

История математики

8 лекция

Лекторы – С.С. Демидов

М.А. Подколзина

Весенний семестр 2026 года

Математика Древней Греции.
Инфинитезимальные методы
античности. Метод неделимых.
Метод исчерпывания Евдокса
Биография Архимеда. Метод
интегральных сумм Архимеда.

Инфинитезимальные методы античности

- Метод неделимых.
Атомисты, натурфилософская
школа Демокрита (Демокрит
- ок.460-370 гг до н.э.)
- Метод Исчерпывания
Евдокса (Евдокс – ок. 406 –
ок. 355 гг. д.н.э.)

Демокрит (ок.460-370 гг до н.э.)

По свидетельству Архимеда, Демокрит установил, что

- 1) пирамида равновелика одной трети призмы, имеющей с ней одинаковые основание и высоту
- 2) конус равновелик— $\frac{1}{3}$ соответствующего цилиндра.

Но доказательств Демокрит не дал.

Лемма Евдокса

Если даны две величины a и b , $a > b$, то, вычитая из величины a больше ее половины, из остатка – больше его половины и т.д., получим через конечное число шагов остаток $\alpha_n < b$.

(Предложение X, 1 «Начал» Евклида).

Лемма Евдокса

По аксиоме Архимеда (Евдокса-Архимеда)

$$\forall a > b \exists N: Nb > a$$

Повторим N раз процесс выбрасывания из величины a и соответствующих остатков величин, превышающих их половины:

$$\alpha_1 = a - a_1 < \frac{a}{2}$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 - a_2 < \frac{\alpha_1}{2} < \frac{a}{4}$$

$$\dots$$
$$\alpha_N < \frac{a}{2^N}$$

Итого получаем: $2^N \cdot \alpha_N < a$

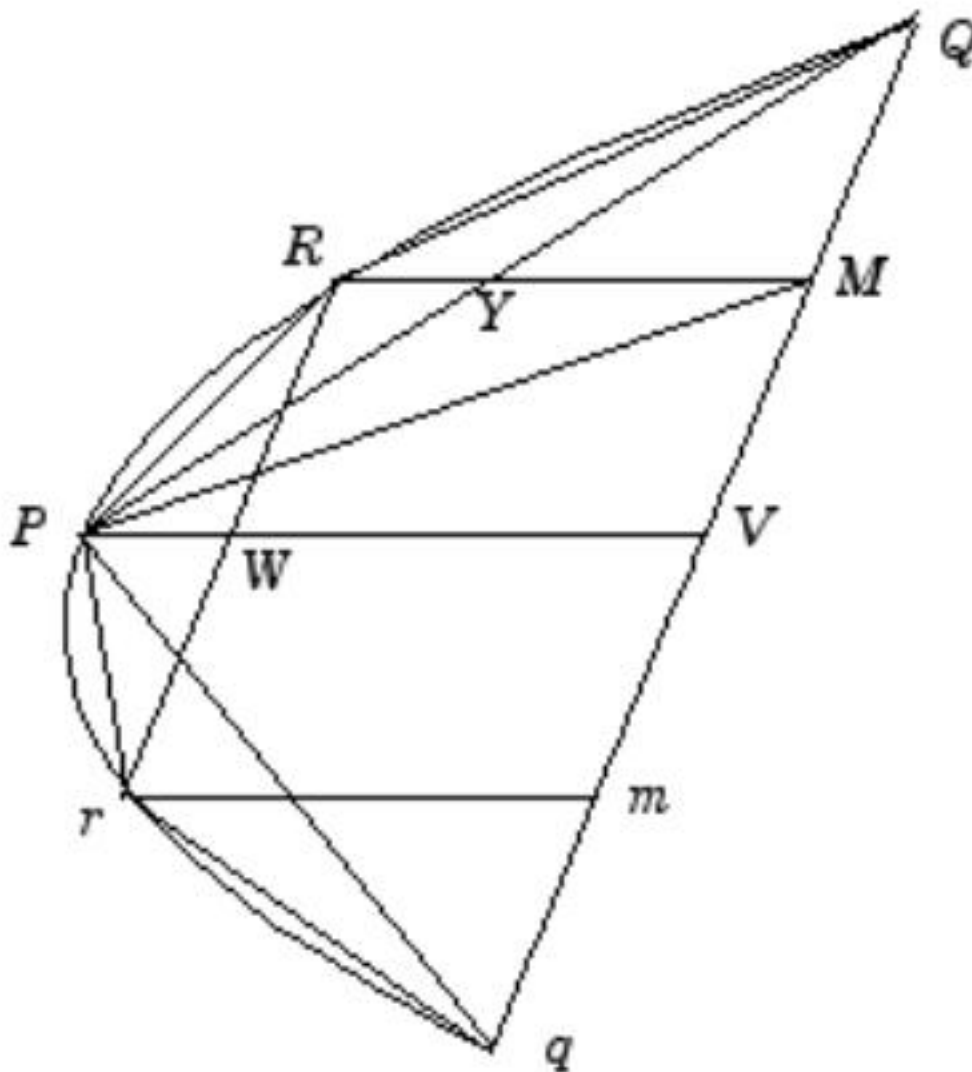
Но тогда: $N \cdot \alpha_N < 2^N \cdot \alpha_N < a < Nb$.

