

История математики
24 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2025 года

Алгебра как наука о решении алгебраических уравнений

XVI век – уравнения 3-го и 4-го порядков (Н.Тарталья, Дж. Кардано, Л. Феррари)

Около 1560, издано в 1572 – «Алгебра» Р. Бомбелли

1591 – Виет Ф. «Введение в аналитическое искусство»

1629 – Жирар А. «Новое открытие в алгебре»

“Все уравнения алгебры получают столько решений, сколько их показывает наименование высшей величины”

1637 – Декарт Р. «Геометрия»

1707 – Ньютон И. «Всеобщая арифметика»

Выделяются две основные задачи – доказательство основной теоремы алгебры и нахождение решений уравнений в радикалах

Доказательство основной теоремы алгебры – первое доказательство было дано Ж. Даламбером в его работе «Исследования по интегральному исчислению», опубликованной в 1748 г. в Мемуарах Берлинской Академии за 1746 г. Хотя современники и не видели недостатков в этом доказательстве (а они там наличествуют – правда, его можно, совершенствуя изложение, сделать совершенно строгим), но оно казалось им слишком аналитичным. Математики XVIII века пытались найти чисто алгебраическое доказательство, исходящее из самой теории уравнений. Сегодня мы уже знаем, что этого сделать нельзя – необходимо в том или ином виде использовать свойства непрерывности. Однако, можно свести их употребление к минимуму. Такое доказательство – “алгебраическое доказательство” – дал Эйлер в работе, опубликованной в 1751 г. в тех же Мемуарах за 1749 г. Важные усовершенствования в это доказательство внесли Ж. Лагранж и П.-С. Лаплас. Однако, точку в этом вопросе поставил К.-Ф. Гаусс, давший в работе, опубликованной в 1816 г. в *Commentationes* Гёттингенской Академии за 1815 г., строгое доказательство теоремы.

Продолжались попытки решения уравнений степеней больше 4 в радикалах. Поворотным пунктом в исследованиях на этом направлении оказались работы Ж. Л. Лагранжа. В своих «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений», опубликованных в 1771 – 1773 гг. в Новых мемуарах Берлинской Академии наук, он подверг разбору все ранее известные способы решения уравнений степеней $n = 2, 3, 4$ и показал, почему каждый из этих способов непригоден для уравнений степени > 4 . В итоге своих исследований он пришёл к выводу (здесь мы позволим себе в целях экономии времени прибегнуть к современной терминологии, отсутствовавшей в оригинале), что «истинным

принципом» решения уравнения является рассмотрение группы подстановок корней уравнения, её подгрупп и рациональных функций от корней, инвариантных при подстановках этих подгрупп. Отправляясь от рассуждений Лагранжа, итальянский математик П. Руффини в 1799 году предложил доказательство неразрешимости общего уравнения 5-й степени в радикалах, содержавшее, однако, пробел, восполнить который он так и не смог.

В 1824 – 1826 гг., независимо от Руффини, полное доказательство неразрешимости дал молодой норвежский математик

Н.Г. Абель (1802 – 1829)

1802 – родился в семье пастора в Финнёй (близ Ставангера)

1815 – поступил в Кафедральную школу в Христиании, где его математический талант открыл Б.М. Хольмбоэ

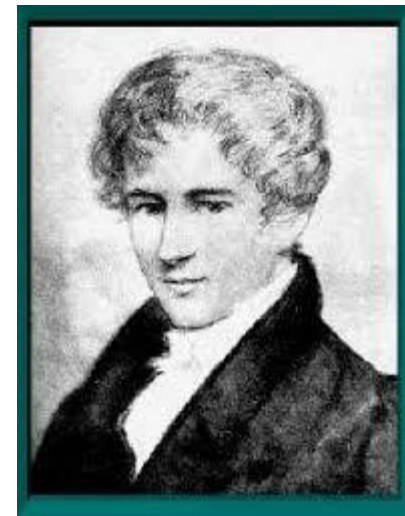
1821 – поступил в университет в Христиании

1825 – 1827 – путешествие в Германию (знакомство с А.Л.

