История математики
20 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2025 года

Панорама: организация математической жизни

Великая Французская революция и её влияние на развитие математики. Политехническая школа – École Polytechnique (1794). Нормальная школа – École normale (1794). Появление моды на политехнические и нормальные школы в Европе.

Развитие университетского образования в Европе. Рост числа университетов: пример России – к единственному Московскому университету (1755) добавляются университеты – в Дерпте (1802), Вильно (1803), в Харькове и Казани (1805), в Петербурге (1819).

P.S. По политическим причинам в 1832 г. Виленский университет был закрыт. Вместо него в 1834 г. был учреждён Киевский университет им. Св. Владимира

Перестают видеть конечную цель точных наук в механике и астрономии.

К. Якоби: «Верно, что господин Фурье был того мнения, что конечной целью математики является общественная польза и объяснение явлений природы; но такой философ, как он, должен был бы знать, что единственной целью науки является возвеличить человеческий ум, и при таком подходе вопрос о числах столь же значителен, как и вопрос о системе мира»

Появляется специалист, заинтересованный в науке как таковой. На протяжении столетия формируется массовая специальность – математика. Рост специализации приводит к её разделению на математику чистую и прикладную (возникновение соответствующих кафедр и журналов).

Журналы

Журнал Политехнической школы (1795)

Анналы чистой и прикладной математики

Ж. Жергонна (1810 – 1831)

Журнал чистой и прикладной математики (Journal de mathématiques pure et appliquées) – журнал Лиувилля (1836 –)

Журнал чистой и прикладной математики (Journal für die reine und angewandte Mathematik) – журнал Крелле (1826 –)

Математический сборник (1866 –)

Mathematische Annalen (1868 –)

Математические общества

1864 – Московское математическое общество

1865 – Лондонское математическое общество

1872 – Французское математическое общество

1884 – Математический кружок в Палермо (Circolo Matematico di Palermo)

1888 – Нью-Йоркское математическое общество (впоследствии переименовано в American Mathematical Society)

1890 – Deutsche Mathematiker-Vereinigung

Французские математики

Ж. Лагранж (1736 – 1813)
Г. Монж (1746 – 1818)
П.С. Лаплас (1749 – 1827)
А.М. Лежандр (1752 – 1833)
Ж. Фурье (1768 – 1830)
А.М. Ампер (1775 – 1836)
Л. Пуансо (1777 – 1859)
С. Пуассон (1781 – 1840)
Ш. Дюпен (1784 – 1873)
В. Понселе (1788 – 1867)
О. Коши (1789 – 1857)
М. Шаль (1793 – 1880)
Г. Ламе (1795 – 1871)
Ж.Ш.Ф. Штурм (1803 – 1855)
Ж. Лиувилль (1809 – 1882)
Э. Галуа (1811 – 1832)
П. Лоран (1813 – 1854)

Ш. Эрмит (1822 – 1901)
Э. Лагерр (1834 – 1886)
К. Жордан (1838 – 1922)
Г. Дарбу (1842 – 1917)
А. Пуанкаре (1854 – 1912)
Э. Пикар (1856 – 1941)
П. Пенлеве (1863 – 1933)
Ж. Адамар (1865 – 1963)
Э. Картан (1869 – 1951)
Э. Борель (1871 – 1956)
А. Лебег (1875 – 1941)
Р. Бэр (1879 – 1932)

Немецкие математики

К.Ф. Гаусс (1777 – 1855)
Ф. Мёбиус (1790 – 1868)
Я. Штейнер (1796 – 1863)
Х. фон Штаудт (1798 – 1867)
Ю. Плюккер (1801 – 1868)
К.Г. Якоби (1804 – 1851)
П.Г.Дирихле (1805 – 1859)
И.Б. Листинг (1808 – 1882)
Г. Грассман (1809 – 1877)
Э. Куммер (1810 – 1893)
К. Вейерштрасс (1815 – 1897)
Л. Кронекер (1823 – 1891)
Б. Риман (1826 – 1866)
Э.Б. Кристоффель (1829 – 1900)
Р. Дедекинд (1831 – 1916)
П. Дюбуа-Реймон (1831 – 1889)

