Математика первых веков Новой эры

Творчество Евклида, Архимеда и Аполлония было вершиной античной математики. После Аполлония начался **спад**. Все исследования, которые проводились в последующие два столетия, не выходили из описанного круга проблем. Среди них не встречается **ни новых идей, ни новых теорий**. Несомненно, это было связано и с той обстановкой, которая сложилась в мире.

Уже с середины III в. до н.э. начались тяжелые разрушительные войны. Создавалась будущая Римская империя.

Экономическая и культурная жизнь в эллинистических странах замерла. Измученные страданиями и горем люди потянулись к мистике Востока, к религии, которая обещала другую, лучшую жизнь. Абстрактное мышление, логические рассуждения отодвинулись на второй план.

В диалоге Цицерона “О государстве” один из участников предлагает обсудить вопрос о том, **почему на небе были видны два Солнца**. Но эта тема отвергается, так как “если мы по этому вопросу и приобретаем величайшие познания, все же **благодаря этим знаниям не сможем стать ни лучше, ни счастливее**”.

II–I вв. до н.э. стали временем стремительного возвышения Рима. **В 30-м г. до н.э**. пало последнее из эллинистических государств – Египет, и была основана Римская империя.

В результате этого **положение** бывших государств коренным образом **меняется**. С одной стороны, прекращаются разорительные войны и прямой разбой, что приводит к более устойчивому экономическому положению, с другой – эллинистические государства теряют самостоятельность и, по образному выражению Плутарха, всегда сознают, что над их головой занесен “римский сапог”.

И все же **греческая наука оживает**. В первые века нашей эры **Александрия остается** научным и культурным **центр**ом древнего мира.

Рим никогда не мог сравниться с ней в этом отношении. Он так и не приобщился к глубинам эллинской мысли. Практическому складу римского ума стремление к теоретическому познанию, столь характерное для греческой научной мысли, было чуждо. Из среды римлян не вышло ни одного сколько-нибудь значительного математика или физика, хотя Рим дал миру великолепных поэтов, замечательных историков, блестящих ораторов.

Наиболее глубоким умом, которого породила римская культура, был Цицерон. В «*Тускуланских беседах*» он писал:

“Римляне в отличие от греков не ценили геометрии; они ограничивали ее, как и арифметику, узкопрактическими знаниями. Математика вообще не была у них в почете. Даже денежными расчетами и межеванием земель, как и астрономическими наблюдениями, должны были заниматься не римляне, а греки, сирийцы и другие покоренные народы.”

«… *Он посвятил, наконец, большую часть своей жизни своей серенькой философии, которой он предавался в виде отдыха от государственных забот. Это была эклектическая философия, никому не обидная, принаровленная к потребностям Рима: немножко теории познания — для того, чтобы подчеркнуть скептическое отношение к метафизике; предпочтение морали всем физическим проблемам; центр тяжести — в скромном изяществе изложения;* ***Цицерон собрал жалкие остатки меда с благоуханных цветов великого греческого мышления; с цветов, беспощадно раздавленных грубым колесом римской телеги***…» Александр **БЛОК**. *Катилина*.

Тоньше другие ковать будут жизнью дышащую бронзу,
Верю тому, – создадут из мрамора лики живые,
Красноречивее будут в судах, движение неба
Тростью начертят своей и вычислят звезд восхожденья,
Ты же, римлянин, знай,
***как надо народами править**.*

Вергилий (I в. до н.э.)

Конец I и II вв. н.э. обычно называют **греческим Возрождением**, имея в виду, что это было время жизни и творчества таких великих писателей, как Плутарх и Лукиан. Такой же **расцвет** происходил и **в естественных науках**:

– в **I в.** в Александрии работал прекрасный математик и талантливый инженер-изобретатель **ГЕРОН**, первым открывший движущую силу пара,

– в **конце I в.** – математик и астроном **МЕНЕЛАЙ**, создатель системы геометрии и тригонометрии на сфере (первой неевклидовой геометрии),

– во **II в.** знаменитый астроном и математик **Клавдий ПТОЛЕМЕЙ**, создал геоцентрическую модель Солнечной системы, просуществовавшую до XV–XVI вв.

В творчестве этих ученых наметился поворот к вычислительной математике, к **расширению понятия числа**, к **отказу от геометрической алгебры**. За основу снова берется число, что приводит к **арифметизации математики**, в III в. н.э. происходит **выделение и самостоятельное построение алгебры**.

