Как ответила античная наука на трудности, связанные с понятием бесконечности?

1. **Протагор** (V в. до н.э.): Математические абстракции неправомерны, от них нужно отказаться! $\Rightarrow$ Отказ от науки…

2. **Демокрит** (460–380 до н.э.): Нужно составлять тела из конечного числа элементарных частей, размеры которых известны! Однако такой путь «конечной математики» не всегда работает. Например, пирамида не может быть получена из конечного числа призм. Так же, как и конус, цилиндр. Более того, этот путь непригоден для изучения непрерывных величин.

3. **Анаксагор** (V в. до н.э.): не отрицая бесконечной делимости, тем не менее мыслить бесконечный процесс законченным нельзя: «В малом нет наименьшего, но всегда есть еще меньшее» – стало общепринятой точкой зрения.

Метод неделимых Демокрита.

Нужно составлять тела **из атомов, размеры** которых **известны**, и таким образом искать площади и объемы. Неделимые – величины той же размерности, что и искомая величина.

Впоследствии в этом направлении работали многие математики XVII века: Г. Галилей, Б. Паскаль, Б. Кавальери, Э. Торричели.

Но высокий канон строгости древнегреческих математиков не допускал подобного нестрогого метода. Уже были получены парадоксы (гипотенуза равна катету и т.п.).

Архимед использовал этот метод как эвристический (например, площадь круга, объем шара и т.п.), **затем строго доказывая** полученный результат.

X_1 Метод исчерпывания Евдокса

Предложение 1

Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины.

1. По аксиоме Евдокса-Архимеда $\forall a > b \ \ \exists N : Nb > a$.

2. Рассмотрим остатки от вычитания:

$\alpha_1 = a - a_1 < a/2$

$\alpha_2 = \alpha_1 - a_2 < \alpha_1/2 < a/4$

$\alpha_3 = \alpha_2 - a_3 < \alpha_2/2 < a/8$

...

$\alpha_N < a/(2^N)$.

Следовательно, $a > 2^N \cdot \alpha_N$ и т.к. $2^N > N$, то $a > N \cdot \alpha_N$

3. Имеем $Nb > a > N\alpha_N$, откуда $b > \alpha_N$ ч. и т.д.

Схема метода Евдокса:

Для определения неизвестной площади (объема) ***A:***

1) вписывается монотонно возрастающая последовательность фигур (тел) A_i , у которых площади (объемы) известны и удовлетворяют условиям леммы: $\boldsymbol{A} - A_N < \boldsymbol{A}/(2^N)$;

2) с помощью известных формул вычисляется арифметический предел заданной последовательности. Пусть он равен ***B,*** тогда

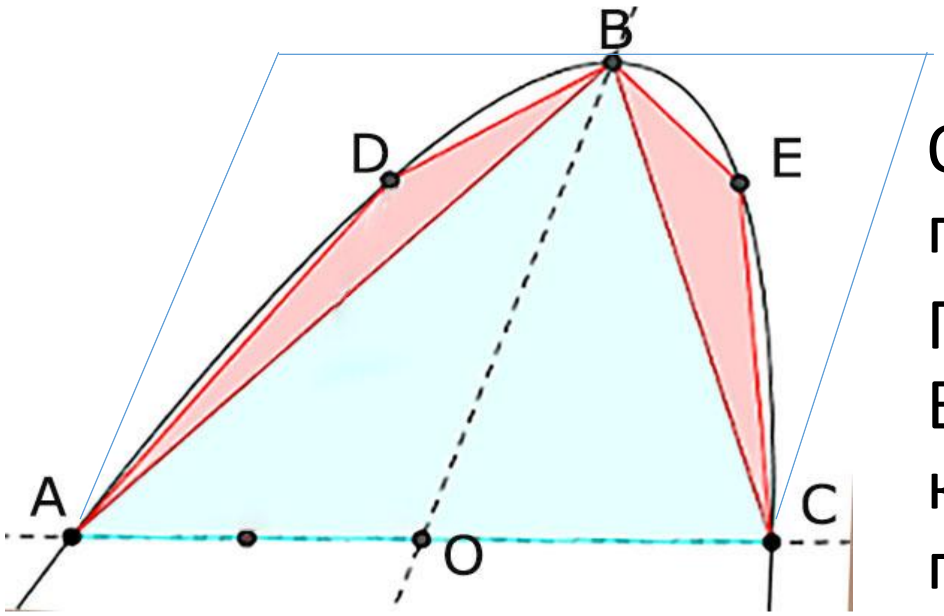
3) в каждой конкретной задаче доказывается, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.
Всегда от противного.

С помощью своего метода **Евдокс доказал** (не получил!):

1. Отношение площадей кругов равно отношению квадратов их диаметров.
2. Объем пирамиды равен 1/3 объема соответствующей призмы.
3. Объем конуса равен 1/3 объема соответствующего цилиндра.
4. **Евклид** добавил: Отношение объемов шаров равно отношению кубов их диаметров.
5. **Архимед** в «О квадратуре параболы» получил **НОВЫЙ** результат:

   Площадь косого сегмента параболы равна 4/3 площади соответствующего треугольника.

