История математики
5 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2026 года

Математика Древней Греции.

Пифагорейцы.
Открытие несоизмеримости.
Геометрическая алгебра.
Знаменитые задачи древности.

Греческая нумерация

1	2	3	4.	5	6	7	8	9
I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII
10	100	1000	10000	50	500	5000		
Δ	H	X	M	Γ^{Δ}	Γ^{H}	Γ^{X}		

$\Gamma^{\Delta} = 50$

$\Gamma^{X} = 500$

$H\Delta\Delta\Gamma\mathrm{III}$ = 128

$\mathrm{MM}\Gamma^{X}\Delta\Delta\Delta\Delta$ =?

Алфавитная греческая нумерация

Α,	α′,	1.	Ι,	ι′,	10.	Ρ,	ρ′,	100.
Β,	β′,	2.	Κ,	κ′,	20.	Σ,	σ′,	200.
Γ,	γ′,	3.	Λ,	λ′,	30.	Τ,	τ′,	300.
Δ,	δ′,	4.	Μ,	μ′,	40.	Υ,	υ′,	400.
Ε,	ε′,	5.	Ν,	ν′,	50.	Φ,	φ′,	500.
	ϛ′,	6.	Ξ,	ξ′,	60.	Χ,	χ′,	600.
Ζ,	ζ′,	7.	Ο,	ο′,	70.	Ψ,	ψ′,	700.
Η,	η′,	8.	Π,	π′,	80.	Ω,	ω′,	800.
Θ,	ϑ′,	9.	Ϙ,	ϟ′,	90.		ϡ′,	900.

Ранние пифагорейцы. Арифметика.

Математика:

арифметика

геометрия

астрономия

музыка

Арифметика среди прочих наук выделяется совершенством знания.

