БИЛЕТ 1

Определение 1:

Множества А и В называются *равномощными* если $\exists\ f-$ биекция: $f: A \to B$. Обозначается

$A \sim B$.

Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности:

1) $A \sim A$
2) $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$
3) $A \sim B, B \sim C \Longrightarrow A \sim C$

Определение 2:

Множество А называется *счетным*, если $A \sim \mathbb{N}$.

Определение 3:

Множество А называется *не более чем счетным,* если А-конечно или А-счетно.

Определение 4:

Множество А называется *несчетным,* если А-бесконечно и А не является счетным.

Теорема 1:

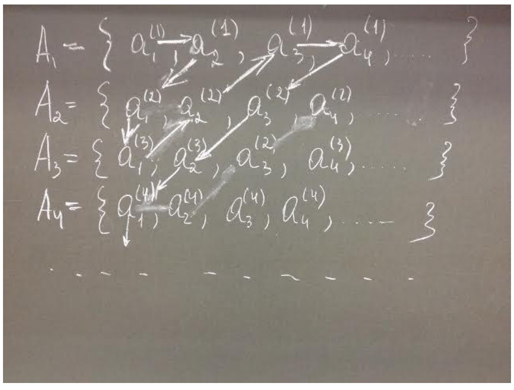
Пусть $A -$ счетно$, B \subset A.$ Тогда $B -$ не более чем счетно.

Доказательство:

А-счетно$\Longrightarrow$ $\exists\ f-$ биекция: $f: \mathbb{N} \to A.$ Тогда $A = \{x_1, x_2, \dots x_n, ..\}.$ $B \subset A,$ следовательно: $B = \{\ x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots\}$. Если В-конечно, то теорема верна. Пусть В-бесконечно. Но тогда так как $k_1, k_2, k_3, \dots \in \mathbb{N}$ и $f -$ биекция: $f: \mathbb{N} \to A,$ а , следовательно, $f: \mathbb{N} \to B$, то В- счетно.чтд

Теорема 2:
Счетное объединение счетных множеств счетно.

Доказательство:
Пусть $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$-счетные множества. Расположим их элементы в следующую таблицу и произведем их перенумерацию следующим образом, исключая повторяющиеся:



Как видно из рисунка существует биекция межде множеством, являющимся счетным объединением счетных множеств и множеством натуральных чисел. Значит это множество счетно.

Следствие:

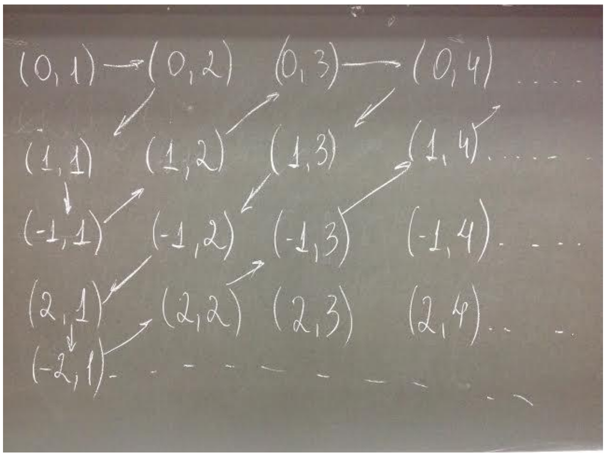
Не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно.

Теорема 3:

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.

Доказательство:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}, \mathrm{m} \in \mathbb{Z}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\right\}$. Тогда $\mathbb{Q} \sim \mathrm{K}$, где $\mathrm{K} = \{(\mathrm{m}, \mathrm{n}), \mathrm{m} \in \mathbb{Z}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$. Так как $\mathrm{K} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, то достаточно доказать, что $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$-счетно. Расположим элементы этого множества следующим образом и произведем их нумерацию так же как и в предыдущей теореме:



Таким образом построена биекция между $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ и множеством натуральных чисел. Следовательно, это множество счетно. Следовательно, $\mathbb{Q}$ — счетно. Чтд.

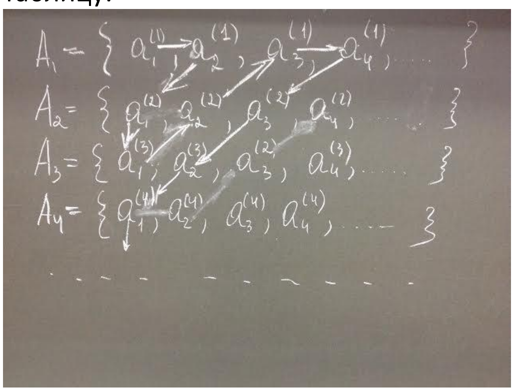
Обозначим за Ξ - множество бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц.

Теорема 4:

Множество Ξ *несчетно.*

Доказательство:

Пусть это множество счетно. Тогда все его последовательности можно написать в следующую таблицу:



Рассмотрим следующую последовательность: $b_n \neq a_k^{(k)}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ и $b_n = 0$ или $b_n = 1\ \forall\ n$. Тогда $b_n \in \Xi$. *Тогда* $\exists\ k \in \mathbb{N}$: $b_n = A_k = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots a_k^{(k)}, \dots\}$. Противоречие. Значит наше предположение неверно. Таким образом теорема доказана.

БИЛЕТ 2

Аксиома непрерывности:

Пусть есть два множества $A, B \subset \mathbb{R}$ *с условиями:*

1) $A \neq \emptyset\ B \neq \emptyset$
2) $a \leq b\ \forall\ a \in A, b \in B$

Тогда $\exists\ c \in \mathbb{R}: a \leq c \leq b\ \forall\ a \in A, b \in B$

Определение 1:

Множество А называется:

1) ограниченным сверху $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\ b \in \mathbb{R}: x \leq b\ \forall\ x \in A$. Число b называется верхней гранью множества А.
2) Ограниченным снизу $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \exists\ c \in \mathbb{R}: x \geq c\ \forall\ x \in A$. Число с называется нижней гранью множества А.

Определение 2:

Пусть $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset,\ A -$ ограниченно сверху (снизу). Число b называют точной верхней (нижней) гранью $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$b-наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней.

Обозначение: b=supA (infA).

Теорема:

Пусть $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset,\ A -$ ограниченно сверху $\Longrightarrow \exists!\ b = supA.$

Доказательство:

1. Единственность.
   Пусть b_1, b_2 −две точные верхние грани и пусть не ограничивая общности $b_1 < b_2$. Тогда b_2- не точная верхняя грань Противоречие.
2. Существование.
   Так как А- ограниченно сверху, то $\exists\ B -$ множество верхних граней множества А и $B \neq \emptyset$. Так как $A \neq \emptyset$ и $a \leq b\ \forall\ a \in A, \forall\ b \in B$. Тогда по аксиоме полноты $\exists\ c \in \mathbb{R}: a \leq c \leq b\ \forall\ a \in A, \forall\ b \in B$. Тогда с-точная верхняя грань А.

БИЛЕТ 3

Определение:

Пусть дана система отрезков $\{[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\}$. Эта система называется:

1) системой вложенных отрезков, если $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\ \forall\ n.$
2) Стягивающейся системой отрезков, если она является системой вложенных отрезков и $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n \in \mathbb{N}: b_n - a_n < \varepsilon$

Теорема:

Пусть дана система отрезков $\{[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\}$. *Тогда :*

1) *Если это система вложенных отрезков, то* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset.$
2) *Если это стягивающаяся система отрезков, то* $\exists!$ c $\in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n].$

Доказательство:

1) Если данная система является системой вложенных отрезков то $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\ \forall\ n.$ Докажем, что $a_n < b_m\ \forall\ m, n \in \mathbb{N}$. Пусть $n < m$. Тогда:

$[a_n \quad [a_m \qquad b_m] \qquad b_n]$

Тогда $a_n < a_m < b_m$. Пусть $n > m$. Тогда:

$[a_m \quad [a_n \qquad b_n] \qquad b_m]$

Тогда $a_n < b_n < b_m$. Чтд. Обозначим $A = \{\, a_n, n \in \mathbb{N}\},\ B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $A \neq \emptyset\ B \neq \emptyset, a_n < b_m\ \forall\ m, n \in \mathbb{N}$. Тогда по аксиоме непрерывности $\exists\ c \in \mathbb{R}$: $a_n \leq c \leq b_m\ \forall\ m, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $a_n \leq c \leq b_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. То есть $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

2) Пусть данная система является стягивающейся системой отрезков. Предположим что $\exists\ c_1, c_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ и пусть не ограничивая общности $c_2 > c_1$. Тогда: $a_n \leq c_1 \leq c_2 \leq b_n\ \forall\ n$. Следовательно, $c_2 - c_1 \leq b_n - c_1 \leq b_n - a_n\ \forall\ n$. Обозначим $\varepsilon = c_2 - c_1$. *Тогда* $\exists\ \varepsilon > 0$: $b_n - a_n \geq \varepsilon\ \forall\ n$. Что противоречит тому что система является системой стягивающихся отрезков. Чтд.

Следствие:

Множество $\mathbb{R}$ несчетно.

Доказательство:

Докажем для начала что отрезок $[0,1]$- несчетное множество. Предположим противное. Тогда: $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$.Выделим в нем отрезок $[a_1, b_1] \subset [0,1]$: $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Затем в отрезке $[a_1, b_1]$ Выделим отрезок $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$: $x_2 \notin [a_2, b_2]$. Будем продолжать этот процесс. В итоге получим систему вложенных отрезков. Тогда по доказанной теореме $\exists\ c \in [0,1]$: $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Но с $\neq x_k\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Следовательно $c \notin [0,1]$. Противоречие. Следовательно отрезок [0,1]-несчетное множество.чтд.

Из этого следует, что интервал (0,1)-тоже несчетное множество. Рассмотрим функцию $f = arctgx$. $f -$ *биекция и* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\mathbb{R} \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим функцию $g = \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi}$.Рассмотрим ее сужение на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Так как g —биекция и g: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (0,1)$, то $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim (0,1)$. Следовательно, $\mathbb{R} \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim (0,1)$. Следовательно, $\mathbb{R} \sim (0,1)$. Так как (0,1)-несчетное множество, то и $\mathbb{R}$ —несчетное множество, чтд.

БИЛЕТ 4

Определение:

Пусть дано множество A и система множеств $\{B\}$. Система множеств $\{B\}$ образует покрытие А $\overset{def}{\Longleftrightarrow} A \subset \bigcup B$.

Лемма (Бореля-Лебега):

Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие.

Доказательство:

Пусть имеется отрезок $[a, b]$ и система интервалов $S = \{I\}$ таких, что $[a, b] \subset \bigcup I$. Предположим, что из нее нельзя выделить конечное подпокрытие $[a, b]$. Переобозначим $[a, b] = [a_1, b_1]$. Обозначим за $[a_2, b_2]$ —ту половину отрезка $[a_1, b_1]$, которая не допускает конечного покрытия. За $[a_3, b_3]$-ту половину $[a_2, b_2]$, которая не допускает конечного покрытия и тд. Получим стягивающуюся систему отрезков. Тогда исходя из леммы о вложенных отрезках $\exists$ с $\in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Тогда $c \in \bigcup I$. Следовательно, $\exists\ (\alpha, \beta) \in \{I\}$: $c \in (\alpha, \beta)$. Обозначим за $\varepsilon = = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Рассмотрим $[a_n, b_n]$: $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда так как $c \in [a_n, b_n]$, то $[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$. Противоречие. Следовательно, теорема доказана.чтд.

Определение:

Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Точка $a \in \mathbb{R}$ —предельная точка множества А $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \forall\ O(a), \dot{O}(a) \cap A \neq \emptyset$.

Обозначение: A'- множество предельных точек множества А.

Лемма(Больцано-Вейерштрасса):

Пусть $A \subset [a, b], A$ *—бесконечно* $\Longrightarrow A$ *имеет хотя бы одну предельную точку на* $[a, b]$.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть множество A не имеет предельных точек на $[a,b]$. Фиксируем произвольно точку $x \in [a,b]$. Тогда $x \notin A'$. Следовательно, $\exists\ O(x), \dot{O}(x) \cap A = \emptyset$.Значит, $O(x)$ содержит не более одного элемента из А. В силу произвольности х имеем систему $\{O(x), x \in [a,b], O(x) \text{ содержит не более одного элемента их А}\}$. Так как $[a,b] \subset \bigcup O(x)$, то эта система образует покрытие отрезка $[a,b]$. Согласно лемме Бореля-Лебега из нее можно выделить конечное подпокрытие $\{O(x_n), n = \overline{1,m}\}$ данного отрезка. Но тогда $A \subset \bigcup O(x_n)$. Но так как каждая из $O(x_n)$ содержит не более одного элемента из А , то само А содержит не более чем m элементов. Противоречие с условием. Таким образом теорема доказана.