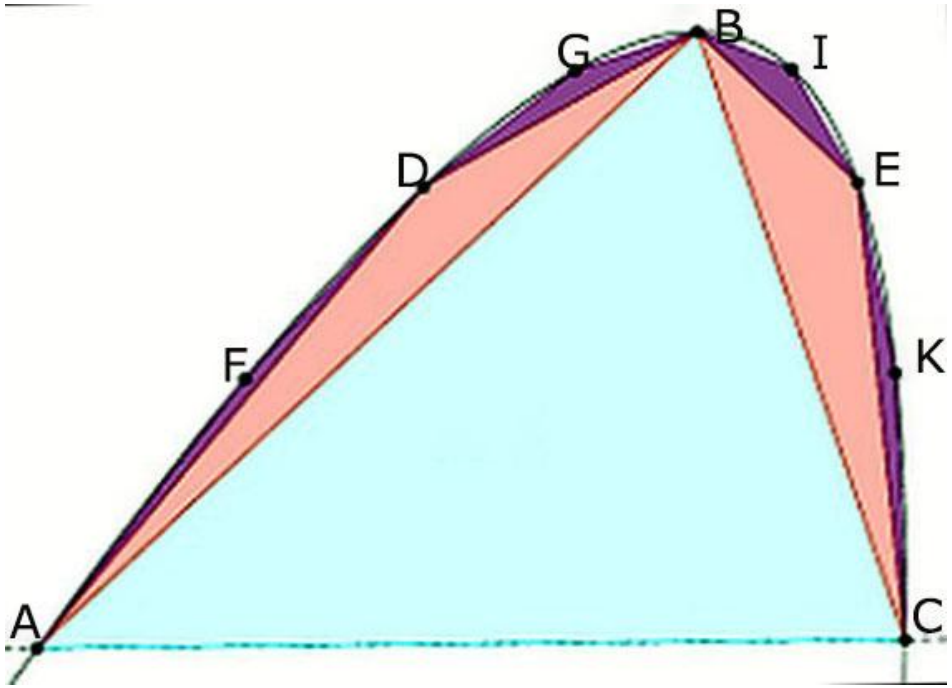
КВАДРАТУРА КОСОГО СЕГМЕНТА ПАРАБОЛЫ



Обозначим через **S** искомую площадь косого сегмента.

Пусть AC – стягивающая хорда, а BO – сопряженный диаметр (в т. B касательная к параболе параллельна этой хорде).

1. Тогда **площадь треугольника** ABC равна половине параллелограмма AMNC, описанного около данного сегмента параболы, и, следовательно, **больше половины S**. Таким образом мы построили первую фигуру из необходимой последовательности вписанных фигур, «**исчерпывающих**» данный косой сегмент параболы.



Строим далее последовательность **исчерпывающих** фигур:

$A_1 = \triangle ABC = \boldsymbol{\Delta}$

$A_2 = \Delta + \triangle ADB + \triangle BEC = \boldsymbol{\Delta + \frac{1}{4}\,\Delta}$

(Архимед вычисляет сумму этих площадей, опираясь на известный симптом параболы)

$A_3 = \Delta + \frac{1}{4}\,\Delta + \frac{1}{4}\,(1/4\;\Delta) = \Delta + \frac{1}{4}\,\Delta + 1/16\;\Delta$

$A_4 = \Delta + \frac{1}{4}\,\Delta + 1/16\;\Delta + 1/64\;\Delta$

$\cdots$

$A_n = \Delta + \frac{1}{4}\,\Delta + 1/16\;\Delta + \ldots + (1/4)^{n-1}\;\Delta$

Имеем бесконечно убывающую прогрессию, суммировать которую труда не представляет:

2. Вслед за Архимедом получаем:

$$A_n = \Delta(1 + ¼ + 1/16 + \ldots + (1/4)^{n-1}) = \Delta \cdot 4/3 \cdot (1 - 1/(4^n)) =$$
$$= 4/3\,\Delta - 4/3\,\Delta \cdot (1/(4^n)). \qquad (*)$$

Т.к. при $n \to \infty$ $\frac{1}{4^n} \to 0$, то искомый арифметический предел

$$B = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{4}{3}\Delta.$$

3. В соответствии со схемой метода Евдокса докажем, что S = B:

1) пусть $S > B$, тогда обозначим $b = S - B$ и по лемме Евдокса $\exists\, n$ ⋮ $S - A_n < S - B$, откуда $A_n > B$, чего быть не может в силу (*);

2) пусть $S < B$, тогда обозначим $b = B - S$. Поскольку B – арифметический предел, то существует номер, начиная с которого все разности $B - A_n <$ любого положительного $b = B - S$, т.е. $A_n > S$, что противоречит вписанности фигур.

