dx$, $\|f\|_2 := \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ (по Т.2)

§2. Топология метрического пространства.

$\rceil$ X — метрическое простр-во с метрикой ρ. Говорим, что дано метрическое пр-во (X, ρ).

$\rceil$ $X_1 \subset X$. Тогда (X_1, ρ) — метрическое пр-во ($X_1 \ne \emptyset$).

Говорим, что (X_1, ρ) — $\boxed{\text{подпр-во}}$ (X, ρ) (X_1 — п/п-во X).

ОПР-ИЕ 1. X — метрич. пр-во всюду далее. $\rceil a \in X$ и $r > 0$.

1) Мн-во $B(a;r) := \{x \in X \mid \rho(x,a) < r\}$ (ball) называем $\boxed{\text{открытым шаром}}$

2) Мн-во $B[a,r] := \{x \in X \mid \rho(x,a) \le r\}$ называется $\boxed{\text{замкнутым шаром}}$

3) $S(a;r) := \{x \in X \mid \rho(x,a) = r\}$ называется $\boxed{\text{сферой}}$

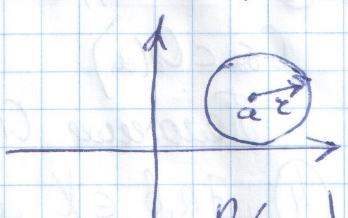
ОПРЕД-ИЕ 2: $\rceil a \in X$

1) $\boxed{\text{Окрестностью}}$ $O(a)$ точки a называется любой открытый шар $B(b,r) \ni a$.

2) $\boxed{\text{Центрированной окрестностью}}$ $O_\delta(a)$ называется $B(a,\delta)$

3) Проколотой окрестностью т. a $\mathring{O}(a)$ называется мн-во $O(a)\setminus\{a\}$.

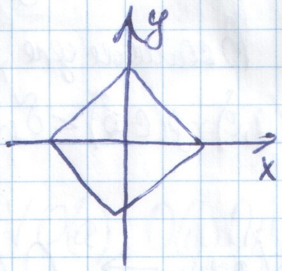
ПРИМЕРЫ: ① $X=\mathbb{R}^2$, $\rho(x,y):=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$



$B(a,r)$

② $X=\mathbb{R}^2$, $\rho(x,y):=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$

$B(a,r):=\{|x_1-a|+|x_2-a|<r$



③ $X=\mathbb{N}$; $\rho(x,y):=|x-y|$

$O_{\frac{1}{2}}(n)=\{n\}$

$O_2(n)=\{n-1,n,n+1\}$

ТЕОРЕМА 1 (св-во окрестностей в метрическом пр-ве):

1) $O(a)\neq\emptyset$
2) $\forall O(a)\ \exists\delta>0 \,/\, O_\delta(a)\subset O(a)$
3) $\forall O_1(a), O_2(a)\ \exists O(a) \,/\, O(a)\subset O_1(a)\cap O_2(a)$.
3') $\forall O_k(a),\ k=1,\dots,n\ \exists O(a) \,/\, O(a)\subset\bigcap\limits_{k=1}^{n} O_k(a)$
4) (принцип отделимости Хаусдорфа)
$\forall a,b\in X, a\neq b, \exists O(a), O(b) \,/\, O(a)\cap O(b)=\emptyset$.
5) $\forall b\in O(a)$, $O(a)$ – окр-ть т. b
5') $\forall b\in \mathring{O}(a), \exists O_\delta(b)\subset \mathring{O}(a) \,/\, a\notin O_\delta(b)$

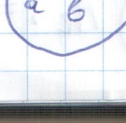
◀ ① $O(a)\neq\emptyset$, т.к. $a\in O(a)$

② $\exists O(a)$ – окр-ть т. a $\Rightarrow \exists b\in X, r>0 \,/\, O(a)=B(b,r)\ni a$

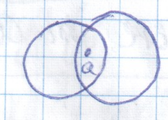
Положим $\delta:=r-\rho(a,b)$.

$\exists c\in O_\delta(a)\Rightarrow \rho(c,b)\le\underbrace{\rho(c,a)}_{<\delta}+\rho(a,b)<\delta+\rho(a,b)=r\Rightarrow$

$\Rightarrow c\in B(b;r)$



③ $\exists O^{(1)}(a), O^{(2)}(a)$ – окр-сти т. $a \overset{2)}{\Rightarrow}$



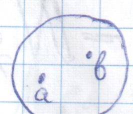
$\exists \delta_1>0, \delta_2>0 / O_{\delta_1}(a)\subset O_1(a)$, $O_{\delta_2}\subset O_2(a)$

Положим $O(a) := O_\delta(a)$, где $\delta := \min(\delta_1,\delta_2)$

④ $\exists a,b\in X$, $a\ne b$. $\exists \delta := \rho(a,b)$. Положим $\delta_1 := \frac{\delta}{2}$. Тогда $O_{\delta_1}(a)\cap O_{\delta_1}(b)=\emptyset$. В самом деле, предположим противное: $\exists c\in O_{\delta_1}(a)\cap O_{\delta_2}(b)$

$\Rightarrow \underbrace{\rho(a,b)}_{\delta} \le \rho(a,c)+\rho(c,b) < \delta_1+\delta_2 = \frac{2}{3}\delta \Rightarrow \delta<\frac{2}{3}\delta \Rightarrow$ противор.

⑤ $\exists b\in O(a)=B(c,r) \Rightarrow O(a)$ – окрестность т. b



⑤' $b\in \dot{O}(a)$. Имеем $\exists\delta_1>0 / O_{\delta_1}(a)\subset O(a)$.

Положим $\delta_2 := \rho(a,b)$ и $\delta := \min(\delta_1,\delta_2)$.

Тогда • $O_\delta(b)\subset O_{\delta_1}(b)\subset O(a)$

• $\rho(b,a) = \delta_2 \geq \delta \Rightarrow O_\delta(b)\not\ni a$ ◄

Все определения и теоремы, использующие понятие окрестности переносятся со случая $X=\mathbb{R}$ на произвольное метрическое пр-во.

Пункт 2. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве $X=(X,\rho)$.

Всюду далее $A\subset X$.

ОПРЕД-ИЕ 1: 1) a – $\boxed{\text{внутренняя точка}}$ $A \overset{def}{\iff} \exists O(a)/O(a)\subset A$.

2) $A_i := \{x\in X / x$ – внутренняя точка $A\}$ – „внутренность" мн-ва A

3) A – $\boxed{\text{открытое мн-во}}$ $\overset{def}{\iff} A=A_i$

ЗАМЕЧ-ИЯ: 1) $a\in A_i \Rightarrow a\in A$

2) $\forall a\in X$, $a\in X_i$, т.к. $X=X_i$

ОПРЕД-ИЕ 2: 1) a – $\boxed{\text{внешняя точка}}$ $A \overset{def}{\iff} \exists O(a)/O(a)\cap A=\emptyset$

(т.е. $O(a)\subset X\setminus A = cA$)

2) $A_e := \{x\in X/ x$ – внешняя точка $A\}$ – „внешность" мн-ва

ЗАМЕЧ-ИЕ: $a \in A_e \Rightarrow a \notin A$

ПРИМЕРЫ: ① $X = \mathbb{N}$, $\rho(x,y) = |x-y|$

$\forall A \subset \mathbb{N}$, $A_i = A$

$A_e = \mathbb{N} \setminus A$

② $X = \mathbb{R}$ для интервалов

ОПРЕД-ИЕ 3: 1) a – $\boxed{\text{граничная точка}}$ $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall O(a)$, $O(a) \cap A \neq \varnothing$, $O(a) \cap CA \neq \varnothing$.

2) $\boxed{\text{Граница}}$ A, ∂A, $:= \{x \in X / x$ – граничная точка $A\}$.

ПРИМЕРЫ: 1) $A = B(a,r)$, $\partial A = S(a,r)$

2) $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $\partial A = A$.

ОПРЕД-ИЕ 4: 1) a – $\boxed{\text{точка прикосновения}}$ $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall O(a) / O(a) \cap A \neq \varnothing$

2) Замыкание A, $(\bar{A}) := \{x \in X /$ x – точка прикосновения $A\}$

3) A – замкнуто $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$.

ЗАМЕЧ-ИЯ: 1) $A \subset \bar{A}$, $\partial A \subset \bar{A}$

ОПРЕД-ИЕ 5: 1) a – $\boxed{\text{предельная точка}}$ $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall O(a)$, $\mathring{O}(a) \cap A \neq \varnothing$.

2) $\boxed{\text{Производное мн-во}}$ A $(A') = \{x \in X / x$ – предельная точка $A\}$.

ТЕОРЕМА 1: $\forall O(a)$ – открытое множество.

▶ ...

СЛЕД-ИЕ: Открытый шар – открытое множество.

▶ ...

ТЕОРЕМА 2: A замкнуто $\Longleftrightarrow A \supset A'$

▶ ...

ТЕОРЕМА 3: A замкнуто $\Longleftrightarrow CA$ - открыто

▶ ... вместо | | будет ρ

ПРИМЕРЫ: ① $\varnothing, X$ - замкнуто и открыто

② $CB[a,r]$ - открыто

▶ $\exists x \notin B[a,r]$, тогда $\delta =$

③ $B[a,r]$ - замкнуто, т.к. $CB[a,r]$ открыто.

ТЕОРЕМА 5: $\exists A_n \subset X, n = 1,..,m$

1) A_n - открыто, $n = \overline{1,m} \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{m} A_n$ - открыто

2) A_n - замкнуто, $n = \overline{1,m} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n$ - замкнуто

▶ ...

ЗАМЕЧ-ИЯ: ① A_n - открыто, $n \in \mathbb{N} \overset{в.г.}{\not\Rightarrow} \bigcap\limits_{1}^{\infty} A_n$ - открыто

A_n - замкнуто, $n \in \mathbb{N} \overset{в.г.}{\not\Rightarrow} \bigcup\limits_{1}^{\infty} A_n$ - замкнуто

Привести примеры.

② A_n - открыто, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{1}^{\infty} A_n$ - открыто

A_n - замкнуто, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap\limits_{1}^{\infty} A_n$ - замкнуто.

▶ ...

ТЕОРЕМА 6: $A \subset X \Rightarrow \bar{A}, \partial A, A'$ – замкнуто

▶ ...

ТЕОРЕМА 7: $\exists A' \neq \emptyset \Rightarrow \forall a \in A' \, \forall O(a), \, \acute{O}(a) \cap A$ – бесконеч. мн-во.

▶ ...

ЗАМЕЧ-Е: A – конечно $\Rightarrow A' = \emptyset$.

§3. Последовательности в метрическом пространстве.

Пункт 1. Предел последовательности.