Архит

Золотая пропорция

Для величин A и B справедливо отношение

$$A : H = R : B$$

где $R = \frac{A+B}{2}$ - *среднее арифметическое,*

$H = \frac{2AB}{A+B}$ - *среднее гармоническое.*

Учение о гармонии

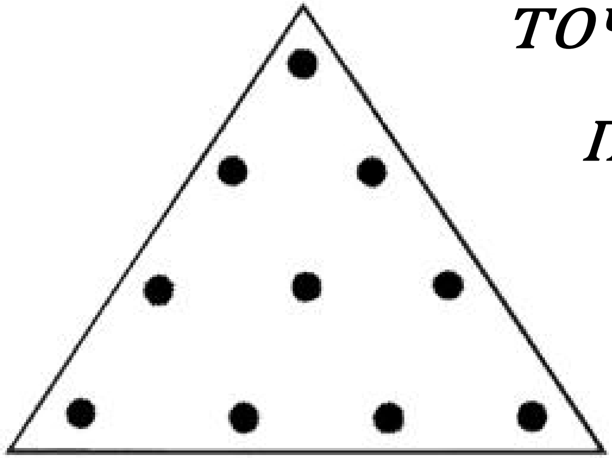
1:2 октава

2:3 кварта

3:4 квинта

1+2+3+4=10

монохорд



точка

прямая

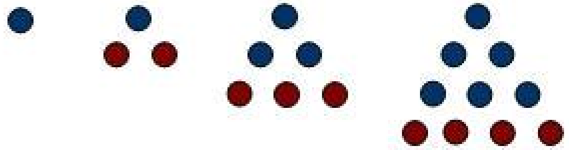
плоскость

пространство

Фигурные числа

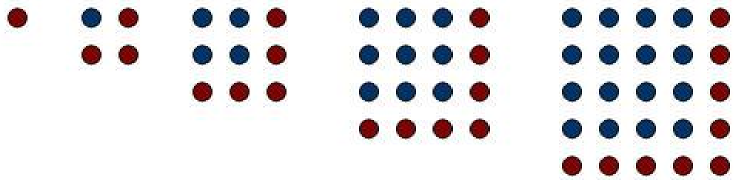
Треугольные числа

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$



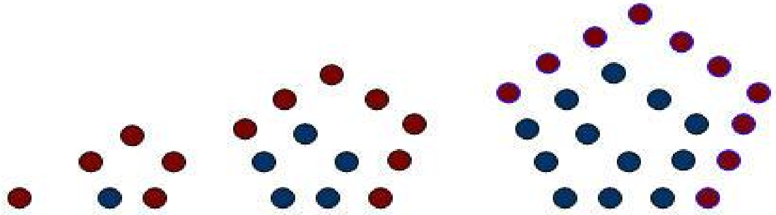
Квадратные числа

$$1 + 3 + 5 + \ldots (2n-1) = n^2$$



Прямоугольные числа

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$$



Пятиугольные числа

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$$

Признаки делимости

p – простое число – линейное;

$p_1 \cdot p_2$ - плоское число;

$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ - телесное число;

Дружественные числа

Дружественные числа – это такие, каждое из которых равно сумме делителей другого.

Например, 284 и 220.

17296 и 18416 (Ферма)

Совершенные числа

Совершенное число – это число, у которого сумма его делителей равна ему самому.

6 = 1+2+3

28, 496, 8128 (Никомах)

Если сумма $1 + 2 + \ldots + 2^n = p$ – простое число,

то $2^n p$ – совершенное число.

Эйлер: других четных совершенных чисел не существует.

Нечетные совершенные числа - ?

Учение о чете и нечете

10 пар противоположностей:

предел	беспредельное
покой	движение
нечет	чет
прямое	кривое
единое	множество
свет	тьма
правое	левое
хорошее	дурное
мужское	женское
квадрат	параллелограмм

Чет-нечет

Основные результаты:

Произведение делится на два тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей делится на два.

Всякое четное число представляется в виде $N = 2^k \cdot N_1$

Классы эквивалентности (A,B)

Две пары чисел (A, B) и (C, D) **пропорциональны**, если у A и B существует общий делитель F, а у C и D общий делитель G такие, что

$A = mF \qquad C = mG$

$B = nF \qquad D = nG$

Пифагорейцы знали, что отношение пропорциональности транзитивно.

Пусть (A_0, B_0) - наименьшая пара.

Доказано:

1. Если $A : B = A_0 : B_0$, то $A = kA_0,\ B = kB_0$.

2. Если A_0, B_0 взаимно просты, то это наименьшая пара из всех, имеющих с ней одинаковое отношение.

3. Если A_0, B_0 составляют наименьшую пару, то они взаимно просты.

4. Если $A\colon B = F\colon G$ и $B : C = G\colon H$, то

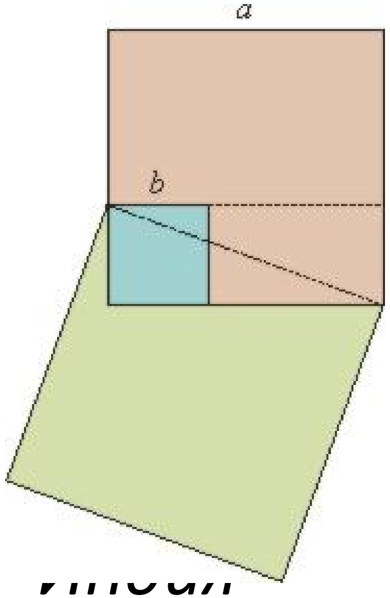
$$A\colon C = F\colon H \quad \text{(закон композиции)}$$