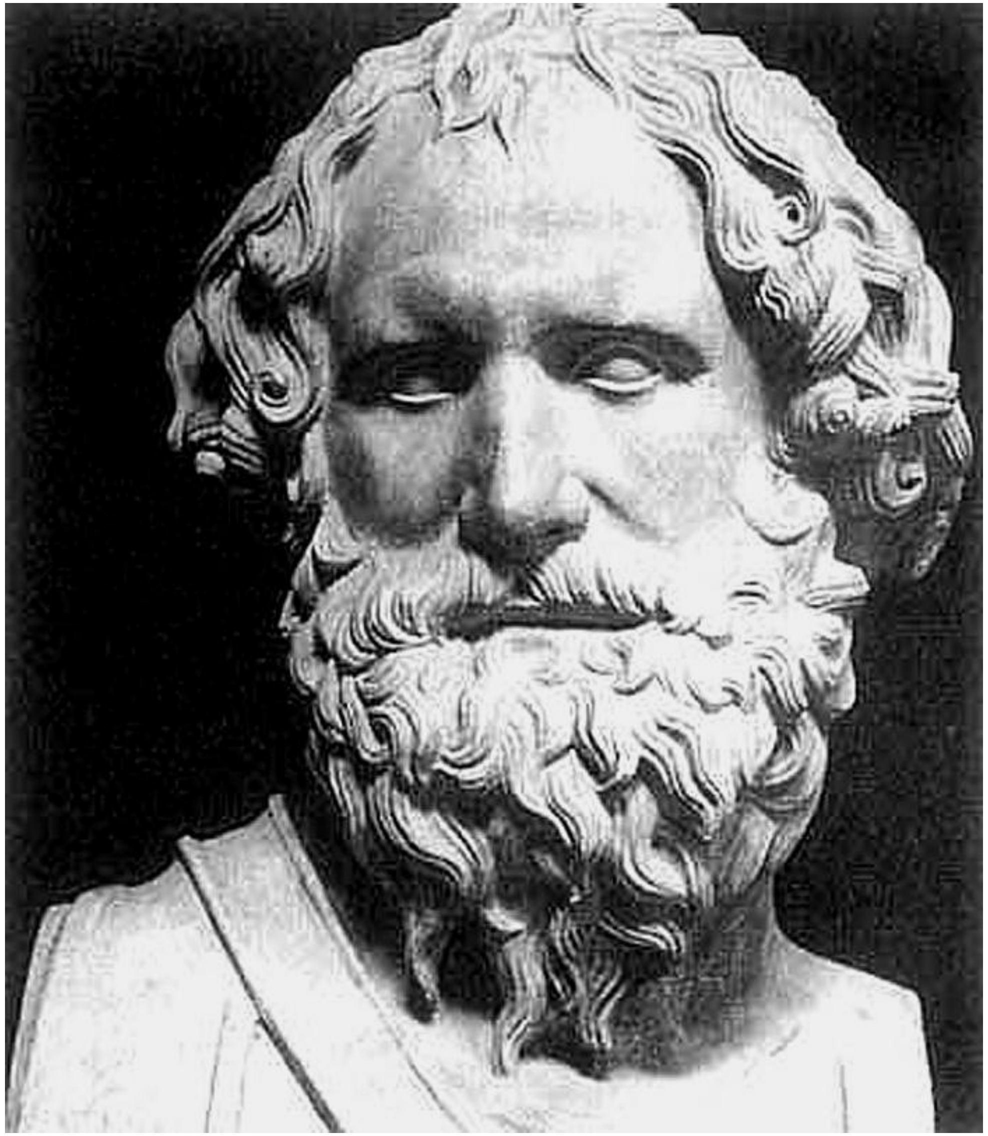
Ответ: Площадь косого сегмента S = 4/3 Δ.

АРХИМЕД
287 до н.э. – 212 до н.э.

Архимеда будут помнить, когда Эсхила забудут, потому что языки умирают, но не математические идеи. Возможно, бессмертие — глупое слово, но, по всей видимости, ***математик*** *имеет наилучший шанс на бессмертие, что бы оно ни означало.*

Готфрид Харолд Харди

АРХИМЕД 287 до н.э. – 212 до н.э.



Родился в Сиракузах (Сицилия). Отец – астроном Фидий.

Учился в Александрии.