Крелле), Италию, Францию (знакомство с А.М. Лежандром и О. Коши)

1828 – преподаватель в университете и Военной Академии
избран в Королевское научное общество Норвегии

1829 – умер в Фреланде (близ Арендала)



Исследуя проблему о решении в радикалах уравнения 5-й степени, Абель подошёл к нему с совершенно новой стороны: вместо поиска зависимости, выражающей такое решение, он поставил вопрос — а возможна ли в действительности такая зависимость? Изучив этот вопрос применительно к уравнениям 2-й, 3-й и 4-й степеней, которые разрешаются в радикалах, он показал, что причина этого кроется в том, что эти уравнения обладают (здесь мы воспользуемся современной терминологией, отсутствовавшей у Абеля) коммутативной группой подстановок корней (такие группы сегодня называют абелевыми). Совершенно иначе обстоит дело для уравнений 5-й степени. Такое уравнение в общем случае не допускает выражения решения в радикалах.

Все эти доказательства относились к уравнениям с произвольными коэффициентами и не давали ответа на вопрос о разрешимости в радикалах конкретных уравнений с заданными числовыми коэффициентами. Абель сумел далеко продвинуться в решении и этого вопроса, но ранняя кончина не позволила ему завершить эти исследования.

Дальнейшее продвижение в рассматриваемом направлении связано с именем французского математика Эвариста Галуа (1811 – 1832).

Эварист Галуа (1811 – 1832)

1811 – родился в Бур-ла-Рен – маленьком городке близ Парижа

1823 – поступил в Королевский коллеж Луи-ле-Гран

1828-29 – дважды провалил экзамены в Политехническую школу

1829 – поступил в Нормальную школу

1830 – исключён из Нормальной школы

1830 – Июльская революция

1832 – погиб на дуэли в Париже

1846 – публикация «Мемуара об условиях разрешимости уравнения в радикалах», осуществлённая Ж. Лиувиллем в Journ.math. pures et appl.

1870 – «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» К. Жордана



Галуа поставил своей целью – найти критерий разрешимости в радикалах для всех алгебраических уравнений. Ключевое понятие его теории – «группа уравнения». Галуа установил необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять группа уравнения, чтобы уравнение было разрешимо в радикалах. Если воспользоваться более поздней терминологией – эта группа должна быть «разрешимой». Уже не говоря о том, что подход Галуа выглядел в то время достаточно необычным, его изложение было чрезвычайно кратким и малопонятным. На это указывали, отказываясь разбираться в представленных им в Академию наук текстах, рецензенты – Фурье, Пуассон.

Лишь в 1846 году Ж. Лиувилль опубликовал работы Галуа, смысл которых, однако, ещё долго оставался неясным – вплоть до появления в 1870 году «Трактата о подстановках и алгебраических уравнениях» К. Жордана. Началось изучение и развитие теории Галуа, в значительной мере состоявшее в разъяснении и раскрытии смысла многих его утверждений, не подтверждённых авторским доказательством. Написанное им было превращено в «теорию Галуа» усилиями многих авторов, в их числе А. Кэли, Ж. А. Серре, К. Жордан.

С работ Галуа ведёт свою историю теория групп – именно в них было продемонстрировано, что решение старинного важного вопроса – проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах – может быть сведено к исследованию замечательного объекта – группы подстановок.

Фактически теоретико-групповые рассуждения встречались и ранее и в этом направлении был даже получен целый ряд результатов – в работах Лагранжа, Гаусса, Коши, Абеля. Но лишь с исследований Галуа группы становятся объектом особой теории – теории групп. Галуа был получен целый ряд важных результатов этой теории.

Первое определение и первые исследования по теории абстрактных групп были опубликованы британским математиком Артуром Кэли (1821 – 1895): в работе «О группах, зависящих от символического уравнения $\theta^n = 1$ ». Само название “группа” использовано им в память Э. Галуа.

Развитие теории групп связано с именем Ж.А. Серре, включившего результаты Галуа в свои курсы, которые он читал в Сорбонне, а также с работами К. Жордана, прежде всего с вышедшим в 1870 году трактатом К. Жордана о подстановках.

Пытаясь выстроить общую теорию интегрирования дифференциальных уравнений, норвежский математик Софус Ли (1842 – 1899), движимый идеей выстроить для таких уравнений аналог теории Галуа, начал разработку теории непрерывных групп преобразований, получивших впоследствии наименование групп Ли. .

На пути к «современной алгебре»

Развитие теории групп – самый яркий, но вовсе не единственный путь, на котором начала формироваться новая алгебра – изучение алгебраических структур. Особую роль этом процессе сыграли математики Великобритании. Именно они стали первыми, кто в 1830 – 1850 гг. выделили абстрактное понятие закона композиции, применив это понятие к новым математическим объектам. Дж. Буль построил алгебру логики, Гамильтон – алгебру векторов и кватернионов, Кэли алгебру матриц. Этот поток оригинальных идей оживил алгебру первой половины XIX века и она вышла из него обновлённой вплоть до своих основных тенденций. Во второй половине века, хотя трактаты по алгебре и продолжали уделять основное внимание теории уравнений, новые изыскания уже не были обременены заботой о немедленном применении к решению численных уравнений, но всё более группировались вокруг проблемы изучения алгебраических структур.