Р. Липшиц (1832 – 1903)
А. Клебш (1833 – 1872)
Л. Фукс (1833 – 1902)
М. Паш (1843 – 1930)
Г. Шварц (1843 – 1921)
П. Гордан (1837 – 1912)
Г. Кантор (1845 – 1918)
Г. Фреге (1848 – 1925)
Ф. Клейн (1849 – 1925)
Г. Фробениус (1849 – 1917)
Ф. Линдеман (1852 – 1939)
А. Гурвиц (1859 – 1919)
Д. Гильберт (1862 – 1943)
Э. Штуди (1862 – 1930)
Г. Минковский (1864 – 1909)

Итальянские математики
Рисорджименто (конец XVIII в. – 1870)

Э. Бетти (1823 – 1892)

Ф. Бриоски (1824 – 1897)

Э. Бельтрами (1835 – 1900)

Ф. Казоратти (1835 – 1890)

У. Дини (1845 – 1918)

Л. Бианки (1856 – 1928)

Дж. Пеано (1858 – 1922)

В. Вольтерра (1860 – 1940)

Британские математики

Ч. Бэббедж (1792 – 1871)

Дж. Грин (1793 – 1841)

У.Р. Гамильтон (1805 – 1865)

О. де Морган (1806 – 1871)

Дж. Сильвестр (1814 – 1897)

Дж. Буль (1815 – 1864)

Дж. Стокс (1819 – 1903)

А. Кэли (1821 – 1895)

У. Клиффорд (1845 – 1879)

О. Хевисайд (1850 – 1925)

Российские математики

Н.И. Лобачевский (1793 – 1856)

М.В. Остроградский (1801 – 1862)

П.Л. Чебышев (1821 – 1894)

К.М. Петерсон (1828 – 1881)

А.Н. Коркин (1837 – 1908)

Н.Е. Жуковский (1847 – 1921)

Е.И. Золотарёв (1847 – 1878)

С.В. Ковалевская (1850 – 1891)

А.А. Марков (1856 – 1922)

А.М. Ляпунов (1857 – 1918)

В.А. Стеклов (1864 – 1926)

Г.Ф. Вороной (1868 – 1908)

Математики Австро-Венгрии

Б. Больцано (1781 – 1848) - Чехия

Я. Бояи (1802 – 1860)   - Венгрия

Скандинавские математики

Н.Г. Абель (1802 – 1829)

С. Ли (1842 – 1899)

Г. Миттаг-Леффлер (1846 – 1927)

И. Фредгольм (1866 – 1927)

Реферативная деятельность

1871 – «Книга успехов математики за год» (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik). Первый том – работы за 1868 год (почти 900 работ около 650 авторов). Вышедший в 1902 году 31 том содержал уже рефераты работ за 1900 год (более 2600 работ около 1500 авторов).

1931 – Zentrallblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete

1940 – Mathematical Reviews

1952 – Реферативный журнал. Математика

Реформа математического анализа. О. Коши

«Что я скажу о точных науках: большинство из них уже миновало стадию своего наибольшего подъёма. Арифметика, геометрия, алгебра, трансцендентная математика – это науки, которые можно рассматривать как завершённые. Нам не остаётся ничего большего, как найти им полезные применения»

О. Коши (из доклада на заседании Академического общества г. Шербура 14 ноября 1811 г.)

Реформа математического анализа. О. Коши

Однако, более внимательное знакомство с современной «трансцендентной математикой» (то есть анализом) и необходимость чтения соответствующего курса студентам заставили молодого учёного иначе увидеть положение дел и заняться приведением анализа в благопристойный вид, О. Коши реформировал анализ, пойдя по пути, предложенном Ж. Даламбером, то есть на базе теории пределов. Главные сочинения О. Коши, в которых эта реформа была осуществлена, это –

«Cours d’analyse de l’École royale polytechnique. v.1 : Analyse algébrique». Paris. 1821. (Алгебраический анализ. Пер. с франц. Лейпциг. 1864).