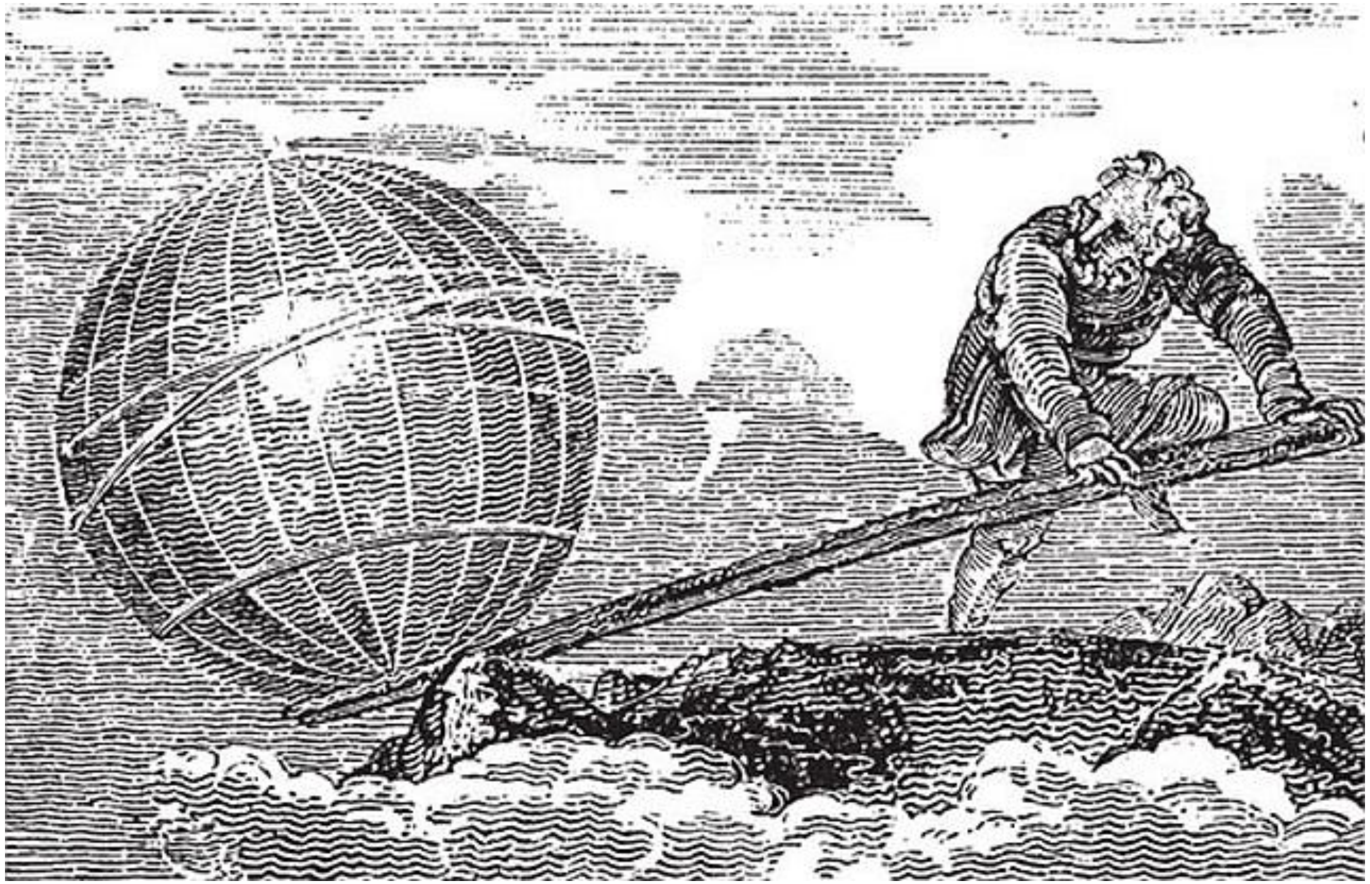
В древности Архимеду приписывали до 40 открытий в области практической механики, но не все они описаны его биографами и комментаторами, так что некоторые известны лишь по названию, например: **архимедов рычаг, архимедов винт, полиспаст** и др.

Архимед знал про силу водяных паров и пытался применить ее к орудиям своего века.

Эврика!

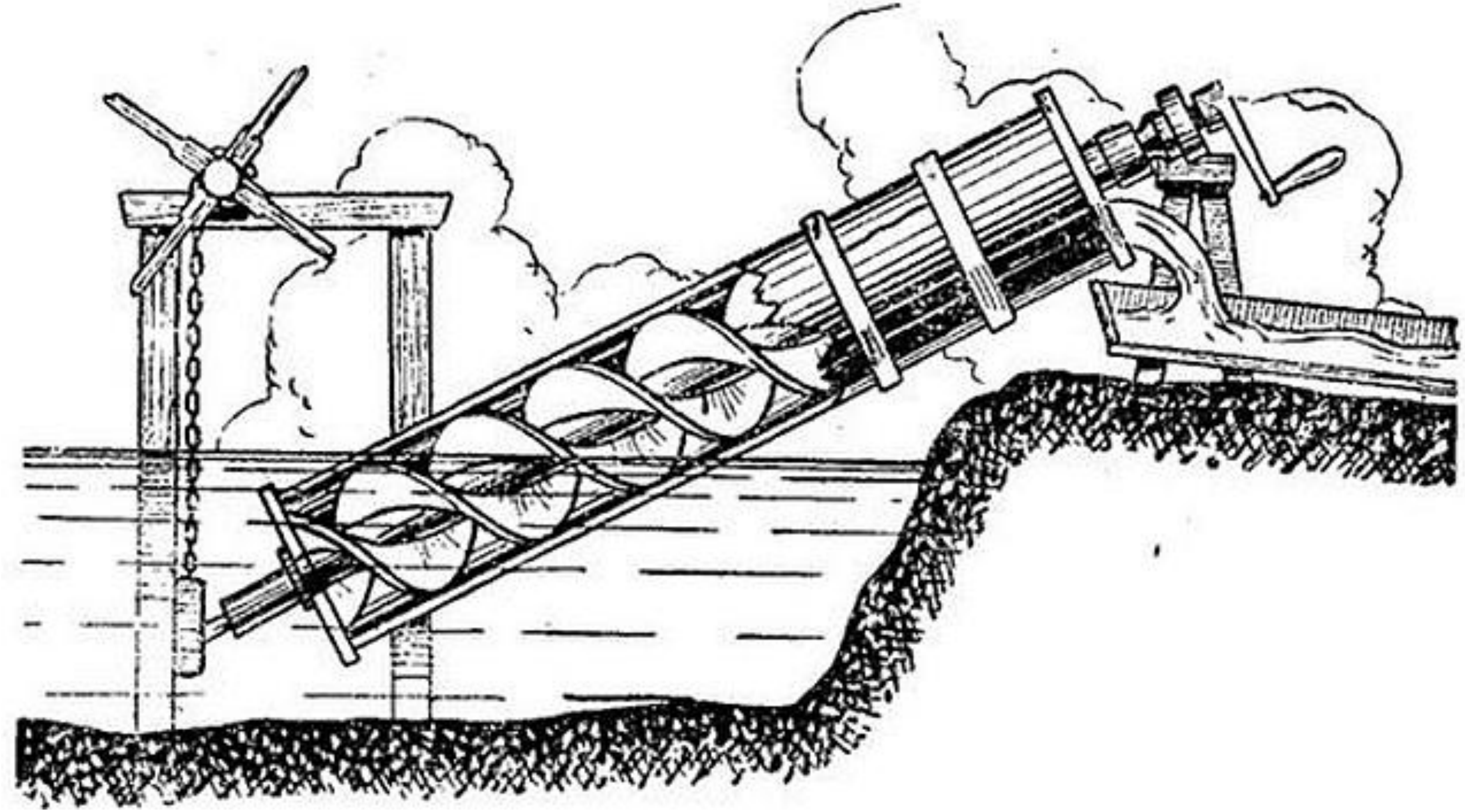
Основной закон гидростатики: корона царя Гиерона была сделана из сплава золота и серебра и имела неправильную форму.

«Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю»



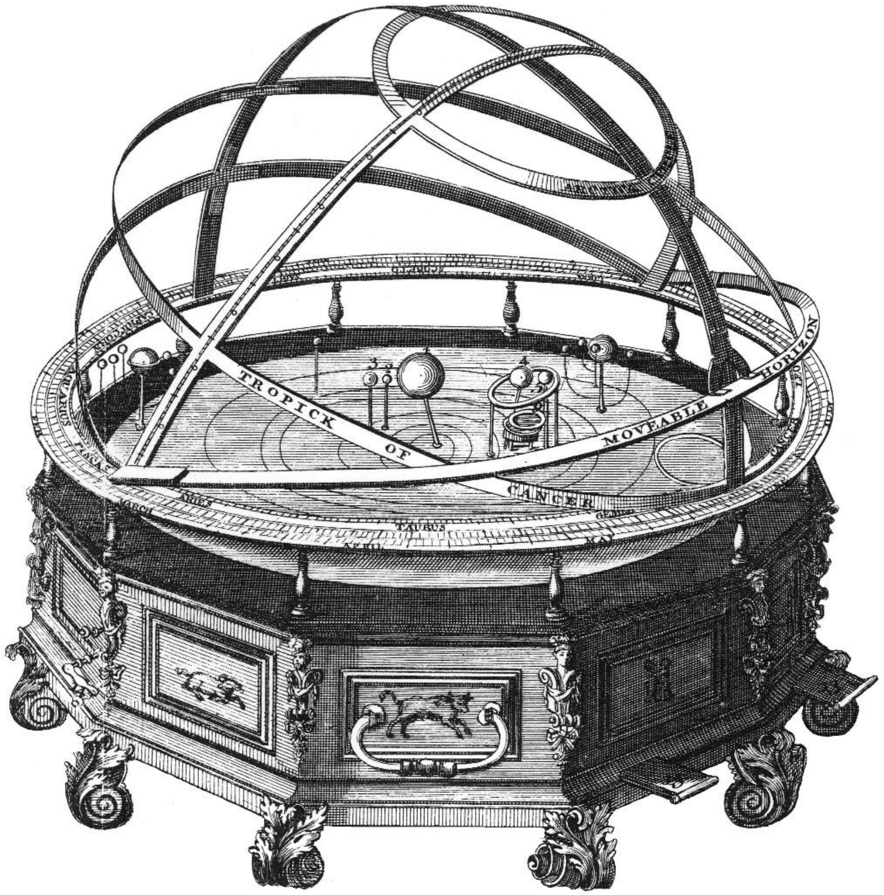
Принцип рычага: корабль «Сиракосия» – подарок царю Птолемею – никак не удавалось спустить на воду. Помогла система блоков – полиспаст.

Бесконечный винт для вычерпывания воды в Египте



Винт Архимеда на ВДНХ

«**Небесная сфера**» (планетарий)



На ней можно было наблюдать движение пяти планет, восход Солнца и Луны, их фазы и затмения, исчезновения за линией горизонта.

Осада Сиракуз римлянами в 212 г. до н.э.

Посвятив себя защите Сиракуз, Архимед стал душой самого упорного и вместе с тем самого искусного сопротивления, о котором говорит история.

По свидетельству **Плутарха** (I в. н.э.), римские солдаты были так напуганы, что "*едва заметив на стене веревку или кусок дерева, они поднимали отчаянный крик и пускались наутек в полной уверенности, что Архимед наводит на них какую-то машину*".

Полибий (II до н.э.) писал: "*Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело… римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца*".

Плутарх о смерти Архимеда:

"В тот час Архимед внимательно рассматривал какой-то чертеж и, душою и взором погруженный в созерцание, не заметил ни вторжения римлян, ни захвата города, когда вдруг перед ним вырос какой-то воин и объявил ему, что его зовет Марцелл.

Архимед отказался следовать за ним до тех пор, пока не доведет до конца задачу и не отыщет доказательства. Воин рассердился и, выхватив меч, убил его".