Герон Александрийский – инженер, изобретатель, математик и астроном. Преподавал в Мусейоне.

Изобрел ряд пневматических устройств и автоматов (автоматические двери, театр марионеток, автомат для продаж и др.), паровую турбину, некоторые измерительные инструменты (водяные часы, древний одометр для измерения протяженности дорог и др.)

Занимался геометрией, механикой, гидростатикой, оптикой. Писал комментарии к «Началам» Евклида. Составил «***Метрику***» – сборник различных (точных и приближенных) формул для измерения фигур и других вычислений. Доказательства есть не всегда, но всегда являются строгими. Есть цикл задач, эквивалентных неопределенным уравнениям. Появляются первые обозначения для неизвестной величины.

В «Диоптре» описал солнечное затмение 62 г. ⇒ жил в I в. н.э.? Также здесь изложены правила земельной съемки в прямоугольных координатах.

Об изобретениях Герона: https://www.youtube.com/watch?v=Em6mCdU0ykg

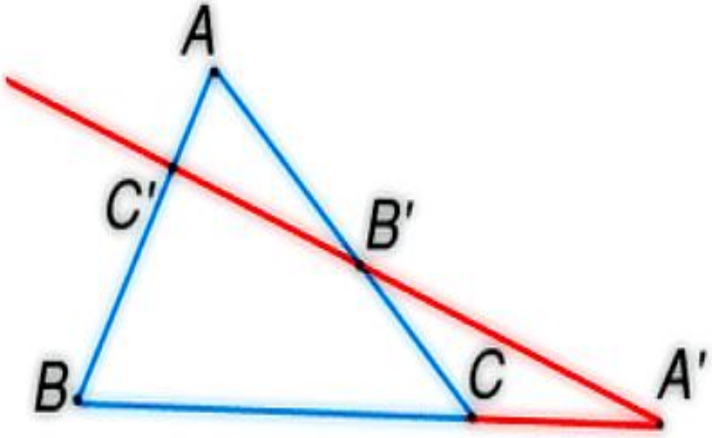
Менелай Александрийский – математик и астроном I в. н. э. (в 98 г. произвел два астрономических наблюдения в Риме, о которых пишет в своем «Альмагесте» Клавдий Птолемей).

Главное сочинение Менелая – «***Сферика***» в трёх книгах. Дошло в арабском **перевод**е **Сабита ибн Корры** (X в.). Стиль изложения – аксиоматический. В частности, доказывается, что *сумма углов сферического треугольника больше двух прямых*.

До нас не дошли: «О вычислении хорд» в 6 книгах, «Начала геометрии» в 3 книгах, «Книга о треугольнике», «Книга о заходах знаков зодиака», «Книга о подразделении составных тел».

Теорема Менелая: Если точки *A’, B’, C’* лежат на сторонах *BC, CA, AB* треугольника *ABC* соответственно или на их продолжениях, то они коллинеарны тогда и только тогда, когда

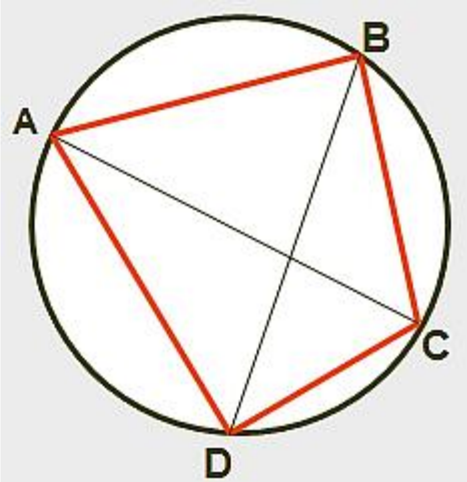
$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = -1.$$



Клавдий Птолемей – астроном, астролог, математик, механик, оптик, теоретик музыки и географ II в. н.э.