Откуда следует: $\alpha_N < b$, ч.т.д.

С помощью метода исчерпывания
Евдокс доказал:

- 1) Площади двух кругов относятся, как квадраты их диаметров;
- 2) Объем пирамиды равен трети объема призмы с теми же основанием и высотой;
- 3) Объем конуса равен трети объема цилиндра с теми же основанием и высотой

Квадратура параболы (Архимед)



Квадратура параболы

Всякий сегмент, заключенный между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с ним одно и то же основание и равную высоту.

Квадратура параболы

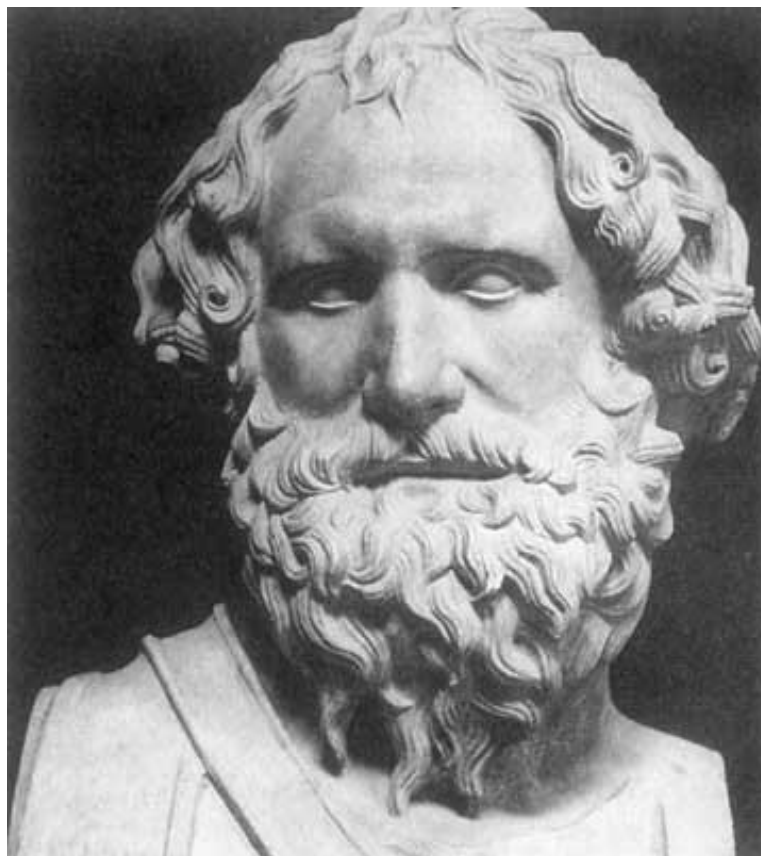
«Архимед Досифею желает благоденствия!»