БИЛЕТ 5

Определение 1:

Последовательность (a_n) сходится к $a \in \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon\ \forall\ n > N$.

Эквивалентное определение:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow\ \forall\ O(a)\ \exists\ N \in \mathbb{N}: a_n \in O(a)\ \forall\ n > N$

Теорема 1:

Пусть $lim_{n\to\infty} a_n = a\ , lim_{n\to\infty} a_n = b \Longrightarrow a = b.$

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $b \neq a$. Тогда $\exists\ O(a), \exists O(b): O(a) \cap O(b) = \emptyset$. Но для $O(a)$ $\exists\ N_1 \in \mathbb{N}: a_n \in O(a)\ \forall\ n > N_1$, для $O(b)\ \exists\ N_2 \in \mathbb{N}: a_n \in O(a)\ \forall\ n > N_2$. Обозначим за $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $a_n \in O(a), a_n \in O(b)\ \forall\ n > N$. Противоречие с тем, что $O(a) \cap O(b) = \emptyset$. Таким образом теорема доказана.

Лемма:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

Доказательство:

Следует из того, что $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$.

Определение 2:

Последовательность (a_n) −бесконечно малая $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Определение 3:

Последовательность (a_n) - ограниченна $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \exists\ M: |a_n| \leq M\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2:

Пусть последовательность (a_n) −бесконечно малая, последовательность (b_n) – ограниченна. Тогда последовательность $a_n b_n$ −бесконечно малая.

Доказательство:

Последовательность (b_n) - ограниченна $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \exists\ M: |b_n| \leq M\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Последовательность (a_n) −бесконечно малая $\Longrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}: |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}\ \forall\ n > N$

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}: |a_n b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \Longrightarrow a_n b_n$ −бесконечно малая.чтд.

Теорема 3:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow (a_n)$ – ограниченна.

Доказательство:

$lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow$ для $\varepsilon = 1\ \exists\ N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < 1\ \forall\ n > N.$ Тогда $|a_n| = |a_n - a + a| \leq$ $|a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$. Обозначим *за* $M \coloneqq max\{a_1, a_2, \dots, a_N, |a| + 1\}$. Тогда $|a_n| \leq M\ \forall\ n \in$ $\mathbb{N} \Longrightarrow (a_n)$ – ограниченна.чтд.

Определение 4:

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\ M > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}: a_n > M(< -M)\ \forall\ n > N.$

Теорема 4:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} b_n = b\ \in \mathbb{R}\ \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$

Доказательство:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}\ \forall\ n > N_1$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}\ \forall\ n > N_1$

Обозначим $\mathrm{N} = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}: |a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq$ $\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall\ n > N$.чтд.

Следствие 1:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow\ a_n = a + \beta_n$, где β_n —бесконечно малая.

Следствие 2:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = a^{(k)}, k = \overline{1, m} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_n^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} a^{(k)}.$$

Теорема 5:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} b_n = b\ \in \mathbb{R}\ \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$$

Доказательство:

Достаточно доказать, что $a_n b_n - ab$- бесконечно малая последовательность. Но $a_n b_n - ab =$ $((a_n - a)b_n - a(b_n - b))$-бесконечно малая.чтд.

Лемма 1:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a > b \Longrightarrow \exists\ N \in \mathbb{N}: a_n > b\ \forall\ n > N$

Доказательство:

Обозначим за $\varepsilon = a - b$. Тогда так как $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то для $\varepsilon\ \exists\ N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon = a -$ $b\ \forall\ n\ > N \Longrightarrow a_n - a > b - a \Longrightarrow \exists\ N \in \mathbb{N}: a_n > b\ \forall\ n\ > N$. Чтд.

Лемма 2:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$

Доказательство:

Достаточно доказать, что $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}$—бесконечно малая полседовательность. Имеем:

$\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a - a_n}{a_n a} = (a - a_n) \cdot \dfrac{1}{a_n a}$

Докажем, что $\frac{1}{a_n a}$-ограниченная последовательность.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|, |a| > \frac{|a|}{2} \Longrightarrow \exists\ N \in \mathbb{N}: |a_n| > \frac{|a|}{2}, |a| > \frac{|a|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|a_n a|} < \frac{2}{a^2} \Longrightarrow \frac{1}{a_n a}$- ограниченная последовательность. Так как $a - a_n$ —бесконечно малая, то $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}$ —бесконечно малая. Чтд.

Теорема 6:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, b \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$

Доказательство:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. чтд.

Теорема 7:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \exists\, N \in \mathbb{N}: a_n \geq b\ \forall\, n > N \Longrightarrow a \geq b.$

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $a < b$. Тогда по доказанной теореме $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}: a_n < b\ \forall\, n > N_1$

Обозначим $N_2 = \max\{N, N_1\}$. Тогда получаем, что $\forall\, n > N_2\ a_n \geq b$ и $a_n < b$. Противоречие. Следовательно $a \geq b$. Чтд.

Теорема 8:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, a > b \Longrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}: a_n > b_n\ \forall\, n > N.$

Доказательство:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b, a - b > 0 \Longrightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}: a_n - b_n > 0\ \forall\, n > N$.*чтд.*

Теорема 9:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, \exists\, N \in \mathbb{N}: a_n \geq b_n\ \forall\, n > N\ \Longrightarrow a \geq b.$

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $a < b$. Тогда по доказанной теореме $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}: a_n < b_n\ \forall\, n > N_1$.

Обозначим $N_2 = \max\{N_1, N\}$. Тогда имеем: $\forall\, n > N_2\ a_n < b_n$ и $a_n \geq b_n$. Противоречие. Следовательно, $a \geq b$.чтд.

Теорема 10:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a, \exists\, N \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \leq c_n\ \forall\, n > N\ \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

Доказательство:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_1 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon\ \forall\, n > N_1 \Longrightarrow a_n - a > -\varepsilon\ \forall\, n > N_1$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_2 \in \mathbb{N}: |c_n - a| < \varepsilon\ \forall\, n > N_2 \Longrightarrow c_n - a < \varepsilon\ \forall\, n > N_2$

Обозначим за $N_3 = max\{N_1, N_2, N\}$. Тогда имеем:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_3 \in \mathbb{N}: -\varepsilon < a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a < \varepsilon\ \forall\, n > N_3 \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_3 \in \mathbb{N}: |b_n - a| < \varepsilon$

$\forall\, n > N_3 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = a$. *Чтд.*

БИЛЕТ 6

Определение:

1) Последовательность (a_n) возрастает (не убывает) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a_n \le a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ $(a_n \uparrow)$
2) Последовательность (a_n) строго возрастает $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a_n < a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ $(a_n \uparrow\uparrow)$
3) Последовательность (a_n) убывает (не возрастает) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a_n \ge a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ $(a_n \downarrow)$
4) Последовательность (a_n) строго убывает $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a_n > a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ $(a_n \downarrow\downarrow)$

Все эти последовательности называются монотонными. (2),4)-строго монотонными)

Теорема (Вейерштрасса):
Пусть (a_n) −монотонная последовательность. Тогда $\exists\ lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ (a_n) −ограниченна.

Доказательство:

Не ограничивая общности считаем, что $a_n \uparrow$.

1) Необходимость
   Пусть $\exists\ lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Longrightarrow (a_n)$ −ограниченна (по ранее доказанной теореме).
2) Достаточность
   Пусть $(\mathrm{a_n})$ −ограниченна. Рассмотрим множество $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Тогда оно ограниченно. Значит по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists\, supA \coloneqq a \in \mathbb{R}$.
   Тогда по теореме о точной верхней грани: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}: a_N > a - \varepsilon$.
   Тогда $\forall\, n > N: a - \varepsilon < a_N < a_n < a < a + \varepsilon \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon\ \ \forall\, n > N \Longrightarrow$ $\exists\ lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.чтд.

Следствие:

Пусть $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Тогда $\exists\ lim_{n\to\infty} a_n := e$.

Доказательство:
Рассмотрим последовательность $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Так как $b_n > 0\ \forall\, n \Longrightarrow b_n - \text{ограниченна снизу}$.
Докажем, что $b_n \downarrow$:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}n^{n+1}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Обозначим $A = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}$. Тогда:

$$A = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n^2+2n} > 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1 + $$
$$+ \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

Получаем, что так как $A > \frac{n+2}{n+1}$, то $A \cdot \frac{(n+1)}{(n+2)} > 1$. Следовательно $b_n \downarrow$.
Таким образом $b_n - \text{ограниченна снизу}$, $b_n \downarrow \Longrightarrow \exists\ lim_{n\to\infty} b_n := e$. Но: $a_n = \frac{b_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ и $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Значит $\exists\ lim_{n\to\infty} a_n = e$. Чтд.

БИЛЕТ 7

Лемма 1:

Пусть $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Тогда $a \in A' \Leftrightarrow \forall\, O(a), O(a) \cap A -$ бесконечно.

Доказательство:

1) Необходимость:
   Пусть $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, a \in A'$. Достаточно доказать, что $\forall\, O(a), \dot{O}(a) \cap A -$ бесконечно.
   Тогда $\dot{O}(a) \cap A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Положим $h \coloneqq \min|a - a_n|,\ n = \overline{1, m}$. Тогда $\dot{O}_h(a) \cap A =$ $= \emptyset$. Противоречие с тем, что $a \in A'$. Следовательно, $\dot{O}(a) \cap A -$ бесконечно.
2) Достаточность сразу же следует из определения предельной точки множества.чтд.

Определение:

Точка $a -$ точка сгущения (частичный предел) последовательности $(a_n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \ \forall\, O(a)\,, O(a)$ содержит бесконечно много членов последовательности.

Лемма 2 (Больцано-Вейерштрасса о точке сгущения):

Пусть $(a_n) -$ ограниченная последовательность. Тогда она имеет хотя бы одну точку сгущения.

Доказательство:

Пусть $(a_n) -$ ограниченная последовательность. Рассмотрим множество $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Тогда оно тоже ограниченно. Рассмотрим две ситуации:

1) А-конечно. Тогда $\exists\, a_{n_k}$ —подпоследовательность : $a_{n_k} = a\ \forall\, k$. Тогда а-точка сгущения.
2) А-бесконечно. Так как А-ограниченно, то по теореме Больцано Вейерштрасса о предельной точке $\exists\, a \in A'$. Тогда по лемме 1 $\forall\, O(a), O(a) \cap A -$ бесконечно. Значит окрестность а содержит бесконечное количество элементов множества А, а значит и членов самой последовательности. Значит а-точка сгущения. Чтд.

Определение:

(a_n) —последовательность Коши (фундаментальная последовательность) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$: $|a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall\, m, n > N$.

Теорема (Критерий Коши):

Последовательность (a_n) *сходится*$\Leftrightarrow$ (a_n) *—последовательность Коши.*

Доказательство:

1) Необходимость.
   Пусть $\exists\ lim_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall\, n, m > N \Rightarrow$ $(a_n) -$ последовательность Коши.

2) Достаточность.
   Пусть (a_n) —последовательность Коши. Докажем, что (a_n) – ограниченна. Имеем для $\varepsilon = 1\ \exists\, N \in \mathbb{N}$: $|a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall\, n, m > N$. Зафиксируем произвольно $m_0 > N$. Тогда: $|a_n| = \left|a_n - a_{m_0} + a_{m_0}\right| \leq |a_n - a_{m_0}| + |a_{m_0}| < 1 + |a_{m_0}|$. Обозначим за $M \coloneqq \max\left\{a_1, a_2, \dots, a_N, 1 + \left|a_{m_0}\right|\right\}$. Тогда $|a_n| \leq M\ \forall\, n$. Следовательно, (a_n) – ограниченна.
   (a_n) – ограниченна$\Longrightarrow$ по теореме Больцано $-$ Вейрштрасса $\exists\, a -$ точка сгущения (a_n).
   Так как (a_n) *—последовательность Коши, то* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$: $|a_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, k, n > N.$
   Так как $a -$ точка сгущения (a_n), то $O_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ содержит бесконечно много элементов

последовательности(a_n). Следовательно, $\exists\, k_0 > N$: $a_{k_0} \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$, то есть $\left|a_{k_0} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом $|a_n - a| = \left|a_n - a_{k_0} + a_{k_0} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

В итоге получаем: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall\, n > N$. Следовательно, $\exists\ lim_{n\to\infty} a_n = a$. Чтд.