Рассм. метрич. пр-во (X, ρ) и рассм. посл-ть $(a_n \in X, n \in \mathbb{N})$ – элементов из X.

Отображение: $n \in \mathbb{N} \to f(n) =: a_n \in X$ $\qquad f: n \in \mathbb{N} \to f(n) = a_n \in \mathbb{R}$

ОПРЕД-Е 1: Послед-ть $(a_n \in X, n \in \mathbb{N})$ сходится $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \rho(a_n, a) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$,

СЛЕД-Е: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} /$ (Обозн. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$)

$\rho(a_n, a) < \varepsilon, \forall n > N \Longleftrightarrow \forall O(a) \; \exists N \in \mathbb{N} / a_n \in O(a)$.

ОПРЕД-ИЕ 2: $\exists A \subset X$, A – ограничено $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists B(a, r) / A \subset B[a, r]$

$\forall$ теорема о $\lim a_n$ переносится с $X = \mathbb{R}$ на произвольное X – метр. пр-во.

ТЕОРЕМЫ: 1) (a_n) сходится $\Rightarrow (a_n)$ – ограничена

2) $a_n \to a, a_n \to b \Rightarrow a = b$

▶ ..

Listoff

Пункт 2. Фундаментальные последовательности в метрическом пространстве.

ОПРЕД-Е 1: Посл-ть $(a_n \in X, n \in \mathbb{N})$ – фундаментальная (посл-ть Коши) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} / \rho(x_n, x_m) < \varepsilon,\ \forall n, m > N$.

ТЕОРЕМА 1: Послед-ть $(a_n \in X,\ n \in \mathbb{N})$ сходится $\Rightarrow$ (a_n) – фундам.

▶ ... ◀

ЗАМЕЧ-Е: $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $\rho(x,y) = |x-y|$

$(a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N})$ – фундамент. Но a_n не сходится в X

ОПРЕД-ИЕ 2: Пусть (X, ρ) – метрич. пр-во. Тогда (X, ρ) – полное (Банахово) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ имеет место импликация $(a_n, n \in \mathbb{N})$:

$((a_n), n \in \mathbb{N}$ – фундамент.$) \Rightarrow ((a_n)$ сходится$)$.

ПРИМЕРЫ:
1) $\mathbb{R}$ – полное, $\rho(x,y) = |x-y|$
2) $C[a,b]$, $(\|f\|_\infty := \max\limits_{[a,b]} f)$

$\|f-g\| := \max\limits_{[a,b]} |f-g|$ – полное ▶ X ◀ 3-й сем

3) $C[a,b]$, $\|f-g\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx}$ – неполно. ▶ X ◀

Рассм. евклидово пр-во $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$.

ТЕОРЕМА 2: Пусть $(a_m \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N})$ – послед-ть в $\mathbb{R}^n$, $a_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a = (a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} a_{mk} = a_k$, $k = \overline{1,n}$.

▶ 1) ($\Rightarrow$) $\exists \lim\limits_{m\to\infty} a_m = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} / \rho(a_m, a) =$

$= \sqrt{(a_{m1}-a_1)^2 + \ldots + (a_{mn}-a_n)^2} < \varepsilon,\ \forall m > N \Rightarrow \forall k \in \{1, \ldots, n\}$,

$|a_{mk} - a_k| = \sqrt{|a_{mk}-a_k|^2} \le \rho(a_m, a) < \varepsilon,\ \forall m > N \Rightarrow a_{mk} \to a_k,\ \forall k = \overline{1,n}$.

2) ($\Leftarrow$) $\exists\ a_{mk} \to a_k$ при $m \to \infty$, $k = \overline{1,m}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_k \in \mathbb{N} / |a_{mk} - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

Положим $N := \max\limits_{k=\overline{1,n}} N_k \Rightarrow \rho(a_m - a) < \sqrt{n\frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon, \forall m > N$ ◀

<u>СЛЕД-ИЕ</u>: Т.2 $\Rightarrow \mathbb{R}^n$ – полное пр-во $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) – метрические пр-ва.

<u>ОПРЕД-Е 1</u>: ∃ дано отобр-ие $f: A \subset X_1 \to X_2$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ($a \in A'$)
$\forall O(b)\ \exists\ \overset{\circ}{O}(a)$ / $f(x) \in O(b), \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap A$.
(в метрике ρ_2) (в метрике ρ_1)

<u>СЛЕД-ИЕ</u>: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \rho_2(f(x), b) < \varepsilon, \forall x \in A$ с условием $0 < \rho_1(x, a) < \delta \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \overset{\circ}{O}(a) / \rho_2(f(x), b) < \varepsilon, \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap A$.

Все теоремы о $\lim f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ переносятся на общий случай.

<u>ТЕОРЕМА 1</u>: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$ (единств. определения)

▶ ...

<u>ТЕОРЕМА 2</u>: $A \subset X_1$, $f: A \to X_2$, $a \in A'$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow$
$\forall$ послед-ти $(x_n \in X_1, n \in \mathbb{N}) / x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ имеем:
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

▶...

Рассм. частный случай $X_2 = \mathbb{R}^n$ (с евклидовой метр. ρ) и отображе-ие $f: X_1 \to \mathbb{R}^n$, т.е. $f: x \in X_1 \to f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ – „вектор-функция“.

Пункт 3. Функции двух переменных. Двойные и повторные пределы.

$X_1 = \mathbb{R}^2$, $X_2 = \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ $\quad (x,y) \in A$.

$f(x,y)$ – функция двух переменных.

Пусть $(x_0, y_0) \in A'$. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ – $\boxed{\text{двойной предел}}$ (1)

Фиксируем $y \neq y_0$ и рассмотрим предел $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$ $\forall y \neq y_0$

Если $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right) =: \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, то это – $\boxed{\text{повторный предел}}$ (2)

Если, наоборот, рассм. $f(x,\cdot): y \to f(x,y)$ $\forall x \neq x_0$ и $\exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \psi(x)$, то можно рассмотреть повторный предел в другом порядке (3)

$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right) =: \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

ПРИМЕРЫ: 1) $\exists$ (1), но $\nexists$ (2), $\nexists$ (3)

2) $\exists$(2), $\exists$(3), (2)=(3), но $\nexists$(1)

3) $\exists$(2), $\exists$(3), (2)$\neq$(3) и $\nexists$(1)

1) $$f(x,y) = \begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{y} + y\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{если } xy \neq 0 \\ 0, & \text{если } xy = 0 \end{cases} \qquad (x_0,y_0) = (0,0)$$

$|f(x,y)| \leq |x| + |y| \longrightarrow 0$ при $(x,y)\to(0,0) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

При фиксированном $x \neq 0$ $\nexists \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) \Longrightarrow \nexists$(3), аналогично $\nexists$(2)

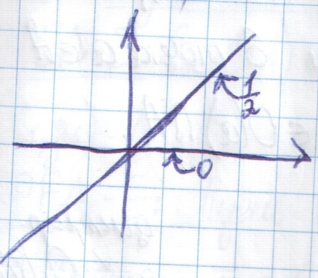
2) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$\forall x \neq 0$ $\quad \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.

$\forall y \neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$.

$f(x,0)=0, \quad f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



3) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$

$\forall x\neq 0 \quad \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow \exists(3)=1.$

$\forall y\neq 0 \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1 \Rightarrow \exists(2)=-1$

$\nexists(1): \; f(x,0)=1, \quad f(0,y)=-1.$

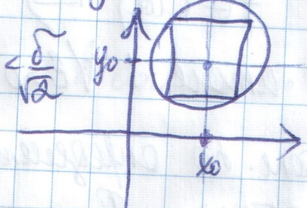
ТЕОРЕМА: Пусть $p_0=(x_0,y_0)\in A'$, $f: A\setminus\{p_0\}\to\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}^2$. Тогда

$\left(\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=b\right)\wedge\left(\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y) \quad \forall y\neq y_0\right) \Rightarrow \exists \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=b$

(аналогично в другом порядке)

▶ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=b \overset{def}{\Rightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \,/\, |f(x,y)-b|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x,y\in \dot{O}_\delta(x_0,y_0)\cap A$

Тогда $|f(x,y)-b|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x: 0<|x-x_0|<\frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad \forall y: 0<|y-y_0|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$



Переходим к $\lim\limits_{x\to x_0}$ $|\varphi(y)-b|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \,/\, |\varphi(y)-b|<\varepsilon \quad \forall y: 0<|y-y_0|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}.$

По определению это означает, что $\exists \lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=b$ ◀

§4. Непрерывные отображения в метрических пространствах.

Пункт 1. Непрерывность в точке.

$(X_1,\rho_1), (X_2,\rho_2)$ — метрические пр-ва, $A\subset X_1$, $f: A\to X_2$

Точка $a \in A$ называется $\boxed{\text{изолированной}}$ точкой, если $\exists O(a) / O(a) \cap A = \{a\}$

ОПРЕД-ИЕ: Отображение f называется непрерывным в точке $a \in A$ ($f \in C(a)$), если $\forall O(f(a))\ \exists\ O(a) / f(x) \in O(f(a))\ \forall x \in O(a) \cap A$.

Если a – изолированная точка, то $f \in C(a)$.

ЗАМЕЧ-Е: $O(f(a))$ и $O(a)$ в этом опред-ии можно заменить на центрир. $O_\varepsilon(f(a))$ и $O_\delta(a)$ соответственно.

ТЕОРЕМА 1 (предельный критерий непрерывности отображения в точке): Пусть $A \subset X_1$, $f: A \to X_2$, $a \in A \cap A'$. Тогда $f \in C(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

x – элемент метрич. пр-ва

Справедливы также теоремы о локальной огранич-ти, о сохранении знака, об арифметич. операциях для непрерывных отобр-ий (упр-ие).

ТЕОРЕМА 2 (о непрерывности композиции). Пусть (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2), (X_3, ρ_3) – метрич. пр-ва. $A \subset X_1$, $B \subset X_2$, $f: A \to B$, $g: B \to X_3$, $a \in A$, $b = f(a) \in B$. Если $f \in C(a)$, $g \in C(b)$, то $g \circ f \in C(a)$.

▶ $g \in C(b) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ O(b) / \rho_3(g(y), g(b)) < \varepsilon\ \ \forall y \in O(b) \cap B$

$f \in C(a) \Rightarrow \forall O(b) = O(f(a))\ \ \exists O(a) / f(x) \in O(f(a))\ \ \forall x \in O(a) \cap A$.

В итоге: $\forall \varepsilon > 0\ \exists O(a) / \rho_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon\ \ \forall x \in O(a) \cap A$, это означает по определению, что $g \circ f \in C(a)$ ◀

ТЕОРЕМА 3: Пусть $A \subset X_1$, $f: A \to X_2$, $a \in A \cap A'$. Тогда $f \in C(a) \Leftrightarrow \forall \{a_n\}: a_n \in A$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$.

