История математики
24 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2022 года

Алгебра как наука о решении алгебраических уравнений. Основная теорема алгебры и проблема решения уравнений в радикалах. “Размышление об алгебраическом решении уравнений” Ж.Л. Лагранжа. Рассмотрение группы подстановок корней. “Арифметические исследования” Гаусса. Биография К.Ф. Гаусса. Создание теории групп и теории Галуа

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855).

В 1799 г. появилась докторская диссертация Гаусса, в которой он доказал **основную теорему алгебры**.

Основная теорема алгебры,

1) *«Все уравнения алгебры получают столько решений, сколько их показывает наименование высшей величины»* - **Альбер Жирар**(1595-1632), 1629 г.

2) «Любой алгебраический многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных или квадратных множителей», **Эйлер,** 1742 г.

3)«Новое доказательство теоремы о том, что всякая

алгебраическая целая рациональная функция от одной переменной может быть разложена на действительные множители первой или второй степени» - **докторская диссертация Гаусса**

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)

«***Размышлениях об алгебраическом решении уравнений***», 1771

Общий принцип, установленный Лагранжем, таков:

Если $t=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$—данная рациональная функция корней $x_1,x_2,\cdots,x_n$ уравнения, то при всех возможных **перестановках x_i** она принимает n! значений. Поэтому можно составить уравнение степени n!, коэффициенты которого можно выразить через коэффициенты данного уравнения. Решение этой резольвенты (Лагранж вначале называл ее «reduite») дало бы n! корней t, а затем через последние нашлись бы x_i.

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)

Однако этот метод действительно пригоден для решения уравнения n-й степени лишь в том случае, если **уравнение, содержащее t, можно привести к степени меньшей, чем n**.

Существенный шаг, сделанный Лагранжем заключается в том, что **вопрос о решении уравнений в радикалах он свел к рассмотрению множества подстановок корней уравнения.**

После Лагранжа в алгебре два направления:

1) ***Исследование уравнений с буквенными коэффициентами***

(Руффини, Коши, Абель, Галуа)

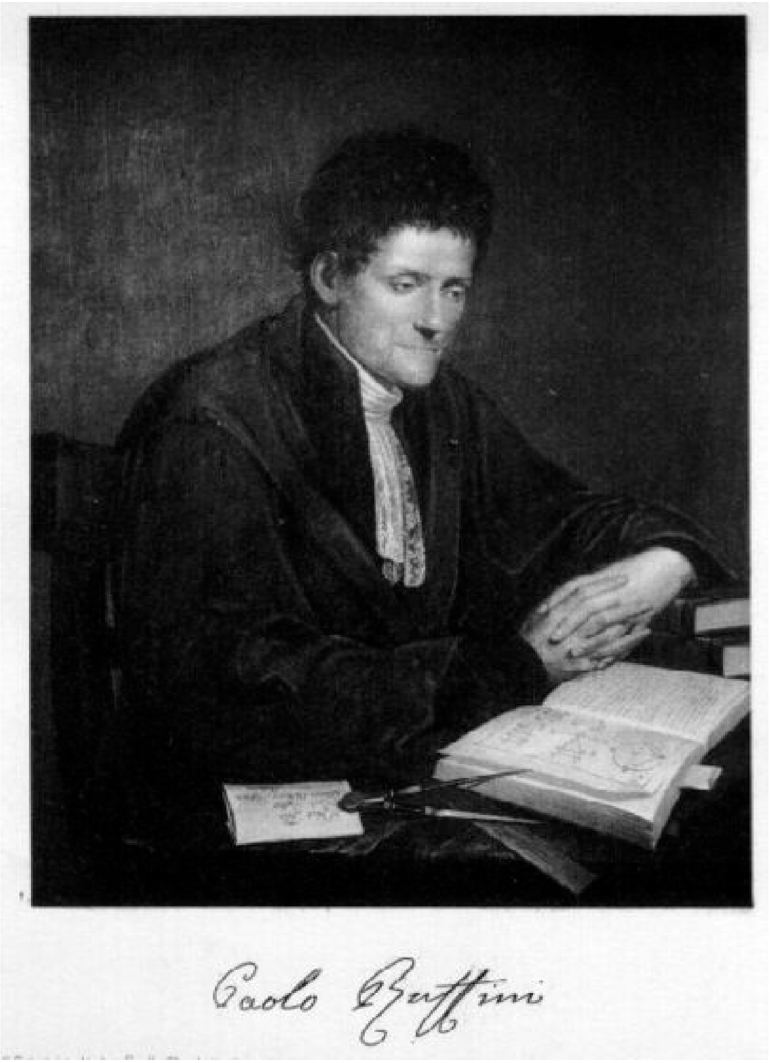
2) Классы разрешимых уравнений и уравнения с числовыми коэффициентами