БИЛЕТ 8

Определение (по Коши):

Пусть $A \subset \mathbb{R}, f: A \longrightarrow \mathbb{R}, a \in A', b \in \mathbb{R}.$ Тогда:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |f(x) - b| < \varepsilon\ \forall\, x \in A$ *с* условием $0 < |x - a| < \delta$

Эквивалентные определения:

1) $\lim_{x \to a} f(x) = b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |f(x) - b| < \varepsilon\ \forall\, x \in A \cap \dot{O}_\delta(a).$
2) $\lim_{x \to a} f(x) = b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, O(b) \exists\, O(a): f(x) \in O(b)\ \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A$

Теорема:

Пусть $f: A \longrightarrow \mathbb{R}, a \in A', \lim_{x \to a} f(x) = b,\ \lim_{x \to a} f(x) = c\ \Longrightarrow b = c.$*(верно и для* $a = \pm\infty$)

Доказательство:

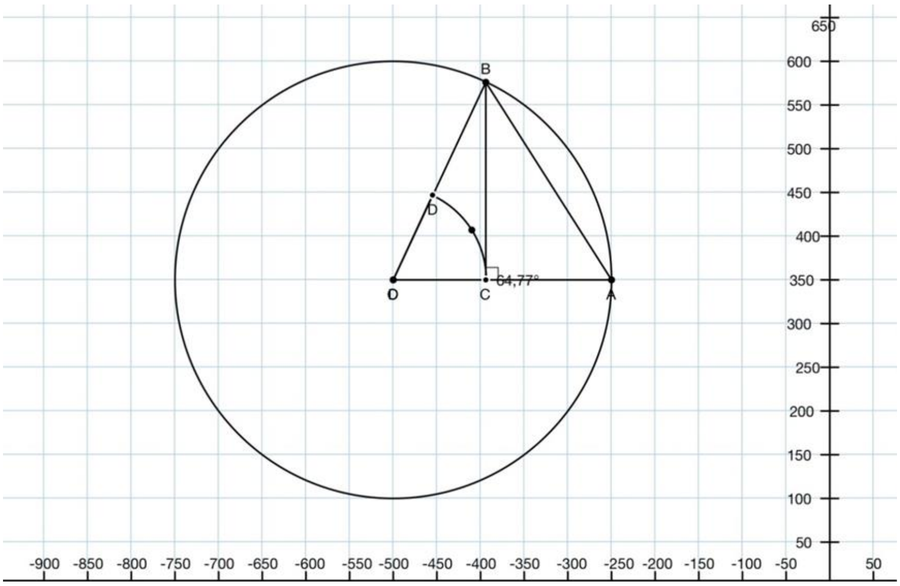
От противного:

Пусть $b \neq c$. Тогда $\exists\, O(b), \exists\, O(c): O(b) \cap O(c) = \emptyset$. Но для $O(b)\ \exists\, O^{(1)}(a): f(x) \in O(b)\ \forall\, x \in \dot{O}^{(1)}(a)$. Для $O(c)\ \exists\, O^{(2)}(a): f(x) \in O(c)\ \forall\, x \in\ \dot{O}^{(2)}(a)$.

И для $\dot{O}^{(1)}(a), \dot{O}^{(2)}(a)\ \exists\, \dot{O}(a): \dot{O}(a) \subset \dot{O}^{(1)}(a) \cap \dot{O}^{(2)}(a)$. Следовательно, $\forall\, x \in \dot{O}(a)$

$\big(f(x) \in O(b)\big) \wedge \big(f(x) \in O(c)\big) \Longrightarrow O(b) \cap O(c) \neq \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $b = c$, чтд.

Покажем, что: $cos^2(x) < \frac{sinx}{x} < 1$ при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Достаточно рассмотреть случай когда $0 < x < \frac{\pi}{2}$ так как функции четные. Рассмотрим синус и косинус по пореденению как координаты точки на единичной тригонометрической окружности. Пусть x-угол в AOB в радианах. Тогда координаты точки B-{cosx, sinx}.



Сравнивая площади сектора OCD, треугольника OAB, сектора OAB имеем:

$S_{\sphericalangle OCD} = \frac{1}{2}|OC|\cdot|\widehat{CD}| = \frac{1}{2}(cosx)(xcosx) = \frac{1}{2}cos^2(x)\cdot x < S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|BC| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot sinx = \frac{1}{2}sinx < S_{\sphericalangle OAB} =$

$= \frac{1}{2}|OA|\cdot|\widehat{AB}| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x = \frac{1}{2}x$

Так как $\lim_{x\longrightarrow 0} sinx = 0$, то :

$$1 \longleftarrow (1 - sin^2(x)) = cos^2(x) < \frac{sinx}{x} < 1 \longrightarrow 1$$

Таким образом $\frac{sinx}{x} \longrightarrow 1$ при $x \longrightarrow 0$. чтд

Определение:

$A \subset \mathbb{R}, a \in A'$. Тогда последовательность (x_n) называется *последовательностью Гейне связанной с точкой a, если:*

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$
2) $\forall\, x_n \in A, x_n \neq a\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Определение(по Гейне):

Пусть $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}, \mathrm{f}: \mathrm{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathrm{a} \in \mathrm{A}', \mathrm{b} \in \mathbb{R}$. Тогда $lim_{x\to a} f(x) = b \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \forall$ последовательности Гейне

$(\mathrm{x_n})$, связанной с точкой *a* $lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$

Теорема:

Определения по Гейне и Коши эквивалентны.

Доказательство:

Пусть $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}, \mathrm{f}: \mathrm{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathrm{a} \in \mathrm{A}', \mathrm{b} \in \mathbb{R}$ и пусть существует $lim_{x\to a} f(x) = b$ по Коши. Тогда:

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: |f(x) - b| < \varepsilon\ \forall\, x \in A \cap \dot{O}_\delta(a)$.

Пусть (x_n)- произвольная последовательность Гейне связанная с точкой a. По $\delta > 0$ найдем номер

$N\ \in \mathbb{N}: x_n \in A \cap \dot{O}_\delta(a)\ \forall\, n > N$

Из всего предыдущего получим, что :

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}: \forall\, n > N\ x_n \in A \cap \dot{O}_\delta(a) \Longrightarrow: |f(x_n) - b| < \varepsilon\ \Longrightarrow lim_{x\to a} f(x) = b$ по Гейне.

Докажем обратное:

Пусть $lim_{x\to a} f(x) = b$ по Гейне. Пусть $(x_n) -$ последовательность Гейне. Докажем от противного. Пусть тогда f(x) не стремится к b по Коши. Тогда:

$\exists\, \varepsilon > 0:\ \forall\, \delta_n = \frac{1}{n}(n\ \in \mathbb{N})\ \exists\, x_n \in A \cap \dot{O}_{\delta_n}(a): |f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ (она является последовательностью Гейне так как стремится к a и никогда ему не равна)

Следовательно f(x) не стремится к b по Гейне. Противоречие. Следовательно f(x) стремится к b по Коши.чтд.

БИЛЕТ 9

Определение 1:

Пусть $supA = +\infty$ (или $infA = -\infty$), $f: A \to \mathbb{R}$. Тогда $\lim_{x \to \underset{(-)}{+\infty}} f(x) = b \in \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0$:

$|f(x) - b| < \varepsilon\ \forall\ x \in A$ с условием $x > M\ (x < -M)$.

Определение 2:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A'$ или $a = \pm\infty$. Тогда f*-бесконечно малая функция при* $x \to a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to a} f(x) = 0.$

Определение 3:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A'\ (a = \pm\infty)$. Тогда:

1) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\ M > 0\ \exists\ \delta > 0: f(x) > M\ (f(x) < -M), \forall\ x \in A \cap \dot{O}_\delta(a).$
2) f-бесконечно большая при $x \to a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty.$

Определение 4:

$f: A \to \mathbb{R}$ $-$ограниченна $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\ M > 0 : |f(x)| \le M\ \forall\ x \in A.$

Определение 5:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in \bar{A}$. Тогда f-ограниченна в точке $a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\ M > 0\ \exists\ O(a): |f(x)| \le M\ \forall\ x \in O(a) \cap A.$

Теорема:

$f, g: A \to \mathbb{R}, a \in A', f = \bar{o}(1)$ при $x \to a, g -$ локально ограниченна в точке $a \Longrightarrow fg = \bar{o}(1)$ при $x \longrightarrow a.$

Доказательство:

$g -$ локально ограниченна в точке а $\Longrightarrow\ \exists\ M > 0, \exists\ O^{(1)}(a): |g(x)| \le M\ \forall\ x \in O^{(1)}(a).$

$f = \bar{o}(1)$ при $x \to a \Longrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ O^{(2)}(a):\ |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}\ \forall\ x \in \dot{O}^{(2)}(a).$

Но для $\dot{O}^{(2)}(a)$ и $\dot{O}^{(1)}(a)\ \exists\ \dot{O}(a) \subset \dot{O}^{(2)}(a) \cap \dot{O}^{(1)}(a) \Longrightarrow\ \forall\ x \in \dot{O}(a)\ \forall \varepsilon > 0\ |f(x) \cdot g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \Longrightarrow fg(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to a$*.чтд.*

Теорема:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A', \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Longrightarrow f -$ локально ограниченна в точке a.

Доказательство:

$\exists \lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ для $\varepsilon = 1 \; \exists \; O(a): |f(x) - b| < 1 \; \forall \, x \in \dot{O}(a) \cap A$. *Но* $|f(x) - b| \geq |f(x)| - -|b| \Longrightarrow |f(x)| < |b| + 1 \Longrightarrow f(x) -$ локально ограниченна в точке а.

Пусть $f, g: A \to \mathbb{R}$

Определение 6:

$f = O(g) \; (x \to a) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists O(a): f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \; \forall \, x \in \dot{O}(a) \cap A,$ где $\alpha: A \to \mathbb{R}, \alpha -$ локально ограниченна в точке a

Замечание:

Пусть $\exists O(a): g(x) \neq 0 \; \forall \, x \in \dot{O}(a) \cap A$. Тогда $f = O(g) \; (x \to a) \; \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} -$ локально ограничена в точке a.

$O(g) + O(g) = O(g)$

Определение 6’:

$supA = +\infty \; (infA = -\infty), a = \pm\infty.$ Тогда $f = O(g) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \, M > 0: f(x) = g(x) \cdot \alpha(x)$
$\forall \, x \in (M, +\infty) \cap A \; \big((-\infty, -M) \cap A\big),$ где $\alpha(x) -$ ограниченная функция

Определение 7:

$f \sim g \; (x \to a) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \; O(a): f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \; \forall \, x \in \dot{O}(a) \cap A,$ где $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 1$

Замечание:

1) $f \sim g \Longrightarrow f = O(g)(x \longrightarrow a)$
2) *Если* $\exists \; O(a): g(x) \neq 0 \; \forall \, x \in \dot{O}(a) \cap A,$ то $f \sim g \; (x \to a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
3) *При* $x \to a$:
   a) $f \sim f$
   b) $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$
   c) $f \sim g, g \sim h \Longrightarrow f \sim h$
4) *При* $x \to a$: $f_1 \sim g_1, \; f_2 \sim g_2 \Longrightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$
5) *При* $x \to a$: $f_1 \sim g_1, \; f_2 \sim g_2 \nRightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

Определение 8:

$f = o(g) \; (x \to a) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \; O(a): f(x) = g(x) \cdot \alpha(x) \; \forall \, x \in \dot{O}(a) \cap A,$ где $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0.$

Замечания:

1) *Если* $\exists \; O(a): g(x) \neq 0 \; \forall \, x \in \dot{O}(a) \cap A,$ то $f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
2) $o(g) + o(g) = o(g)$

Примеры:

1) $\ln(1 + x) \sim x$ при $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = lne = 1$$

2) $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)} = 1,$ где $t = e^x - 1.$

3) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1,$ где $t =$
$= \alpha\ln(1+x)$

БИЛЕТ 10

Теорема 1:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A', \lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \qquad b > c\ (b < c).$ Тогда $\exists\, \delta > 0: f(x) > c\ \forall\, x \in \dot{O}_\delta(a) \cap A.$

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$ Тогда для $\varepsilon \coloneqq b - c\ \exists\, \delta > 0: |f(x) - b| < \varepsilon\ \forall\, x \in \dot{O}_\delta(a) \Longrightarrow f(x) > b - (b - c) = c.$

Чтд.