▶ Следует из утвержд. теоремы об эквивалентности понятий предела по Коши и по Гейне, т.к. в случае $a_n = a$ при каких-то n $f(a_n) = f(a) \in O(f(a))$.

Пункт 2. Непрерывность отображения на всем пространстве.

<u>ОПРЕД-Е:</u> $f \in C(A) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f \in C(a)\ \forall a \in A$

$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ — метрические пр-ва, $f: X_1 \to X_2$

<u>ОПРЕД-Е:</u> Пусть $B \subset X_2$. Полным прообразом мн-ва B при отобр-ии f называется мн-во $f^{-1}(B) := \{x \in X_1 / f(x) \in B\}$

<u>ЗАМЕЧ-Е:</u> $f^{-1}(CB) = Cf^{-1}(B)$

Действительно $f^{-1}(CB) = \{x \in X_1 / f(x) \in CB\} = \{x \in X_1 / f(x) \notin B\} =$
$= \{x \in X_1 / x \notin f^{-1}(B)\} = \{x \in X_1 / x \in Cf^{-1}(B)\} = Cf^{-1}(B)$.

<u>ТЕОРЕМА</u> (критерий непрерывности отображения на всем пр-ве):

$f \in C(X_1) \Leftrightarrow (\forall B \subset X_2 ?\ B$ открытое, $f^{-1}(B)$ — также открытое множество$)$

▶ 1) Необходимость: докажем, что если $f \in C(X_1)$ и $B \subset X_2$ открыто, то $f^{-1}(B)$ открыто.

Пусть $x_0 \in f^{-1}(B)$, пусть $y_0 = f(x_0) \in B$. Т.к. B открыто, $\exists O(y_0) / O(y_0) \subset B$.

$f \in C(x_0) \Rightarrow$ для $O(y_0)$ $\exists O(x_0) / f(x) \in O(y_0)\ \forall x \in O(x_0) \Rightarrow O(x_0) \in f^{-1}(B)$.

Следовательно, $f^{-1}(B)$ открыто.

2) Достаточность: Пусть $f^{-1}(B)$ открыто $\forall B \subset X_2$, где B открыто. Докажем, что $f \in C(X_1)$, т.е. $\forall x_0 \in X_1$, $f \in C(x_0)$.

Пусть $x_0 \in X_1$, $y_0 = f(x_0) \in X_2$. Рассм. произвольную окрестность $O(y_0) := B \subset X_2$

Тогда $f^{-1}(B)$ открыто, причем $x_0 \in f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(B) = O(x_0)$.

Итак, $\forall O(y_0)\ \exists O(x_0) / f(x) \subset O(y_0)\ \forall x \in O(x_0)$ $\quad (f^{-1}(O(y_0)) = O(x_0))$.

Это и означает, что $f \in C(x_0)$. ◀

<u>СЛЕД-ИЕ:</u> $f \in C(X_1) \Leftrightarrow \forall B \subset X_2$, B замкнуто, $f^{-1}(B)$ также замкнуто.

▶ 1) Необходимость: Пусть $f \in C(X_1)$, B — замкнуто, $B \subset X_2$. Тогда $CB \subset X_2$ — открыто $\Rightarrow f^{-1}(CB)$ открыто $\Rightarrow Cf^{-1}(B)$ — открыто $\Rightarrow f^{-1}(B)$ — замкнуто.

2) Достаточность: Если $\forall B$ - замкнутого $f^{-1}(B)$ замкнуто, то $Cf^{-1}(B) = f^{-1}(CB)$ - открыто. Если B_1 - любое открытое мн-во $B_1 \subset X_2$, то CB_1 - замкнуто $\Rightarrow f^{-1}(B_1)$ открыто. В силу доказанной теоремы, $f \in C(X_1)$ ◀

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $f \in C(X_1)$

1) если $A \subset X_1$ - открыто, то $f(A)$, вообще говоря, необязательно открыто

$f(x) = \sin x$

$A = (0, 2\pi)$ $\quad f(A) = [-1, 1]$

2) если A - замкнуто, то $f(A)$, вообще говоря, не обязательно замкнуто: $\quad f(x) = e^x$

$A = \mathbb{R}$ $\quad f(A) = (0; +\infty)$.

Пункт 3. Непрерывность вектор-функции.

Пусть (X_1, ρ_1) - метр. пр-во, $A \subset X_1$, $f: A \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

Свойства вектор-функции f можно изучать по свойствам ее компонент.

ТЕОРЕМА: Пусть $f: A \to \mathbb{R}^n$. Тогда $f \in C(A) \Leftrightarrow f_i(x) \in C(A)$, $\forall i = 1, \dots, n$

▶ Пусть $a \in A$.

1) Если a - изолированная точка, то $f \in C(a)$ и $f_i \in C(a)$ $\forall i = 1, \dots, n$.

2) Если $a \in A \cap A'$, то $f \in C(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f_i(x) = f_i(a)$ $\forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow f_i \in C(a)$ ◀

§5. Компактность.

Пункт 1. Определение и основные свойства компактов.

(X,ρ) — метрическое пространство. $K\subset X$

Открытым покрытием K называется $\{U_\alpha \subset X\}$ / (U_α — открыто) $\wedge$ $\wedge$ $(\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \supset K)$.

ОПРЕД-ИЕ: Пусть $K\subset X$. Мн-во K называется компактным множеством (компактом), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

ПРИМЕР: 1) $X=\mathbb{R}$, $K=[a,b]$ — компакт

2) X — метр. пр-во, $K=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ — компакт.

ЛЕММА: Пусть $A\subset X$. Тогда $a\in A' \Longleftrightarrow \exists\{x_n\in A, n\in\mathbb{N}\} / \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, x_n\neq a$.

▶ 1) Необходимость: Пусть $a\in A'$. Для $\varepsilon=\frac{1}{n}$ рассм. $\dot{O}_{\frac{1}{n}}(a)$. Тогда $\exists x_n\in \dot{O}_{\frac{1}{n}}(a)$, $x_n\neq a$. Получаем послед-ть $\{x_n\}$, $x_n\neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2) Достаточность: Пусть $\exists\{x_n\in A, n\in\mathbb{N}\} / \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} / 0<\rho(x_n,a)<\varepsilon$ $\forall n>N$. Тогда $x_n\in\dot{O}_\varepsilon(a)$. Если $\dot{O}(a)$ — произвольная окр-ть, то $\exists\dot{O}_\varepsilon(a)\subset\dot{O}(a) \Rightarrow x_n\in\dot{O}(a)\ \forall n>N(\varepsilon) \Rightarrow a\in A'$ ◀

ТЕОРЕМА 1 (о существовании предельной точки): Пусть $K\subset X$, K — компакт. $A\subset K$, A бесконечно. Тогда $\exists a\in A'\cap K$.

▶ От противного: допустим, $A'\cap K=\varnothing$. Возьмем $\forall x\in K \Rightarrow x\notin A' \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\dot{O}(x) / \dot{O}(x)\cap A=\varnothing$. Тогда $\{\dot{O}(x) / x\in K\}$ есть открытое покрытие мн-ва K $\Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие $\{O(x_k) / k=1,\dots,m\} / \bigcup\limits_{k=1}^{m} O(x_k)\supset K\supset A$. Тогда в мн-ве A не более чем m точек $\Rightarrow A$ — конечное. Противоречие ◀

(X,ρ) — метр. пр-во

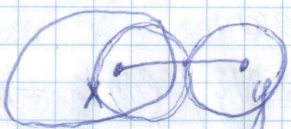
ТЕОРЕМА 2 (ограниченность и замкнутость компакта):

$\exists K\subset X$, K — компакт $\Rightarrow$ K ограничено и замкнуто.

▶ 1) Докажем, что K — ограничено. Рассм. систему $\{B(x_0,n), n\in\mathbb{N}\}$, где $x_0\in X$ — фикс. произв-но. Система $\{B(x_0,n), n\in\mathbb{N}\}$ — открытое покрытие всего X. (Если не покрывает, то $\exists\, x\in X \,/\, x\in B(x_0,n),\ \forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow \rho(x,x_0)\geq n,\ \forall n\in\mathbb{N} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \rho(x_0,x)=\infty \Rightarrow$ противоречие, т.к. $\rho(x_0,x)$ — конечное число.)

$\Rightarrow$ в частности $(*)$ — открытое покрытие K, т.к. K — компакт, то $\exists$ конечное подпокрытие $\{B(x_0,n_k),\ k=1,..,m\}$, где $n_1<n_2<\ldots<n_m \Rightarrow$ $\Rightarrow K\subset B(x_0,n_m) \Rightarrow K$ ограничено.

2) Докажем, что K — замкнуто. Достаточно доказать, что $CK = X\setminus K$ — открыто: Пусть $y\in CK$ — фикс. произв-но. Докажем, что $\exists\, O(y)\subset CK$. Рассм. произв-но $x\in K$. Обозначим $\delta(x):=\rho(x,y)>0$.



Имеем $B\left(x;\frac{\delta(x)}{2}\right)\cap B\left(y;\frac{\delta(x)}{2}\right)=\varnothing \quad (**)$

Система $\left\{B\left(x;\frac{\delta(x)}{2}\right),\ x\in K\right\}$ — открытое покрытие K. Т.к. K — компакт, $\exists$ конечное подпокрытие $\left\{B\left(x_k;\frac{\delta(x_k)}{2}\right),\right.$ $\left.k=\overline{1,m}\right\}$. Положим $\delta:=\min\limits_{k=\overline{1,m}}\frac{\delta(x_k)}{2}$. Тогда $B(y;\delta)\cap B\left(x_k,\frac{\delta(x_k)}{2}\right)=\varnothing$, $k=\overline{1,m}$. по опред. $\delta(x_k)$ см $(**)$ $\Rightarrow B(y;\delta)\cap K=\varnothing \Rightarrow B(y;\delta)\subset CK$ ◀

ЗАМЕЧ-ИЕ: $K\subset X$, K — ограничено и замкнуто $\overset{в.с.}{\not\Rightarrow}$ K — компакт (см. ниже)

ТЕОРЕМА 3 (компактность замкнутого подмножества компакта): Пусть $A\subset K\subset X$, K — компакт, A — замкнуто $\Rightarrow A$ — компакт.

▶ Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие A. Рассм. систему $\{U_\alpha, \underbrace{CA}_{открыто}\}$ — открытое покрытие $X \Rightarrow$ эта система — открытое покрытие K. Т.к. K — компакт, то можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{\alpha_k}, CA, k=1,..,m\}$ компакта K. Но $A\subset K \Rightarrow A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}U_{\alpha_k}$ — открытое покрытие A (конечное подпокрытие) ◀

Пункт 2. Компактность в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕД-ИЕ 1: Мн-во $I:=\{\underset{(x_1,\ldots,x_n)}{x}\in\mathbb{R}^n \,/\, a_k\leq x_k\leq b_k,\ k=\overline{1,n},\ b_k>a_k\}$

называется (n-мерной) клеткой (брусом, пар-ом, замкнутым пр-ком)

Очевидно, что I - обобщенный отрезок для $n \geq 2$.