Работа состоит из 24 утверждений. Причем в первых 17 Архимед показывает,

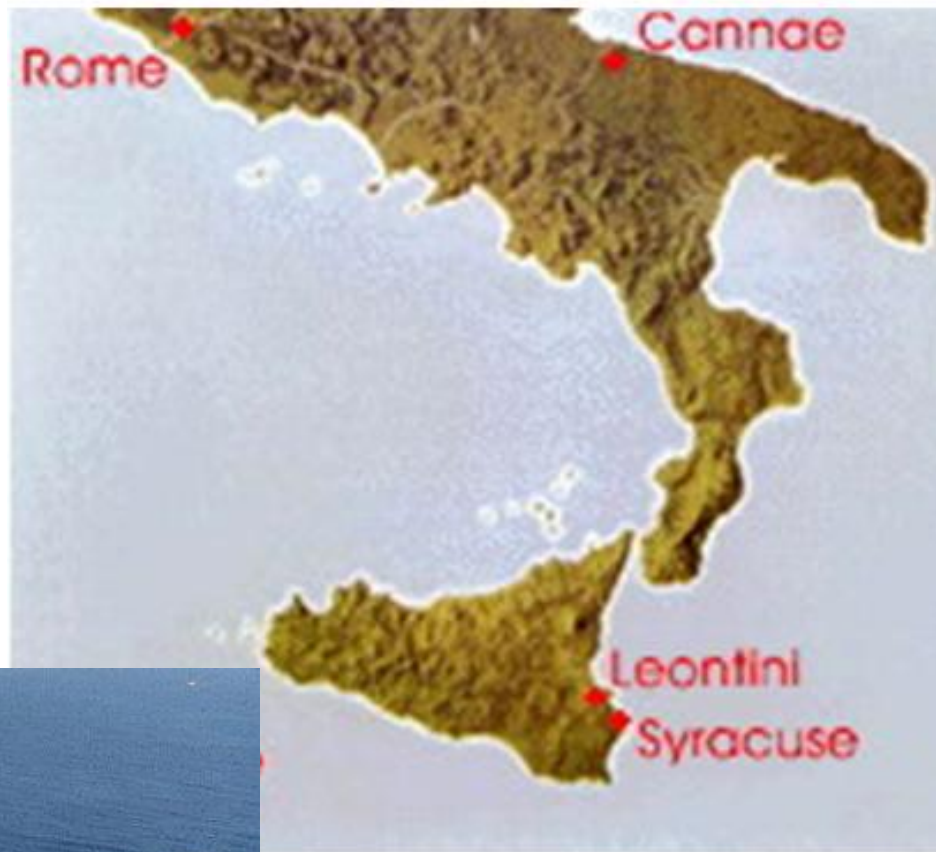
«как эта теорема была обнаружена нами при помощи механики», а затем уже в утверждениях 18-24 доказывает ее геометрически.

Все основные определения даются перед геометрической частью работы.

Архимед (287 -212гг до н.э.)