(Гаусс, Абель, Галуа)

Теория Галуа.

Критерий разрешимости уравнения. Группы, поля.

Паоло Руффини (1765-1822)



В работе 1799 г. «**Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени**» рассмотрел подстановки для n=5.

Паоло Руффини (1765-1822)

Руффини доказал важную теорему, что не **существует трех- или четырехзначных функций от пяти величин**.

Затем он простейшим образом доказал **теорему о невозможности решения уравнений высших степеней в радикалах, если используются лишь функции, рационально зависящие от корней**.

Наконец, Руффини обнаружил зависимость, существующую между **приводимостью уравнения и интранзитивностью его группы**,

«*Арифметические исследования*», Карл Фридрих Гаусс, 1801 г.

Уравнение **деления круга** $\boldsymbol{x^n - 1 = 0}$

Задолго до Гаусса было известно решение этого уравнения для n=5:

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

далее замена: $z = x + \frac{1}{x}$, а т.к. $x^5 - 1 = 0$, то $z = x^4 + x$

В современных терминах результаты **Гаусса** звучали бы следующим образом:

Уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ определяет поле К величин $a + bx + cx^2 + dx^3$, где a, b, c, d — рациональные, и в этом поле мы можем выделить подполе L величин вида $\alpha+\beta$z.

В итоге Гаусс получает теорему:

Если n — простое и $n-1=a_1a_2\ldots a_k$ — разложение n— 1 на простые множители, то решение уравнения

$x^n+\cdots+x+1=0$ сводится к решению k уравнений степеней соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

В частности, так как $16=2\cdot2\cdot2\cdot2$, то решение уравнения

$x^{17}-1=0$ сводится к решению четырех квадратных уравнений. Отсюда следует **возможность построения правильного 17-угольника** циркулем и линейкой.

Нильс Хенрик Абель (1802—1829).

В работе 1826 г.
«**Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения степени выше четырех**»

Нильс Хенрик Абель (1802—1829).

В 1829 г. появляется работа Абеля — «**Мемуар об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений**». В ней он явно вводит понятие **области рациональности**, аналога современного понятия поля.

Областью рациональности относительно величин $a_{1,}a_{2,}$ …, a_n Абель называет множество всевозможных величин, полученных из величин $a_{1,}a_{2,}$ …, a_n и вещественных (или рациональных) чисел с помощью четырех арифметических действий (слово множество им не употреблялось).

Введение этого понятия крайне существенно для сколько-нибудь общих исследований в теории уравнений.

Нильс Хенрик Абель (1802—1829).

Вторым существенным шагом является доказательство разрешимости замечательного класса уравнений. Этот класс Абель определяет двумя условиями:

1) Каждый корень x_i уравнения выражается в виде рациональной функции от фиксированного корня x_1: $x_i = \theta_i(x_1)$;

2) Рациональные функции θ_i обладают свойством

$$\theta_i\left(\theta_j(x_1)\right) = \theta_j(\theta_i(x_1))$$

Сейчас говорят, что это **нормальные уравнения с абелевой группой Галуа**.

Эварист Галуа (1811-1832)

Э. Галуа.

В 1823 г. родители отдали его учиться в лицей в Париже, там Галуа заинтересовался математикой, читает сочинения Лежандра, Лагранжа, Гаусса.