«Resumé des leçons données à l’École royale polytechnique sur l’analyse infinitésimale». Paris. 1823.

Cauchy A.

Огюстен Луи Коши (A.L. Cauchy)

Родился в 1789 г. В 1807 г. окончил Политехническую школу, в 1810 – Школу мостов и дорог. В 1810 – 1813 инженер на строительстве морского порта в г. Шербур. С 1816 – профессор парижской Политехнической школы и Сорбонны, а с 1857 – Коллеж де Франс. В 1816 королевским указом назначен (!) членом Парижской академии наук на место исключённого (!) из неё Монжа. Будучи убеждённым роялистом, в 1830 – 1838 эмигрировал из страны: работал в Турине, в Праге и др. городах. Состоял почётным членом Петербургской академии наук (с 1831 года). Математическая продуктивность Коши. Его общественная деятельность и негативное отношении к нему парижского студенчества. О его русских учениках. В математике он – сын Великой Французской революции – о революционном характере его творчества: реформа анализа, теории функций комплексного переменного и теории дифференциальных уравнений. Умер в 1857 году.

Реформа математического анализа. О. Коши

В 1813 г. О. Коши начал преподавательскую деятельность и с 1816 стал профессором парижской Политехнической школы. В это время он всерьёз обеспокоился аккуратным построением курса математического анализа, основания которого, как он обнаружил, находились в неудовлетворительном состоянии. Он сразу обнаружил, что путь, предложенный Ж. Лагранжем, ошибочен. Вот как он скажет об этом в «Кратком изложении по исчислению бесконечно малых в Политехнической королевской школе» (1823): «Методы, которым я следовал, отличны в некоторых отношениях от тех, какие излагаются в сочинениях этого рода. Главной целью моей было примирить строгость, которую я поставил себе правилом в моём «Курсе анализа» с простотой, вытекающей из непосредственного рассмотрения бесконечно малых величин. По этой причине я счёл необходимым отбросить разложение функций в бесконечные ряды во всех случаях, когда получающиеся ряды не сходятся, и я был принуждён перенести формулу Тейлора в интегральное исчисление, ибо эту формулу можно считать общей, лишь если содержащийся в ней ряд приводится к конечному числу членов и дополняется некоторым определённым интегралом. Я знаю, что знаменитый автор «Аналитической механики» положил

Реформа математического анализа. О. Коши

упомянутую формулу в основание своей теории производных функций. Но, несмотря на всё почтение, внушаемое столь выдающимся авторитетом, большинство геометров в настоящее время признаёт сомнительными результаты, к которым может привести употребление расходящихся рядов, и мы добавим, что в некоторых случаях теорема Тейлора даёт как будто разложение функции в сходящийся ряд, но между тем сумма ряда существенно отличается от предложенной функции … . Впрочем, лица, прочитавшие моё сочинение, убедятся, надеюсь, что принципы дифференциального исчисления и его наиболее важные приложения можно легко изложить без привлечения рядов».

Реформа математического анализа. О. Коши

В качестве пути построения анализа О. Коши избирает теорию пределов.

Вот как он определяет предел в «Алгебраическом анализе» (1821):

«Если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению, так что в конце концов отличаются от него сколь угодно мало, то последнее называют *пределом* всех остальных». В качестве знака предела он избирает знак, использовавшийся в широко распространённом учебнике С. Люилье «Изложение начал высших исчислений» (Берлин, 1786):

$$\lim$$

Бесконечно малую он определил тогда так:

«Если последовательные числовые значения переменной неограниченно убывают, так что становятся меньше любого данного числа, эта переменная становится тем, что называют *бесконечно малой* … Переменная этого рода имеет пределом нуль».

Реформа математического анализа. О. Коши

А бесконечно большую определял так:

«Если последовательные числовые значения переменной всё более и более возрастают, так что становятся больше любого данного числа, говорят, что эта переменная имеет пределом *положительную бесконечность*, обозначаемую символом ∞ , если речь идёт о положительной переменной, и *отрицательную бесконечность*, обозначаемую знаком $-\infty$, если речь идёт об отрицательной переменной».