Сицилия, Сиракузы

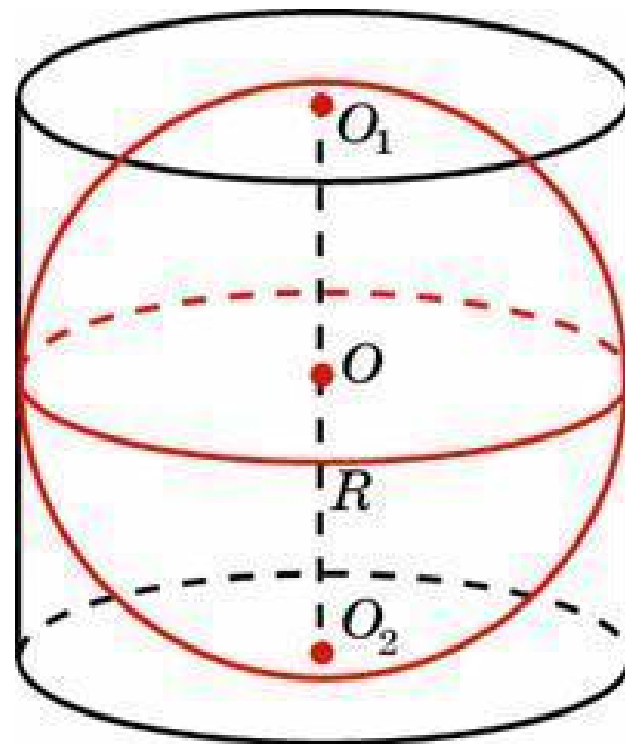
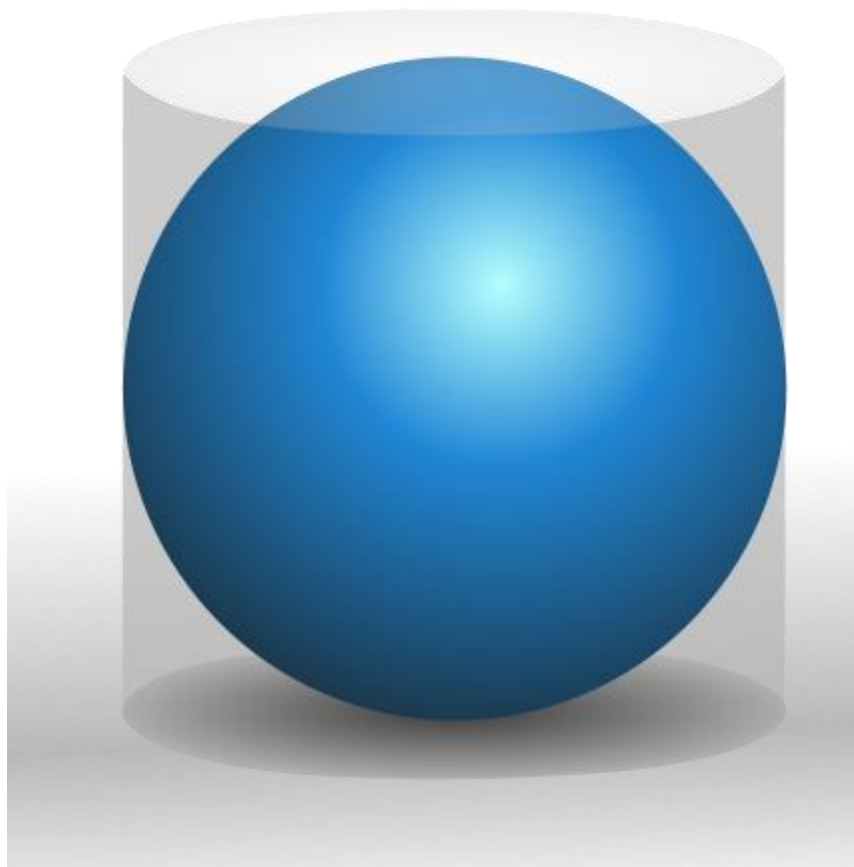


Основные математические труды Архимеда:

1) *Квадратура параболы* / τετραγωνισμὸς παραβολῆς — определяется площадь сегмента параболы.

2) *О шаре и цилиндре* (2 книги) / περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου — доказывається, что объём шара равен $\frac{2}{3}$ от объёма описанного около него цилиндра, а площадь поверхности шара равна площади боковой поверхности этого цилиндра.

Шар, вписанный в цилиндр



Основные математические труды Архимеда:

3) *О спиралях / περὶ ἑλίκων* — выводятся свойства спирали Архимеда

4) *О коноидах и сфероидах / περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* — определяют объёмы сегментов параболоидов, гиперболоидов и эллипсоидов вращения.

Основные математические труды Архимеда:

5) *О равновесии плоских фигур* / *περὶ ἰσορροπιῶν* — выводится закон равновесия рычага

6) *Послание к Эратосфену о методе* / *πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος* — по тематике частично дублирует работу «*О шаре и цилиндре*», но здесь используется механический метод доказательства математических теорем.

Основные математические труды Архимеда:

7) *О плавающих телах* / περὶ τῶν ὀχοιμένων — выводится закон плавания тел; рассматривается задача о равновесии сечения параболоида, моделирующего корабельный корпус.