ОПРЕД-ИЕ 2: Система клеток $\{I_m, m\in\mathbb{N}\}$ - система вложенных клеток $\overset{def}{\iff} I_{m+1}\subset I_m, \forall m\in\mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1 (о системе вложенных клеток):

Пусть $\{I_m, m\in\mathbb{N}\}$ - система вложенных клеток $\Rightarrow \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} I_m \neq \varnothing$.

▶ Пусть $I_m = [a_1^{(m)}, b_1^{(m)}]\times[a_2^{(m)}, b_2^{(m)}]\times\ldots\times[a_k^{(m)}, b_k^{(m)}]\times\ldots\times[a_n^{(m)}, b_n^{(m)}]$.

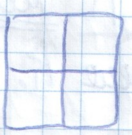
Фиксируем произвольно $k\in\{1,..,n\}$. Система отрезков $\{[a_k^{(m)}, b_k^{(m)}], m\in\mathbb{N}\}$ - система вложенных отрезков $\xRightarrow{\text{лемма}} \exists c_k\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}[a_k^{(m)}, b_k^{(m)}] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка $c := (c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_n)\in I_m, \forall m\in\mathbb{N} \Rightarrow c\in\bigcap\limits_{1}^{\infty} I_m$ ◀

ТЕОРЕМА 2 (компактность n-мерной клетки):

I - n-мерная клетка $\Rightarrow$ I - компакт.

▶ От противного: $\exists\{U_\alpha\}$ - открытое покрытие клетки I / $\{U_\alpha\}$ не допускает выделения конечного подпокрытия. Разделим $[a_k, b_k]$ пополам $\forall k=\overline{1,n}$ $\Rightarrow$ получим 2^n меньших клеток. Обозначим:



I_2 - та из меньших клеток, которая не допускает конечного подпокрытия.

Продолжая этот процесс, получаем систему влож. клеток $\{I_m, m\in\mathbb{N}\}$, $I_1 := I$. По Т.1 $\Rightarrow \exists c\in I_m, \forall m\in\mathbb{N}$. Но $c\in I \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\alpha$ / $c\in U_\alpha$ - открытое множество. $\Rightarrow \exists O(c)\subset U_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists m$ / $I_m\subset O(c)\subset U_\alpha \Rightarrow$ клетка I_m покрывается одним мн-вом $U_\alpha \Rightarrow$ противоречие с опред-ием $I_m \Rightarrow \{U_\alpha\}$ допускает выделение конечного подпокрытия ◀

ТЕОРЕМА 3 (критерий компактности в $\mathbb{R}^n$): Пусть $K\subset\mathbb{R}^n$. Тогда K - компакт $\iff$ (K - ограничено) $\wedge$ (K - замкнуто).

▶ 1 ($\Rightarrow$) K - компакт $\Rightarrow$ K - ограничено и замкнуто. Д-но ранее.

② ($\Leftarrow$) $\exists K$ ограничено и замкнуто. Т.к. K - ограничено $\Rightarrow \exists$ клетка $I / K \subset I$.
Имеем: K - замкнутое подмнож-во компакта $I \overset{\text{по Т.}}{\Longrightarrow} K$ - компакт ◀

ЗАМЕЧ-ИЕ: $K \subset \underset{(\text{не } \mathbb{R}^n)}{X}$ - метрическ. пр-во, K - огранич. и замкнуто $\overset{\text{в.с.}}{\not\Rightarrow} K$ - компакт

Например, $\exists\ X$ - мн-во всех ограниченных послед-ей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ с $\|x\| := \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$, $\rho(x,y) := \|x - y\|$.

Рассмотр. мн-во $K := \{e^{(m)} \in X, m \in \mathbb{N}\}$, где $e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, т.е.

$e^{(m)} := (\underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{m}, 0, \ldots)$

вводя символ Кронекера $\delta_{mk} = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$ $m, k \in \mathbb{N}$, можно записать, что $e^{(m)} = (e_1^{(m)}, \ldots, e_k^{(m)}, \ldots)$, где $e_k^{(m)} = \delta_{mk}$.

Имеем: • K - ограничено, т.к. $\|e^{(m)}\| = 1$, $\forall m$

• K - замкнуто, т.к. $K' = \varnothing$. В самом деле, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\overset{\circ}{O}_{\frac{1}{2}}(e^{(m)}) \cap K = \varnothing$, т.к. $\|e^{(m)} - e^{(l)}\| = 1$, $m \neq l$

Итак, $K' \subset K \Rightarrow K$ - замкнуто.

Но K - не компакт: рассм. сист-му $\{O_{\frac{1}{2}}(e^{(m)}), m \in \mathbb{N}\}$ - открытое покрытие K.

Предположим, что $\exists$ конечное подпокр-е $\{O_{\frac{1}{2}}(e^{(m_s)}), s = 1, \ldots, l\}$

Рассм. $e^{(m_0)} \in K$, где $m_0 \notin \{m_1, \ldots, m_l\}$. Тогда $\|e^{(m_0)} - e^{(m_s)}\| = 1 > \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow e^{(m_0)}$ не принадлежит откр. подпокр-ю ◀

§7. Непрерывность на компакте.

Пункт 1. Сохранение компактности при непрерывном отображении.

ЗАМЕЧ-ИЕ: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ▶...

Рассм. два метрических пр-ва (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2).

ТЕОРЕМА (о сохран-ии компактности при непрерывном отобр-ии):

$\exists K \subset X_1$, K-компакт, $f: K \to X_2$, $f \in C(K) \Rightarrow f(K)$ - компакт в X_2.

▶ $\exists \{V_\alpha\}$ - произвольн. открытое покр-ие $f(K)$. Рассм. произв-но фиксированный $x \in K$. Тогда $f(x) \in f(K) \Rightarrow \exists \alpha / f(x) \in V_\alpha \xrightarrow{\text{т.к. } V_\alpha \text{ - открыто}} \exists O(f(x)) \subset V_\alpha$.

$\Rightarrow$ т.к. $f \in C(x)$ $\exists O(x) / \underline{f(O(x))} \overset{\cap K}{\subset} O(f(x)) \subset \underline{V_\alpha}$. (1) можно выбрать для каждого x

Рассм. сист-му $\{O(x), x \in K\}$ - открытое покрытие K. Т.к. K-компакт, $\exists$ конечное подпокр-е $\{O(x_i), i = 1,..,m\}$, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} O(x_i)$. Тогда

$f(K) = f(\bigcup\limits_{i=1}^{m}(O(x_i) \cap K)) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} f(O(x_i) \cap K) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_{\alpha_i} \Rightarrow \{V_{\alpha_i}, i = \overline{1,m}\}$ - конечное подпокр-ие ◀

↑ см. (1)

СЛЕДСТВИЯ: ① Условия ТЕОР. $\Rightarrow f(K)$ - огранич-е мн-во $\Rightarrow f$ - огранич. отобр-е (см. 1-ую теор. Вейерштр.)

② Условия ТЕОР. $X_2 = \mathbb{R}$ (т.е. $f: K \to \mathbb{R}$ - функция) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in K / f(x_1) = \sup\limits_K f$, $f(x_2) = \inf\limits_K f$ sup $\exists$ в силу 1-го след-ия

▶ $\exists y = \sup\limits_K f$. Тогда $\exists y_n \in f(K), n \in \mathbb{N} / |y_n - y| < \frac{1}{n} \Rightarrow y_n \to y \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in [f(K)]'_{\text{т.к.}} \subset f(K) \Rightarrow \exists x \in K / y = f(x)$ ◀

∀ проколот. окр-ть $\neq \emptyset$ ↑ т.к. $f(K)$ - замкнуто

Пункт 2. Равномерная непрерывность.

Рассм. два метрич. пр-ва (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2).

ОПРЕД-ИЕ: $\exists A \subset X_1$, $f: A \to X_2$. Тогда f - $\boxed{\text{равномерно непрерывна}}$ на A $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 / \rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ $\forall x, y \in A$ с условием $\rho_1(x,y) < \delta$.

ТЕОРЕМА: $\exists K \subset X_1$, K - компакт, $f: K \to X_2$, $f \in C(K) \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на K.

▶ $\exists \varepsilon > 0$ произв-но, $\exists x \in K$ - произв-но. Т.к. $f \in C(x)$, $\exists \delta(x) > 0 /$ $\rho_2(f(\bar{x}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall \bar{x} \in K$ с условием $\rho_1(\bar{x}, x) < \delta(x)$.

Рассм. сист-му окрестн-й $\{O_{\frac{\delta(x)}{2}}(x), x\in K\}$ – открытое покрытие компакта $K \Rightarrow \exists$ конечное подп-ие $\{O_{\frac{\delta_i}{2}}(x_i), i=1,..,m\}$, где $\delta_i := \delta'(x_i)$. Положим $\delta' := \min\limits_{i=\overline{1,n}} \frac{\delta_i}{2}$ (конечность). Пусть $x,y\in K$ с условием $\rho_1(x,y)<\delta'$. Т.к. $x\in K$, то $\exists i\in\{1,..,m\} / x\in O_{\frac{\delta_i}{2}}(x_i)$. Тогда $\rho_1(y,x_i) \le \rho_1(y,x) + \underbrace{\rho_1(x,x_i)}_{<\frac{\delta_i}{2}} < \delta' + \frac{\delta_i}{2} \le \delta_i \Rightarrow y\in O_{\delta_i}(x_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_2(f(y), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $\rho_2(f(x),f(y)) \le \underbrace{\rho_2(f(x), f(x_i))}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\rho_2(f(x_i), f(y))}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$ ◀

§8. Связные множества и непрерывность.

I – промежуток в $\mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (I-полуинтервал) $\vee$ (I-интервал) $\vee$ $\vee$ (I-отрезок)

ОПРЕД-ИЕ1: $\exists I$ – промежуток в $\mathbb{R}$.

① $\boxed{\text{Непрерывное отобр-е}}$ $\varphi: I\to\mathbb{R}^n$ назыв. путем в $\mathbb{R}^n$.

② Если $I=[\alpha,\beta]$, то точки $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$ назыв. $\boxed{\text{концами}}$ пути, или $\varphi(\alpha)$ – начало и $\varphi(\beta)$ – конец пути.