Его «Математическое построение» («***Альмагест***» в арабском переводе) содержит **теорию видимого движения** всех известных тогда **небесных планет**, основанную **на эпициклах и деферентах**. Система – **геоцентрическая**. Дан **список более тысячи звезд** с указанием эклиптических координат и яркости. Используются практически все предшествующие наблюдения и шестидесятеричная вавилонская система счисления, хотя запись ведется в буквенной ионической нумерации. Появляется **символ для пропущенного разряда**. Помещена **таблица хорд** (синусов) с шагов в полградуса, а также правило вычисления синуса суммы двух углов; все опирается на ***теорему Птолемея***:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$



Автобиографический фильм о Клавдии Птолемее см.:

https://www.youtube.com/watch?v=GTz4TYLVIt0

<u>ДИОФАНТ</u> Александрийский (сер. III в. н.э.)
– алгебра, диофантов анализ и теория чисел.

О самом Диофанте практически ничего не известно. В Палатинской антологии сохранилась эпитафия (см. след. слайд), из которой можно подсчитать, что Диофант прожил 84 года.

Из его произведений до наших дней дошло два (оба не полностью). Это – “**Арифметика**” (**шесть книг** из тринадцати) и отрывки из трактата “О многоугольных числах”. В "Арифметике" упоминаются "Поризмы".

В 1972 г. были найдены еще 4 книги в арабском переводе, приписываемые Диофанту. Исследования показали, что они не содержат новый материал. Поскольку известно, что Гипатия Александрийская (IV н.э.) изучала и комментировала Диофанта, то предполагается, что именно она и является автором рукописи, которую позже перевели на арабский язык.

Прах Диофанта гробница покоит: дивись ей – и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком,
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец,
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил –
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Эпитафия из Палатинской антологии,

составленной Метродором Византийским (IV в.н.э.)

КНИГА I

Достопочтеннейший Дионисий, зная что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука.

Может быть, этот предмет покажется тебе затруднительным, поскольку ты еще с ним незнаком, а начинающие не склонны надеяться на успех. Но он станет тебе удобопонятным благодаря твоему усердию и моим пояснениям, ибо страстная любовь к науке помогает быстро воспринять учение.

«**Арифметика**» Диофанта – сборник задач (всего 189).

Алгебраическое введение:

1) строится **поле** рациональных чисел;

2) вводится буквенная **символика**;

3) формулируются **правила** действий с многочленами и уравнениями.

1. Числовая область

Словом «число» $(\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma)$ называет положительное ***рациональное*** решение своих задач.

Аксиоматически вводит **отрицательные** числа:

«Недостаток, умноженный на недостаток, дает наличие; недостаток же, умноженный на наличие, дает недостаток; знак же недостатка – укороченная и опрокинутая буква ψ».

В качестве **решения** всегда выбирается **положительное рациональное** число. Для этого часто проводится специальный **анализ условий** задачи.

2. Буквенная символика Диофанта

Обозначения для неизвестной

x^1 ς $\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$

x^2 Δ^{υ} $\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$

x^3 K^{υ} $K\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$

x^4 $\Delta^{\upsilon}\Delta$ x^5 $\Delta^{\upsilon}\mathrm{K}$ x^6 $\mathrm{K}^{\upsilon}\mathrm{K}$

x^0 M^{o} x^{-2} $\Delta^{\upsilon}\chi$

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

$$\mathrm{K}^{\upsilon}\bar{\alpha} \ \ \varsigma\bar{\eta} \ \ ⋔ \ \ \Delta^{\upsilon}\bar{\varepsilon} \ \ \mathrm{M}^{o}\bar{\alpha} \ \ \iota\sigma \ \ \varsigma\bar{\alpha}$$

Фактически до Диофанта никаких уравнений не было. Рассматривались задачи, которые мы теперь можем свести к уравнениям.

Неизвестное – число, обозначаемое концевой сигмой ς.

Вводит обозначения для первых шести положительных и шести отрицательных + нулевой степеней неизвестной величины ⇒ порывает с геометрической алгеброй.

Составляет таблицу умножения степеней, специально перед формулировкой правил действий с отрицательными степенями выделяя два правила о существовании единичного элемента (теоретико-групповые свойства операции умножения).

Есть знак равенства, знак вычитания, знак неопределенного квадрата □ ⇒ появилась возможность записывать УРАВНЕНИЕ или систему.

3. Два основных правила оперирования с уравнениями

Диофант формулирует их (*перенос и приведение подобных членов*) уже во Введении, т.е. занимается не арифметикой, но **алгеброй** – наукой о решении уравнений! При этом создает **общие методы решения**, уделяя основное внимание неопределенным уравнениям. Поскольку введение новых обозначений было обусловлено задачами, сводящимся к неопределенным уравнениям, то именно с ними мы и связываем рождение буквенной алгебры!