В **математике** главное внимание – **три типа проблем**:

1. ***Определение площадей криволинейных фигур и объемов тел:***

– развил ***общий метод***, который лег в основу интегрального исчисления;

– с его помощью **вывел** практически все, что было известно до него + **нашел** поверхность $S_Ш = \pi D^2$ и объем **шар**а $V_Ш = \frac{\pi D^3}{6}$.

2. ***Построение касательной*** к данной кривой.

Греки умели строить касательную к окружности, эллипсу, гиперболе и параболе. Архимед нашел ***общий метод***.

3. ***Определение экстремумов:***

Например, как среди цилиндров, вписанных в шар, найти тот, у которого объем наибольший.

Архимед первым увидел связь с п.2 и показал, как с его помощью решать эти задачи.

Лейбниц: *«Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометров»*

Идеи Архимеда почти на 2 тыс. лет опередили свое время. Только в XVII в. они получили свое дальнейшее развитие.

Все сочинения Архимеда – письма к математикам того времени. Иногда Архимед нарочно допускал в них ошибки: *«чтобы тех, которые утверждают, что они все открыли, и не приводят никаких доказательств открытого, можно было уличить или заставить согласиться с тем, что они открыли невозможное».*

Инфинитезимальные методы
в сочинениях Архимеда:

1. О квадратуре параболы.

2. О шаре и цилиндре.

(*Объем шара* $V = \frac{\pi D^3}{6}$, *поверхность шара* $S = \pi D^2$)

3. О коноидах и сфероидах.

4. О спиралях.

5. Измерение круга.

6. Послание Эратосфену о механическом методе. (*Обнаружено в 1906*)

Другие направления математических исследований:

- В работе 2 «О шаре и цилиндре» также есть:

  – ***геометрический способ решения кубических*** уравнений $x^2(a \pm x)=Sc$ с помощью параболы и гиперболы;

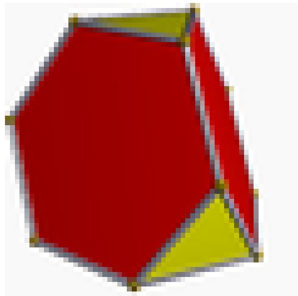
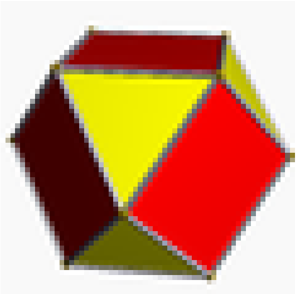
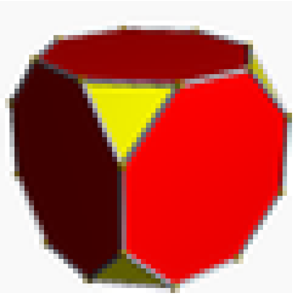
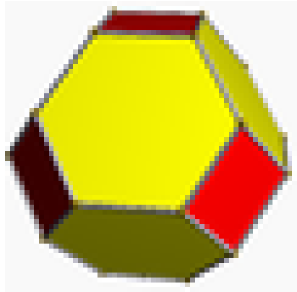
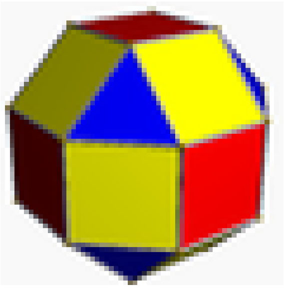
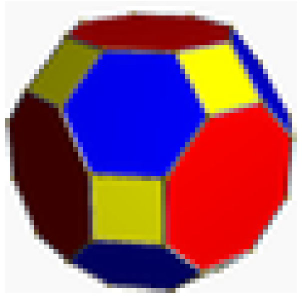
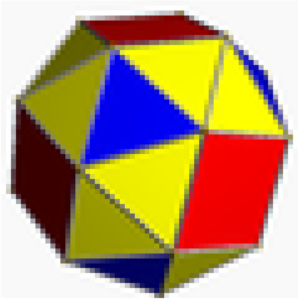
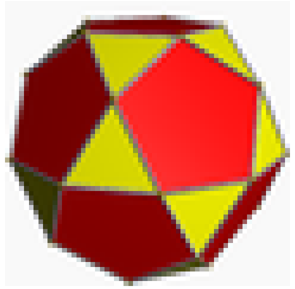
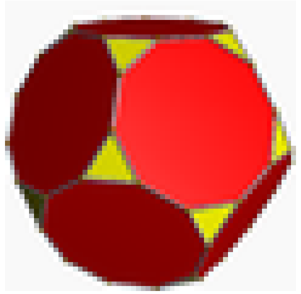
  – полностью исследовал эти уравнения: когда существуют различные положительные корни, когда они совпадают.

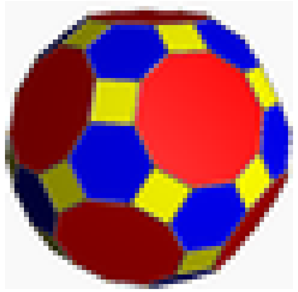
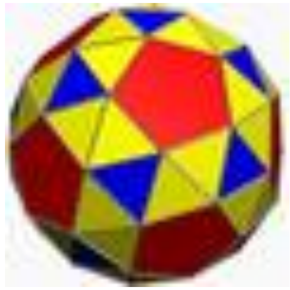
- В работе 5 «Измерение круга» вычислил с большой точностью ***число π:***

$$3 + 10/71 < C/D < 3 + 10/70$$

(использовал вписанные и описанные правильные многоугольники n= 6; 12; 24; 48; 96)

7. *«О полуправильных телах»* – нашел все 13 архимедовых тел.