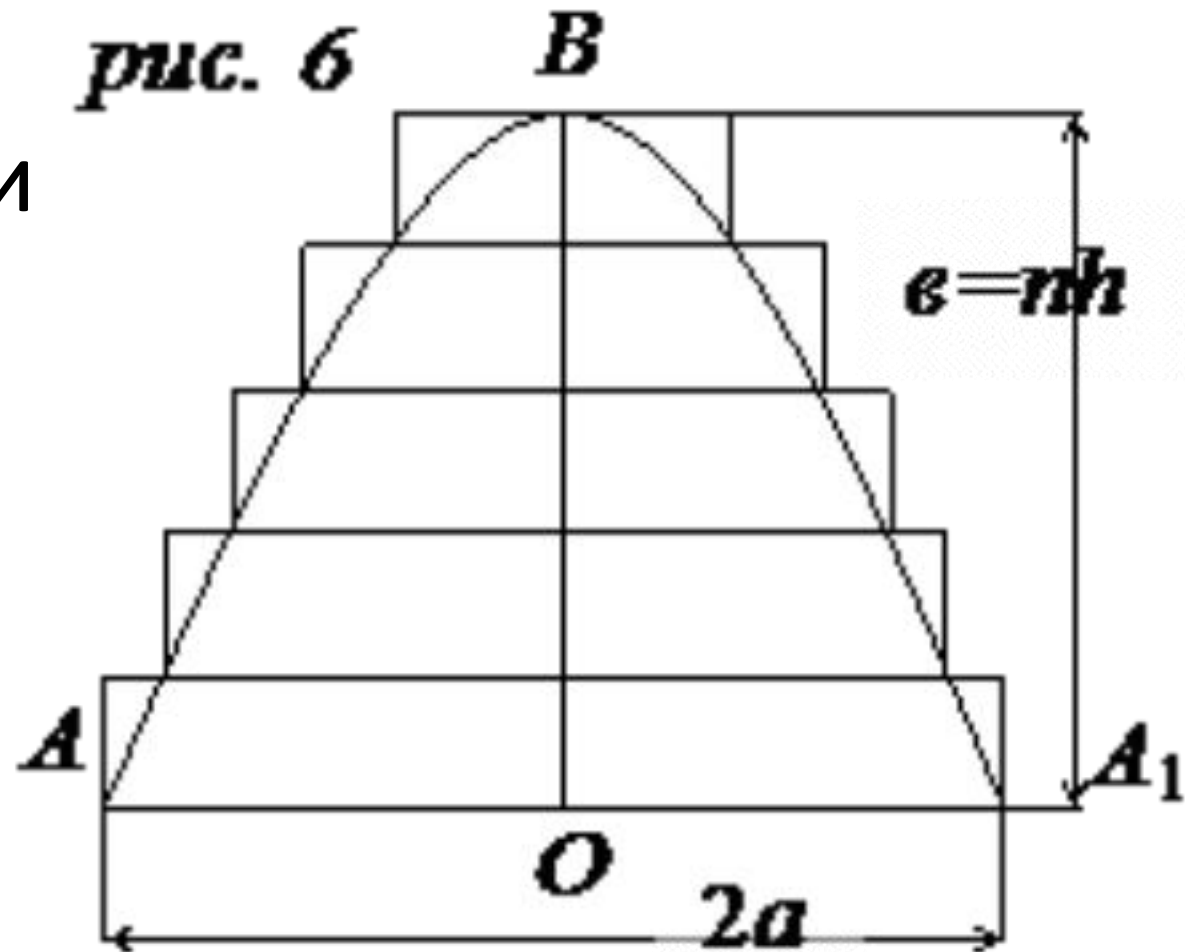
8) *Измерение круга* / κύκλου μέτρησις — до нас дошёл только отрывок из этого сочинения. Именно в нём Архимед вычисляет приближение для числа π .