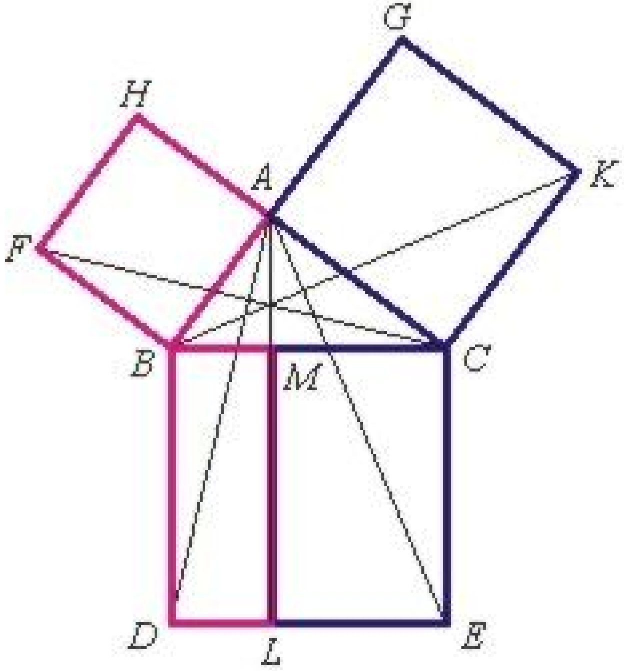
5. $(A_1 A_2\colon B_1 B_2) = (A_1\colon B_1) \otimes (A_2\colon B_2)$

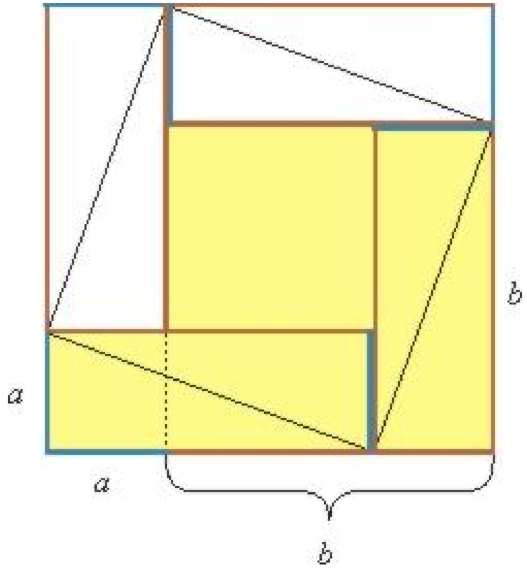
6. Чтобы составить отношения $(A\colon B)$ и $(C\colon D)$, надо найти наименьшие числа F, G, H такие, что $A\colon B = F\colon G$ и $C\colon D = G\colon H$. Тогда

$$(A\colon B) \otimes (C\colon D) = (F\colon G) \otimes (G\colon H) = (F\colon H)$$

Теорема Пифагора

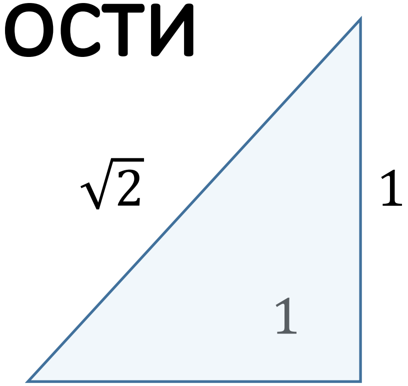






Открытие несоизмеримости

Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, причем $(m, n) = 1$



$$2n^2 = m^2$$

m^2 - четное $\Rightarrow$ $m = 2k$ – тоже четное

При этом n нечетное, иначе $(m, n) \neq 1$

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$n^2 = 2k^2$ четное $\Rightarrow$ n четное.

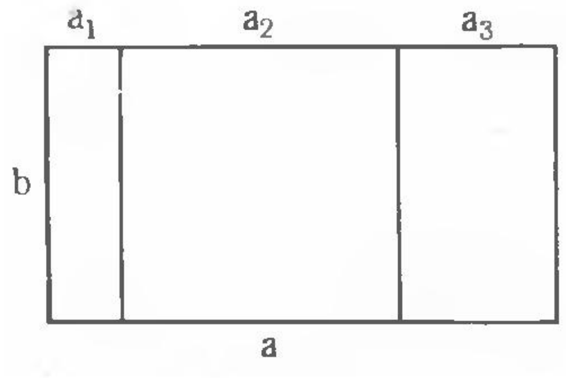
Противоречие.