Замечание:

$b \geq c \nRightarrow \exists\, O(a): f(x) \geq c\ \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A$

Например:

$f(x) = x.$ Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Но $f(x)\begin{cases} > 0, x > 0 \\ < 0, x < 0\end{cases}$

Теорема2:

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}, a \in A', \lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ \exists\, O(a): f(x) \geq c\ (f(x) \leq c) \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A \Longrightarrow b \geq c\ (b \leq c).$

Доказательство(от противного):

Пусть $b < c \Longrightarrow\ \exists\, \dot{O}^{(1)}(a): f(x) < c\ \forall\, x \in \dot{O}^{(1)}(a) \cap A.$ (по предыдущей теореме)

Но тогда $\exists\, O^{(2)}(a): O^{(2)}(a) \subset \dot{O}^{(1)}(a) \cap \dot{O}(a)$. Следовательно $(f(x) \geq c) \wedge (f(x) < c)\ \forall\, x \in$
$O^{(2)}(a) \cap A \Longrightarrow$ предположение неверно $\Longrightarrow\ b \geq c$. чтд.

Замечание:

Предел не держит строгих неравенств.

Эти теоремы верны и для $a = \pm\infty$ и для односторонних пределов.

Теорема 3:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\ \lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = b + c.$

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \xRightarrow{def\text{ Гейне}} \forall\, x_n -$ последовательности Гейне $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{def Гейне}} \forall\, x_n -$ последовательности Гейне $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = c$

Следовательно по теореме о предел суммы последовательностей:
$\exists \lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x_n) + g(x_n)\big) = b + c\ \forall\, x_n \overset{\text{def Гейне}}{\Longleftrightarrow} \exists \lim_{x\to a}(f+g)\,(x) = b + c$ чтд.

Следствие1:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x),$ где $\alpha(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to a$

Доказательство:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\delta >: |f(x) - b| < \varepsilon\ \forall\, x \in A\ c$ условием $0 < |x - a| < \delta \overset{def}{\Leftrightarrow}$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x) - b) = 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) - b = \alpha(x),$ где $\alpha(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to a \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x),$
где $\alpha(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to a$ чтд.
Следствие2:

$$\lim_{x\to a} f_k(x) = b_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,m} \Longrightarrow \lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{m} f_k(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k$$

Доказательство:
Индукцией по числу функций.

Теорема 4:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = bc$

Доказательство:
Достаточно доказать, что
$f(x)\cdot g(x) - bc = \bar{o}(1)$ при $x \to a$.

$f(x)\cdot g(x) - bc = (f(x) - b)g(x) + b(g(x) - c)$. *Но* $f(x) - b = \bar{o}(1)$ при $x \to a, g(x) - c = \bar{o}(1)$ при $x \to a, \lim_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R} \Longrightarrow g(x)$локально ограниченна в точке a. Следовательно $f(x)\cdot g(x) - bc = \bar{o}(1)$ при $x \to a$.(по теореме о произведении б.м на ограниченную и по теореме о пределе суммы и определении б.м.) чтд.

Лемма 1:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |b|$
Доказательство:
Следует из того, что $\big||f(x)| - |b|\big| \le |f(x) - b|$.

Лемма 2:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \exists\, O(a): f(x) \ne 0\ \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A\ \Longrightarrow \dfrac{1}{f(x)} -$ локально ограниченна в точке a.

Доказательство:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Longrightarrow \lim_{x\to a}|f(x)| = |b| > \frac{|b|}{2} \Longrightarrow \exists\, O(a): |f(x)| > \frac{|b|}{2}\ \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A \Longrightarrow \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|b|}$$

$\forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A \Longrightarrow \dfrac{1}{f(x)} -$ локально ограниченна в точке $a.$ чтд.

Теорема5:

$\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}, \lim_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \exists\, \mathrm{O}(a)\colon g(x) \neq 0\ \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A \Longrightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$
$= \frac{b}{c}$

Доказательство:

Достаточно доказать, что $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \bar{o}(1)$ при $x \to a$.

$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{f(x)\cdot c - b\cdot g(x)}{c\cdot g(x)} = [f(x)\cdot c - b\cdot g(x)] \cdot \frac{1}{c\cdot g(x)}$. Но $\frac{1}{c\cdot g(x)}$-локально ограниченна в точке a,

а $f(x)\cdot c - b\cdot g(x) = (f(x) - b)c - b(g(x) - c), f(x) - b = \bar{o}(1), g(x) - c = \bar{o}(1)$ при $x \to a \Longrightarrow$

$f(x)\cdot c - b\cdot g(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to a$. Следовательно, $[f(x)\cdot c - b\cdot g(x)] \cdot \frac{1}{c\cdot g(x)} = \bar{o}(1)$при $x \to$
a. Следовательно, $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \bar{o}(1)$ при $x \to a$. чтд.

Замечание:

Теоремы верны и для $a = \pm\infty$ и для односторонних пределов.

$f, g, h\colon A \to \mathbb{R}, a \in A'$

Теорема 6:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \lim\limits_{x\to a} g(x) = c, b > c\ (b < c) \Longrightarrow \exists\, O(a)\colon f(x) > g(x)\ (f(x) < g(x))\ \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A.$

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \lim\limits_{x\to a} g(x) = c \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = b - c, b - c > 0 \Longrightarrow \exists\, O(a)\colon f(x) - g(x) > 0$

$\forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A.$ чтд.

Теорема 7:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \lim\limits_{x\to a} g(x) = c, \exists\, O(a)\colon f(x) > g(x)\ \big(f(x) < g(x)\big) \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A \Longrightarrow b \geq c\ (b \leq c).$

Доказательство(от противного):

Пусть $b < c \Longrightarrow\ \exists\, O^{(1)}(a)\colon f(x) < g(x)\ \forall\, x \in \dot{O}^{(1)}(a)$. Но тогда $\exists\, O^{(2)}(a)\colon O^{(2)}(a) \subset\ O^{(1)}(a) \cap$
$\dot{O}(a) \Longrightarrow \big(f(x) > g(x)\big) \wedge \big(f(x) < g(x)\big)\ \forall\, x \in \dot{O}^{(2)}(a) \cap A.$ Противоречие. Следовательно,

$b \geq c.$ чтд.

Замечания:

1) Предел не держит строгих знаков
2) $b \geq c \nRightarrow \exists\, O(a)\colon f(x) \geq g(x)\ \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A$

   Пример:

   $f(x) = |x|, g(x) = x^2, a = 0.$ Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Но $f(x) > g(x), 0 < |x| < 1$

Теорема:

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b, \exists\, O(a)\colon f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A \Longrightarrow \exists \lim_{x\to a} g(x) = b$

Доказательство:

$\lim_{x\to a} f(x) = b \Longrightarrow\ \forall\, x_n -$ последовательности Гейне $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$
$\lim\limits_{x\to a} h(x) = b \Longrightarrow\ \forall\, x_n -$ последовательности Гейне $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = b$

Так как $x_n \to a \Longrightarrow\ \exists\, N \in \mathbb{N}\colon x_n \in \dot{O}(a) \cap A \Longrightarrow\ f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)\ \forall\, x_n \in \dot{O}(a) \cap A$
Следовательно, $\exists\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b\ \forall\, x_n -$ последовательности Гейне $\Longrightarrow \exists \lim_{x\to a} g(x) = b$.
Чтд.
Теоремы верны и для $a = \pm\infty$ и для односторонних пределов.

БИЛЕТ 11

$f\colon A \to \mathbb{R}$
Определение:

1) *f монотонно возрастает на A* $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x_1) \le f(x_2)\ \forall\, x_1, x_2 \in A$ с условием $x_1 \le x_2$ $(f \uparrow)$
2) *f монотонно убывает на A* $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x_1) \ge f(x_2)\ \forall\, x_1, x_2 \in A$ с условием $x_1 \le x_2$ $(f \downarrow)$
3) *f строго монотонно возрастает на A* $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x_1) < (x_2)\ \forall\, x_1, x_2$ с условием $x_1 < x_2$ $(f \uparrow\uparrow)$
4) *f строго монотонно убывает на A* $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)\ \forall\, x_1, x_2$ с условием $x_1 < x_2$ $(f \downarrow\downarrow)$
5) *f монотонна на A* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(f \uparrow) \vee (f \downarrow)$
6) *f строго монотонна на A* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(f \uparrow\uparrow) \vee (f \downarrow\downarrow)$

Теорема1:

Пусть $A \subset \mathbb{R};\ supA = +\infty, f\colon A \to \mathbb{R}, f \uparrow$ на $A.$ Тогда $\exists\ \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$
$f -$ ограниченна сверху.

Доказательство:

1) Пусть $\exists\ \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists K > 0, \exists M > 0\colon |f(x)| \le M\ \forall\, x > K$
Но так как $f \uparrow$, то $\forall\, x \le K,\ f(x) \le f(K) \le f(K+1) \le M$
Из этого следует что f ограниченна сверху.
2) Пусть f-ограниченна сверху. Тогда множество $F \coloneqq \{f(x),\ x \in A\}$- ограниченно сверху.
Следовательно, $\exists\ supF =: b \in \mathbb{R}$. Тогда:
   - $f(x) \le b\ \forall\, x \in A$
   - $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in A\colon b - \varepsilon < f(k)$

Таким образом:

$\forall\, x\colon x > k\ b - \varepsilon \le f(k) \le f(x) \le b < b + \varepsilon \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in A\colon |f(x) - b| < \varepsilon\ \forall\, x > k \Longrightarrow$

$\exists\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ чтд.

Аналогично доказываются следующие теоремы:

Теорема2:

Пусть $A \subset \mathbb{R};\ supA = +\infty, f\colon A \to \mathbb{R}, f \downarrow$ на $A.$ Тогда $\exists\ \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow\ f -$ ограниченна снизу.

Теорема3:

Пусть $A \subset \mathbb{R}$; $infA = -\infty, f: A \to \mathbb{R}, f \uparrow (\downarrow)$на $A.$ Тогда $\exists \lim_{x \to -\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f -$ ограниченна снизу(сверху).

Замечание:

$$A - \text{ограниченное множество}, a = supA \in A', f \uparrow\uparrow \text{ на } A. \text{Тогда} \exists \lim_{x \to a} f(x)$$
$$\Leftrightarrow f - \text{ограниченна сверху}$$

Теорема4:

$f: A \longrightarrow B \subset \mathbb{R}, g: B \to \mathbb{R}, a \in A', b \in B'$, и выполнены условия:

1) $\forall\, O(b) \,\exists\, O(a): f(x) \in \dot{O}(b) \cap B, \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A$
2) $\lim_{y \to b} g(y) = c \in \mathbb{R}$

Тогда $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$

Замечания:

- $1) \stackrel{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{x \to a} f(x) = b$

Пример:

$f(x) = 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}.$ Тогда $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0,$ но $f(x) \notin \dot{O}(0)$

Доказательство теоремы 4:

Исходя из условия 2):

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, O(b): |g(y) - c| < \varepsilon \;\forall\, y \;\in \dot{O}(b) \cap B.$

Для выбранной $O(b)$ $\exists$ O(a): $f(x) \in \dot{O}(b) \cap B, \forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A.$

Таким образом:

$\forall\, \varepsilon > 0 \exists$ O(a): $\left|g\big(f(x)\big) - c\right| < \varepsilon \;\forall\, x \in \dot{O}(a) \cap A \implies \lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$ чтд.