Известный историк математики Г. Ганкель писал: “...*современному математику после изучения 100 решений Диофанта трудно решить 101-ю задачу... **Диофант** скорее **ослепляет**, чем приводит в восторг*”.

Однако при более внимательном чтении становится ясно, что тщательный подбор и продуманное расположение задач направлены на то, чтобы проиллюстрировать применение вполне определенных общих методов.

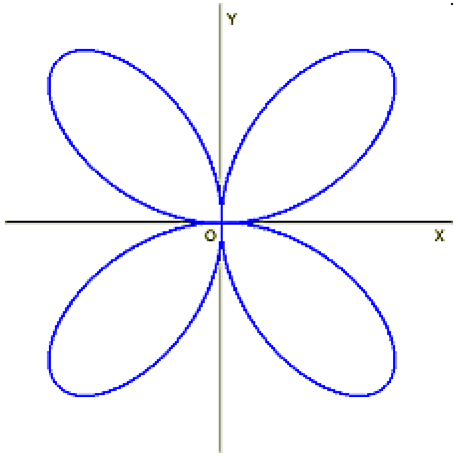
Во-первых, Диофант владел общим методом нахождения рациональных решений неопределенных уравнений 2 степени с двумя неизвестными, если дано одно рациональное решение. Можно говорить о том, что Диофант фактически доказал важную **теорему**:

«Если алгебраическое уравнение второй степени с двумя неизвестными $\boldsymbol{F_2(x,y)=0}$ *имеет хотя бы одно рациональное решение, то это уравнение имеет бесконечно много таких решений, причем неизвестные можно задать рациональными функциями от одного параметра».*

Для уравнений более высокой степени теорема неверна.

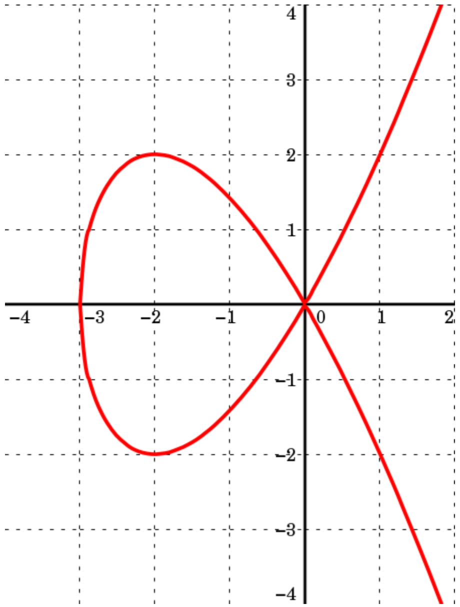
Анализ Диофанта позже послужил образцом для исследования рациональных точек на кривых рода 0. Эта более тонкая классификация по родам, учитывающая число особых точек кривой (см. три следующих слайда), была введена в XIX в. Н.Х. Абелем и Б. Риманом.

Наиболее простыми особыми точками являются двойные точки, в которых хотя бы одна из частных вторых производных отлична от нуля. Простейшей двойной точкой называется точка, в которой кривая имеет две несовпадающие касательные. Например, для кубики Чирнгаузена (справа) таковой является (0;0).



Возможны и более сложные кривые (слева).

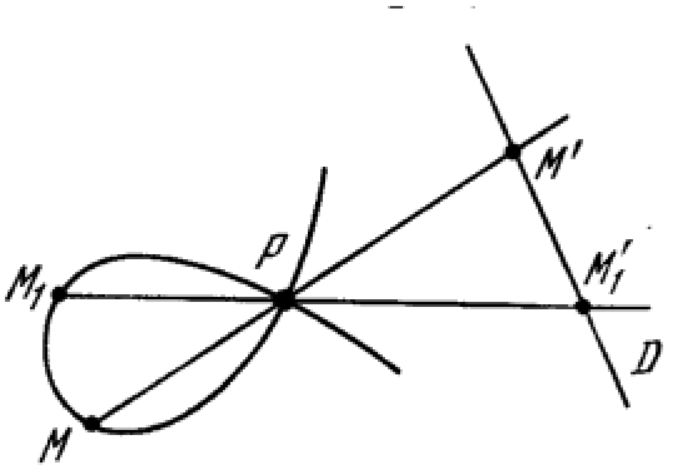
При определении рода кривой будем считать, что кривая может иметь только простейшие двойные точки.



