**Математика Международной системы единиц**

***П.Н. Антонюк***

**1. Введение**

В 2019 г. вступила в силу новая формулировка Международной системы единиц (СИ). Система СИ – это современный вариант Метрической системы мер и весов, разработанной во Франции во времена Великой французской революции [1-4]. Эту реформу системы СИ физики назвали «Второй Великой французской революцией», т. к. за все время существования Метрической системы была проведена самая значительная ее реформа с учетом современных достижений физики и математики. Основной документ – 9-е издание Брошюры СИ (на французском языке) [5]. В результате сегодня мы имеем единственную хорошо разработанную систему единиц измерения физических величин – систему СИ. Брошюра СИ написана метрологами на нематематическом языке. Основная идея реформы заключается в установлении связи между единицами СИ и определяющими константами СИ.

В настоящей статье эта связь представлена математическим преобразованием, которое задается вектором-столбцом и квадратной невырожденной матрицей. Обратное математическое преобразование также задается вектором и матрицей. Для этих двух матриц найдены ранги, определители и другие характеристики. Рассмотрена краткая история системы СИ, при этом основное внимание уделяется работам математиков. С целью сохранения обозначений, принятых в Брошюре СИ, будем единицы и константы записывать латинскими буквами.

**2. Теория подобия и система СИ.**

Для понимания смысла последней реформы важно рассматривать не только ее физические основания, но и, что очень важно, – ее математические основания. Теоретической основой системы СИ является *теория подобия*, в которой анализируются как математические, так и физические величины. Для краткости будем также использовать единый термин «*величина*». Физическая величина – это величина, имеющая *размерность* (выражаемую в метрах, секундах и т. д.), математическая величина – это величина безразмерная. Геометрическое подобие рассматривали Евклид и другие древнегреческие математики. Физическое подобие, которое является обобщением геометрического подобия, впервые стали рассматривать Галилео Галилей («Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук», 1638) и Исаак Ньютон («Математические начала натуральной философии», 1687). Дальнейшее развитие теории физического подобия – важного направления в математической физике – связано с многочисленными работами математиков, физиков, астрономов и инженеров. Назовем основные этапы этого развития.

Во Франции вводится Метрическая система (1799), содержащая две основные единицы длины и массы: метр и килограмм. Жан-Батист Жозеф Фурье в книге «Аналитическая теория тепла» впервые сопоставляет физическим величинам их размерности (1822). Карл Фридрих Гаусс вводит абсолютную систему единиц (1832), содержащую три основные единицы длины, массы и времени: миллиметр, миллиграмм (появились раньше в Метрической системе) и секунда (впервые введена как основная единица). Жозеф Луи Франсуа Бертран формулирует основную теорему теории подобия (1878), называемую сегодня *пи-теоремой*. Теорема связана с размерностями физических величин. Ричард Чейз Толмен формулирует так называемый *принцип подобия*, в чем-то похожий на принцип относительности (1914). Перси Уильямс Бриджмен публикует книгу «Анализ размерностей» (1922) [6]. В книге обсуждаются пи-теорема и размерности физических величин. Леонид Иванович Седов публикует книгу «Методы теории размерностей и теории подобия в механике» (1944) [7] – первую книгу о теории подобия в Советском Союзе. Интересные факты можно узнать еще из двух книг [8, 9].

Андрей Николаевич Колмогоров в течении всей своей жизни интересовался понятием величины. Первая его работа, посвященная величине, написана в 20 лет [10, 11]. После многократного возвращения к этой теме им была построена аксиоматическая теория положительных скалярных величин, с которой начинается теория подобия [12]. Понятием величины интересовались и многие другие математики, укажем здесь только две работы [13, 14]. В рамках теории подобия Колмогоров нашел энергетический спектр турбулентных пульсаций жидкости при очень больших числах Рейнольдса (1941). Позже он дал краткое изложение теории подобия [15].

Не обошлось и без ошибок в теории подобия, что ставило под сомнение ряд важных результатов. Георгий Сергеевич Голицын в своих воспоминаниях [16] приводит слова Якова Борисовича Зельдовича: «Некоторые говорят, что теория подобия – это подобие теории» (1971). Из разговора с ученым-теплофизиком Александром Ивановичем Леонтьевым (примерно 2018) автор узнал, что слова «подобие теории» принадлежат Колмогорову, который таким образом оценивал результаты «инженерного» подхода к теории подобия. Подчеркивая значимость теории подобия, первые шаги в которой сделали Галилей и Ньютон, Леонтьев утверждал: «Пи-теорема – одно из величайших достижений человеческого разума» [17].

