НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ СЕМИНАР ПО ИСТОРИИ и МЕТОДОЛОГИИ МАТЕМАТИКИ и МЕХАНИКИ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. М.В. ЛОМОНОСОВА

О первой работе П. Л. Чебышёва

Павел Николаевич Антонюк[1,2]

[1] **Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова**
[2] **Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)**

5 апреля 2021 года

Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894)

Первая научная работа Чебышёва

1821 год рождения

1837/1838 учебный год, 1 курс, Московский университет

1838, 17 лет при переходе с первого на второй курс университета Чебышёв пишет работу «Вычисление корней уравнений»

1840/1841 учебный год, 4 курс, Московский университет
студенческий конкурс научных работ:
золотая медаль – Антон Смоляк,
серебряная медаль – Пафнутий Чебышёв

Метод последовательных приближений (метод итераций)

- Задача $x_* = ?$
- Приближения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_*$
- Ошибки $x_0 - x_*, x_1 - x_*, x_2 - x_*, \ldots, 0$
- Метод посл. приближений $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto x_{n+1}$
- $\begin{cases} \text{Метод Фибоначчи и Бине} \\ \text{Метод секущих (regula falsi)} \end{cases}$ $(x_{n-1}, x_n) \longmapsto x_{n+1}$
- Простейший метод $x_n \longmapsto x_{n+1}, x_{n+1} = F(x_n),\ \ x \longmapsto F(x)$
- Итерационный процесс $x_0 \longmapsto x_1 \longmapsto x_2 \longmapsto \ldots \longmapsto x_*$
- Скорость сходимости последовательных приближений:

$$\exists (A, k):\ (x_{n+1} - x_*) \sim A(x_n - x_*)^k \quad \text{при} \quad n \mapsto \infty\ ;$$

$$1 \leq k \leq \infty \quad \text{скорость сходимости}$$

Краткая история метода последовательных приближений

- $k = 1$ V в. до н.э. Зенон Элейский: Ахиллес и черепаха
- $k = 1$ IV в. до н.э. Евдокс Книдский: метод исчерпывания
- $k = 1$ III в. до н.э. Архимед: метод исчерпывания
- $k = 2$ I в. Герон Александрийский: вычисление квадратных корней
- $k = 2$ XVII в. И. Ньютон, Сэки Такакадзу: метод касательных
- $k = 3$ XVII в. Э. Галлей: кубическая сходимость метода
- $k = 2$ XIX в. О. Л. Коши: скорость метода касательных
- $k \in \mathbb{N}$ XIX в. П. Л. Чебышёв: быстрая сходимость

Итерационная формула Чебышёва

$f(x) = 0$ уравнение

x_* – изолированный корень кратности один:

$$f(x_*) = 0,\ f'(x_*) \neq 0$$

$x_0 = x$ начальное приближение для итераций

$$x_n \longrightarrow x_* \text{ при } n \longrightarrow \infty$$

$X = \{x\}$ область притяжения корня; $\varepsilon = \frac{f(x)}{f'(x)}$ малый параметр

$$x \longmapsto x_* = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2 \frac{f''(x)}{2f'(x)} -$$

$$-\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^3 \left[\frac{(f''(x))^2}{2(f'(x))^2} - \frac{f'''(x)}{6\,f'(x)}\right] -$$

$$-\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^4 \left[\frac{5\left(f''(x)\right)^3}{8\left(f'(x)\right)^3} - \frac{5\,f''(x)\,f'''(x)}{12\left(f'(x)\right)^2} + \frac{f''''(x)}{f'(x)}\right] + \ldots$$

Следствия из формулы Чебышёва

Метод Ньютона (квадратичная сходимость)

$$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Метод Чебышева (кубическая сходимость)

$$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2 \frac{f''(x)}{2f'(x)}$$

Метод Чебышева (сходимость четвертого порядка)

$$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2 \frac{f''(x)}{2f'(x)} - \\ - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^3 \left[\frac{(f''(x))^2}{2(f'(x))^2} - \frac{f'''(x)}{6\, f'(x)}\right]$$

Следствия из формулы Чебышёва

Метод Чебышева (сходимость пятого порядка)

$$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2 \frac{f''(x)}{2f'(x)} -$$
$$-\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^3 \left[\frac{(f''(x))^2}{2(f'(x))^2} - \frac{f'''(x)}{6\,f'(x)}\right] -$$
$$-\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^4 \left[\frac{5\left(f''(x)\right)^3}{8\left(f'(x)\right)^3} - \frac{5\,f''(x)\,f'''(x)}{12\left(f'(x)\right)^2} + \frac{f''''(x)}{f'(x)}\right]$$

Метод Чебышева (сходимость *k*-го порядка, *k* ∈ $\mathbb{N}$)

Эрнст Шрёдер (1841 – 1902)
немецкий математик

- В год рождения Шрёдера Чебышёв получил свою медаль
- E. Schröder Math. Ann. 2 (1870) 317-365 [итерации]

  На стр. 330 **Шрёдер пишет формулу Чебышёва:** $x \longmapsto x_*$,
  где $\varepsilon = f(x)$ $-$ малый параметр
- E. Schröder Math. Ann. 3 (1871) 296-322 [итерации]

  На стр. 303 Шрёдер пишет функциональные уравнения:

$$f\big(h(x)\big) = h(x+c), \quad f\big(h(x)\big) = h(cx).$$

  ФУ Шрёдера пишут и так: $f\big(h(x)\big) = cf(x)$. Здесь $f = ?\; c = ?$
- Теорема Кантора-Шрёдера-Бернштейна

  1887 б/д   1896 док   1897 док
- Э. Шрёдер. Алгебра логики. Три тома (1890 – 1905)
- Диссертация по математической логике Норберта Винера (18 лет) связана с работами Шрёдера

Алстон Скотт Хаусхолдер (1904 – 1993) американский математик

- A. S. Householder. Principles of numerical analysis. 1953

Итерационная формула Хаусхолдера:

$$x \longmapsto x + (k-1)\frac{(1/f)^{(k-2)}(x)}{(1/f)^{(k-1)}(x)}$$

Комментируя работу Шрёдера, повторяет основные идеи Чебышёва, но не приводит формулу Чебышёва

- Следствия из формулы Хаусхолдера:

Метод Ньютона (квадратичная сходимость), *k = 2*

$$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Метод Галлея (кубическая сходимость), *k = 3*

$$x \longmapsto x - \frac{2f(x)f'(x)}{2\left(f'(x)\right)^2 - f(x)f''(x)}$$

Итерационная формула Чебышёва и нормированные производные

$$x \longmapsto x_* = x - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right) - \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)\right] -$$

$$- \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^3 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{f'''(x)}{f'(x)}\right)\right] -$$

$$- \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^4 \left[\frac{5}{8}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^3 - \frac{5}{12}\left(\frac{f^{\prime\prime(x)}}{f'(x)}\right)\left(\frac{f'''(x)}{f'(x)}\right) + \left(\frac{f''''(x)}{f'(x)}\right)\right] + \dots$$

Производная Шварца
и нормированные производные

$$(Sf)(x) \equiv \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Математическое обоснование кубической сходимости метода Галлея тесно связано с производной Шварца

Представление формулы Чебышёва в конечном виде

$$x \longmapsto x_* = \pi,\ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\pi = x + \arcsin \sin x, \quad k = \infty$$

$$\pi = x - \arctan \tan x, \quad k = \infty$$

$$\pi = 3 + \arcsin \sin 3$$

$$\pi = 3 - \arctan \tan 3$$

Благодарю за внимание!