8. Отрывки о математической теории популярной игры *стомахии*.

9. «***Псаммит***» – построение системы обозначений и названий больших чисел.

10. «***Правило рычага***»: $d_1 r_1 = d_2 r_2$

11. «***О плавающих телах***» – нашел все устойчивые положения равновесия параболоида вращения.

12. Задача о быках: уравнение Пелля $y^2 - 4729494x^2 = 1$

(*здесь* $x = (2 \cdot 4657)^2 t^2$) .

В ***арабском переводе*** Сабита ибн Корры (IX в. н.э.):

1. «***Леммы***» – в частности, трисекция угла.
2. «***О семиугольнике***».
3. «***О касающихся кругах***».
4. «***О параллельных линиях***».

Архимед усовершенствовал метод Евдокса:

Чтобы найти величину *V* некоторой фигуры:

1) вписываем и **описываем** соответствующие последовательности, состоящие из элементарных частей, величины которых известны;

2) с помощью известных формул суммируем и находим **нижний и верхний пределы** для искомой величины;

3) устанавливаем, что с ростом ***n*** разность между пределами может быть сделана сколь угодно малой;

4) тогда искомая величина есть **общий предел** последовательностей вписанных и описанных величин.

Здесь – идея верхних и нижних интегральных сумм Дарбу.

Арифметические соотношения у Архимеда

Сумма арифметической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{n} kh = \frac{n(n+1)}{2} h$$

Сумма квадратов (вывел)

$$\sum_{k=1}^{n} (kh)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} h^2$$

Сумма полухорд

$$\sum_{k=1}^{n-1} sin \frac{k\pi}{n} = ctg \frac{\pi}{2n}$$

Сумма квадратов применяется три раза: при нахождении объемов сегментов эллипсоида и гиперболоида вращения и площади первого витка спирали. Сумма синусов – при вычислении поверхности шара.

Для объемов: Оценим сумму квадратов сверху и снизу

$$\frac{n^3}{3}h^2 < \sum(\nu h)^2 < \frac{(n+1)^3}{3}h^2$$

$$\frac{n^3}{3}h^3 < \sum(\nu h)^2 h < \frac{(n+1)^3}{3}h^3$$

Пусть $nh = a \Longrightarrow \frac{a^3}{3} \leq \int_0^a x^2 dx \leq \frac{a^3}{3} + O\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

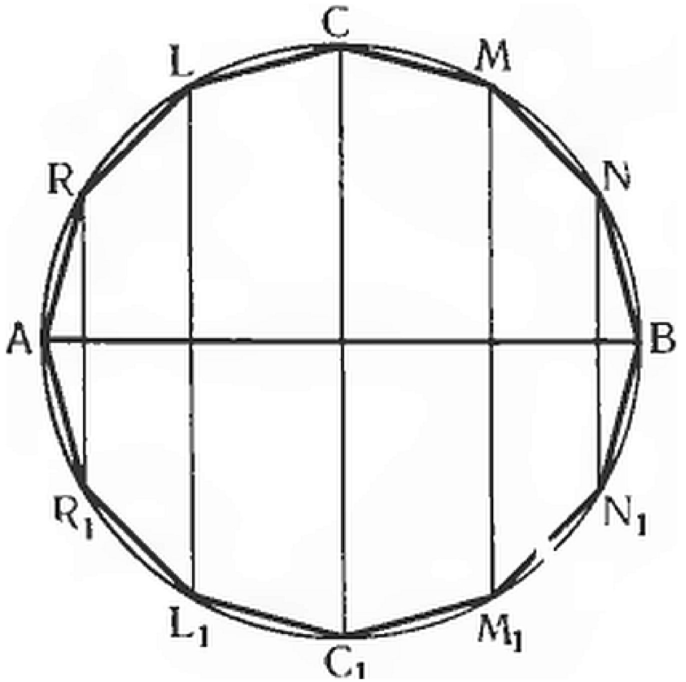
Вообще говоря, результаты «О коноидах и сфероидах» равносильны утверждениям:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2},$$