Родом плоской алгебраической кривой порядка n называется число $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, где d – число простейших двойных точек кривой. Для кривых порядка 1 или 2 род равен нулю. Такие кривые униформизируются в рациональных функциях.

В конце XIX века сразу несколько математиков (Д. Гильберт, А. Гурвиц и А. Пуанкаре) доказали, что всякая кривая рода 0 и порядка $n > 2$ бирационально эквивалентна кривой порядка n–2. Следовательно, **рациональная кривая рода 0 всегда эквивалентна прямой или коническому сечению**.

Если кубическая кривая имеет род 0, это означает, что у нее есть единственная простейшая двойная точка. Эта точка будет рациональной и, значит, прямая, проходящая через двойную точку *P*, обязательно пересечет кривую еще в только одной рациональной точке *M*.



В этом случае наша кривая бирационально эквивалентна рациональной прямой и ее можно униформизовать в рациональных функциях.

Пример: $y^2 = x^3 - 2x^2$ и двойная точка *P* = (0;0)

Проведем через нее рациональную прямую

$$y = kx \quad \Rightarrow \quad k^2x^2 = x^3 - 2x^2$$
$$\Rightarrow \quad x = k^2 + 2\,,$$
$$y = k(k^2 + 2)$$

Рассмотрим теперь **кривые рода 1**. Можно доказать, что они не могут быть униформизированы в рациональных функциях, но их можно представить в виде эллиптических функций одного аргумента, поэтому эти кривые еще называются **эллиптическими**.

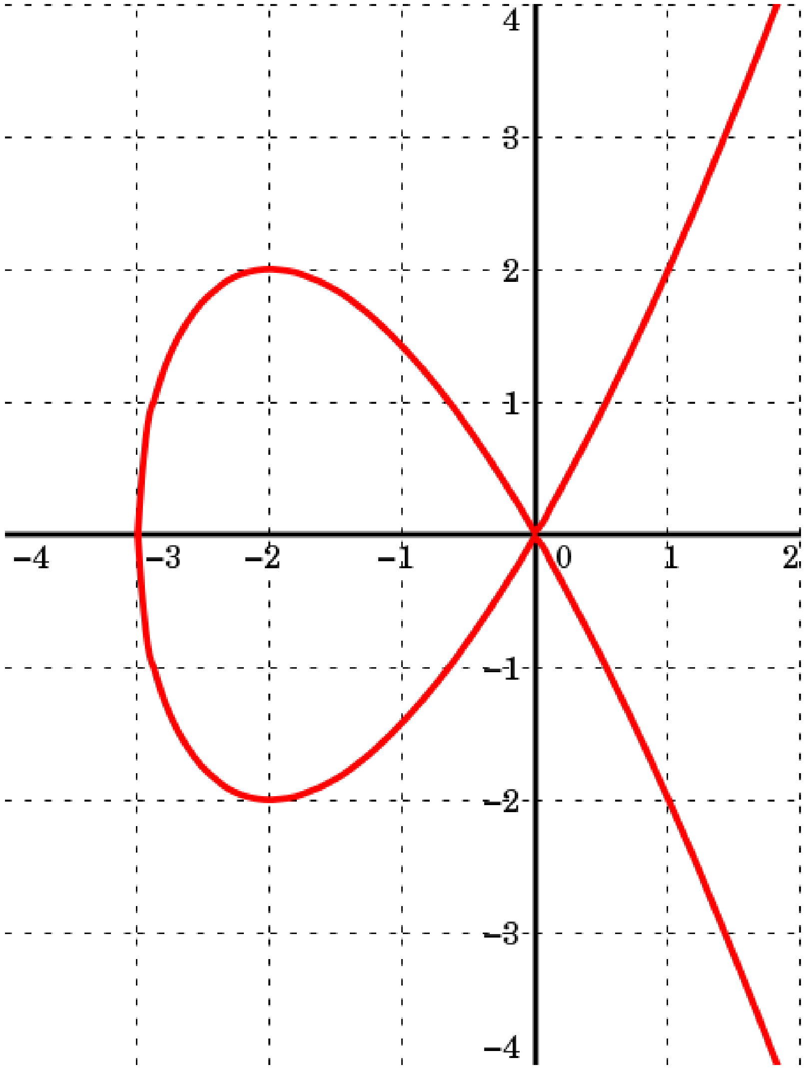
Если уравнение $F_3(x, y) = 0$ определяет кривую рода 1, на которой лежит рациональная точка $P(x_0, y_0)$, то эту кривую можно привести к **вейерштрассовой нормальной форме**:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

И в этом случае *x* и *y* можно параметризовать с помощью эллиптических функций Вейерштрасса: $x = \wp_1(t),\ y = \wp_2(t)$.