Математической формализацией теории подобия занимались многие известные математики: уже упомянутый Колмогоров, Д'Арси Томпсон, Николай Григорьевич Чеботарев, Хасслер Уитни, Гаррет Биркгоф, Стефан Дробот, Юрий Иванович Манин, Владимир Игоревич Арнольд и Теренс Тао. Математики внесли существенный вклад в развитие теории подобия, но говорить об аксиоматическом построении этой теории пока рано.

Содержание Брошюры СИ удобно рассматривать на языке линейной алгебры, используя понятие мультипликативного линейного пространства [18, 19]. В аддитивном линейном пространстве определена сумма двух элементов и умножение элемента на число (коэффициент). В мультипликативном линейном пространстве определено произведение двух элементов и возведение элемента в степень, показатель которой есть число. Нулевому и противоположному элементам в аддитивном пространстве соответствуют единичный и обратный элементы в мультипликативном пространстве. Простейшие аддитивные и мультипликативные линейные пространства – это пространства над полями рациональных, действительных и комплексных чисел.

Принцип подобия – это принцип физического равноправия всех систем единиц (система СИ не лучше и не хуже, чем любая другая система единиц). Прямым следствием принципа подобия является пи-теорема, утверждающая, что *математическое описание физических явлений не зависит от выбора системы единиц.*

Производные единицы СИ равны произведению степеней семи основных единиц СИ (секунда, метр, килограмм, ампер, кельвин, моль, кандела) c рациональными показателями:

Такие произведения называют также степенными одночленами и размерностями физических величин. Множество производных единиц образует мультипликативное линейное пространство над полем рациональных чисел. Единичный элемент пространства

трактуется как размерность математических величин или, другими словами, как размерность безразмерных величин.

**3. Краткая история системы СИ**

Назовем главные события, связанные с созданием и развитием Метрической системы.

* 14 июля 1789 г. Начало Великой французской революции – взятие Бастилии
* 8 мая-22 августа 1790 г. Декрет Национального собрания Франции (единообразие мер и весов). Вторая дата – день утверждения Декрета
* 26-30 марта 1791 г. Декрет Национального собрания Франции (мера длины определена как одна десятимиллионная часть четверти земного меридиана, а также поставлена задача: для нахождения меры длины необходимо измерить длину дуги меридиана от Дюнкерка на севере Франции до Барселоны в Испании). Вторая дата – день утверждения Декрета
* 1 августа 1793 г. Декрет Национального конвента Франции (метр определен как одна десятимиллионная часть четверти земного меридиана)
* 22 июня 1799 г. Сделаны эталоны метра и килограмма (линейка и цилиндр из платины). Эталон килограмма имел форму цилиндра Архимеда: высота (39 мм) равна диаметру (39 мм). Такой цилиндр имеет минимальную площадь поверхности при постоянном объеме
* 9 ноября 1799 г. Окончание Великой французской революции – переворот 18 брюмера, к власти пришел Наполеон
* 10 декабря 1799 г. Во Франции принят закон о Метрической системе мер и весов. Было решено изготовить памятную медаль с надписью: «Для всех времен, для всех народов». В разработке Метрической системы приняли участие выдающиеся ученые: Лагранж, Лаплас, Лавуазье, Лежандр, Монж, Мешен, Деламбр, Борда, Кондорсе, Кулон, Прони, Лазарь Карно, Дарсе, Маскерони, Вандермонд, Гаюи, Бертолле (и этот список далеко неполный).
* 20 мая 1875 г. 17 государств, включая Россию, подписали Метрическую конвенцию. К концу XX века всё больше стран стали принимать Метрическую систему.
* 1960 г. Метрическая система переименована в Международную систему единиц (СИ)
* 20 мая 2019 г.Вступила в силу последняя версия системы СИ (20 мая – Всемирный день метрологии, день подписания Метрической конвенции)
* Система СИ, как результат долгого развития Метрической системы, существует уже 225 лет

После Октябрьской революции 1917 года Совет народных комиссаров Советской России принимает два декрета о введении в стране Метрической системы [20, 21]. В первом декрете устанавливается срок введения Метрической системы: с 1 января 1919 г. до 1 января 1924 г. Во втором декрете срок введения отодвигается до 1 января 1927 г. Благодаря этим декретам в начале XX века в России была введена Метрическая система.