Работы Архимеда, дошедшие до нас в арабском переводе

- 1) Трактат о построении около шара телесной фигуры с четырнадцатью основаниями;*
- 2) Книга лемм;*
- 3) Книга о построении круга, разделённого на семь равных частей;*
- 4) Книга о касающихся кругах.*

Интегральные методы Архимеда

О «Коноидах и сфероидах»



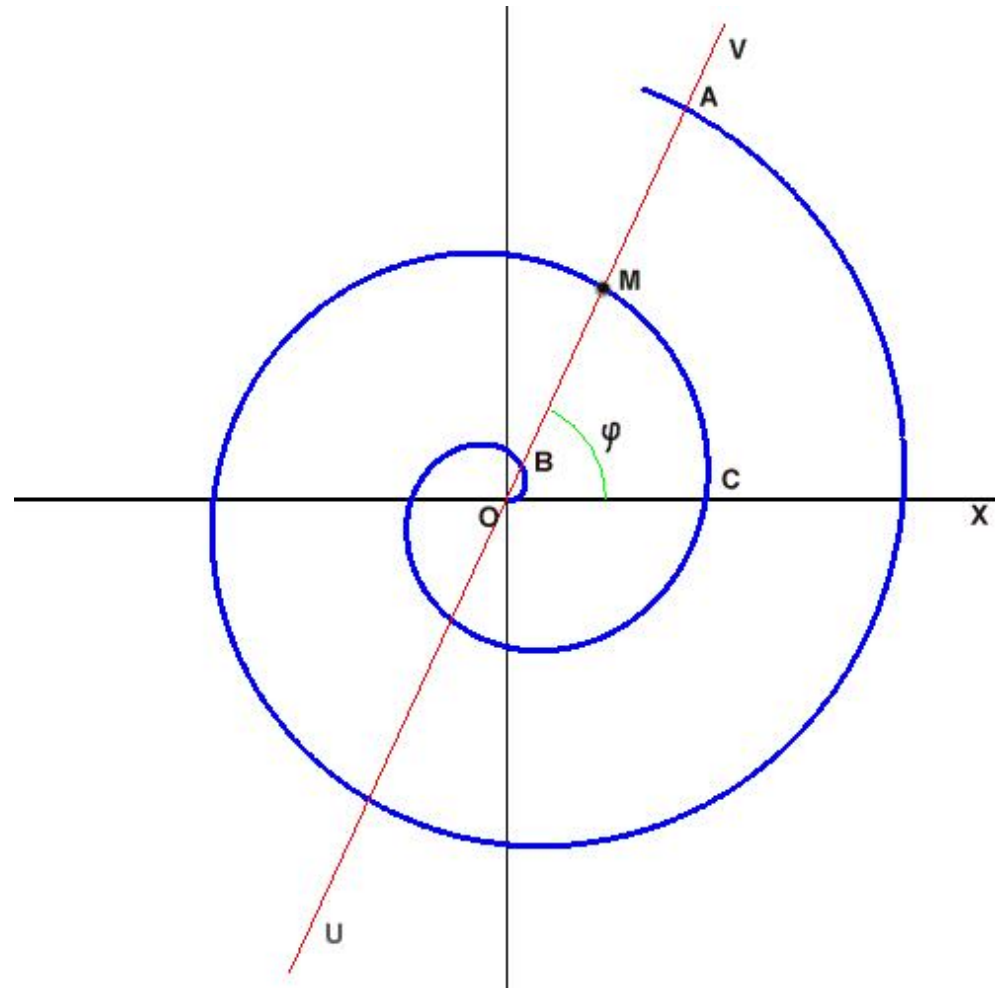
«О коноидах и сфероидах»

Лемма: «Если дан сегмент какого-нибудь из коноидов, отсеченный перпендикулярной к оси плоскостью, или же сегмент сфероида, не больший половины этого сфероида и точно так же отсеченный, то можно вписать в него телесную фигуру и описать около него другую, состоящую из имеющих равную высоту цилиндров, и притом так, чтобы описанная фигура была больше вписанной на величину, меньшую любой наперед заданной»

Интегральные методы Архимеда.