БИЛЕТ 12

Определение 1:

Пусть имеется множество X. Система $\mathbb{B} = \{B \subset X\}$ называется *базисом фильтра (базой), если:*

1) $B \neq \emptyset \;\forall\, B \in \mathbb{B}$
2) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathbb{B} \;\exists\, B_3 \in \mathbb{B}: B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$

Примеры:

1) $a \in A',\; \delta > 0, B = \dot{O}_\delta(a) \cap A, \mathbb{B} = \{B\}, x \to a$
2) $M > 0,\; B = (M, +\infty) \cap A, \mathbb{B} = \{B\}, x \to +\infty$
3) $\delta > 0, a \in A', B = (a - \delta, a) \cap A, \mathbb{B} = \{B\}, x \to a - 0$
4) $N \in \mathbb{N}, B = \{N + 1, N + 2, \dots\},\; \mathbb{B} = \{B\}, n \to \infty$

Определение 2:

Пусть $A \subset \mathbb{R}, f: A \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{B} -$ база в $A.$ Тогда:
$\lim\limits_{\mathbb{B}} f(x) = b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B \in \mathbb{B}: |f(x) - b| < \varepsilon\ \forall\, x \in B$

Определение 3:

$f: A \to \mathbb{R}, \mathbb{B} -$ база в А . Тогда f-ограниченна по базе $\mathbb{B} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, M > 0\ \exists\, B \in \mathbb{B}: |f(x)| \leq M\ \forall\, x \in B.$

Определение 4:

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{B} -$ база в A. Тогда $f -$ б. м. по базе $\mathbb{B} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B \in \mathbb{B}: |f(x)| < \varepsilon\ \forall\, x \in B$

Теорема(Критерий Коши):

$f: A \to \mathbb{R}, \mathbb{B} -$ база в A . Тогда $\exists\, \lim\limits_{\mathbb{B}} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B \in \mathbb{B}: |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\ \forall\, x_1, x_2 \in B$

Доказательство:
I:
Пусть $\exists\, \lim_{\mathbb{B}} f(x) =: b \in \mathbb{R}$.
Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B \in \mathbb{B}: |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, x \in$ B $\Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \big|(f(x) - b) + +(b - f(x_2))\big| \leq$
$|f(x_1) - b| + |f(x_2) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall\, x_1, x_2 \in B.$
II:
Пусть $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B \in \mathbb{B}: |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\ \ \forall\, x_1, x_2 \in B.$

5) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, B_n \in \mathbb{B}: |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{n}, \forall\, x_1, x_2 \in B_n$
6) $B_n \neq \emptyset\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Выберем произвольно $x_n \in B_n$. Получим последовательность (x_n). Рассмотрим последовательность $f(x_n)$. Докажем, что она последовательность Коши. $\forall\, n, m\ \exists\, x \in B_n \cap B_m$.Следовательно, $|f(x_n) - f(x_m)| =$
$$= |f(x_n) - f(x) + f(x) - f(x_m)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |(f(x) - f(x_m)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon$$
$\forall\, n, m \in \mathbb{N}: m, n > N,$ где $N \geq \frac{2}{\varepsilon}$
Итак, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}: |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon\ \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}: m, n > N.$ Следовательно, $f(x_n) -$ последовательность Коши $\Longrightarrow \exists\, \lim_{\mathbb{B}} f(x_n) =: b \in \mathbb{R}$
7) Имеем $|f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \Longrightarrow \lim_{\mathbb{B}} |f(x_n) - f(x_m)| = |f(x_n) - b| \leq \frac{1}{n}$
8) Тогда $|f(x) - b| = |f(x) - f(x_n) + f(x_n) - b| \leq |f(x) - f(x_n)| +$
$$+ |f(x_n) - b| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon\ \forall\, n \geq N, \text{где } N > \frac{2}{\varepsilon}$$

В итоге получаем:
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B_{N+1} \in \mathbb{B}: |f(x) - b| < \varepsilon\ \forall\, x \in B \Longrightarrow \exists \lim\limits_{\mathbb{B}} f(x) \in \mathbb{R}$. чтд.

БИЛЕТ 13

Определение 1:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A$.Тогда $f -$ непрерывна в точке $a\ \big(f \in C(a)\big) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0: |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
$\forall\, x \in A$ с условием $|x - a| < \delta.$

Замечание:
Если а-изолированная точка множества А, то $f \in C(a)$, так как в дельта окрестности точки а пересеченной с самим множестом А в этом случае будет содержаться единственная точка –сама точка а. А для нее неравенства $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0: |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ \ |x - a| < \delta$ безусловно выполенены.

Эквивалентные определения:

1) $f: A \to \mathbb{R}, a \in A.\ f \in C(a) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0: |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ \forall\, x \in O_\delta(a)$
2) $f: A \to \mathbb{R}, a \in A.\ f \in C(a) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, O\big(f(a)\big)\ \exists\, O(a): f(x) \in O\big(f(a)\big)\ \forall\, x \in O(a) \cap A$

Теорема:
$f: A \to \mathbb{R}, a \in A \cap A'.\text{Тогда } f \in C(a) \Leftrightarrow \exists\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Доказательство:

Сразу же следует из определения предела функции по Коши.

Следствие:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A\ f \in C(a) \Leftrightarrow \forall\ (x_n \in A): \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$

Доказательство:

Следует из определения предела функции по Гейне.

Определение 2:

$f: A \to \mathbb{R}.\text{Тогда } f \in C(A) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\ x \in A, f(x) \in C(x)$

Пример:

$f(x) = sinx, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) \in C(\mathbb{R}).$

$|sinx - sina| = 2\left|sin\frac{x-a}{2}cos\frac{x+a}{2}\right| \le 2|sin\frac{x-a}{2}| \le |x-a|$
Таким образом взяв $\varepsilon = \delta$ получим определение непрерывности.

Определение3:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A \cap A'.\text{Тогда:}$

1) *f- непрерывна слева в точке a* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \exists\ f(a-0) \coloneqq \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$
2) *f- непрерывна справа в точке a* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \exists\ f(a+0) \coloneqq \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$

Теорема:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A \cap A'.\text{Тогда } f \in C(a) \Leftrightarrow f - \text{непрерывна справа и слева}$

Доказательство:

Очевидно.

Теорема 1:

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}, a \in A, f \in C(a) \Longrightarrow f - \text{локально ограниченна в точке } a.$

Доказательство:

1) Пусть а-изолированная точка множества А. Тогда $\exists\ O(a): O(a) \cap A = \{a\}$. Тогда очевидно, что в этой точке функция локально ограниченна.
2) Пусть $a \in A' \cap A$. Тогда $f \in C(a) \Longrightarrow\ \exists\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Longrightarrow f -$ локально ограниченна в точке а.чтд.

Теорема 2:

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}, a \in A, f \in C(a), f(a) > 0 \Longrightarrow \exists\ O(a): f(x) > 0\ \forall\ x \in O(a) \cap A.$$

Доказательство:

$f \in C(a) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) > 0 \Longrightarrow\Longrightarrow \exists\ O(a): f(x) > 0\ \forall\ x \in \dot{O}(a) \cap A, f(a) > 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists\ O(a): f(x) > 0\ \forall\ x \in O(a) \cap A$, чтд.

Теорема 3:

$f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}, a \in A, f, g \in C(a).$ Тогда:
1) $f + g \in C(a)$
2) $fg \in C(a)$
3) Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g} \in \mathrm{C}(a)$

Доказательство:
Следствия соответствующих теорем для пределов.

Замечание:

$$f_k: A \to \mathbb{R}, k = \overline{1, m}, a \in A, f_k \in C(a) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{m} f_k \in C(a), \prod_{k=1}^{m} f_k \in C(a)$$

Теорема 4:
$f: A \to B, a \in A, f \in C(a), f(a) = b, g: B \to \mathbb{R}, b \in B, g \in C(b) \Longrightarrow g \circ f \in C(a)$

Доказательство:
$g \in C(b) \Longrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ O(b): |g(y) - g(b)| < \varepsilon\ \forall\ y \in O(b) \cap B$
$f \in C(a) \Longrightarrow$ для выбранной $O(b)\ \exists\ O(a): f(x) \in O\big(f(a)\big)\ \forall\ x \in O(a) \cap A.$
В итоге:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ O(a)\ \ \big|g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)\big| < \varepsilon\ \forall\ x \in O(a) \cap A \Longrightarrow g\big(f(x)\big) \in C(a).$ чтд.

Примеры:
$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1 \Longrightarrow f(x) \in C(\mathbb{R})$
Доказательство:
Достаточно рассмотреть случай когда $a > 1$, так как в противном случае сделаем замену $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$
Докажем, что $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}\ \ \forall\ x_0 \in \mathbb{R}$.
Рассмотрим случай когда $x_0 = 0$. *Докажем, что* $\lim_{x\to 0} a^x = 1$

$$n \in \mathbb{N}, a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left[1 + \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right]^n \geq 1 + n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right), a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0 \Longrightarrow 0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n} \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0 \Longrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}: 1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon\ \forall\ n > N \Longrightarrow 1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$$

$\forall\, n > N$

Зафиксируем произвольно $n_0 > N$. Тогда $\forall\, x \in O_{\frac{1}{n_0}}(0)\ 1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$

Таким образом:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \dfrac{1}{n_0} : |a^x - a^0| < \varepsilon\ \forall\, x \in O_\delta(0) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$. чтд.

Теперь рассмотрим произвольный x_0:

$\lim\limits_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = a^{x_0} \cdot \lim\limits_{x\to x_0}(a^{x-x_0} - 1) = 0$. чтд.

БИЛЕТ 14

Определение 1:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A \cap A'$. Тогда f – разрывна в точке $a \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\nexists\ \lim_{x\to a} f(x)) \vee (\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a))$

Определение 2:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A \cap A'$. f *имеет в точке а устранимый разрыв* $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, f(a-0), \exists\, f(a+0)$, $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$.

Определение 3:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A \cap A'$. f *имеет в точке а разрыв первого рода* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (f имеет в точке a устранимый разрыв) $\vee$ ($\exists\, f(a-0), \exists\, f(a+0), f(a-0) \neq f(a+0)$)

Определение 4:

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A \cap A', f \notin C(a)$. *Тогда* f *имеет разрыв второго рода в точке а, если точка а не является точкой разрыва первого рода.*

Определение 5:

$f: A \to \mathbb{R}$. Тогда:

$sup_{x\in A} f(x) = sup f(A)$

$inf_{x\in A} f(x) = inf f(A)$

Теорема:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}, f$ – монотонна на $[a,b]$. Тогда f может иметь разрывы только первого рода.

Доказательство:

Не ограничивая общности будем считать что f монотонно возрастает на [a,b].

1) *Пусть* $x_0 \in (a,b]$. *Докажем, что* $\exists\, f(x_0 - 0)$.
   Так как f монотонно возрастает, То:
   $f(a) \le f(x) \le f(b) \forall\, x \in [a,b] \Longrightarrow f$ ограниченна на $[a,b] \Longrightarrow f$ ограниченна на (a, x_0)
   Следовательно, $\exists\, sup_{x\in(a,x_0)} f(x) \coloneqq c \in \mathbb{R} \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_1 \in (a, x_0) \colon c - \varepsilon < f(x_1) \le c$.
   Следовательно, $\forall\, x \in (x_1, x_0)\ c - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le c < c + \varepsilon$.
   Таким образом:
   $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = x_0 - x_1 \colon |f(x) - c| < \varepsilon\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \Longrightarrow \exists\, f(x_0 + 0)$.
2) *Пусть* $x_0 \in [a,b)$. *Аналогично предыдущему* $\exists\, f(x_0 + 0)$.

Следовательно f может иметь разрывы только первого рода. *Чтд.*

БИЛЕТ 15

Рассмотрим $f: A \to \mathbb{R}$.

Лемма:

f – непрерывна на $[a,b], f(a)\cdot f(b) < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \colon f(c) = 0$.

Доказательство:

Разделим отрезок [a,b] пополам:

- *Если* $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,$ то теорема доказана.
- *Если нет, то обозначим за* $[a_1, b_1]$ ту половину отрезка $[a, b]$ для которой $f(a_1) \cdot f(a_2) < 0.$

Далее делим поучившийся отрезок пополам и опять рассматриваем те же ситуации. Продолжаем данный процесс. Тогда:

- $\exists\, n \in \mathbb{N}: f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0.$ *Тогда лемма доказана.*
- *Иначе построена система стягивающихся отрезков. Следовательно по лемме Кантора:* $\exists\, c: c \in [a_n, b_n]\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$
  Так как $b_n - a_n \to 0,$ то $b_n \to c, a_n \to c$. *Но* $f \in C(\mathrm{c}) \Longrightarrow f(a_n) \cdot f(b_n) \to f^2(c)$. *Но* $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. *Следовательно,* $f^2(c) \le 0 \Longrightarrow f(c) = 0$.*чтд.*

Теорема:
$f(a) \neq f(b), f \in C[a, b]$. Тогда $\forall\, M: f(a) < M < f(b)\ \exists\, c \in (a, b): f(c) = M.$

Доказательство:
Положим $g(x) = f(x) - M$. Тогда $g(x) \in C[a, b], g(a) = f(a) - M < 0, g(b) = f(b) - M > 0 \Longrightarrow$ По предыдущей лемме $\exists$ c $\in (a, b): g(c) = 0 = f(c) - M \Longrightarrow \exists\, c \in (a, b): f(c) = M$. Чтд.