В XIX веке значительное развитие в Германии получила теория алгебраических чисел – Гаусс, Дирихле, Куммер, Кронекер, Дедекин, Гильберт. Начиная с первых последователей Гаусса, понятие *поля* (алгебраический

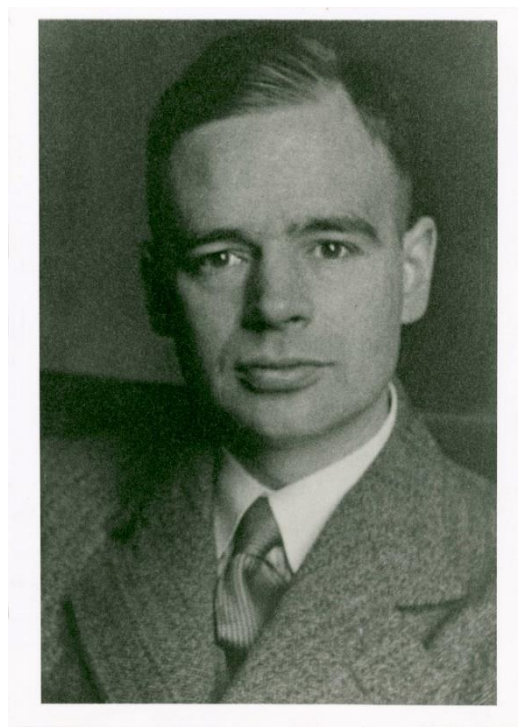
ческих чисел) лежит в основе всех работ по этому вопросу. Область применения этого понятия увеличивается, когда Дедекин и Вебер в 1882 г. начали по аналогии с теорией алгебраических чисел строить теорию алгебраических функций. Дедекин ввёл понятие *идеала*, который дал новый пример закона композиции между *множествами* элементов.

Важнейшую роль в становлении новой алгебры продолжала играть теория групп. С конца XIX века групповой подход получил широкое распространение в анализе, геометрии, механике и теоретической физике. В 1890—1891 гг. русский кристаллограф и геометр Е. С. Фёдоров и немецкий математик А. Шёнфлис независимо друг от друга решили *методами теории групп* задачу классификации всех кристаллических пространственных решеток.

Работа по аксиоматизации алгебры, начатая Р. Дедекиндом и Д. Гильбертом, была с успехом продолжена Э. Штейницем, затем, начиная с 1920 г. привела к работам школы Э. Артина и Э. Нётер, трудами которых была оформлена новая алгебра — наука, изучающая алгебраические структуры. Её классическим выражением стала появившаяся в 1930 — 1931 гг. монография Б.Л. Ван-дер-Вардена «Современная алгебра». Русский её перевод увидел свет в 1947 г.



Э. Артин (1898 – 1962)



Б.Л. Ван-дер-Варден (1903 – 1996)



Э. Нётер (1882 – 1935)

«Современная алгебра» в Московском университете

В конце XIX в. исследованиями по теории алгебраических уравнений занимались в Москве П.А. Некрасов и Л.К. Лахтин. Так Лахтин (1863 – 1927) посвятил несколько больших работ решению алгебраических уравнений высших степеней в специальных функциях, зависящих от интегралов дифференциальных уравнений, главным образом линейных уравнений второго и третьего порядков – так называемых дифференциальных резольвент соответствующих алгебраических уравнений.

Курс «Высшей алгебры», читавшийся в Московском университете в конце XIX – начале XX в., был посвящён исключительно вопросам решения алгебраических уравнений. Так читал алгебру в 1910-е – в начале 20-х годов Н.Н. Лузин. Учившийся в 1925 г. на 2-м курсе А.П. Юшкевич «впервые услышал о первых понятиях этой теории и о её важности в беседах с ... казанским математиком [А.В. Васильевым], который в то время ... был уже на склоне лет» (Юшкевич А.П. История математики в России. М. 1968. С. 545). Но как раз в это время, о котором рассказывает Юшкевич, ситуация в Московском университете начала меняться – в университет пришёл воспитанник киевской школы Д.А. Граве О.Ю. Шмидт (1891 – 1956).