**4. Основные единицы СИ**

* *s* секунда (время)
* *m* метр (длина)
* *kg* килограмм (масса)
* *A* ампер (сила тока)
* *K* кельвин (термодинамическая температура)
* *mol* моль (количество вещества)
* *сd* кандела (сила света)

Семь единиц СИ можно кратко записать в виде вектора

**5. Определяющие константы СИ**

* частота перехода сверхтонкого расщепления *Cs*
* *с* скорость света в вакууме
* *h* постоянная Планка
* *e*  элементарный заряд
* *k* постоянная Больцмана
* число Авогадро
* световая эффективность

Семь констант СИ можно кратко записать в виде вектора

Точные числовые значения семи определяющих констант введены по определению (смотрите пункт 6). В число определяющих констант включены, как известные раньше природные фундаментальные константы (скорость света, постоянная Планка, элементарный заряд, постоянная Больцмана), так и выбранные человеком технические константы (частота перехода, число Авогадро, световая эффективность). Идея связывать основные единицы с фундаментальными константами принадлежит Максу Планку (смотрите пункт 12).

**6. Преобразование единиц СИ в константы СИ**

* краткая запись преобразования
* вектор (точные числовые значения)
* матрица размерностей

**7. Преобразование констант СИ в единицы СИ**

* краткая записьобратного преобразования
* вектор **(**точные числовые значения)
* матрица размерностей

При записи пяти из семи числовых значений *d* приведены не все десятичные знаки (отмечено многоточием), т. к. эти числовые значения, хотя и являются рациональными числами, содержат так много десятичных знаков, что для них не хватает места.

**8. Взаимно обратные матрицы *A* и *D***

Рассмотрим основные характеристики матриц (ранг, определитель, след, характеристический многочлен и собственные числа).

* характеристический многочлен для *A* и *D*
* собственные числа для *A* и *D*

Характеристики показывают, что в рамках последней реформы системы СИ семь определяющих констант СИ выбраны удачно, так как дают простые (по структуре) матрицы *A* и *D*.

**9. Системы единиц и преобразования подобия**

Рассмотрим мультипликативное неоднородное линейное преобразование или, другими словами, степенное преобразование

одной системы независимых основных единиц в другую систему независимых основных единиц. Здесь *a* – вектор, *A* – невырожденная матрица. Координаты вектора – положительные действительные числа, элементы матрицы – рациональные числа. В общем случае будем полагать, что координаты вектора – положительные действительные числа, элементы матрицы – действительные числа. Назовем такое преобразование *преобразованием подобия*. Все возможные системы единиц связаны попарно преобразованиями подобия.

Система определяющих констант СИ – это система из семи единиц, равноправная и равносильная системе СИ. В Брошюре СИ сказано: «Для практического использования единицы должны быть не только определены, но и физически реализованы». Определяющие константы были выбраны с целью заменить физическую реализацию единиц СИ на более простую физическую реализацию констант СИ. Преобразование подобия, связывающее единицы и константы, позволяет затем физически реализовать единицы СИ.

Заметим, что число независимых основных единиц может быть любым. За время развития Метрической системы это число увеличилось с двух (метр и килограмм) до семи (единицы СИ). Число единиц может и уменьшаться. Например, в самом начале создания Метрической системы в нее входила денежная единица франк.

**10. Пространство физических величин**

Значение физической величины равно произведению ее числового значения (положительного действительного числа) на ее единицу (основную или производную). Любая физическая величина имеет конечное или бесконечное множество возможных значений. Физическая величина с одним значением – это физическая константа. Совокупность всех возможных значений всех физических величин образует непрерывное многообразие. Назовем его *пространством значений физических величин* или, кратко, *пространством физических величин.* Очевидно, что любая единица любой физической величины – это элемент этого пространства.

Числовое значение физической величины может оказаться равным отрицательному действительному числу. Здесь этот общий случай не рассматривается.

**11.** **Преобразования подобия и аффинные преобразования**

Преобразования подобия образуют *группу подобия*, в которой композиция двух преобразований подобия также является преобразованием подобия:

Последние формулы похожи на формулы, связанные с *группой аффинных преобразований*, в которой композиция двух аффинных преобразований также является аффинным преобразованием [22]:

Аддитивная запись аффинных преобразований соответствует мультипликативной записи преобразований подобия. Другими словами, существует изоморфизм между группой подобия и аффинной группой.

Это указывает на то, что структура пространства физических величин похожа на структуру аффинного пространства. Можно было бы назвать пространство физических величин мультипликативным аффинным пространством.