БИЛЕТ 16

Теорема(Первая теорема Вейерштрасса):
$f \in C[a, b] \Longrightarrow f -$ ограниченна на $[a, b]$.
Доказательство:
$\forall\, x \in [a, b]\ f \in C(x) \Longrightarrow f -$ локально ограниченна в точке $x \Longrightarrow \exists\, M_x > 0, \exists\, O(x): |f(y)| \le M_x$ $\forall\, y \in O(x) \cap [a, b]$.
Таким образом построено покрытие отрезка [a,b] интервалами O(x). Следовательно согласно лемме Бореля-Лебега существует конечно подпокрытие $\{O(x_k)\}\ k = \overline{1, m}: [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} O(x_k)$.
Положим $M \coloneqq \max\{M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_m}\}$. Тогда $\forall\, x \in [a, b]\ \exists\, k: x \in O_{x_k} \Longrightarrow |f(x)| \le M_{x_k} \le M$. Чтд.

Замечание:
$f \in C(a, b) \nRightarrow f$ограниченна на (a, b).

Теорема (Вторая теорема Вейерштрасса):
$f \in C[a, b] \Longrightarrow\ \exists\, x_1 \in [a, b]: f(x_1) = sup_{[a,b]} f = maxf, \exists\, x_2 \in [a, b]: f(x_2) = inf_{[a,b]} f = minf$

Доказательство:
Из первой теоремы Вейерштрасса следует, что $\exists\, sup_{[a,b]} f, \exists\, inf_{[a,b]} f$.
Достаточно доказать, что $\exists\, x_1 \in [a, b]: f(x_1) = sup_{[a,b]} f$.
От противного:
Пусть $\forall\, x \in [a, b]\ f(x) < M$. Рассмотрим $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, x \in [a, b]$. Тогда имеем:
$g \in C[a, b] \Longrightarrow \exists\, M^* > 0: |g(x)| \le M^* \Longrightarrow M - f(x) \ge \dfrac{1}{M^*} \Longrightarrow f(x) \le M - \dfrac{1}{M^*} = M' \Longrightarrow M' -$ Верхняя грань $f([a, b])$. Но $M' < M$. Противоречие. Следовательно, $\exists\, x_1 \in [a, b]: f(x_1) = sup_{[a,b]} f$
Чтд.

Замечание:
Для интервала теорема может быть неверна. Например, $f(x) = x$ на интервале $(0,1)$.

БИЛЕТ 17

Определение:
$f: A \to \mathbb{R}$. Тогда f равномерно непрерына на $A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ $\forall\, x_1, x_2\ \in A: |x_1 - x_2| < \delta.$

Замечание:

f — равномерно непрерывна на $A \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \in C(A)$

Теорема(Кантора о равномерной непрерывности функции непрерывной на отрезке):
$f \in C[a,b] \Longrightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство:
От противного:
Пусть $\exists\ \varepsilon > 0: \forall\ \delta > 0\ \exists\ x_1, x_2 \in [a,b]: |x_1 - x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \Longrightarrow$ (в частности)
$\exists\ \varepsilon > 0: \forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ \alpha_n,\ \beta_n \in [a,b]: |\alpha_n - \beta_n| < \dfrac{1}{n}, |f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon.$
Имеем: $\alpha_n \in [a,b]\ \forall\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \alpha_n$ — ограниченна $\Longrightarrow \exists\ \alpha_{n_k}$ — подпоследовательность:
$\exists\ \lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} =: \alpha \in [a,b]$. *Тогда* $\exists\ \beta_{n_k}$ — подпоследовательность: $\exists\ \lim_{k\to\infty} \beta_{n_k}$, причем:
$\lim\limits_{k\to\infty} \beta_{n_k} = \alpha$, так как $0 \leq \left|\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}\right| < \dfrac{1}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$
Тогда так как $f \in C(\alpha) \Longrightarrow f(\alpha_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\alpha),\ f(\beta_{n_k}) \to f(a) \Longrightarrow \left|f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k})\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Longrightarrow$
$0 < \varepsilon \leq \left|f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k})\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Longrightarrow \varepsilon = 0.$ Противоречие.

БИЛЕТ 18

Теорема:
$f: [a,b] \to f([a,b]) \subset \mathbb{R}, f \uparrow\uparrow, f \in C[a,b] \Longrightarrow \exists\ g = f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$, причем $g \uparrow\uparrow$ на $[f(a), f(b)], g \in C[f(a), f(b)]$.

Доказательство:
1) Докажем, что $[f(a), f(b)] = f([a,b])$
   Действительно:
   a) Пусть $y \in f([a,b]) \Longrightarrow \exists\ x \in [a,b]: f(x) = y \Longrightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Longrightarrow y \in [f(a), f(b)]$
   b) Пусть $y \in [f(a), f(b)]$. Если $y = f(a)$ или $y = f(b)$, то очевидно $y \in f([a,b])$. Пусть $f(a) < f(x) < f(b) \Longrightarrow$ (по теореме о пром. зн.) $\exists\ x \in (a,b): f(x) = y \Longrightarrow y \in f([a,b])$.
   Следовательно, $[f(a), f(b)] = f([a,b])$.
2) *Так как* $f \uparrow\uparrow$ на $[a,b] \Longrightarrow f$ — инъективна. *Так как* $f: [a,b] \to [f(a), f(b)] \Longrightarrow f$ — *сюръективна. Таким образом f-биекция. Следовательно* $\exists\ g = f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$
3) *Докажем, что* $g \uparrow\uparrow$ на $[f(a), f(b)]$.
   Пусть $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)], y_1 < y_2$. Тогда $g(y_1) \neq g(y_2)$. Обозначим $g(y_1) = x_1, g(y_2) = x_2$. Предположим, что $x_1 > x_2$. Тогда $f(x_1) = y_1 > f(x_2) = y_2$. Противоречие.
   Следовательно, $g \uparrow\uparrow$ на $[f(a), f(b)]$.
4) *Докажем, что* $g \in C[f(a), f(b)]$ *:*
   Так как $g \uparrow\uparrow$ то *она можем иметь разрывы только первого рода.*
   От противного:
   Пусть $\exists\ M \in [f(a), f(b)]: g \notin C(M)$. *Тогда :*
   $(g(M-0) \neq g(M)) \vee (g(M+0) \neq g(M))$
   a) Пусть $f(a) < M \leq f(b), g(M-0) \neq g(M)$. Тогда $g(M-0) < g(M)$.
   Пусть $f(a) \leq y < M$. *Тогда* $g(f(a)) = a \leq g(y) \leq sup_{f(a)\leq y<M}\, g(y) = g(M-0)$.
   Пусть $M \leq y \leq f(b)$. Тогда $g(M) \leq g(y) \leq b$
   Таким образом $g([f(a), f(b)]) = [a, g(M-0)] \cup [g(M), b] \neq [a,b]$. Противоречие.
   Следовательно, $g(M-0) = g(M)$.
   b) *Пусть* $f(a) \leq M < f(b), g(M+0) \neq g(M)$. Тогда $g(M+0) > g(M)$. *Аналогично приходим к противоречию. Следовательно,* $g(M+0) \neq g(M)$.
   Таким образом получаем, что $\forall\ M \in [f(a), f(b)]\ \exists\ g(M+0), \exists\ g(M-0): g(M+0) = g(M-0) = g(M) \Longrightarrow g \in C(M)\ \forall\ M \in [f(a), f(b)] \Longrightarrow g \in C[f(a), f(b)]$ *. чтд.*

Замечание:

Теорема верна и для f ↓↓ с соответствующими изменениями условия.

БИЛЕТ 19

Определение 1:

$f: A \to \mathbb{R}, x_0 \in A_i$. Тогда f имеет производную в точке $x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \coloneqq f'(x_0)$

Замечание:

1) $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \Longrightarrow f \in C(x_0)$

Доказательство:

$x_0 \in A_i \Longrightarrow x_0 \in A'$. $\exists f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \coloneqq b$. Но тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b + o(1) \Longrightarrow f(x) - f(x_0) = b(x-x_0) + o(1)(x-x_0)$. Но $b(x-x_0) \to 0$ при $x \to x_0, o(1)(x-x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

Следовательно, $f(x) - f(x_0) \to 0$ при $x \to x_0$. Следовательно, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Longrightarrow f \in C(x_0)$.

2) $f \in C(x_0) \not\Rightarrow \exists f'(x_0)$.

Определение 2:

Правой (левой) производной функции f в точке x_0 называется $\lim_{x\to x_0+0(-0)} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \coloneqq f'_{+(-)}(x_0)$.

Определение 3:

$f: A \to \mathbb{R}, x_0 \in A_i$. Тогда функция f называется дифференцируемой в точке x_0 $\left(f \in D(x_0)\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, O(x_0), \exists\, M \in \mathbb{R}: f(x) - f(x_0) = M(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0)$ при $x \to x_0\ \forall\, x \in \dot{O}(x_0)$, где $\alpha(x)$ – б.м. функция.
Выражение $M(x-x_0)$ называется дифференциалом f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Теорема:
$f: A \to \mathbb{R}, x_0 \in A_i$. Тогда $f \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists$ (конечная) $f'(x_0)$.

Доказательство:

1) Необходимость.
   Пусть $f \in D(x_0) \Longrightarrow \exists\, O(x_0), \exists\, M \in \mathbb{R}: f(x) - f(x_0) = M(x-x_0) + o(1)(x-x_0)$ при $x \to x_0\ \forall\, x \in \dot{O}(x_0)$. Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = M + o(1)$. Следовательно $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = M =$
   $= f'(x_0)$.
2) *Пусть* $\exists f'(x_0) = M \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = M + o(1)$ при $x \to x_0\ \forall\, x \in \dot{O}(x_0) \Longrightarrow$
   $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)\big(M + o(1)\big)$ при $x \to x_0\ \forall\, x \in \dot{O}(x_0) \Longrightarrow f \in D(x_0)$. чтд.

БИЛЕТ 20

Теорема 1:

$f, g: A \to \mathbb{R}, x_0 \in A_i$. $f, g \in D(x_0) \Longrightarrow (f+g) \in D(x_0)$ причем $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Доказательство:

$$\frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\longrightarrow f'(x_0)+g'(x_0) \text{ при } x\to x_0$$

Чтд.

Теорема 2:

$f,g: A\to\mathbb{R}, x_0\in A_i.\ f,g\in D(x_0)\Longrightarrow fg\in D(x_0)$ и $(fg)'=f'g+g'f$.

Доказательство:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\longrightarrow f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$

при $x\to x_0$. Чтд.

Замечание:

$$f_k(x)\in D(x_0)\ k=\overline{1,m} \text{ тогда } (\sum_{k=1}^{m} f_k)'(x_0)=\sum_{k=1}^{m} f'_k(x_0)$$

Теорема 3:

$f,g: A\to\mathbb{R}, x_0\in A_i.\ f,g\in D(x_0), g(x_0)\neq 0\Longrightarrow \frac{f}{g}(x_0)\in D(x_0)$ и $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доказательство:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)\frac{1}{x-x_0}=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)} \text{ при } x\to x_0 \text{чтд.}$$

БИЛЕТ 21

Теорема 1:

$f: A\to B, g: B\to\mathbb{R}, x_0\in A_i, f\in D(x_0), y_0=f(x_0)\ \in B_i, g\in D(y_0).$ Тогда $g\circ f\in D(x_0)$,
$(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Доказательство:
$f\in D(x_0)\Longrightarrow \exists\, O_1(x_0): f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha\big((x-x_0)\big)\cdot(x-x_0), \forall\, x\in O_1(x_0),$ где $\alpha(h)=o(1)$ при $h\to 0, \alpha(0)=0$.

$g\in D(y_0)\Longrightarrow \exists\, O(y_0): g(y)-g(y_0)=g'(y_0)(y-y_0)+\beta\big((y-y_0)\big)\cdot(y-y_0)\ \forall\, y\in O(y_0),$ где $\beta(h)=o(1)$ при $h\to 0, \beta(0)=0$.