Д.А. Граве (1863 – 1939)

1863 – родился в г. Кириллове Новгородской губернии

1885 – окончил Петербургский университет и был оставлен при университете для приготовления к профессорскому званию

1889 – защитил магистерскую диссертацию «Об интегрировании частных диф. уравнений 1-го порядка» и стал приват-доцентом университета

1896 – защитил докторскую диссертацию «Об основных задачах математической теории построения географических карт»

1899 – профессор Харьковского университета

1902 – профессор Киевского университета

1911 – организация спецсеминара по теории групп

1920 – действительный член АН УССР

1924 – член-корреспондент АН СССР

1929 – почётный член АН СССР



Д. А. ГРАВЕ в 1896 г.



Д. А. Граве со своими учениками (слева направо)
М. Г. Крейном, Н. И. Ахиезером и Н. Г. Чеботаревым.

Ученики Д.А. Граве: Б.Н. Делоне (1890 – 1980), О.Ю. Шмидт (1891 – 1956), М.Ф. Кравчук (1892 – 1942), А.М. Островский (1893 – 1986), Н.Г. Чеботарёв (1894 – 1947), Н.И. Ахиезер (1901 – 1980), М.Г. Крейн (1907 – 1989),

Отто Юльевич Шмидт

1891 – родился в Могилёве

1913 – окончил Киевский университет и оставлен при университете для приготовления к профессорскому званию

1916 – приват-доцент Киевского университета
– «Абстрактная теория групп» (2-е изд.: 1933)

1924 – профессор Московского университета

1929 – основал кафедру алгебры МГУ (зав. до 1949)

1930 – организовал алгебраический семинар МГУ

1930 – 1934 – руководитель арктических экспедиций

1932 – 1950 – отв. редактор «Математ. сборника»

1933 – член-корреспондент АН СССР

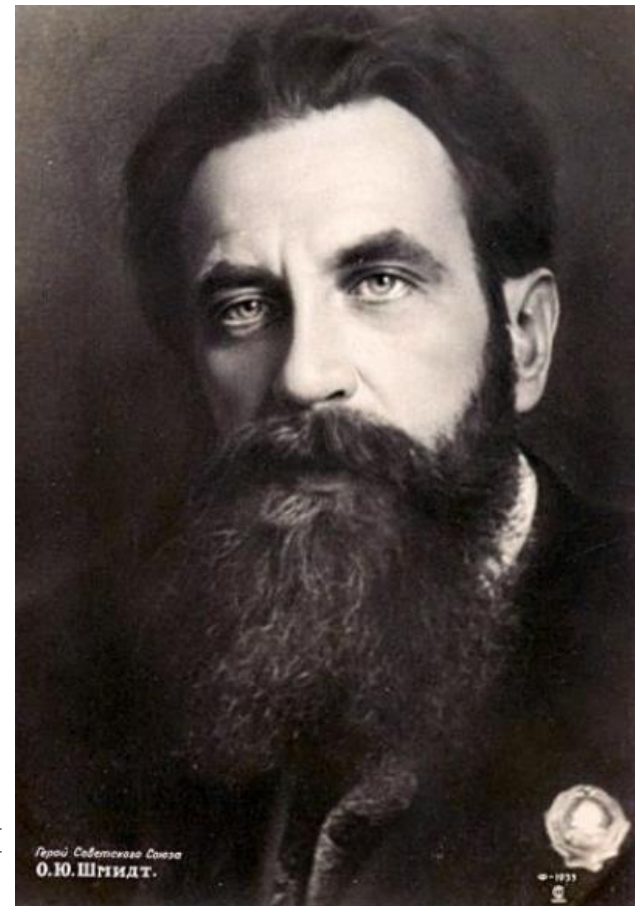
1935 – действительный член АН СССР

1937 – Герой Советского Союза

– директор Института теоретической геофизики АН СССР

1939 – 1942 – вице-президент АН СССР

1956 – умер в Москве



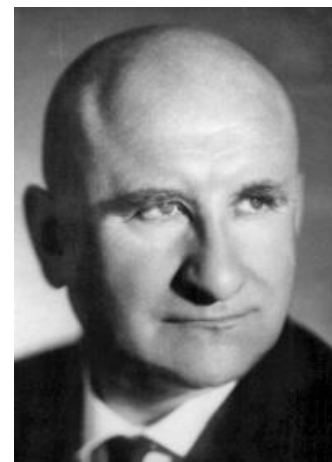
Советские алгебраисты



Б.Н.Делоне (1890–1980)



Н.Г.Чеботарёв (1894–1947)



А.Г.Курош (1908 – 1971)



А.И.Мальцев (1909 – 1967)



И.Р.Шафаревич (1923 – 2017)