ОПРЕД-ИЕ2: $\exists A\subset\mathbb{R}^n$. Тогда A – $\boxed{\text{(линейно) связно}}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a,b\in A$ $\exists$ путь $\varphi:[\alpha,\beta]\to A / \varphi([\alpha,\beta])\subset A$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

ТЕОРЕМА (о промежуточных значениях непрер-ой ф-ии):
$\exists A\subset\mathbb{R}^n$, A – (линейно) связно, $f: A\to\mathbb{R}$, $f\in C(A)$. ~~Тогда~~ Пусть $\forall$ $a,b\in A$, $f(a)<f(b)$. Тогда $\forall M\in(f(a),f(b))\ \exists c\in A / f(c)=M$.

▶ $\exists M\in(f(a),f(b))$. Рассм. композицию $f\circ\varphi: [\alpha,\beta]\to f(A)\subset\mathbb{R}$. Тогда (см. теорему о непр-ти композ-ии) $f\circ\varphi\in C[\alpha,\beta]$, причем $(f\circ\varphi)(\alpha)=f(a)<f(b)=(f\circ\varphi)(\beta)$. Тогда (теор. о промеж. зн-ях I сем.) $\exists\gamma\in(\alpha,\beta) / (f\circ\varphi)(\gamma)=f(\underbrace{\varphi(\gamma)}_{=c})=M \Rightarrow \exists c=\varphi(\gamma)\in A / f(c)=M$ ◀ (т.к. A – лин. связно)

Глава 2. Дифференциальное исчисление функций многих переменных в $\mathbb{R}^n$.

§1. Производные и дифференциалы первого порядка.

Пункт 1. Частные производные первого порядка.

⅃ $A\subset\mathbb{R}^n$, $A_i = A$ (т.е. A – открыто), ⅃ $x\in A$.

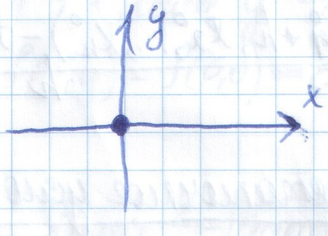
ОПРЕД-ИЕ: ⅃ $x=(x_1,\dots,x_n)\in A$, $f: A\to\mathbb{R}$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = f'_{x_k}(x) = \partial_k f(x) =$ $\boxed{\text{частная произв-ая } f \text{ по } x_k \text{ в т. } x}$.

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)}{h}$ (если этот $\lim \exists$), где $k\in\{1,\dots,n\}$

ЗАМЕЧ-ИЕ: $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x),\ \forall k\in\{1,\dots,n\} \overset{в.г.}{\not\Rightarrow} f\in C(x)$.

Например, $n=2$,

$$f(x,y):=\begin{cases}1, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$



$f\notin C(0,0)$. Но $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Пункт 2. Дифференциал первого порядка.

⅃ $A\subset\mathbb{R}^n$, $A_i=A$, $x^0\in A=A_i$

ОПРЕД-ИЕ: ⅃ $f: A\to\mathbb{R}$. Тогда:

1) f $\boxed{\text{дифф-ма}}$ в точке $x^0\in A \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x)-f(x^0)=\sum\limits_{k=1}^{n} A_k(x_k-x_k^0)+\bar{o}(\|x-x^0\|)$ (1)
при $x\to x^0$, где $A_k\in\mathbb{R}$ – некот. пост-е. ($f\in D(x^0)$).

2) ⅃ $f\in D(x^0)$. Тогда выражение $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k(x_k-x_k^0)$ (главная линейная часть $\underbrace{\text{приращения}}_{f(x)-f(x_0)}$, наз. $\boxed{\text{дифф-лом}}$ функции f в точке x^0.

ЗАМЕЧ-ИЕ: в 1) в ОПР. значит след-ее:
$\exists\, O(x_0)$ / верно (1) $\forall x\in O(x_0)$.

ТЕОРЕМА 1 (непрерывность дифф-ой ф-ции): ⅃ $A\subset\mathbb{R}^n$, $A_i=A$, $x^0\in A$, $f: A\to\mathbb{R}$, $f\in D(x^0)$. Тогда $f\in C(x^0)$.

▶ $x^0 \in A_i \Rightarrow x^0 \in A' \Rightarrow \left\{ \left(f \in C(x^0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \right) \right\}$.

Имеем: $f(x) - f(x_0^0) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k (x_k - x_k^0) + \bar{o}(\|x - x^0\|) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \Rightarrow$

т.к. $f \in D(x^0)$ норма м.б. любой

$\Rightarrow f \in C(x^0)$ ◀

СЛЕД-ИЕ: $\exists \frac{\partial f}{\partial x^k}(x^0) \overset{\text{в.ч.}}{\not\Rightarrow} f \in D(x^0)$, $\forall k \in \{1,..,n\}$ (необход. услов. дифф)

ТЕОРЕМА 2: $f \in D(x_0) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x^k}(x^0)$, $\forall k \in \{1,..,n\}$. Причем

$\frac{\partial f}{\partial x^k}(x^0) = A_k$, $k = \overline{1,n}$ (см. (1)).

▶ Для определенности, $\exists$ $k = 1$.

Имеем $\frac{f(x_1^0 + h, x_2^0, ..., x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)}{h} = \frac{A_1 \cdot h + \bar{o}(\|h\|)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} A_1$ ◀

см. (1)

ТЕОРЕМА 3 (достаточное условие дифф-ти): $\exists f: A \to \mathbb{R}$, $x^0 \in A_i = A_0$ выполнены условия

1) $\exists O(x^0) / \exists \frac{\partial f}{\partial x^k}(x)$, $\forall k = \overline{1,n}$, $\forall x \in O(x^0)$;

2) $\frac{\partial f}{\partial x^k} \in C(x^0)$, $\forall k = \overline{1,n}$

$\Rightarrow f \in D(x^0)$, причем $A_k = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0)$

▶ Имеем: $f(x) - f(x_0) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) =$ (для $x \in O(x_0)$ (из услов. т))

~~$= [f(x_1, x_2^0, .., x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, .., x_n^0)] + ...$~~

$= [f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)] + [f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0 + \Theta_1(x_1 - x_1^0), x_2)(x_1 - x_1^0) +$

$+ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0 + \Theta_2(x_2 - x_2^0)) \cdot (x_2 - x_2^0)] = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) + \bar{o}(1)\right)(x_1 - x_1^0)\right] +$

т.к. $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in C(x_0)$

$+ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) + \bar{o}(1)\Big](x_2 - x_2^0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)}_{=:A_1}(x_1 - x_1^0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)}_{=:A_2}(x_2 - x_2^0) + \bar{o}(\|x - x^0\|)$, $x \to x_0$. ◀

Задача: доказать для $\forall n \geq 3$.

ЗАМЕЧ-ИЕ: Пусть $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(x), \forall x \in O(x^0), k=\overline{1,n}, f \in C(x^0) \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in \mathcal{D}(x^0)$

Например, $n=2$, $f(x,y) := \sqrt{|xy|}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Тогда $\underline{f \in C(0,0)}$.

Далее

- если $xy \neq 0$, $x^2+y^2 \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{sign \cdot |y|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{1/2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\to} 0$

  $\frac{\partial f}{\partial y} \not\to 0$, $(x,y) \to 0$

- если $xy = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Следоват-но, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \notin C(0,0)$.

$\not\Rightarrow f \notin \mathcal{D}(0,0)$

(не вып. услов. теор)

Имеем: $f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{0} = f(x,y) = \sqrt{|xy|} = x$, если $y = x > 0$

С другой стороны, если $f \in \mathcal{D}(0,0)$, но $f(x,y) - f(0,0) = 0 + \bar{o}(\|x-y\|)$

$\Longrightarrow f \notin \mathcal{D}(0,0)$.

ОПРЕД-ИЕ 2: $\exists A \subset \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A_i = A$, $f: A \to \mathbb{R}^m$. Тогда f – $\boxed{\text{дифф-ема}}$ в точке $x^0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} f_l : A \to \mathbb{R}$ дифф-ема в т. x^0, $l = \overline{1,m}$.

$\exists f: x \in A \to f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$, $\exists f \in \mathcal{D}(x^0) \Longrightarrow \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)$, $\forall i = \overline{1,n}$, $\forall j = \overline{1,m}$.

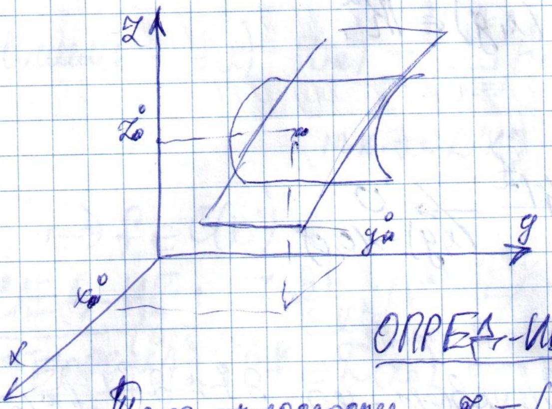
Матрица $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right\|_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$ – называется матрицей Якоби.

Если $m=n$, то определитель матрицы Якоби называется $\boxed{\text{якобианом}}$ $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$.

ПРИМЕР: Рассм. $f: (r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to f(r,\varphi) = (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2$

Тогда $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$.

Пункт 3. Геометрический смысл дифференциала



Урав-ие плоскости, проходящей через точку $(x^0; y^0; z^0)$ имеет вид

$z - z^0 = A(x - x^0) + B(y - y^0)$, $A, B \in \mathbb{R}$

или $z = L(x,y)$, где $L(x,y) := z^0 + A(x - x^0) + B(y - y^0)$

ОПРЕД-ИЕ 1: $\exists f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x^0; y^0) \in \Omega$, $\Omega_i = \Omega$.

Тогда плоскость $z = L(x,y)$, проходящ. через точку $(x^0; y^0; z^0)$, где $z^0 = f(x^0; y^0)$ назыв. $\boxed{\text{касательной плоскостью}}$ к графику ф-ии f в точке $(x^0; y^0; z^0)$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(x,y) - L(x,y) = \bar{o}(\|(x,y) - (x^0; y^0)\|)$ при $(x,y) \to (x^0; y^0)$.

ТЕОРЕМА: $\exists \Omega = \Omega_i$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x^0; y^0) \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$.

Тогда $\exists$ касательная плоскость к графику f в т. $(x^0; y^0; z^0)$, где $z^0 = f(x^0; y^0) \Leftrightarrow f \in D(x^0; y^0)$, причем $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0; y^0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x^0; y^0)$.