Непрерывность получила у него следующую привычную нам сегодня трактовку:

«функция $f(x)$ остаётся непрерывной относительно x между данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции».

Далее в своём курсе Коши доказывал основные предложения о непрерывных функциях (о сумме, разности, произведении, частном непрерывных функций), о непрерывности элементарных функций и т.д.

Реформа математического анализа. О. Коши

В его изложении, в котором ещё отсутствовал ε-δ-аппарат, вкрадывались ошибки, которые исправлялись впоследствии другими математиками. Так, например, он полагал, что если функция *f(x.y)* непрерывна по *x* и непрерывна по *y*, то она будет непрерывна и по обеим переменным. Первый контрпример был построен Л.В. Томе (L.W. Thomé) в 1870 году. Другой, более известный, был предложен Г. Шварцем в 1872:

$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ при $(x,y)\neq(0{,}0)$, $f(0{,}0)=0$.

Реформа математического анализа. О. Коши

Понятие производной и интеграла мы находим уже в «Resumé» (1823). Производная функции *f(x)* это предел, если он существует, отношения

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} \text{ при } i \to 0 .$$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью Коши не проясняет. Этот вопрос был чётко сформулирован только в мемуаре Дирихле 1829 г., посвящённом разложению функции в тригонометрический ряд.

Определив производную, Коши установил её связь с дифференциалами Лейбница: если *dx* – некоторая конечная величина, дифференциалом *dy* функции *y=f(x)* будет просто *f '(x)dx.* Таким образом, величины *dx* и *dy* определены одним только свойством, что их отношение равно производной *f'(x).*

Реформа математического анализа. О. Коши

Чтобы выяснить связь между отношением ${}^{\Delta y}/_{\Delta x}$ приращений и производной $f'(x)$, он доказал формулу конечных приращений

$$\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x \text{ , где } 0 < \theta < 1 \text{ .}$$

В его доказательстве использована непрерывность производной $f'(x)$ в интервале Δx .

Ошибка Коши: если ряд непрерывных функций сходится, то сумма ряда – функция непрерывная. Абель в 1826 году построил контрпример. Нужна равномерная сходимость.

Gauss

Реформа математического анализа. К.- Ф. Гаусс

В поисках путей построения анализа на базе теории пределов О. Коши был не одинок. В том же направлении вели исследования и другие математики. В их числе Гаусс, Больцано и Абель.

Гаусс пришёл к этим идеям задолго до Коши, но в отличие от последнего не предложил их систематического изложения. О них знал достаточно узкий круг математиков, с которыми он поддерживал личные контакты, в частности, вёл переписку. С отдельными его мыслями можно ознакомиться по его специальным работам, в частности, по его диссертации 1799 г. об основной теореме алгебры, по работам о тригонометрических рядах, опубликованным около 1800 г., наконец, по его известной статье 1813 г. о гипергеометрическом ряде, в которой впервые в математической литературе проводится строгое исследование сходимости ряда (при этом для действительных и комплексных значениях переменной !).

B. Bolzano

Реформа математического анализа. Б. Больцано

К тем же идеям до О. Коши пришёл и чешский учёный Б. Больцано (1781 – 1848). Если идеи Коши и Гаусса развивались в контексте их математических исследований, а для Коши особенное значение приобретала его активная преподавательская деятельность, то Больцано был прежде всего философом и богословом.

Тонкий мыслитель, он значительно глубже, чем кто-либо из его современников, проник в тайны бесконечного, действительного числа, в основания математического анализа.

Его сочинения, увидевшие свет вдали от основных математических центров того времени, прошли незамеченными его современниками и были открыты математическому сообществу К. Вейерштрассом и его учениками, а также Г. Ганкелем, который обратил внимание (1871) на книги Больцано «Парадоксы бесконечного» (1851) и «Теорема о биноме» (1816).