ИТАК, несмотря на то, что *в общем случае точки кривой 3го порядка не могут быть выражены как рациональные функции одного параметра*, в случае, *когда известны одна или две рациональные точки кубической кривой, можно найти еще одну ее рациональную точку*. Это позволяют сделать **метод касательной** и **метод секущей**. И мы находим их у Диофанта!

Например, в книге IV рассматриваются **уравнения третьего порядка**. Анализ этой и последующих книг выявил (И.Г. Башмакова) наличие у Диофанта <u>метода *касательной*</u> и <u>метода *секущей*</u>:



1) если **касательная** с рациональным угловым коэффициентом, проведенная в рациональной точке алгебраической кривой, пересечет кривую, то эта точка рациональная;

2) если **прямая, проведенная через две** рациональные точки кривой, имеет точку пересечения с заданной кривой, то эта точка – рациональная.

Эти методы были переоткрыты позже: первый в XVII в. П. Ферма, второй в XIX в. О.-Л. Коши.

Поэтому, во-вторых, можно утверждать, что для решения некоторых типов уравнений и систем высоких степеней Диофант разработал **тонкие и сложные методы**, которые привлекали внимание многих европейских математиков Нового времени. Впервые выделены они были итальянскими и французскими математиками в 16-17 вв.

Другие типы уравнений из задач Диофанта:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y^3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y^4 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y^2 \\ a_1x^2 + b_1x + c_1 = z^2 \end{cases}$$

Труды Диофанта имели столь же фундаментальное значение для развития алгебры и теории чисел, как и труды Архимеда для развития исчисления бесконечно малых. С именем Диофанта связано появление и развитие алгебраической геометрии, которой занимались Эйлер, Якоби, Сильвестр и др.

Наиболее глубокое применение методы Диофанта нашли в работах Анри Пуанкаре, в которых на его основе строится арифметика алгебраических кривых – область, интенсивно развивающаяся в наши дни.

Диофант «Арифметика».

Задача 8 книги II

Заданный квадрат разложить на два квадрата.

Пусть надо разложить 16 на два квадрата. Положим, что первый равен x^2, тогда второй будет $16 – x^2$; следовательно, $16 – x^2$ тоже равно квадрату.

Составляю квадрат из некоторого количества x минус столько единиц, сколько их найдется в стороне 16-ти; пусть это будет $2x – 4$. Тогда сам этот квадрат равен $4x^2 + 16 – 16x$; он должен равняться $16 – x^2$.

Прибавим к обеим частям равенства недостающее и вычтем подобные из подобных. Тогда $5x^2 = 16x$ и x окажется равным 16/5.

Один квадрат 256/25, а другой 144/25; сложенные вместе они дают 400/25, или 16, и каждый будет квадратом.

На современном математическом языке требуется решить уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (*)$$

Фактически Диофант делает подстановку

$$\begin{cases} x = t \\ y = kt - a \end{cases}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Q}.$$

Тогда (*): $t^2 + (kt - a)^2 = a^2$, откуда находим

$$x = t = a\frac{2k}{k^2+1},$$

$$y = a\frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Геометрически подстановку Диофанта можно рассматривать как пучок прямых с угловым коэффициентом *k*, проходящих через точку (*0; –a*) данной окружности (*).

В задаче 19 книги III Диофант отмечает, что существует бесконечно много решений.

Ферма (XVII): для кубов и более высоких степеней это утверждение неверно.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum ſit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales eſſe quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipſius 16. eſto à 2 N. − 4. ipſe igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à ſimilibus auferantur ſimilia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriuſque ſumma eſt $\frac{400}{25}$ ſeu 16. & vterque quadratus eſt.