▼ ① $(\Rightarrow)$ $\exists$ $\exists$ касательн. пл-ть к графику f в т. $(x^0; y^0; z^0)$. Тогда

$f(x,y) - \underbrace{f(x^0; y^0)}_{= z^0} - A(x - x^0) - B(y - y^0) = \bar{o}(\|(x,y) - (x^0; y^0)\|)$ при $(x,y) \to (x^0; y^0)$

$\Rightarrow f \in D(x^0; y^0)$

② $(\Leftarrow)$ $\exists f \in D(x^0; y^0) \Rightarrow \exists A, B \,/\, A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0; y^0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0; y^0)$ и справедливо представление

$f(x,y) - \underbrace{z^0 - A(x - x^0) - B(y - y^0)}_{=: L(x,y)} = \bar{o}(\|(x - y) - (x^0; y^0)\|)$, $(x,y) \to (x^0; y^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ касательная плоскость в точке $(x^0; y^0; z^0)$. ◀

ОПРЕД-ИЕ 2: $\exists$ выполнены условия теоремы $f \in D(x^0; y^0)$. Тогда нормалью к графику ф-ии в точке $(x^0; y^0)$, называется прямая, проходящая через точку $(x^0; y^0; z^0)$ параллельно вектору $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^0; y^0), \frac{\partial f}{\partial y}(x^0; y^0), -1\right)$.

§2. Дифференцирование сложной функции.

ТЕОРЕМА: $\exists\, \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \Omega_i = \Omega,\ x^\circ \in \Omega,\ \underset{\text{отображение}}{f: \Omega \to \mathbb{R}^m}$,

$g: \Omega^* \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, где $\Omega^* = \Omega^*_i$, $y^\circ = f(x^\circ) \in \Omega^*$, причем $f \in D(x^\circ),\ g \in D(y^\circ) \Rightarrow$

$\Rightarrow h: g \circ f \in D(x_0)$ $\qquad f = (f_1, f_2)$

▶ Имеем: $h(x) - h(x_0)$ запишем в виде $g(f(x)) - g(\underbrace{f(x^\circ)}_{=y^\circ}) \overset{\text{т.к. } g \in D(y^\circ)}{=}$

(для простоты $m=n=2$)

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^\circ)\left[f_1(x) - f_1(x^\circ)\right] + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^\circ)\left[f_2(x) - f_2(x^\circ)\right] + \underbrace{\bar{o}(\|f(x) - f(x^\circ)\|)}_{=\bar{o}(\|x - x_0\|)} =$$

$$\underset{\text{т.к. } f \in D(x_0)}{=} \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^\circ)\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^\circ)(x_1 - x_1^\circ) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^\circ)(x_2 - x_2^\circ) + \bar{o}(\|x - x^\circ\|)\right] +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^\circ)\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^\circ)(x_1 - x_1^\circ) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^\circ)(x_2 - x_2^\circ) + \bar{o}(\|x - x^\circ\|)\right] + \bar{o}(\|x - x_0\|) =$$

$$= \overbrace{\left[\frac{\partial g}{\partial y_1}(y^\circ)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^\circ) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^\circ)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)\right]}^{=:A}(x_1 - x_0) + \overbrace{\left[\frac{\partial g}{\partial y_1}(y^\circ)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^\circ) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^\circ)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)\right]}^{=:B}(x_2 - x_2^\circ) +$$

$$+ \bar{o}(\|x - x^\circ\|),\ x \to x^\circ \quad (1) \quad \Rightarrow h \in D(x^\circ)$$ ◀

СЛЕДСТВИЯ: (1) Условия теоремы выполнены, $n = m = 2$. Тогда

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^\circ) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^\circ)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^\circ)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^\circ) = \ldots$$

(2) Инвариантность формы 1-го дифференциала:

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^\circ)\underbrace{\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^\circ)(x_1 - x_1^\circ) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^\circ)(x_2 - x_2^\circ)\right]}_{df_1 (= dy_1)} + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^\circ)\underbrace{\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^\circ)(x_1 - x_1^\circ) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^\circ)(x_2 - x_2^\circ)\right]}_{df_2 = (dy_2)} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(y^\circ)df_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^\circ)df_2.$$

(3) Правила дифференцирования:

a) $\exists f_1, f_2 \in D(x^\circ)$, $x^\circ \in A = A_i$ $\Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in D(x_0)$, $d(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 df_1 + \alpha_2 df_2$ (пользуемся инвариантн.)

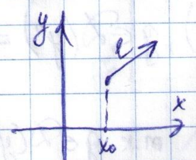
b) $d(f_1 \cdot f_2) = f_1 df_2 + f_2 df_1$.

c) $d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{1}{f_2} df_1 - \frac{f_1}{(f_2)^2} df_2 = \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{f_2^2}$, $\quad f_2(x^\circ) \neq 0$

§3. Производная по направлению. Градиент.

ОПРЕД-ИЕ 1: $\exists A\subset\mathbb{R}^n$, $A=A_i$, $x^0\in A$, $f:A\to\mathbb{R}$, $l=(\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n)=(l_1,\ldots,l_n)$

Тогда $\frac{\partial f}{\partial l}(x^0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x^0+tl)-f(x^0)}{t}$, если этот $\lim\ \exists$.



ТЕОРЕМА: $\exists A\subset\mathbb{R}^n$, $A=A_i$, $x^0\in A$, $f:A\to\mathbb{R}$, $f\in D(x^0)\Rightarrow\forall l=(l_1,\ldots,l_n)=(\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n)$

$\exists\frac{\partial f}{\partial l}(x^0)=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)\cdot\cos\alpha_j.$

▶ $f\in D(x^0)\Rightarrow\frac{f(x^0+tl)-f(x^0)}{t}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)(x_j-x_j^0)+\overline{o}(\|x-x^0\|)}{t}=$ $\quad x_j=x_j^0+\cos\alpha_j\cdot t$

$=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)\,t\cos\alpha_j}{t}+\overline{o}(1)\to\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\cos\alpha_j.$ $\quad A\in\mathbb{R}^n$

ОПРЕД-ИЕ 2: $A=A_i$, $x^0\in A$, $f:A\to\mathbb{R}$, $\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$, $\forall i=\overline{1,n}$.

Тогда $\operatorname{grad} f(x^0)=\nabla f(x^0):=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right)$.

ЗАМЕЧ-ИЯ: ① Условие опред-ия 2, $f\in D(x^0)\xrightarrow{\text{ТЕОРЕМА}}\frac{\partial f}{\partial l}(x^0)=(\operatorname{grad} f(x^0),l)$. (1)

② Формула (1) $\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial l}(x^0)=|\operatorname{grad} f(x^0)|\cdot\cos\varphi$, где φ − угол ~~между~~ $(\operatorname{grad} f(x^0)\hat{,}\ l)\Rightarrow$ наибольшая скорость изменения f достигается на $l=\operatorname{grad} f(x^0)$.

§4. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пункт 1. Теорема о смешанных производных.

ОПРЕД-ИЕ: $\exists A_i=A$, $x^0\in A$, $f:A\to\mathbb{R}$, $\exists i\in\{1,\ldots,n\}$, $\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}:O(x^0)\to\mathbb{R}$.

Тогда 1) $\frac{\partial f}{\partial x_j x_i}(x^0):=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x^0)$, если $j\in\{1,\ldots,n\}$

2) $i\neq j\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^0)=f_{x_i x_j}(\ )=\partial_{ij}f(x^0)$ назыв. смешанной произв-ой (2 порядка).

3) Обозн. $(i=j)\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=:\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\ )$

ОПРЕД-Е 1': 1) Обобщ. на пр-ю любого порядка ≥ 3;

2) $\begin{cases} \text{Пусть } K=(K_1,\dots,K_n), \text{ где } k_i \text{ целые} \geq 0 \ (\text{т.е. } K\in \mathbb{N}^n_0) - \boxed{\text{мультииндекс}} \\ |K| := K_1+\dots+K_n \\ \forall \sigma\in \mathbb{R}^n, \ \sigma^K := \sigma_1^{k_1}\dots\sigma_n^{k_n} \end{cases}$

Тогда $\partial^K f(x_0) := \dfrac{\partial^{|K|} f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}(x^0)$.

ЗАМЕЧ-Е: Возможно, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$.

Например, $f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Тогда $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

▶ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underset{x}{0},\underset{y}{0}) := \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \overset{0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}}{y} =$

Но: $y\neq 0$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,y) - \overset{0}{f(0,y)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y$.

$y=0$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overset{0}{f(x,0)} - \overset{0}{f(0,0)}}{x} = 0 \implies$

$\implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y}{y} = -1$

С другой стороны, аналогично получаем $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. ◀

ТЕОРЕМА 1 (Шварца): Пусть $x^0\in\mathbb{R}^2$, $f: O(x^0)\to\mathbb{R}$, $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$: $O(x^0)\to\mathbb{R}$, причем $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} \in C(x^0)$. Тогда $\underbrace{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x^0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x^0)}_{(1)}$

▶ Введем ф-цию $F(h_1,h_2) := f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2) - f(x_1^0+h_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0+h_2) + f(x_1^0, x_2^0)$, h_1, h_2 - достаточно малы.

1) Определим ф-цию одной перем-ной
$\varphi(t) := f(x_1^0+th_1, \underset{\text{фиксировано}}{x_2^0+h_2}) - f(x_1^0+th_1, x_2^0)$.

Тогда $F(h_1,h_2) = \varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\Theta_1)(1-0) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0+\Theta_1 h_1, x_2^0+h_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0+\Theta_1 h_1, x_2^0)\right] h_1 =$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1^\circ + \Theta_1 h_1, x_2^\circ + \Theta_2 h_2)\right] \cdot \underbrace{(x_2^\circ + h_2 - x_2^\circ)}_{h_2} \cdot h_1, \text{ где } 0 < \Theta_1, \Theta_2 < 1.$$

2) Определим ф-ию:

$\psi(t) := f(x_1^\circ + h_1, x_2^\circ + t h_2) - f(x_1^\circ, x_2^\circ + t h_2)$.

Тогда $F(h_1, h_2) = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(\overline{\Theta}_2) \cdot 1 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^\circ + h_1, x_2^\circ + \overline{\Theta}_2 h_2) - \right.$

$\left. - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^\circ, x_2^\circ + \overline{\Theta}_2 h_2)\right] h_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^\circ + \overline{\Theta}_1 h_1, x_2^\circ + \overline{\Theta}_2 h_2) \cdot h_2 \cdot h_1 \underset{\text{см. 1)}}{=}$

$0 < \overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2 < 1$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1^\circ + \Theta_1 h_1, x_2^\circ + \Theta_2 h_2) h_1 h_2 \underset{h_1, h_2 \neq 0}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow f''_{x_1 x_2}(x_1^\circ + \overline{\Theta}_1 h_1, x_2^\circ + \overline{\Theta} h_2) = f''_{x_2 x_1}(x_1 + \Theta_1 h_1, x_2^\circ + \Theta_2 h_2) \xrightarrow{\kappa \lim_{h_1, h_2 \to 0}} (1)$ ◀

ТЕОРЕМА 2 (Юнга): $x^\circ \in \mathbb{R}^2$, $f: O(x^\circ) \to \mathbb{R}$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} : O(x^\circ) \to \mathbb{R}$, причем $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \in \mathcal{D}(x^\circ) \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^\circ) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^\circ)$.