**12. Макс Планк и естественная система единиц**

При подготовке реформы 2019 г. была принята во внимание идея Планка (1899) о взаимной связи Метрической системы с системой единиц, образованной фундаментальными физическими константами [23, 24, 25, 26]. Расскажем об этой идее, изменив терминологию Планка на современную, с учетом последней версии системы СИ, сохранив полностью смысл его рассуждений. Планк взял четыре константы: скорость света (впервые обсуждаемую Галилеем), гравитационную постоянную (значение которой следовало из опытов Генри Кавендиша), постоянную Планка и постоянную Больцмана (последние две постоянные были получены Планком, вторую из которых он назвал в честь австрийского физика) [27]. Из этих констант Планк сформировал систему основных единиц

Размерности констант выражаются через единицы СИ

в виде степенных одночленов с целочисленными показателями. Показатели этих размерностей запишем в виде строк матрицы размерностей

.

Согласно системе СИ, три константы *c*, *h, k* выражаются точными формулами через секунду, метр, килограмм и кельвин (смотрите пункт 6). Эти формулы – итог долгих измерений констант до реформы 2019 г. Гравитационная постоянная в результате недавних измерений выражается приближенной формулой

в которой точно известны только четыре десятичных знака.

Таким образом четыре константы выражаются с помощью четырех формул через четыре единицы СИ. Обращая эти формулы, мы выразим с помощью новых формул четыре единицы СИ через четыре константы. Константы будут входить в новые формулы в виде степенных одночленов с рациональными показателями. Показатели для секунды, метра, килограмма и кельвина задаются строками матрицы

,

обратной к выше приведенной матрице. Каждая единица СИ будет равна произведению числового коэффициента пропорциональности (положительного действительного числа) на степенной одночлен констант с рациональными показателями.

Полученные формулы позволяют так изменить величину (или масштаб) четырех единиц СИ, превратив их в новые единицы времени, длины, массы и температуры, чтобы коэффициенты пропорциональности оказались равными единице. *Планковские единицы* или *планковские величины.* Так сегодня называют новые единицы

Формулы преобразований

связывают константы и планковские величины. Сам Планк назвал новые единицы *естественными единицами измерения*, подчеркивая тем самым независимость данных единиц от нашего выбора. Приведем их значения, найденные по указанным формулам. Для простоты дадим только порядок единиц:

Планковские величины сегодня широко применяются в физике, особенно в космологии. Планковские время и длина характеризуют минимальные значения промежутков времени и длин, начиная с которых уже нельзя говорить о непрерывных свойствах пространства-времени. Наряду с существованием минимальной температуры – абсолютного нуля Кельвина – существует также максимальная температура Планка, равная температуре Большого взрыва. И наконец, планковская масса возможно характеризует верхний предел для масс элементарных частиц.

В широком смысле планковские величины – это производные единицы в системе четырех основных единиц Планка *u*. В то же время планковские величины – это производные единицы в системе четырех основных единиц *v*.

В 1799 г. французы придумали девиз Метрической системы: «Для всех времен, для всех народов». Планк перефразировал эти слова, заявив, что новые «единицы длины, массы, времени и температуры» сохраняют «свое значение для всех времен и для всех культур, в том числе и внеземных и нечеловеческих» [28]. Ни Планк, и никто другой, придумал числовые значения этих единиц. Эти значения даны самой природой, а кто-то думает, что их дал Бог.

**13. Заключение**

Как уже было сказано, Брошюра СИ написана на нематематическом языке. Для понимания системы СИ и дальнейших путей ее развития обойтись без математики невозможно.

**Литература**

1. *Méchain, Delambre.* Base du Système mètrique décimal, ou Mesure de ľarc du Méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes. Tome 1. Paris, 1806. – 558 p.

2. *Мешен П.Ф.А., Деламбр Ж.-Б.Ж.* Основы метрической десятичной системы. М.; Л.: Гос.

изд-во, 1926. – XII, 139 с. (Неполный перевод с французского издания).

3. *Хвольсон О.Д.* Метрическая система мер и весов. Москва; Петроград: Гос. изд-во, 1922. – 40 с.

4. *Исаков Л.Д.* На все времена, для всех народов. Очерки по истории метрической

системы. Петроград: Издание Главной Палаты мер и весов, 1923. – 95 с.

5. Le Système international d’unités (SI), Édité par le BIPM (Bureau international Des poids et

mesures), Pavillon de Breteuil, F-92312 Sèvres Cedex France, 9e édition 2019 (V2.01,

Décembre 2022). – 112 p.

6. *Бриджмэн П.В.* Анализ размерностей. Пер. со 2 англ. изд. Под ред. и с предисл. акад.