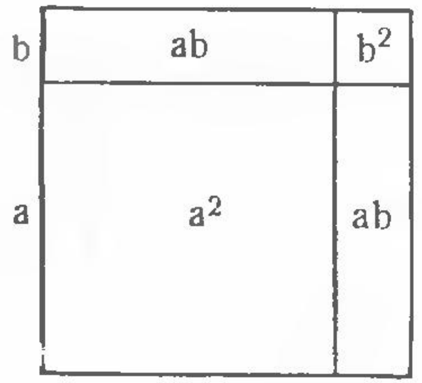
Теэтет:

Если площадь квадрата выражается целым неквадратным числом, то его сторона несоизмерима со стороной единичного квадрата.

Геометрическая алгебра

1.

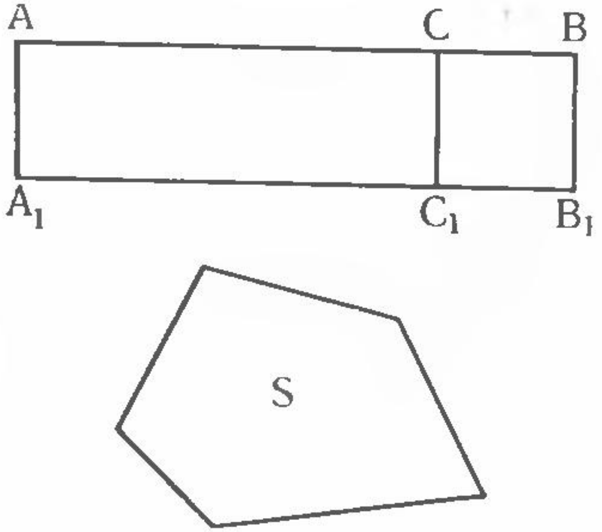




$$b(a_1 + a_2 + a_3) = ba_1 + ba_2 + ba_3$$

2. Задача: преобразовать прямоугольник в квадрат (решить уравнение $x^2 = ab$)

3. <u>Эллиптическая задача</u>: приложить к отрезку AB прямоугольник площади S так, чтобы «недостаток» CBC_1B_1 был квадратом.



$$AA_1C_1C = S$$

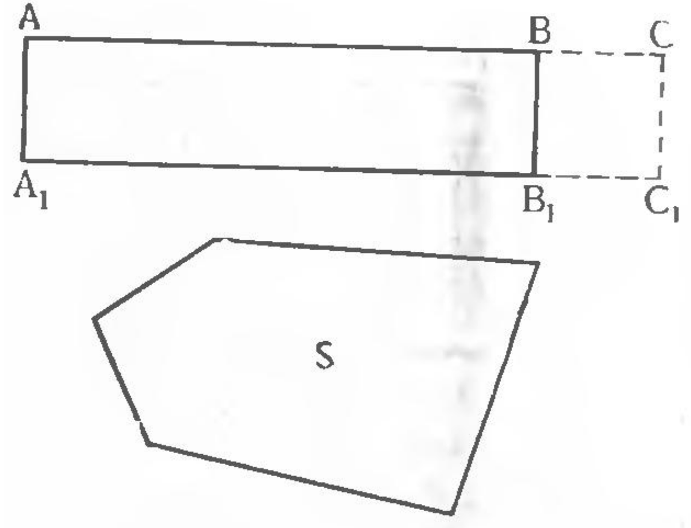
$$CB = x$$

$$AB = a$$

Иными словами, решить уравнение $x(a - x) = S$

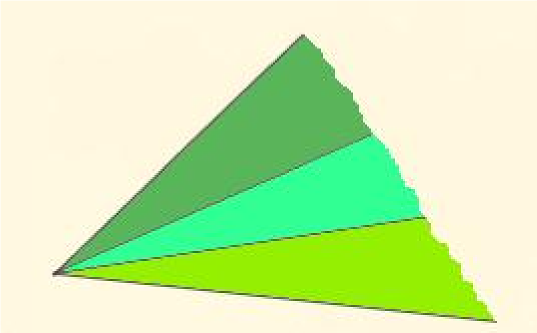
4. Двойственная гиперболическая задача:

К данному отрезку AB приложить прямоугольник с заданной площадью S так, чтобы «избыток» был квадратом.