▶ X ◀ см. А.С.Ч., Л-23

ЗАМЕЧ-Е: Услов. Т1 $\not\Rightarrow$ Услов. Т2

Услов. Т2 $\not\Rightarrow$ Услов. Т1. (произв. $\exists$ в точке)

Т.о. $T1 \not\Rightarrow T2$, $T2 \not\Rightarrow T1$.

ПРИМЕР: Рассм. ур-ие в частных произв-ых:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{a_{ij}(x)}_{\text{изв. ф.}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{изв. ф.}}, \; x \in A = \mathring{A} \quad (2)$$

u – решение (классическое или регулярное) ур-ия (2) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} (u \in C^2(A)) \wedge (u$ – удовл-т ур-ию (2)).

В (2), не ограничивая общности, можно считать $a_{ij} = a_{ji}$.

В самом деле, $a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ji} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \underbrace{(a_{ij} + a_{ji})}_{2a_{ij}^* = 2a^*} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} =$

$= 2a_{ij}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ij}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$.

ОПРЕД-ИЕ 2: Пусть $A = A_i \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$. $f \in C^m(A) \overset{def}{\iff} \partial^k f \in C(A), \forall k: |k| \le m$ $\{m \in \mathbb{N}\}$.

ТЕОРЕМА 1' (обобщение Теоремы Шварца): $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $f: O(x^0) \to \mathbb{R}$,
$\exists \partial^k f: O(x^0) \to \mathbb{R}$, $\forall k: |k| \le m$, $m \ge 2$, причем $\exists k^{(1)}, k^{(2)} / \partial^{k^{(1)}} f$ и $\partial^{k^{(2)}} f \in C(x^0)$ (отличаются порядком дифф (очевидно меняется местами))
$\Rightarrow \partial^{k^{(1)}} f(x^0) = \partial^{k^{(2)}} f(x^0)$, т.е. $\partial^k f(x_0)$ не зависит от порядка дифференцирования по $x_1, \dots x_k$.

▶ 1) $n \ge 3$, $|k| = 2$ $\Leftarrow$ ТЕОРЕМА 1

2) $n \ge 2$, $|k| \ge 3$. Индукцией по числу $m = |k|$ ◀

Пункт 2. Дифференциалы высших порядков.

Пусть $A = A_i \subset \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$

Напоминание: $f \in D(x^0) \overset{def}{\iff} f(x) - f(x^0) = \dots$

Тогда $df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \underbrace{dx_i}_{\Delta x_i}$

ОПРЕД-ИЕ: 1) f дважды дифф-ема в $x^0 \overset{def}{\iff}$ ф-ия $df: \underline{O(x^0)} \to \mathbb{R}$ дифф-ема в x^0 (обознач. $f \in D^2(x^0)$) при этом $d(df)(x^0) =: d^2 f(x^0)$.

2) f m раз дифф-ема в x^0 ($f \in D^m(x^0)$) $\overset{def}{\iff}$ определена ф-ия $d^{m-1} f: O(x^0) \to \mathbb{R}$, причем эта ф-ия дифф-ема в x^0, т.е. $\exists\, d(d^{m-1})(x^0) =: d^m f(x^0)$.

Обознач. $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k! := k_1! k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$

ЗАМЕЧ-ИЕ: ① $f \in D^2(x^0) \iff \frac{\partial f}{\partial x_i} \in D(x^0)$, $i = \overline{1,n}$

$f \in D^m(x^0) \iff \partial^k f \in D(x^0)$, $\forall k: |k| = m-1$.

② $f \in D^2(x^0) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$, $i \ne j$ (теорема Юнга)

Задача: переформулировать теорему Юнга (обобщение)

③ $f \in D^m(x^0)$, $m \ge 3 \Rightarrow$

④ $f \in D^2(x^0) \Rightarrow d^2f(x^0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)dx_i dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)dx_i\right)dx_j$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f$

символич. ф-ла

В частности,

$n=2$: $d^2f(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2$

Вообще, для $m \geq 3$ (см. лемму 1 ниже)

$d^m f(x^0) = \sum_{|k|=m} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}()dx_1^{k_1} \ldots dx_n^{k_n} = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!}\partial^k f dx^k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m$

Пункт 3. Формула Тейлора.

ЛЕММА 1 (обобщение формулы Бинома Ньютона):

$\exists x \in \mathbb{R}$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ – мультииндекс $\Rightarrow (x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} x^k$, $\forall m \in \mathbb{N}$

$\sim(x_1, \ldots, x_n)$

$= \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1! \ldots k_n!} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$.

▶ $(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|k|=m} A_k x^k = \sum_{|k|=m} A_k x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ (1)

$\exists\ l = (l_1, \ldots, l_n)$, $|l| = |k| = m$.

Имеем: $\partial^l[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m] = \partial_1^{l_1} \ldots \partial_n^{l_n}[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m] = m!$ (2)

С другой стороны (см. (1)), $\partial^l[(x_1 + \ldots + x_n)^m] = \partial^l\left[\sum_{|k|=m} A_k x^k\right] =$ [redacted]

$= \cancel{\sum_{|k|=m}} A_k \prod_{i=1}^{n} k_i(k_i - 1) \ldots (k_i - l_i + 1) x_i^{k_i - l_i} = \cancel{\sum_{|k|=m}} A_k \prod_{i=1}^{n} k_i! = \cancel{\sum_{|k|=m}} A_k \cdot k! \overset{\text{см. (2)}}{\Longrightarrow}$

Но $\begin{cases} k_1 + \ldots + k_n = l_1 + \ldots + l_n = m \\ k_i \geq l_i,\ i = \overline{1,m} \end{cases} \Rightarrow k_i = l_i$

$\Rightarrow m! = \cancel{\sum_{|k|=m}} A_k \cdot k! \Rightarrow A_k = \frac{m!}{k!} \Rightarrow$ утвержд. леммы 1 ◀

ЛЕММА 2 (техническая форма для ф-лы Тейлора): $f: O_\varepsilon(x^0)\to\mathbb{R}$, $x^0\in\mathbb{R}^n$, $f\in D^p(O_\varepsilon(x^0))$, $p\geq 1$.

Тогда, полагая $F(t):=f(x^0+th)$, $t\in[-1-\delta,1+\delta]$, h — дост. мало, фикс.

$$\Rightarrow F^{(s)}(t)=\frac{d^sF}{dt^s}(x^0+th)=\sum_{|k|=s}\frac{s!}{k!}h^k\partial^k f(x^0+th) \quad (3)$$
$$1\leq s\leq p$$

▶ Имеем:

$$F^{(s)}(t)=\sum_{|k|=s}B_k h_1^{k_1}\dots h_n^{k_n}\partial^k f(x^0+th) \quad (4).$$

Коэфф-ты B_k в (4) не зависят от f, x^0.

Рассмотрим $x^0=(0,\dots,0)$, $f(x_1,\dots,x_n)=e^{x_1+\dots+x_n}$.

В этом случае $F(t)=e^{t(h_1+\dots+h_n)}$

$F'(t)=(h_1+\dots+h_n)e^{t(h_1+\dots+h_n)}$

....

$F^{(s)}(t)=(h_1+\dots+h_n)^s e^{t(h_1+\dots+h_n)}=\sum_{|k|=s}B_k h^k\cdot e^{t(h_1+\dots+h_n)}\Rightarrow$ См. теперь лемму 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow B_k=\frac{s!}{k!}\Rightarrow$ утвержд. леммы 2 ◀

ТЕОРЕМА 1 (Ф-ла Тейлора с остат. членом в форме Лагранжа):

$f: O_\varepsilon(x^0)\to\mathbb{R}$, $f\in D^{m+1}(O(x^0))$, $m\geq 0$. Тогда $\exists\,\varepsilon>0$ /

$$f(x)=f(x^0)+\sum_{s=1}^{m}\sum_{|k|=s}\frac{(x-x^0)^k}{k!}\partial^k f(x^0)+\underbrace{\sum_{|k|=m+1}\frac{(x-x^0)^k}{k!}\partial^k f(x^0+\Theta(x-x^0))}_{=:r_{m+1}},\ \Theta\in(0,1),$$
$$\forall x\in O_\varepsilon(x^0)$$

▶ $\exists\,\varepsilon>0$ / $O_\varepsilon(x^0)\subset O(x^0)$.

Рассмотрим ф-цию $F(t):=f(x^0+th)$, где $h:=x-x^0$, $t\in(-(1+\delta),1+\delta)$, где $\delta:=\frac{\varepsilon-|h|}{|h|}$.

Тогда $F\in D^{m+1}(-(1+\delta),1+\delta)$.

Имеем: $F(0)=f(x^0)$ $\quad\Longrightarrow F(1)=F(0)+\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s!}F^{(s)}(0)+\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(\Theta)=$, $0<\Theta<1$

$F(1)=f(\underbrace{x^0+h}_{x})$

ф-ла Тейлора для n=1

$$=f(x_0)+\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s!}\sum_{|k|=s}\frac{s!}{k!}h^k\partial^k f(x^0)+\sum_{|k|=m+1}\frac{1}{k!}h^k\partial^k f(x^0+\Theta h)\Longrightarrow(4)$$ ◀

лемма 2

ТЕОРЕМА 2 (Ф-ла Тейлора с остат. членом в форме Пеано): $f: O_\varepsilon(x^0)\to\mathbb{R}$, $f\in D^m(x^0)$, $m\geq 1$

Тогда $f(x)=f(x^0)+\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{|k|=s}\frac{(x-x^0)^k}{k!}\partial^k f(x^0)+\bar{o}(\|x-x^0\|^m)$, при $x\to x^0$. (5)

► $m=1$. Верно, опред-ие того, что $f\in D(\cancel{O_\varepsilon}(x^0))$

$m\geq 2$. Положим $g(x):=f(x)-\underbrace{f(x^0)-\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{|k|=s}\frac{(x-x^0)^k}{k!}\partial^k f(x^0)}_{\text{полином Тейлора } P_n(x)}$.

Надо доказать: $g(x)=\bar{o}(\|x-x^0\|^m)$, $x\to x^0$.

Имеем: $g(x^0)=0$ $\quad 0$

$\partial^k g(x^0)=\cancel{\partial^k f(x^0)}$ 0, $|k|\leq m$.

$\xrightarrow{\text{ТЕОР. 1 (Т+Л)}}$

И кроме того, $g\in D^{m-1}(O(x^0))$ (если все остальные пр-ые $\exists$ в точке, то $m-1$ $\exists$ в окрестности)

$\partial g(x^0)(x-x^0)+\sum\limits_{s=1}\sum\limits_{|k|=s}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\partial^k g(x_0)$

$\Rightarrow g=0+0+\sum\limits_{k=m-1}\frac{(x-x^0)^k}{k!}\boxed{\partial^k g(x^0+\Theta(x-x^0))}$.