K.Th. Weierstrass

1815 – родился в Остенфельде (Вестфалия) в семье чиновника
1834 – 38 – изучал право в Боннском ун-те, математику в Мюнстерской Академии
1842 – начинает работать учителем гимназии
1854 – за результаты по теории абелевых функций Кёнигсбергский ун-т присуждает ему степень доктора honoris causa
1856 – профессор Берлинского ун-та
член Прусской Академии наук
1870 – знакомство с С.В. Ковалевской
1885 – празднование 70-летие Вейерштрасса
1891 – смерть С.В. Ковалевской
1897 – умер в Берлине

Член Парижской Академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской Академии наук и др. академий и обществ

Реформа математического анализа. К. Вейерштрасс

Вейерштрасс (1815 – 1897)

Курс Вейерштрасса: каждый курс читался два года, начиная с летнего семестра 1857 года; он состоял из четырёх семестровых курсов

1) теория аналитических функций,
2) теория эллиптических функций,
3) применения эллиптических функций к геометрии и механике,
4) теория абелевых функций.

Он повторил этот цикл 15 раз – вплоть до летнего семестра 1887 года.

ε-δ – техника

С её помощью он аккуратно сформулировал все основные понятия анализа Коши, уточнил и поправил многие из его результатов. О введённом им понятии равномерной сходимости (статья 1841 года, опубликована в 1894 в первом томе его собрания сочинений).

Вейерштрасс и другие

Первый из известных курсов анализа, в котором изложение велось «по Вейерштрассу» (с ε-δ) – второе издание «Cours d'analyse» К. Жордана, первый том которого появился в 1893 году.

Вейерштрасс и арифметизация анализа:

1863 – теория действительного числа в форме «теории агрегатов» появилась в лекциях Вейерштрасса зимнего семестра 1863/64 года

1869 – теория Мерэ

1872 – «теория сечений» Дедекинда

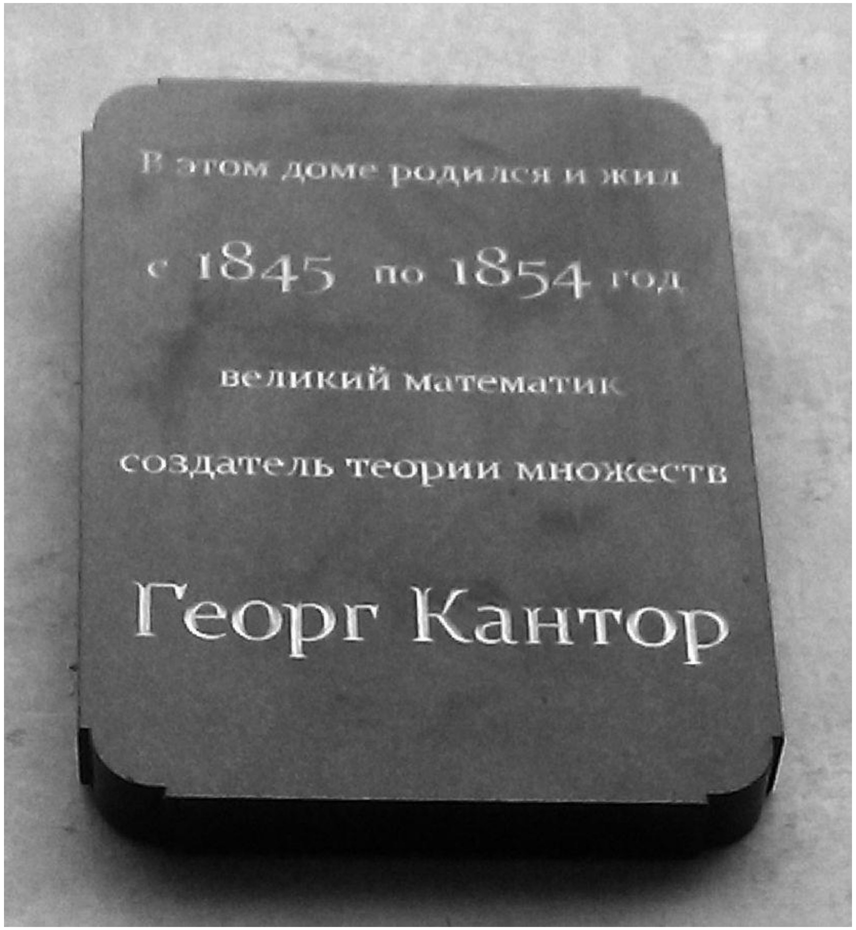
– «фундаментальные последовательности» Г. Кантора