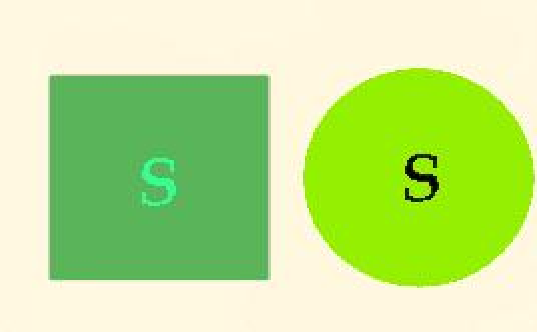


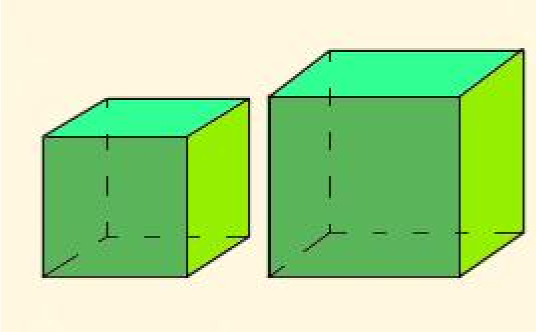
То есть решить уравнение $x(a + x) = S$

Знаменитые задачи древности
(Vв до н.э.)