С.И. Вавилова. – Ленинград; Москва: ОНТИ-ГТТИ, 1934. – 120 с.

7. *Седов Л.И.* Методы теории размерностей и теории подобия в механике (Первое изд.).

М.; Л.: ОГИЗ, 1944. – 136 с.

8. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие / Пер. со 2 англ. изд. И.Б.

Погребысского. Предисл. Л.И. Седова. – М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1963. – 244.

9. *Зорич В.А.* Тема I. Анализ размерностей физических величин // Математический

анализ задач естествознания. – М.: МЦНМО, 2017. С. 11-41, 131-135.

10. *Колмогоров А.Н.* О понятиях величины и числа // Историко-математические

исследования. – Выпуск XXXII-XXXIII. – М.: Наука, 1990. – С. 474-484.

11. *Абрамов А.М., Тихомиров В.М.* Комментарий к работе А.Н. Колмогорова «О понятиях

величины и числа» // Там же. – С. 484-487.

12. *Колмогоров А.Н.* Величина // Большая советская энциклопедия. 3-е изд. Т. 4. – М.: Изд-

во «Совет. энциклопедия», 1971. – С. 456-457.

13. *Лебег А.* Об измерении величин. 2-е изд. С предисл. А.Н. Колмогорова. – М.: Гос.

учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1960. – 204 с.

14. *Бурбаки Н.* Измерение величин // Бурбаки Н. Общая топология (Топологические

группы. Числа и связанные с ними группы и пространства). – М.: Наука, 1969. – С. 244-

251.

15. *Колмогоров А.Н.* Подобия теория // Большая советская энциклопедия. 3-е изд. Т. 20. –

М.: Изд-во «Совет. энциклопедия», 1975. – С. 126-127.

16. *Голицын Г.С.* Три встречи // Яков Борисович Зельдович (воспоминания, письма,

документы). 2-е изд. – М.: Физматлит, 2008. – С. 249-252.

17. *Антонюк П.Н.* Краткая история теории подобия // Наука и техника: Вопросы истории

и теории. Выпуск XXXIX. СПб.: СПбФ ИИЕТ РАН; Скифия-принт, 2023. – С. 125-126.

18. *Drobot S.* On the foundations of dimensional analysis // Studia Mathematica, 14 (1953). – P.

84-99.

19. *Антонюк П.Н.* П-теорема и линейная алгебра // Институт истории естествознания и

техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2010. М.: Янус-К, 2011. –

С. 236-238.

20. Декрет Совета Народных Комиссаров. О введении Международной Метрической

системы мер и весов (от 14 сентября 1918 г.) // Собрание узаконений и распоряжений

рабочего и крестьянского правительства за 1917-1918 гг. / Упр. делами Совнаркома

СССР. – М.: Б. и., 1942. – С. 902-903.

21. Декрет Совета Народных Комиссаров. Об отдалении срока введения метрической

системы (от 29 мая 1922 г.) // Собрание узаконений и распоряжений

рабочего и крестьянского правительства за 1922 г. Отдел первый / Упр. делами

Совнаркома СССР, Наркомат юстиции СССР. – М.: Б. и., 1950. – С. 800-801.

22. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука,

1979. – 512 с.

23. *Планк М.* Избранные труды. М.: Наука, 1975. – 788 с.

24. *Смородинский Я.А.* Естественные системы единиц // Физическая энциклопедия. Т. 2. –

М.: Изд-во «Совет. энциклопедия», 1990. – С. 29-30.

25. *Антонюк П.Н.* Естественные системы единиц и П-теорема // Институт истории

естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2011. М.:

Янус-К, 2011. – С. 256-258.

26. *Томилин К.А.* Фундаментальные физические постоянные в историческом и

методологическом аспектах. – М.: Физматлит, 2006. – 368 с.

27. *Антонюк П.Н.* Формула Больцмана и постоянная Больцмана. Краткая история // Наука

и техника: Вопросы истории и теории. Выпуск XXXVIII. СПб.: СПбФ ИИЕТ РАН;

Скифия-принт, 2022. – С. 113-114.

28. *Планк М.* Избранные труды. – С. 232.

**Павел Николаевич Антонюк**

**Об аффинной структуре пространства физических величин**

**21 октября 2024 года**

**Огюстен Луи Коши. Алгебраический анализ. 1821**

**Йохан Йенсен (Дания)**

**Число Авогадро**

**В. Оствальд , Э. Мах**

**Пространство значений физических величин:**