$f \in D(x_0) \Longrightarrow f \in C(x_0) \Longrightarrow$ для $O(y_0)\ \exists\ O_2(x_0)$: $f(x) \in O(y_0)\ \forall\ x \in O_2(x_0)$. *Также* $\exists\ O(x_0) \subset O_1(x_0) \cap O_2(x_0)$. *Тогда:*

$\forall\ x \in O(x_0)\ g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = \Big(g'(y_0) + \ \beta\big((y - y_0)\big)\Big) \cdot \big(f(x) - f(x_0)\big) =$

$= \Big(g'(f(x_0)) + \ \alpha_1((x, x_0))\Big)\Big(f'(x_0) + \alpha\big((x - x_0)\big)\Big)(x - x_0)$, где $\alpha_1((x, x_0)) = o(1)$ при $x \to x_0$

Таким образом $g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \alpha_2((x, x_0))(x - x_0) \forall\ x \in O(x_0)$, где $\alpha_2((x, x_0)) = o(1)$ при $x \to x_0$чтд.

Теорема 2:

$f: [a, b] \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), f\ \uparrow\uparrow, f \in C[a, b], f \in D(x_0), f'(x_0) \neq 0 \Longrightarrow g = f^{-1}: [f(a), f(b)] \longrightarrow [a, b]$,
$g \in D\big(f(x_0)\big)$ и $g'\big(f(x_0)\big) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Доказательство:

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

$(\big(g \in C[f(a), f(b)], g(y) = x, g(y_0) = x_0, y = f(x), y_0 = f(x_0)\big)$

БИЛЕТ 22

Определение 1:

Функция *f(x)* называется дифференцируемой на интервале *(a,b)* если она диффереенцируема в каждой его точке. В этом случае на интервале *(a,b)* определена функция *f'(x).*

Определение 2:

Пусть $x_0 \in (a, b)$. Если функция *f'(x)* дифференцируема в точке x_0, то $(f'(x_0))'$ называется второй производной функции f в точке x_0 и обозначается $f''(x_0)$.

Определение 3:

Пусть на интервале *(a,b)* определена производная n-ого порядка $f^{(n)}(x)$. Если эта функция дифференцируема то ее производная называется производной порядка n+1: $f^{(n+1)}(x)$.

Теорема (Формула Лейбница):

Если функции $f(x)$и $g(x)$ *имеют производные порядка n включительно, то*

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Доказательство:

Докажем теорему по индукции.

База: $n = 1\ (f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$-верна.

Шаг: Пусть формула Лейбница верна для n. Докажем ее для n+1:

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = ((f \cdot g)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \big(f^{(k)} g^{(n-k)}\big)' =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k \big(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\big) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} =$$

$$= C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)} =$$

$$= C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)} =$$

$$C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(k)} g^{(n-k+1)} + C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)} =$$

$$= C_{n+1}^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

.чтд.

Определение 1:

По определению дифференциала $df(x) = f'(x) \cdot dx$. Зафиксировав значение dx получаем, что

$df(x)$-функция, зависящая только от x. Если она дифференцируема, то ее дифференциал называется вторым дифференциалом от функции *f(x):*

$d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2$

Определение 2:

Если $d^{(n)}f(x)$ дифференцируема по x при фиксированном dx, то $d^{(n+1)}f(x) = d(d^{(n)}f(x))$

Тогда справедлива формула:

$d^{(n)}f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$.

БИЛЕТ 23

Определение 1:

$f: A \to \mathbb{R}, x_0 \in A_i$. Тогда:

1) $x_0 -$ точка локального максимума(минимума) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, O(x_0): f(x) \le (\ge) f(x_0)\ \forall\, x \in O(x_0)$
2) $x_0 -$ точка локального экстремума $\overset{def}{\Longleftrightarrow} x_0 -$ точка локального максимума или минимума.

Определение 2:

1) x_0 − точка строгого локального максимума(минимума) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\ O(x_0): f(x) < (\geq) f(x_0)\ \forall\ x \in \dot{O}(x_0)$

2) x_0 − точка локального экстремума $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ x_0 − точка строгого локального максимума или минимума.

Теорема (Ферма):

$f: (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), x_0$ − точка локального экстремума, $f \in D(x_0) \Longrightarrow f'(x_0) = 0$

Доказательство:

Не ограничивая общности считаем, что x_0 − точка локального максимума. Тогда $\exists\ O(x_0): f(x) \leq f(x_0)\ \forall\ x \in O(x_0)$. Так как , $f \in D(x_0) \Longrightarrow \exists\ f'_-(x_0), \exists\ f'_+(x_0)$, причем $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$
Рассмотрим следующее выражение:

1) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0\ \forall\ x \in O(x_0) \cap (x_0, +\infty)$
2) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0\ \forall\ x \in O(x_0) \cap (-\infty, x_0)$

Значит переходя к пределам исходя из теорем о неравенствах с пределами:
$f'_+(x_0) \leq 0, f'_-(x_0) \geq 0$. Но так как $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$.чтд.

Теорема (Ролля):
$f \in C[a, b] \cap D(a, b), f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists\ c \in (a, b): f'(c) = 0.$

Доказательство:
$f \in C[a, b] \Longrightarrow$ (по второй теореме Вейерштрасса) $\exists\ x_{min}, x_{max} \in [a, b]: f(x_{min}) = min_{[a,b]}f$, $f(x_{max}) = max_{[a,b]}f$. Рассмотрим два случая:

1) $f(x_{min}) = f(x_{max}) \Longrightarrow f = const$ на $[a, b] \Longrightarrow f'(c) = 0\ \forall\ c \in [a, b]$.
2) $f(x_{min}) \neq f(x_{max})$. Тогда $(x_{min} \in (a, b)) \vee (x_{max} \in (a, b))$. Пусть с $\in \{x_{min}, x_{max}\}: c \in (a, b)$. Тогда с-точка локального экстремума $\Longrightarrow f'(c) = 0$. Чтд.

БИЛЕТ 24

Теорема(Коши):

$$f, g \in C[a, b] \cap D(a, b), g'(x) \neq 0\ \forall\ x \in (a, b) \Longrightarrow \exists\ c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство:
Рассмотрим следующую функцию $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Так как $h(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b) \Longrightarrow$ (по теореме Ролля) $\exists\ c \in (a, b)$:

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \Longrightarrow\ \exists\ c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.\text{чтд.}$$

Теорема (Лагранжа):
$f \in C[a, b] \cap D(a, b) \Longrightarrow \exists\ c \in (a, b): f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$

Доказательство:
Положим $g(x) = x$ на $[a, b]$. Тогда $f, g \in C[a, b] \cap D(a, b), g'(x) \neq 0\ \forall\ x \in (a, b) \Longrightarrow$

$$\text{(по теореме Коши) } \exists\ c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \Longrightarrow\ f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).\ \textit{Чтд.}$$

БИЛЕТ 25

Теорема 1 (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$):

Пусть:

1) $f, g \in D(a,b)$
2) $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0$
3) $g'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in (a,b)$
4) $\exists\ \lim_{x\to a+0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = l$

Тогда: $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Доказательство:

$f(a+0) = g(a+0) = 0 \Longrightarrow$ мы можем доопределить f и g в точке *a,* а именно положим *f(a)=g(a)=0.* Тогда $f, g \in C(a)$.

Из пункта 4 следует, что:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \in (0, b-a)\colon \left|\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} - l\right| < \varepsilon\ \forall\, x \in (a, a+\delta).$

Рассмотрим выражение:

5) $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right|$. *Но* $f, g \in C[a, a+\delta] \cap D(a,b), g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (a,b)$

$$\Longrightarrow \text{(по теореме Коши)}\ \exists\, c_x \in (a,x)\colon \left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| = \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l\right| < \varepsilon\ \forall\, x \in (a, a+\delta) \Longrightarrow$$

$\exists \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ *.чтд.*

Теорема 1 (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$):

Пусть:

1) $f, g \in D(a,b)$
2) $\lim_{x\to a+0} g(x) = \infty$
3) $g'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (a,b)$
4) $\exists\ \lim_{x\to a+0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = l$

Тогда: $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Доказательство:

Из пункта 4 следует, что:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \in (0, b-a)\colon \left|\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{4}\ \forall\, x \in (a, a+\delta)$.Обозначим $x_0 = a+\delta$. Рассмотрим выражение:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - l\right| = \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{4}\ \text{для некоторого}\ c_x \in (x, x_0) \forall\, x \in (a, a+\delta)$$

Справедливо тождество:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-l=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)-lg(x_0)}{g(x)}$$

Но $1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\to 1$ при $x\to a+0 \Longrightarrow \left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<2\ \forall\, x\in(a,a+\delta_2)$

$\dfrac{f(x_0)-lg(x_0)}{g(x)}\longrightarrow 0$ при $x\to a+0 \Longrightarrow \left|\dfrac{f(x_0)-lg(x_0)}{g(x)}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}\ \forall\, x\in(a,a+\delta_3)$

Таким образом:

$\exists\, \delta_1\in(0,\delta)$: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right| \ \le \left|\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)\right|+\left|\frac{f(x_0)-lg(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot 2+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \forall\, x\in(a,a+$
$+\delta_1)\Longrightarrow \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.чтд.

БИЛЕТ 26

Обозначение: $f\in C^{(n)}(a,b)\overset{def}{\Longleftrightarrow}\ (f\in D^{(n)}(a,b))\wedge(f^{(n)}\in C(a,b))$

Теорема:

$f\in C^{(n)}(O(x_0))\cap D^{(n+1)}(\dot O(x_0)),\ \ n\ge 0\Longrightarrow \forall\, x\in \dot O(x_0)\ \exists\, \xi\in\begin{cases}(x_0,x),\text{если } x>x_0\\(x,x_0),\text{если } x<x_0\end{cases}: f(x)=$

$$=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\ +\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Доказательство:

Пусть n=0. Тогда $f\in C(O(x_0))\cap D(\dot O(x_0)), x>x_0, x\in O(x_0)\Longrightarrow f\in C[x_0,x]\cap D(x_0,x)\Longrightarrow$

по теореме Лагранжа $\exists\,\xi\in(x_0,x)$: $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\Longrightarrow$ теорема верна для $n=0$.

Аналогично для $x<x_0$.

Теперь пусть $n\ge 1$. Не ограничивая общности считаем, что $x>x_0\ \ x\in\dot O(x_0)$. Введем вспомогательную функцию $F\colon t\in[x_0,x]\to F(t)\in\mathbb{R}$, где

$F(t)=f(x)-f(t)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(\mathrm{t})}{k!}(x-\mathrm{t})^k\ -\frac{\lambda}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$, где λ выбирается так, чтобы
$F(x_0)=0$.
Имеем: $F\in C[x_0,x]\cap D(x_0,x), F(x_0)=0, F(x)=0\Longrightarrow$ по теореме Ролля $\exists\,\xi\in(x_0,x)$: $F'(\xi)=0$.

Но:

$$F'(t)=-f'(t)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)+\frac{\lambda}{n!}(x-t)^n=$$

$$=-f'(t)-\left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-f'(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)+$$

$$+\frac{\lambda}{n!}(x-t)^n =$$

$$= -f'(t) - \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) +$$

$$+\frac{\lambda}{n!}(x-t)^n = \frac{\lambda}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Следовательно, $F'(\xi) = \frac{\lambda}{n!}(x-\xi)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = 0 \Longrightarrow \lambda = f^{(n+1)}(\xi)$. Так как $F(x_0) = 0$, то:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$ чтд.

БИЛЕТ 27

Теорема:

$$f \in D^{(n-1)}(O(x_0)) \cap D^{(n)}(x_0), \qquad n \geq 1 \Longrightarrow f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$

при $x \longrightarrow x_0$

Доказательство:

Пусть

$n = 1$. Тогда утверждение теоремы преобретает вид условия дифференцируемости функции в точке. Следовательно в этом случае теорема верна.

Пусть $n \geq 2$.Обозначим за $P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$-многочлен Тейлора. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$. Из условия теоремы следует, что:

$\varphi \in C^{n-2}(O(x_0)) \cap D^{n-1}(\dot{O}(x_0))$. Следовательно, по предыдущей теореме:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \sum_{k=1}^{n-2}\frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{\varphi^{(n-1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

Но $\varphi^{(m)}(x_0) = 0 \ \forall\, m = 0,1,2,\dots,n$. Действительно, $\varphi(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$. Если же $m \geq 1$, то:

$$\varphi^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}.$$

Но:

$\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}|_{x_0} = \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\frac{d^m}{dx^m}(x-x_0)^k|_{x_0}$. Обозначим $M = \frac{d^m}{dx^m}(x-x_0)^k|_{x_0}$.Тогда:

$M = \begin{cases} 0, & m > k \\ 0, & m < k \\ m!, & m = k \end{cases}$. Таким образом $\varphi^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - f^{(m)}(x_0) = 0$. Так же $\varphi^{(n-1)} \in D(x_0)$.