трисекция угла

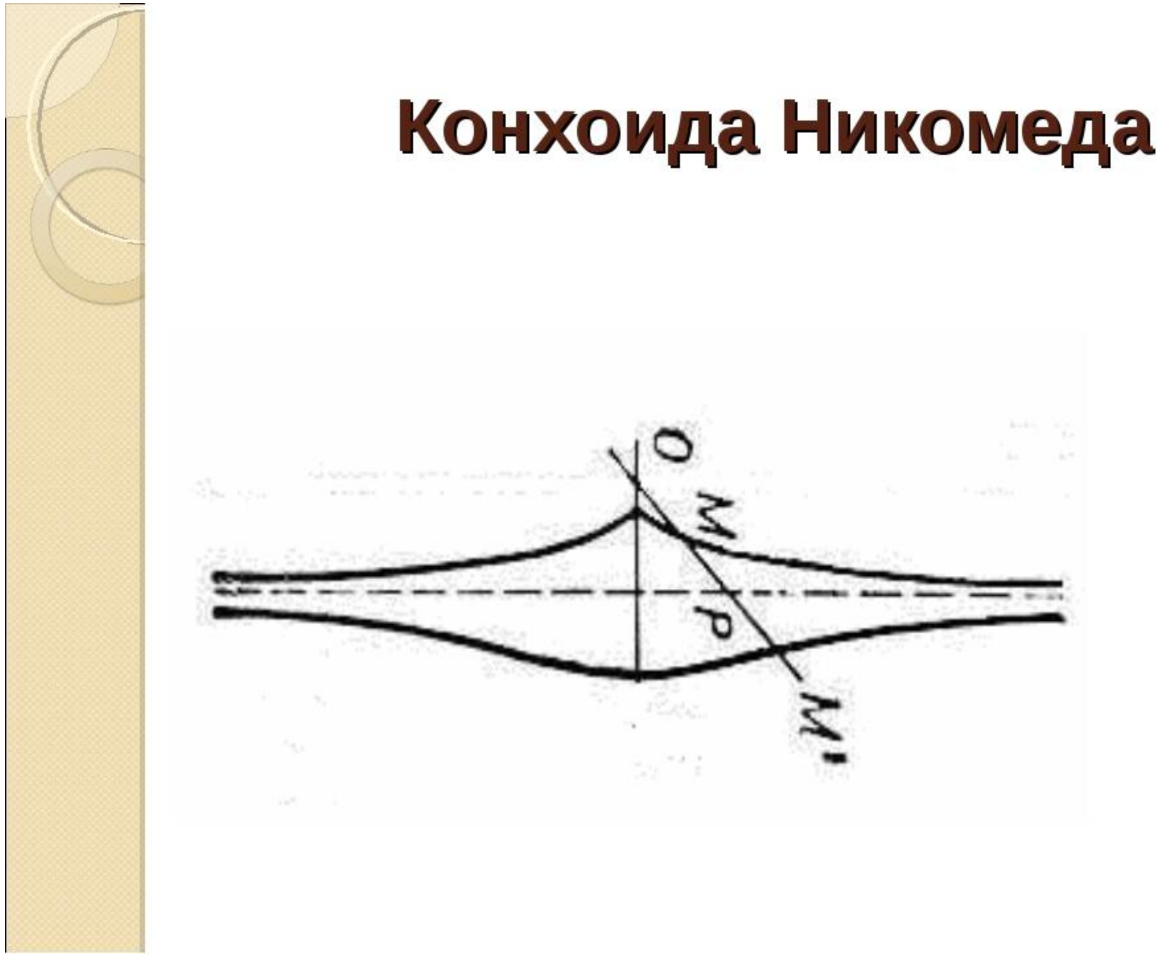




квадратура круга

удвоение куба

Конхоида Никомеда



Конхоида

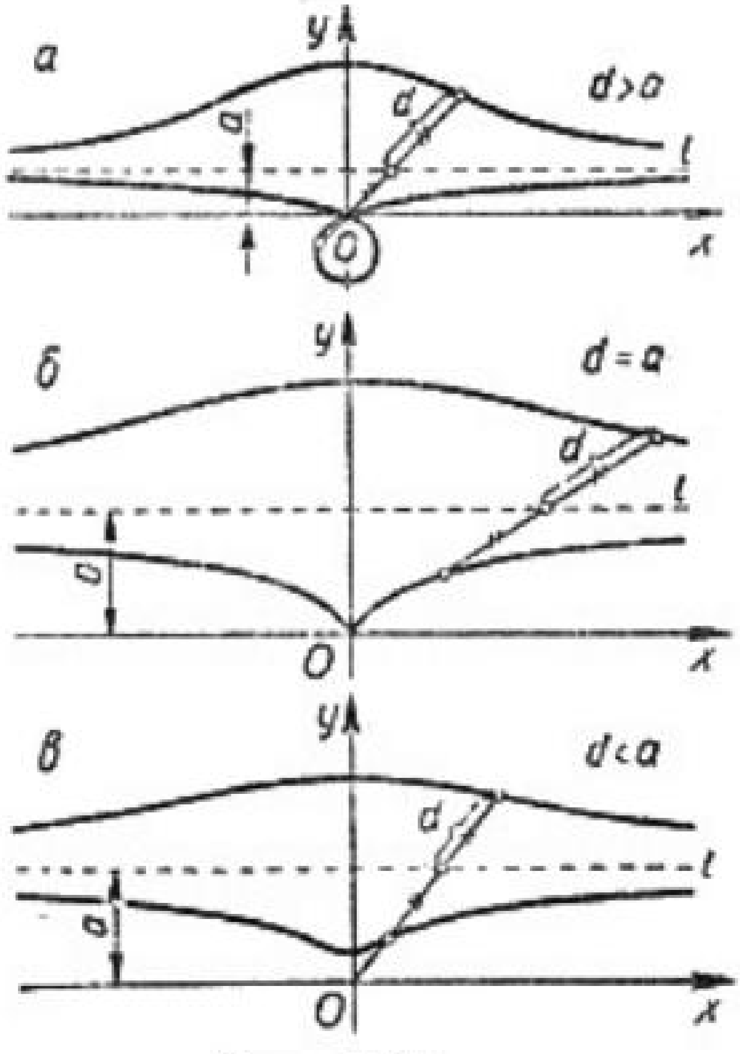
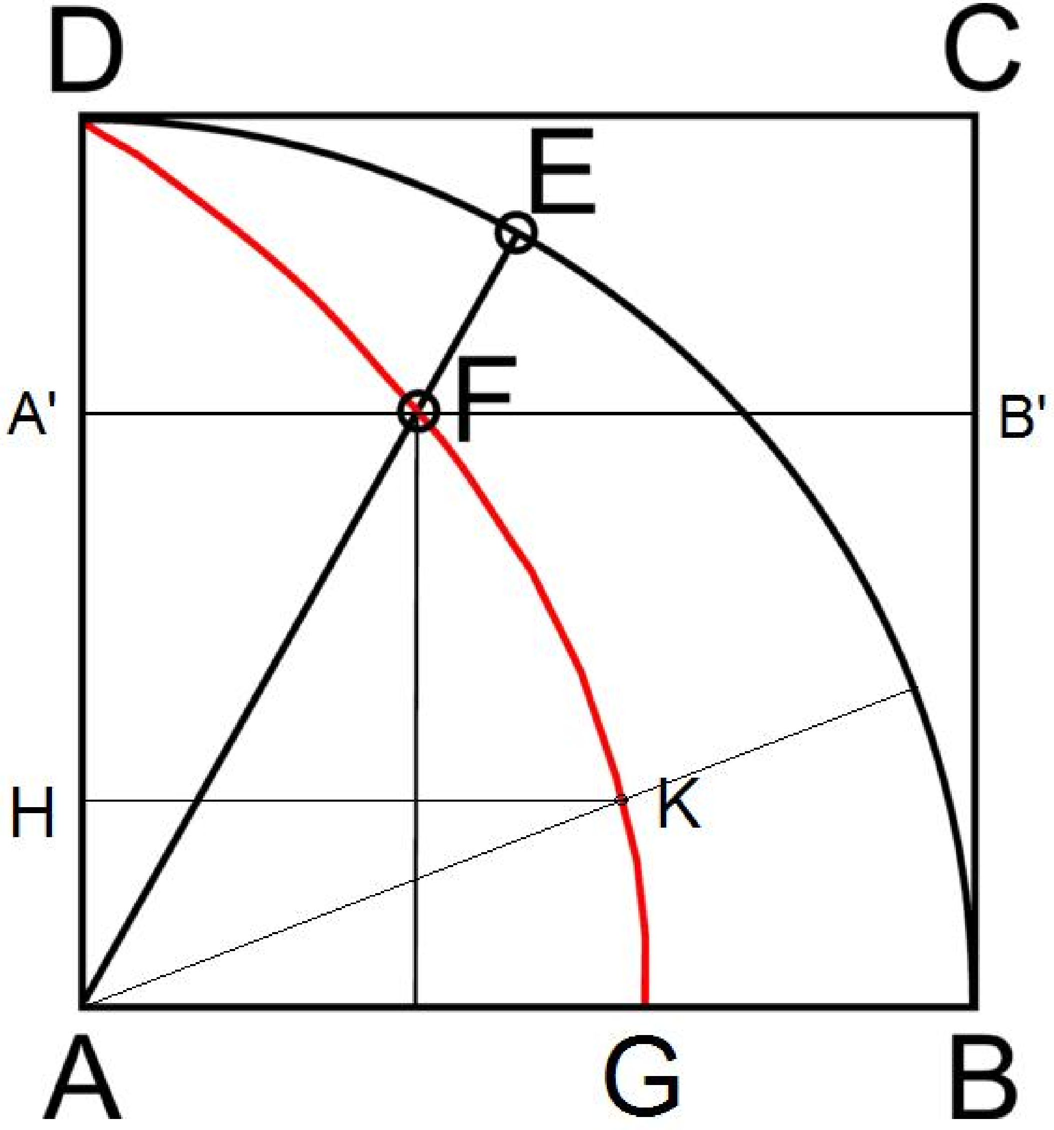


Рис. 162

Квадратриса



Трансцендентные числа

1844г. – Лиувилль доказал теорему о том, что алгебраическое число невозможно слишком хорошо приблизить рациональной дробью. Он же ввел понятие трансцендентного числа.

1873г. – Эрмит доказал трансцендентность e.

1882г. – Линдеман доказал трансцендентность π, показав неразрешимость задачи о квадратуре круга.

7-я проблема Гильберта

1890г, II Международный конгресс математиков в Париже.

Если $a \neq 0$ *– алгебраическое число,* b *– алгебраическое иррациональное число, то верно ли, что* a^b *- трансцендентное?*

1934г, Гельфонд доказал верность гипотезы.

e^π - постоянная Гельфонда