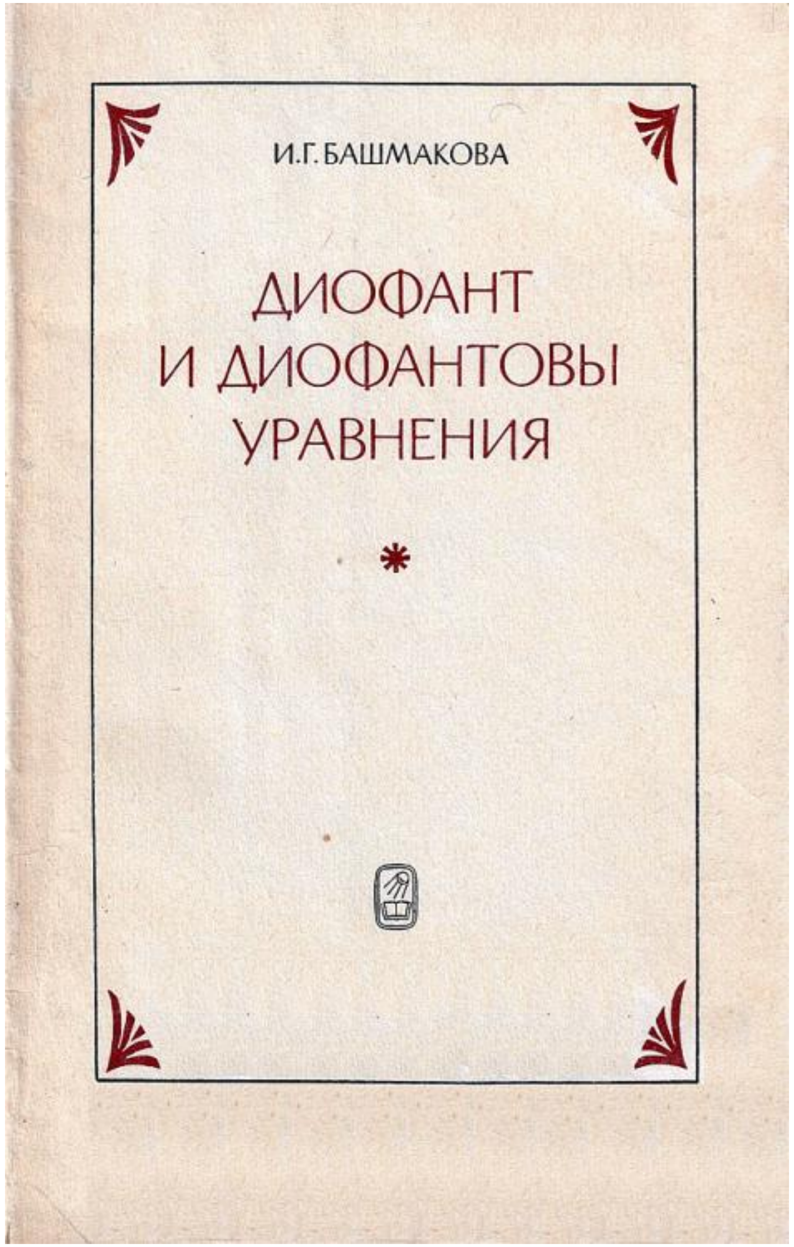
ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιϛ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛϛ. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μο ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ιϛ μο πλευρά. ἔστω ϛϛ β λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μο ιϛ λείψει ϛϛ ιϛ. ταῦτα ἴσα μονάσι ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ. πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ εἰκοσοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοσοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοσόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