– теория Э. Гейне

Георг Кантор

Георг Кантор (Georg Cantor) родился в 1845 году в Петербурге в семье, принадлежавшей тамошней немецкой колонии. Семья отца – лютеране, выходцы из Амстердама. Семья матери – католики, выходцы из Австро-Венгрии. Учился в петербургской Петершуле. Но впоследствии семья была вынуждена покинуть Петербург: тяжёлая болезнь отца – чахотка – вынудила семью переехать в места с более подходящим климатом. В 1867 году закончил Берлинский университет, где слушал лекции К. Вейерштрасса. С 1869 преподавал в университете в Галле (в 1879 – 1913 годах профессор). Скончался в 1918 году.

G. Cantor


В этом доме родился и жил
с 1845 по 1854 год
великий математик
создатель теории множеств
Георг Кантор

Теория множеств

К теории множеств Кантор пришёл, занимаясь проблемами теории тригонометрических рядов. Рассматривая множество точек *E* на числовой прямой таких, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ сходится к 0 для всех *x* за исключением точек *E* , то $a_n = b_n$ = 0 для всех n, он занялся (1872) классификацией такого рода «исключительных» множеств. По ходу этих занятий он пришёл к вопросу о равномощности множеств и установил (1873) счётность множества рациональных и алгебраических чисел. Довольно скоро он показал, что множество действительных чисел не является счётным. Начиная с 1874 года, Кантор сосредоточил своё внимание на соотношении мощностей пространств разной размерности: он пытался доказать, что мощность пространства R^n при $n > 1$ больше мощности пространства *R*. Полученный результат – равномощность всех пространств R^n – его ошеломил.

«Я это вижу, но в это не верю», – писал он Дедекинду. В 1878 – 1884 он публикует в Mathematische Annalen цикл работ, в которых развивает проблемы равномощности, теорию вполне упорядочен. множеств, изучает топологические свойства R^n.В 1878 он высказал континуум гипотезу. В 1883 выходят его «Основы общего учения о многообразиях» – теория трансфинитных чисел.

Теория множеств

Отношение к теории множеств в математическом сообществе было неоднозначным: в Германии из ведущих математиков только К. Вейерштрасс относился к ней благосклонно. Сильнейшее переутомление, отчасти связанное с неудачными попытками доказать континуум-гипотезу, а также неприятие его идей большинством математического сообщества стали причиной нервного расстройства, приведшего к ухудшению его работоспособности. Лишь к 1887 году у него возрождается былой интерес к теории множеств и появляется серия исследований 1895 – 1897 годов, посвящённых теории совершенно упорядоченных множеств и исчислению порядковых чисел. В частности, в 1890 он доказал неравенство $\mathfrak{M} < 2^{\mathfrak{M}}$.

Теория множеств

1897 – год официального признания теории множеств на Первом международном конгрессе математиков в Цюрихе

– парадокс Бурали-Форти: нельзя утверждать существование множества, образованного из всех порядковых чисел; это в 1896 заметил уже Кантор (письмо к Д. Гильберту)

1899 – Кантор в письме к Дедекинду обратил внимание на то, что нельзя говорить о множестве всех множеств

1905 – парадокс Рассела, возникающий из рассмотрения множества всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента

Кризис в основаниях математики. Программы выхода из кризиса:

Формализм	Логицизм	Интуиционизм
Д. Гильберт	Б. Рассел	Л. Брауэр
(1862 – 1943)	(1872 – 1970)	(1881 – 1966)