1828—1829 гг. стали тяжелыми для Галуа: его отец покончил с собой, а сам он дважды провалился на вступительном экзамене по математике в Политехническую школу.

Эварист Галуа (1811-1832)

- 1829 г. – поступил в Нормальную школу;
- 1831 г. – исключение из школы за республиканские выступления;
- июнь 1831 г. – Галуа под судом за вызывающее высказывание в адрес короля Луи-Филиппа, но его оправдали, приняв во внимание юный возраст.
- через месяц он снова был арестован, так как являлся одним из вожаков манифестации молодежи.
- В конце 1831 г. он был приговорен к шести месяцам тюрьмы.
- Вскоре после выхода из тюрьмы Галуа был убит на дуэли.

Эварист Галуа (1811-1832) , работы

Э. Галуа.

«**Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях**», 1829 г.

«**Из теории чисел**»,1830.

29 мая 1832 г. - дополненная рукопись в виде **письма к Огюсту Шевалье.**

«**Мемуар об условиях разрешимости уравнения в радикалах**», 1832 г. (оп. 1846 г. Лиувиллем)

«**Из теории чисел**»,1830.

Галуа рассматривает полиномиальные сравнения вида F (x) = 0 (mod p), не имеющие целых корней.

«*корни этого сравнения нужно рассматривать как род воображаемых символов, так как они не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к целым числам; роль этих символов в исчислении будет часто столь же полезной, как роль воображаемого* $\sqrt{-1}$ *в обычном анализе*» . Далее он рассматривает по сути дела **конструкцию присоединения к полю корня неприводимого уравнения** (явно выделяя требование неприводимости) и доказывает ряд теорем о конечных полях.

Определение области рациональности у Галуа:

«*Более того, можно условиться рассматривать как рациональности все рациональные функции от некоторого числа определенных количеств, предположенных априори известными. Например, можно выбрать некоторый корень из целого числа и рассматривать как рациональности все рациональные функции от этого радикала*».

Галуа доказал, что

для всякого уравнения $P_n(x) = 0$ можно в той же области рациональности найти некоторое уравнение Q (x) = 0, сейчас называемое **нормальным**.

Корни данного уравнения $P_n(x) = 0$ и соответствующего нормального уравнения Q(x) =0 выражаются друг через друга рационально.

Нормальное уравнение — это уравнение, обладающее тем свойством, что все его корни рационально выражаются через один из них и элементы поля коэффициентов.

Эварист Галуа (1811-1832)

Все подстановки корней нормального уравнения образуют группу G. Это и есть группа Галуа уравнения Q(x) = 0, или, что то же самое, уравнения $P_n(x) = 0$.

Она обладает, как выяснил Галуа, замечательным свойством: любое рациональное соотношение между корнями и элементами поля R (изначальная область рациональности) инвариантно относительно подстановок группы G. **Таким образом, Галуа связал с каждым уравнением группу подстановок его корней.**

Эварист Галуа (1811-1832)

Структура группы Галуа оказалась связанной с задачей разрешимости уравнений в радикалах. ***Чтобы разрешимость имела место, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая группа Галуа была разрешима.***

То есть, должна существовать цепочка вложений:

- $G \supset H_{p_1} \supset H_{p_2} \supset \cdots \supset H_{p_k}$,

- где H_{p_i} — нормальные делители с простыми индексами.

Артур Кэли (1821-1895)

В своих лекциях по истории математики Ф. Клейн говорит, что Кэли является «*создателем современной алгебраической геометрии как со стороны теории инвариантов, так и в ее геометрической части*».

В 1854 г. были опубликованы две части работы Кэли: ***«О группах, зависящих от символического уравнения $\boldsymbol{\theta^n = 0}$*»**. В этой работе Кзли определяет группу как множество символов с заданным законом композиции, который удовлетворяет условиям ассоциативности, существования единицы и однозначной разрешимости уравнений

$ax = b$, для любых a и b.