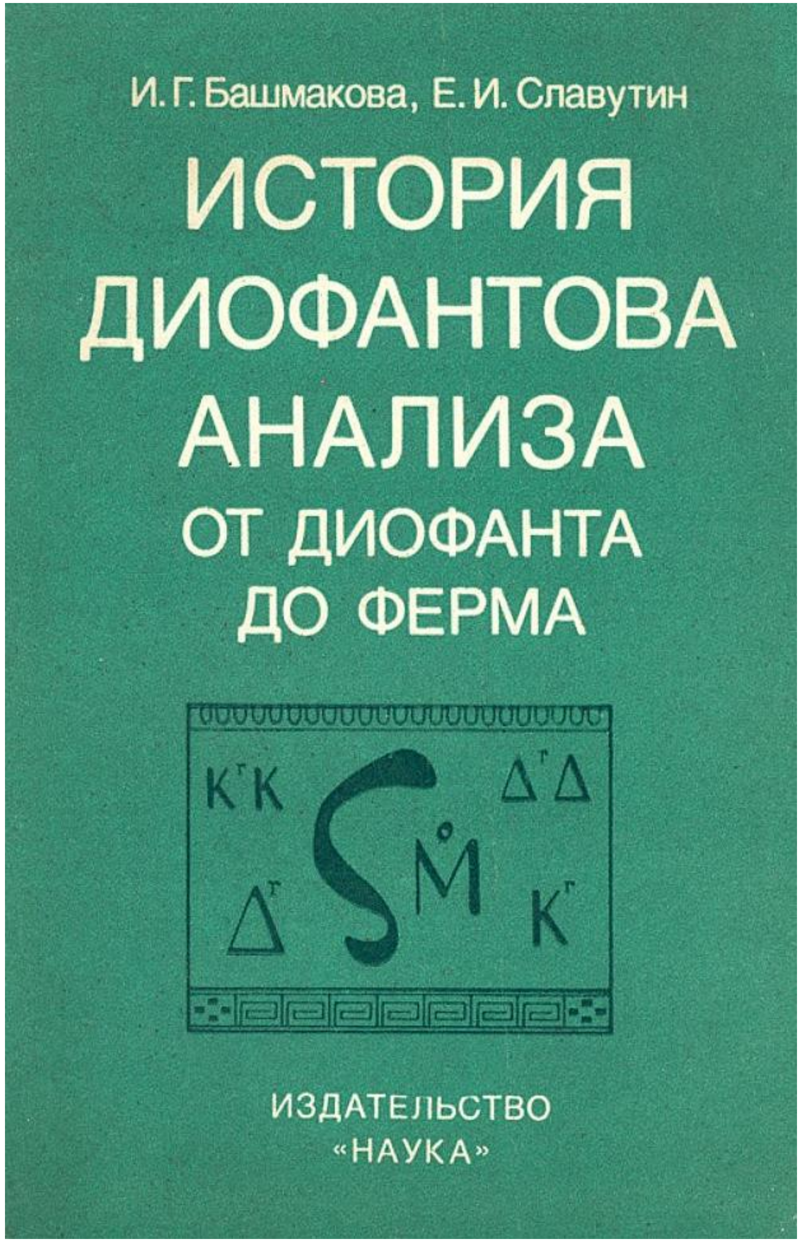
OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum poteſtatem in duos eiuſdem nominis fas eſt diuidere cuius rei demonſtrationem mirabilem ſane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Издание 1670 г. (после смерти Ферма).

Изабелла Григорьевна БАШМАКОВА (1921–2005)





Закат античной математики

Христианство выступало против языческой науки и культуры: «*Нам после Христа не нужна никакая любознательность, после Евангелия не нужно никакого исследования*» (Тертуллиан).

Папп Александрийский (начало IV в. н.э.)
Математическая коллекция

Теон Александрийский (конец IV в. н.э.)

В 391 г. была сожжена значительная часть знаменитой Александрийской библиотеки.

Гипатия Александрийская (ум. 415) занималась коническими сечениями и задачами диофантова анализа.

Прокл Афинский (410–485)

Евтокий (VI в. н.э.)

Симпликий (VI в. н.э.)

Гипатия Александрийская – первая женщина-математик, механик, философ и астроном.

Гипатия принимала участие в александрийской городской политике. Она была хорошо известна как среди язычников, так и среди христиан, не участвовала ни в каких стадиях конфликта. У неё была безупречная репутация мудрого советника. Но потом неожиданно против Гипатии поднялась волна обвинений в чародействе. Во время Великого поста **в марте 415 г**. «люди с горячими головами» подстерегли женщину при возвращении домой и растерзали ее.

«Агора» 2009

https://www.youtube.com/watch?v=nVJEf8kIbQ8

Рафаэль, фрагмент "Афинской школы"

Наиболее известны работы Гипатии:

– комментарий к «Арифметике» Диофанта;

– редакция третьей книги комментариев Теона к «Альмагесту» Птолемея;

– редакция комментариев Теона к «Началам» Евклида;

– комментарии к «Коникам» Аполлония Пергского;

– «Астрономический канон».

Обнаруженная в 1972 г. арабская рукопись «Арифметики» Диофанта по мнению исследователей является переводом сочинения Диофанта с комментариями, сделанными Гипатией.