Тогда исходя из определения дифференцируемой функции:

$\varphi^{(n-1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big) = \varphi^{(n-1)}(x_0) + \varphi^{(n)}(x_0)(\theta(x-x_0)) + o((x-x_0))$ при $x \to x_0$. Но:

$\varphi^{(n-1)}(x_0) = 0, \varphi^{(n)}(x_0) = 0$.Следовательно, $\varphi^{(n-1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big) = o((x-x_0))$ при $x \to x_0$

В итоге $\varphi(x) = \frac{o((x-x_0))(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.чтд.

Основные асимптотические разложения по формулам Маклорена ($x_0 = 0$):

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}), x \to 0$$

$$sin = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + O(x^{n+1}), x \to 0$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + O(x^{n+1}), x \to 0$$

$$ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + O(x^{n+1}), x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + O(x^{n+1}), x \to 0$$

БИЛЕТ 28

Теорема 1 (Критерий монотонности):

$f \in D(a,b), f \uparrow (\downarrow) \Longrightarrow f' \geq 0 \ (f' \leq 0)$ на (a,b)

Доказательство:

I) Необходимость

Не ограничивая общности считаем, что $f \uparrow$.Тогда:

1) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ при $x > x_0$
2) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ при $x < x_0$

Таким образом переходя к приделу получаем$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geq 0$

II) Достаточность.

Пусть $f'(x_0) \geq 0$ на (a,b) и $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда $f \in C[x_1,x_2] \cap D(x_1,x_2) \Longrightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\ \xi \in (a,b)$: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)) \geq 0 \Longrightarrow f \uparrow$.чтд.

Теорема 2(Достаточное условие строгой монотонности):
$f \in D(a,b), f' > 0$ на $(a,b) \Longrightarrow f \uparrow\uparrow$ на (a,b)

Доказательство:
Пусть $f'(x_0) > 0$ на (a,b) и $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда $f \in C[x_1,x_2] \cap D(x_1,x_2) \Longrightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\ \xi \in (a,b)$: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0 \Longrightarrow f \uparrow\uparrow$.чтд.

Теорема 3 (Первое достаточное условие строгого экстремума):
$f \in C(O(x_0)) \cap D(\dot{O}(x_0))$. Тогда:

1) $(f'(x) > (<) 0 \ \ \forall\, x \in O^-(x_0)) \wedge (f'(x) < (>) 0 \ \ \forall\, x \in O^+(x_0)) \Longrightarrow x_0$-точка локального максимума(минимума).
2) $f'(x) > (<) 0 \quad \forall\, x \in \dot{O}(x_0) \Longrightarrow x_0$-не является точкой локального экстремума.

Доказательство:

1) Не ограничивая общности считаем, что $(f'(x) > 0 \;\; \forall\, x \in O^-(x_0)) \wedge (f'(x) < 0 \;\; \forall\, x \in O^+(x_0))$.

Тогда пусть:

1.1) Пусть $x \in O^-(x_0)$. Тогда $f \in C[x, x_0] \cap D(x, x_0) \Longrightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\, \xi \in O^-(x_0)$: $f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x) > 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x) \;\forall\, x \in O^-(x_0)$

1.2) Пусть $x \in O^+(x_0)$. Тогда $f \in C[x_0, x] \cap D(x_0 x, x) \Longrightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\, \xi \in O^+(x_0)$: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x) \;\forall\, x \in O^-(x_0)$.

Таким образом $f(x_0) > f(x) \;\forall\, x \in \dot{O}(x_0) \Longrightarrow x_0$-точка локального максимума.чтд.

2) Не ограничивая общности считаем, что $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in \dot{O}(x_0)$. Тогда:

2.1) Пусть $x \in O^-(x_0)$. Тогда $f \in C[x, x_0] \cap D(x, x_0) \Longrightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\, \xi \in O^-(x_0) : f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x) > 0 \Rightarrow f(x_0) > f(x) \;\forall\, x \in O^-(x_0) \Longrightarrow x_0$ не является точкой строго локального минимума.

2.2) Пусть $x \in O^+(x_0)$. Тогда $f \in C[x_0, x] \cap D(x_0 x, x) \Longrightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\, \xi \in O^+(x_0)$: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0) < f(x) \;\forall\, x \in O^-(x_0) \;\Longrightarrow x_0$ не является точкой строго локального максимума.

Следовательно, x_0-не является точкой локального экстремума.чтд.

Замечание:

Это условие не является необходимым пример:

$f(x) = x^2(sin\dfrac{1}{x} + 2)$

Ее производная меняет знак в любой окрестности нуля.

Теорема 4 (Второе достаточное условие строгого локального экстремума):

$f \in D(O(x_0)) \cap D^2(x_0), f'(x_0) = 0$. *Тогда:* $f''(x_0) > (<) 0 \Longrightarrow x_0$*-точка строгого локального минимума(максимума).*

Доказательство:

Без ограничения общности считаем, что *:* $f''(x_0) > 0$.

$f \in D(O(x_0)) \cap D^2(x_0), f'(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 +$
$+ o((x - x_0)^2)$ при $x \to x_0$. *Но* $f'(x_0) = 0$. Следовательно, $f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f''(x_0)}{2} + o(1)\right)(x - x_0)^2$. Так как $\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x_0)}{2} + o(1) = \frac{f''(x_0)}{2} > 0 \Rightarrow \exists\, O_1(x_0)$: $\frac{f''(x_0)}{2} + o(1) > 0 \;\forall\, x \in O_1(x_0)$.
Следовательно $\forall\, x \in \dot{O}_1(x_0)\; f(x) > f(x_0) \Longrightarrow x_0$-точка строгого локального минимума.чтд.

Теорема 5(Третье достаточное условие строгого экстремума):

$f \in D^{(n-1)}(O(x_0)) \cap D^{(n)}(x_0), n \geq 1, f^{(k)} = 0 \;\forall\, k = 1,2, \dots, n-1, f^{(n)} \neq 0$. Тогда:

1) $n = 2k \Rightarrow\; x_0 = \begin{cases} x_{min}, & f^{(n)} > 0 \\ x_{max}, & f^{(n)} < 0 \end{cases}$

2) $n = 2k + 1 \Rightarrow x_0$ не является точкой строгого локального экстремума.

Доказательство:

Без ограничения общности считаем, что *:* $f^{(n)}(x_0) > 0$

$f \in D^{(n-1)}(O(x_0)) \cap D^{(n)}(x_0), n \geq 2, f^{(k)} = 0 \;\forall\, k = 1,2, \dots, n-1 \Rightarrow f(x) = f(x_0) +$

$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$. Следовательно, $f(x)-f(x_0) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right)(x-x_0)^n$.

Так как $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{2} + o(1) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{2} > 0 \Longrightarrow \exists\, O_1(x_0)\colon \frac{f^{(n)}(x_0)}{2} + o(1) > 0\ \forall\, x \in O_1(x_0)$.

Тогда если $n = 2k$, то при переходе через x_0 знак выражения $f(x) - f(x_0)$ не поменяется. В итоге получим, что $\forall\, x \in \dot{O}_1(x_0)\ f(x) > f(x_0) \Longrightarrow x_0$-точка строгого локального минимума. Если же $n = 2k+1$, то знак выражения поменяется и следовательно x_0 не является точкой строгого локального экстремума.чтд.

БИЛЕТ 29

Определение 1:

$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Тогда f-(строго) выпукла вниз $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq (<) \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\ \forall$ $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \lambda \in (0,1)$.

Определение 2:

$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Тогда f-(строго) выпукла вверх $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq (>) \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

Лемма:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

Доказательство:

Обозначим $\lambda(x_1 - x_2) + x_2 = x$. Тогда $\lambda = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}, (1-\lambda) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Тогда :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_2 - x + x - x_1) f(x) \leq (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2) \Leftrightarrow (f(x) - f(x_1))(x_2 - x) \leq$$
$$\leq (f(x_2) - f(x))(x - x_1) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.\ \text{чтд.}$$

Теорема 1 (Критерий выпуклости):

$f \in D(a,b)$. Тогда *f-выпукла вниз (вверх)* $\Leftrightarrow f' \uparrow (\downarrow)$ на (a,b).

Доказательство:

Без ограничения общности считаем, что *f-выпукла вниз.*

1) Необходимость. Пусть *f выпукла* вниз. Тогда по лемме $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Тогда перейдя к пределам получим, что:

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$
$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Таким образом получим:

$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2\ f'(x_1) \leq f'(x_2) \Longrightarrow f' \uparrow$

2) Достаточность.

Пусть $f' \uparrow$. Пусть $x, x_1 \in (a,b),\ x > x_1$. Тогда $f \in C[x_1, x] \cap D(x_1, x) \Longrightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\, \xi_1 \in (x_1, x)$: $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1)$.

Пусть $x, x_2 \in (a,b),\ x < x_2$. Тогда $f \in C[x, x_2] \cap D(x, x_2) \Longrightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\, \xi_2 \in (x, x_2)$: $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2)$. Но $\xi_1 < \xi_2, f' \uparrow \Longrightarrow$ $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2) \Longrightarrow f$ выпукла вниз.чтд.

Теорема 2 (Критерий строгой выпуклости):

$f \in D(a,b)$. Тогда *f-строго выпукла вниз (вверх)* $\Leftrightarrow f' \uparrow\uparrow\ (\downarrow\downarrow)$ на (a,b).

Доказательство:

1) Необходимость.

Пусть f-строго выпукла вниз. Тогда по лемме $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Так как $x, x_1 \in (a,b),\ x > x_1, x, x_2 \in (a,b),\ x < x_2, f \in D(a,b) \Longrightarrow f \in C[x_1, x] \cap D(x_1, x),\ f \in C[x, x_2] \cap D(x, x_2)$.
Следовательно, по теореме Лагранжа $\exists\, \xi_1 \in (x_1, x), \exists\, \xi_2 \in (x, x_2)$: $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1)$, $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2)$. Тогда $f'(x_1) \le f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \le f(x_2) \Longrightarrow f' \uparrow\uparrow$.

2) Достаточность доказывается аналогично предыдущему.чтд.

Определение:

$f \in C(O(x_0))$. Тогда x_0 *—точка перегиба* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (f строго выпукла вниз (вверх) на $O^-(x_0)$) $\wedge$ (f строго выпукла вверх(вниз) на $O^+(x_0)$)

Теорема 3 (Необходимое условие существования точки перегиба):

$f \in D(O(x_0)) \cap D^2(x_0), x_0$ *—точка перегиба* $\Longrightarrow\ f''(x_0) = 0$.

Доказательство:
x_0 —точка перегиба$\Longrightarrow$ (f строго выпукла вниз (вверх) на $O^-(x_0)$) $\wedge$ (f строго выпукла вверх(вниз) на $O^+(x_0)$) $\Longrightarrow$ (по теореме 2) ($f' \uparrow\uparrow\ (\downarrow\downarrow)$ на $O^-(x_0)$) $\wedge$ ($f' \downarrow\downarrow\ (\uparrow\uparrow)$ на $O^+(x_0)$ $\Longrightarrow x_0$ — Точка локального экстремума *f'*$\Longrightarrow$ по теореме Ферма $f''(x_0) = 0$. *Чтд.*

Теорема 4 (Достаточное условие существования точки перегиба):

$f \in C(O(x_0)) \cap D^2(\dot{O}(x_0)), (f'' > 0 (< 0)$ в $O^-(x_0)$ $) \wedge (f'' < 0 (> 0)$ в $O^+(x_0)) \Longrightarrow\ x_0$ — точка перегиба.

Доказательство:

$f'' > 0$ в $O^-(x_0) \Longrightarrow f' \uparrow\uparrow$ в $O^-(x_0) \Longrightarrow f$ строго выпукла вниз в $O^-(x_0)$

$f'' < 0$ в $O^+(x_0) \Longrightarrow f' \downarrow\downarrow$ в $O^-(x_0) \Longrightarrow f$ строго выпукла вверх в $O^-(x_0)$

Следовательно, x_0 — точка перегиба..*чтд.*