Жордан, Мари Энмон Камиль (1838—1922)

1) 1865 г. «**Комментарии к мемуару Галуа**»,
2) 1869 г. ее продолжение «**Комментарии к Галуа**»,
3) 1870, «**Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях**»

В сочинениях Жордана уже есть:

- явное выделение **нормальных подгрупп**,
- понятие **простой группы**,
- обстоятельное исследование **кратно-транзитивных групп**.

В сочинении 1870 г. впервые появляется понятие **гомоморфизма** (вернее, гомоморфизма на или эпиморфизма), причем любопытно, что выражение Жордана «группа Г изоморфна группе G» означает, что определен эпиморфизм G на Г.

Первое приложение теории групп

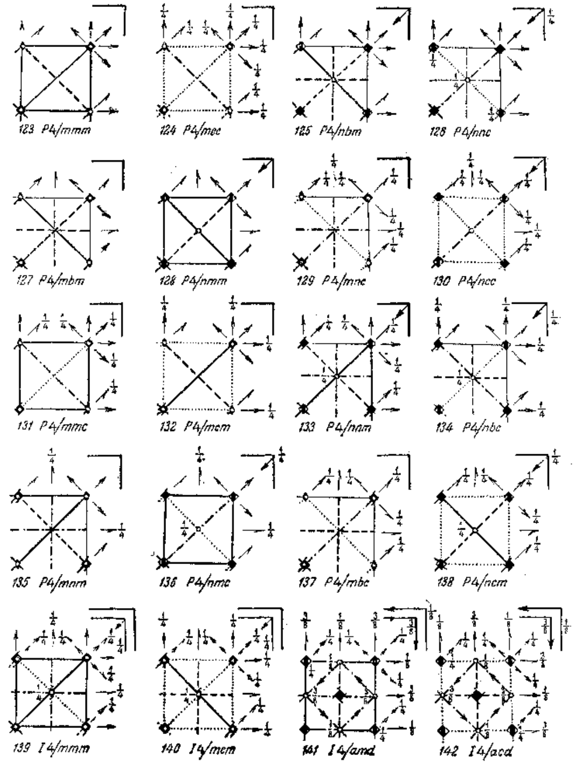


Рис. 116. Федоровские группы дитетрагонально-дипирамидального вида симметрии

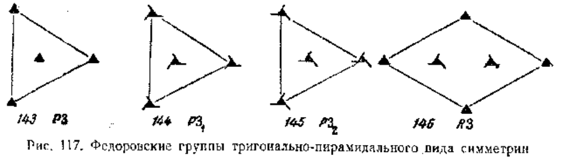


Рис. 117. Федоровские группы тригонально-пирамидального вида симметрии

В 1890—1891 гг. русский кристаллограф и геометр **Е. С. Федоров** и немецкий математик А. Шёнфлис независимо друг от друга решили ***методами теории групп*** задачу классификации всех кристаллических пространственных решеток.

Они установили наличие 230 пространственных групп (на плоскости их 17) симметрии, состоящих из совокупности самосовмещений кристаллических структур.

Аксиоматика теории групп

Общепринятая аксиоматика появилась в работе **«Курс алгебры»** 1898 г. Генриха Вебера (1842-1913).

Группа G – множество элементов произвольной природы, в котором:

1) задана операция;
2) существует нейтральный элемент;
3) операция ассоциативна;
4) для любого элемента существует обратный

К концу XIX в. теория конечных групп сформировалась настолько, что для нее приобрела актуальность проблема классификации.

Проблема Бернсайда (поставлена в 1902 году): Если *G* - конечно порожденная периодическая группа, то обязательно ли *G* конечна?

На этот вопрос отрицательно ответили в 1964 году Евгений Соломонович Голод (1935-2018) и Игорь Ростиславович Шафаревич (1923-2017) которые привели пример бесконечной p-группы, которая конечно порождена.

Литература:

1) Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. Под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. Из-во «Наука», М., 1978 г.
2) Рыбников К.А. История математики. Изд-во МГУ, 1994
3) Г. Вилейтнер, История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.1960, Из-во физматлит
4) Ф.Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М. Наука. 1989.