Спираль Архимеда $\rho = a \frac{\varphi}{2\pi}$

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$



«О коноидах и сфероидах»

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

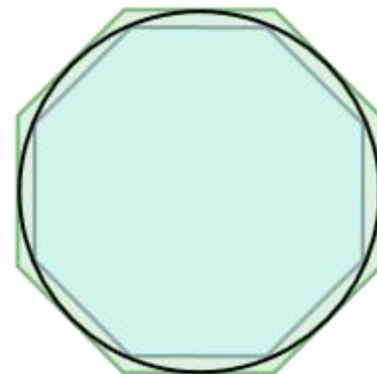
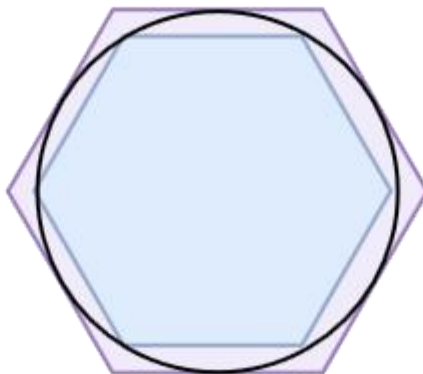
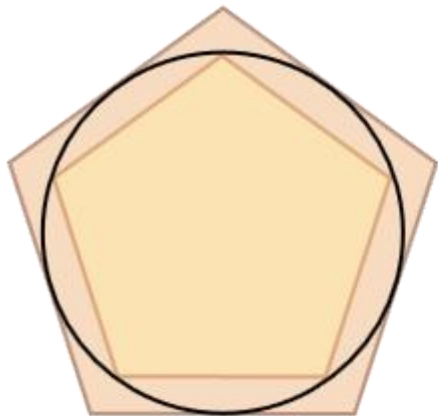
$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

$$\int_0^a (x^2 + bx) dx = \frac{a^3}{3} + b \frac{a^2}{2}$$

«Измерение круга».

Вычисление π .

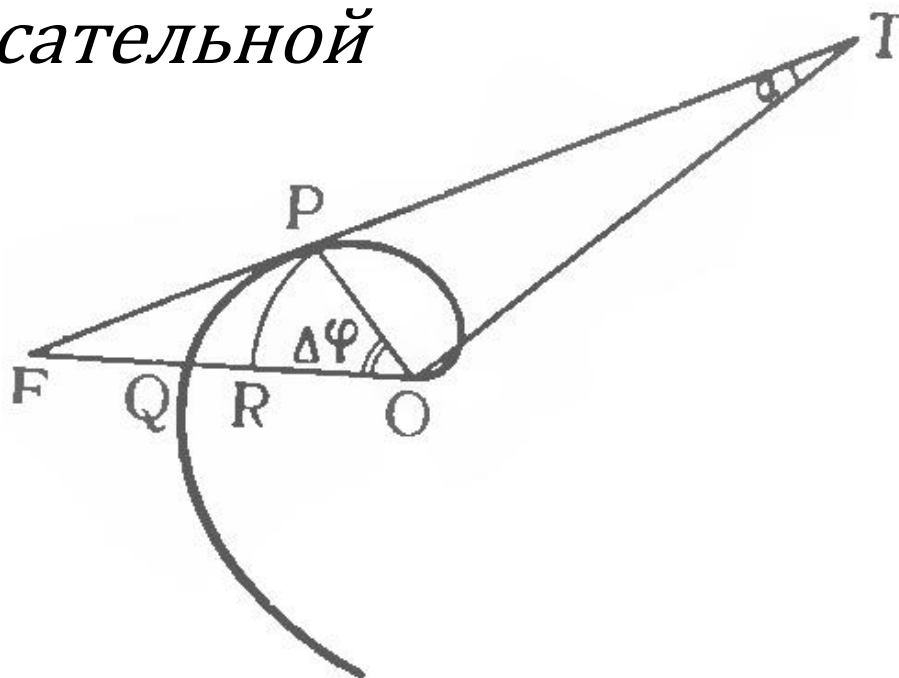
$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$



Дифференциальные методы Архимеда

r – радиус-вектор касательной

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = \operatorname{tg}\alpha$$



$$\rho = a\varphi$$

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{a\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi} = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\varphi}$$