по опр.

Но $\partial^k g\in D(x^0)$ для $|k|=m-1$ $\Rightarrow \underbrace{\partial^k g(x^0+\Theta(x-x^0))}_{|k|=m-1}=\underbrace{\partial^k g(x^0)}_{0}+\sum(\ )+$

$\sum\limits_{s=1}^{m-1}\sum\limits_{|k|=s}\frac{(x-x^0)^k}{k!}\partial^k g(x^0)+\bar{o}(\|x-x^0\|)^m$

$+\bar{o}(\|x-x^0\|)$. ◄

ТЕОРЕМА 3 (Ф-ла Тейлора с остат. членом в интегральной форме): (Зорич)

$g(x)-g(x_0)=\sum h_k(x-x^0)+\bar{o}(\|x-x^0\|)$

$\partial^k g(x^0)+\partial^k g(x^0+\Theta(x-x^0))=\sum\limits_{i=1}^{n}[\partial_i\partial^k g(x^0)](x_i-x_i^0)+\bar{o}(x-x^0)$

$\|$

§5. Локальный экстремум функций многих переменных.

ОПРЕД-Е: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A$;

1) x^0 – [точка локального максимума (минимума)] $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists O(x^0) \subset A /$ $f(x) \le f(x^0)$ $(f(x) \ge f(x^0))$, $\forall x \in O(x^0)$

2) x^0 – точка строгого локальн. максимума (минимума) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists O(x^0) \subset A /$ $f(x) < f(x^0)$ $(f(x) > f(x^0))$, $\forall x \in O(x^0)$

3) x^0 – точка локального экстремума $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ x^0 – точка лок. макс. или мин.

ТЕОРЕМА 1 (необходимый признак локальн. экстремума):

$f: O(x^0) \to \mathbb{R}$, x^0 – точка локального экстремума, $\exists \partial_i f(x^0)$, $i = \overline{1,n} \Rightarrow \partial_i f(x^0) = 0$.

► Фиксируем произвольно $i_0 \in \{1, 2, .., n\}$ и рассм. ф-ию одного перем. x_{i_0}:

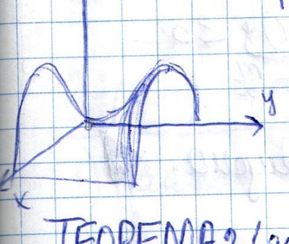
$F(x_i) = f(x_1, ..., x_{i_0}, .., x_n) \overset{\text{т. ФЕРМА}}{\Longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_{i_0}}(x^0) = 0$ ◄

ЗАМЕЧ-Е: ② $f: O(x^0) \to \mathbb{R}$, x^0 – точка экстремума f, $f \in D(x^0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial e}(x^0) = 0$ $\forall$ направ. e.

► $\frac{\partial f}{\partial e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot \cos\alpha = 0$ ◄

① В условии теоремы 1 достаточно рассм. одну пр-ую $\partial_{i_0} f(x^0)$.

ЗАМ-ИЕ: $\operatorname{grad} f(x^0) = \vec{0} \overset{в. п.}{\not\Rightarrow} x^0$ – точка экстремума



$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

$(0,0)$ – не явл. т. экстремума

$f(x,y) = y^2 - x^2$

$f(x,0) = -x^2 < 0$

$f(0,y) = y^2 > 0$

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие локального экстремума):

$f: O(x^0) \to \mathbb{R}$, $f \in D^2(x^0)$, $\operatorname{grad} f(x^0) = \bar{0}$. Тогда

1) Если квадр. форма $\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j}_{\varphi(h)}$ (1) положит. (отриц.) определена, то x^0 – точка миним. (макс.)

2) Если квадр. форма (1) меняет знак, то x^0 не является точкой экстрем.

▶ ① Пусть $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \ (1) = \varphi(h)$ положит. опред. Надо док-ть, что x^0 — точка миним.

[Предварит. замечание: ф-лу Тейлора можно переписать в виде
$$f(x) = f(x^0) + \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right)^s f(x) + r_{m+1}(x, x^0), \quad h_i = x - x^0]$$

$$f(x) - f(x^0) = \underset{h\text{ — дост. мало} \in O(x^0)}{f(x^0+h) - f(x^0)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(x^0) h_i h_j + \bar{o}(\|h\|) =$$

Т.к. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0$, $i = \overline{1,n}$

$\exists \varphi(h) > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \forall h \in S_1 = \{h \in \mathbb{R}^n, \|h\| = 1\}$
(сфера - компакт по копейкам есть min, max)
$\Rightarrow m = \min \varphi(h) > 0$

$$= \frac{1}{2}\|h\|^2 \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(x^0) \frac{h_i h_j}{\|h\| \|h\|} + \bar{o}(1) \right\} \text{ при } h \to 0$$

Имеем $\sum \partial_{ij} f(x^0) h_i^* h_j^* > 0$ на сфере $S(0,1) \Rightarrow \exists m > 0 \,/\, \sum\limits_{i,j}^{n} \partial_{ij} f(x^0) h_i^* h_j^* \geq m > 0$
$\forall h^* \in S(0,1)$ (2)

Поэтому см 2 $f(x^0+h) - f(x^0) \geq \frac{1}{2}\|h\|^2 \{ \underbrace{m + \bar{o}(1)}_{> \frac{m}{2}} \} > \frac{1}{2}\|h\|^2 > 0$

$\forall h \quad 0 \leq \|h\| < \delta$ для каждого $\delta > 0 \Rightarrow x^0$ — точка строгого минимума.

② Пусть теперь квадрат. форма (1) меняет знак.

Имеем: $f(x) - f(x^0) = f(x^0+h) - f(x^0) = \frac{1}{2}\|h\|^2 \left\{ \sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(x^0) \frac{h_i h_j}{\|h\| \|h\|} + \bar{o}(1) \right\}$

$\exists m < 0, \exists h^*_{min} \in S \,/\, \sum\limits_{i,j}^{n} \partial_{ij} f(x^0) h^*_{min_i} h^*_{min_j} = m < 0$; $\exists M > 0, \exists h_{max} \in S \,/$
$\sum\limits_{i,j=1}^{m} \partial_{ij} f(x^0) h^*_{max_i} h^*_{max_j} = M > 0$ $\quad \exists h = t h^{(1)} \quad t \to 0$

$\exists \ 0 < t < \delta$, δ — достаточно мало

Имеем: а) $f(x^0 + t h^*_{min}) - f(x^0) = \frac{1}{2} t^2 \Big\{ \underbrace{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(x^0) h^*_{min_i} h_{min_j}}_{= m < 0} + \underbrace{\bar{o}(1)}_{< \frac{m}{2}} \Big\} < 0$

Аналогично проверяется, что $f(x^0 + t h^*_{max}) - f(x^0) > 0$
для достаточно малого $\delta \Rightarrow x^0$ — не есть точка экстремума. ◀

§6. Неявные функции.

Пункт 1. Случай одного переменного.

$\exists (x^0; y^0) \in \mathbb{R}^2$, задана функция $F(O(x^0; y^0)) \to \mathbb{R}$, предполагаем, что $F(x^0; y^0) = 0$.

<u>ОПР-ИЕ:</u> $\exists \exists O(x^0)$, $\exists f: O(x^0) \to \mathbb{R} \,/\, F(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in O(x^0)$, тогда

говорят, что уравнение $F(x,y)=0$ задает неявно функцию f.

ТЕОРЕМА:

1) $F \in C^1(O(x^0, y^0))$
2) $F(x^0, y^0) = 0$
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) > 0$

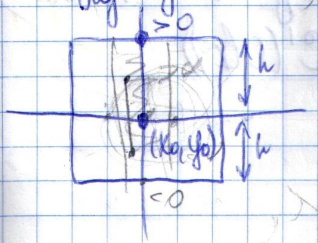
$\Longrightarrow$ $\exists\, O(x^0),\ \exists!\, f : O(x^0) \to \mathbb{R}$

а) $f(x^0) = y^0$

б) $F(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in O(x^0)$

▶ ① $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) > 0 \Rightarrow \exists$ квадрат с центром в (x^0, y^0), стороной $2h$: K /

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \geq m > 0 \quad \forall (x,y) \in K$



② Имеем $F(x^0, y^0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y) > 0 \Rightarrow F(x^0, y^0 - h) < 0$,

$F(x_0, y_0 + h) > 0$

③ а) $F(x^0, y^0 + h) > 0 \xrightarrow{\text{непрер. по } x} \exists\, \delta > 0 \quad F(x, y^0 + h) > 0 \quad \forall x \in [x^0 - \delta, x^0 + \delta]$

б) $F(x^0, y^0 - h) < 0 \Rightarrow F(x, y^0 - h) < 0 \quad \forall x \in [x^0 - \delta, x^0 + \delta]$

④ Фиксируем пр-но $x \in (x^0 - \delta, x^0 + \delta)$ и рассмотр. отрезок l, соединяющий точки $A_- = (x, y^0 - h)$ и $A_+ = (x, y^0 + h)$

Имеем т.к. $F(A_-) < 0$, $F(A_+) > 0$ и $F \uparrow\uparrow$ (т.к. произв. > 0) (по y возрастает),

$\exists!\, y = y(x) \,/\, F(x, y(x)) = 0$.

⑤ $\forall x \in (x^0 - \delta, x^0 + \delta)$ определим единств. образом $f(x) := y(x)$ через п. ③

$\Longrightarrow f$ задана неявно уравнением $F(x,y) = 0$ ◀

ЗАМЕЧ-ИЯ:

1) Условие $\frac{\partial F}{\partial x} \in C(O(x^0))$ можно заменить на $F \in C(O(x^0))$
2) Условия теоремы $\Longrightarrow \exists\, O'(x^0) \,/\, f \in C^1(O'(x^0))$
3) Теорема обобщается на случай, когда $x = (x_1, .., x_n)$

Пункт 2. Неявная функция для системы уравнений.

1) $F, G \in C^1(O(x^0; y^0; z^0))$ $\quad (x^0; y^0; z^0) \in \mathbb{R}^3$

2) $F(x^0; y^0; z^0) = G(x^0; y^0; z^0) = 0$

3) якобиан $\frac{D(F, G)}{D(y, z)}(x^0; y^0; z^0) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists!\, f, g : O(x^0) \to \mathbb{R} \,/\, \text{а) } f(x^0) = y^0,\ g(x^0) = z^0$$

б) $F(y, f(x), g(x)) = 0 \ \forall x \in O(x^0)$

в) $f, g \in C^1(O(x^0))$