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3},$$

$$\int_0^a (x^2 + bx)\,dx = \frac{a^3}{3} + b\frac{a^2}{2}$$

При вычислении поверхности шара



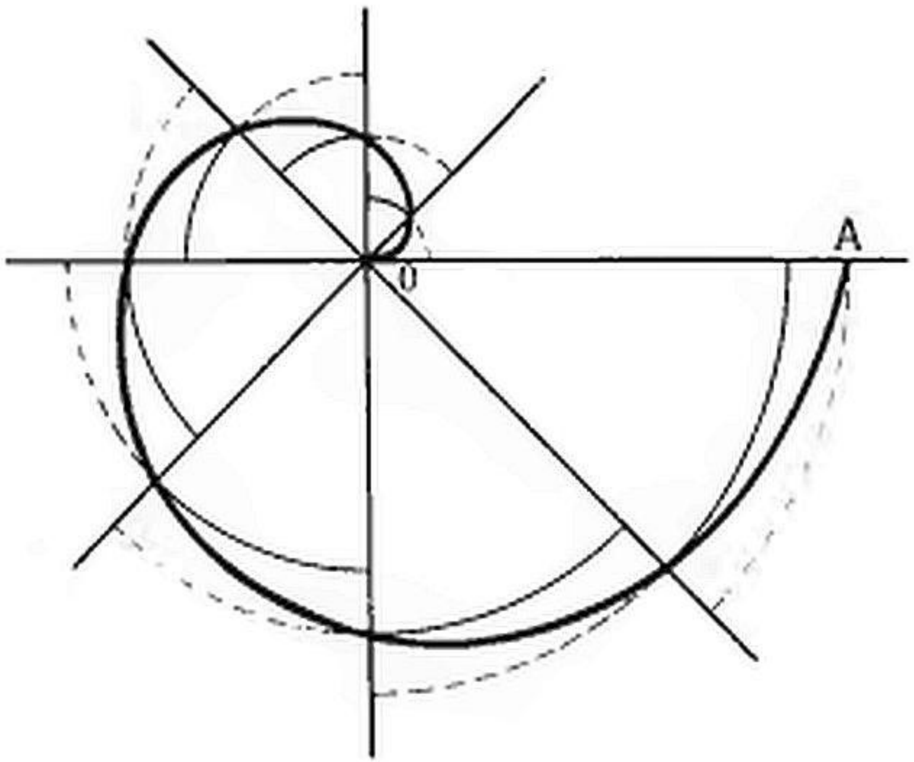
Архимед вписывает в круг правильный многоугольник, число сторон которого кратно 4, и вращает круг и многоугольник вокруг диаметра, соединяющего две противоположные вершины (AB). Тогда поверхность тела вращения многоугольника есть сумма боковых поверхностей усеченных конусов и для подсчета площади этих поверхностей и используется сумма хорд

$$RR_1 + LL_1 + CC_1 + MM_1 + NN_1 \ ,$$

т.е. сумма синусов.

«О СПИРАЛЯХ»

1. Вычисление площади первого витка спирали $\rho = a\varphi$



1) Отрезок *OA = 2πa*.

Разделим вслед за Архимедом центральный угол *2π* на *n* частей и впишем в каждую круговые сектора: $S_{\text{сектора}} = \frac{\pi}{n}\rho^2$, где $\rho = \frac{OA}{n}$.

2) Вычислим суммы вписанных и описанных секторов:

$$S_{\text{вп}} = \frac{\pi}{n}(0 + \rho^2 + (2\rho)^2 + \cdots ((n-1)\rho)^2) = \frac{\pi}{n}\sum_1^{n-1}(k\rho)^2$$

$$S_{\text{оп}} = \frac{\pi}{n}(\rho^2 + (2\rho)^2 + \cdots + (n\rho)^2) = \frac{\pi}{n}\sum_1^{n}(k\rho)^2$$

Архимед **вывел** формулу суммы квадратов:

$$\sum_1^n (k\rho)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\rho^2 ,$$

с помощью которой оценивает

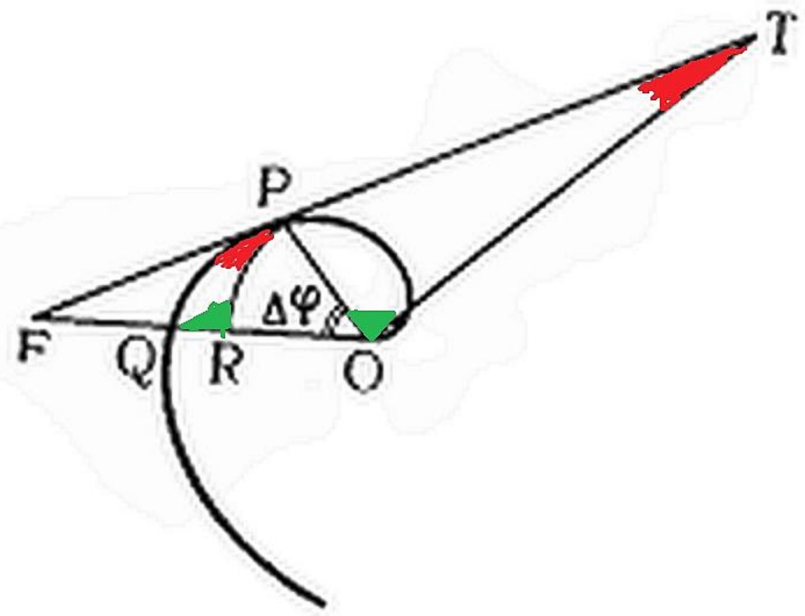
$$S_{\text{вп}} = \frac{\pi}{\boldsymbol{n}}\frac{(n-1)\boldsymbol{n}(2n-1)}{6}\rho^2 < \frac{\pi}{6}\rho^2 \cdot 2n^2 = \frac{\pi}{3}OA^2$$

$$S_{\text{оп}} = \frac{\pi}{\boldsymbol{n}}\frac{\boldsymbol{n}(n+1)(2n+1)}{6}\rho^2 > \frac{\pi}{6}\rho^2 \cdot 2n^2 = \frac{\pi}{3}OA^2$$

3) Архимед показывает, что разность между этими суммами может быть сделана сколь угодно малой и т.к. $S_{\text{вп}} < S < S_{\text{оп}}$, то искомая площадь первого витка спирали

$$\boldsymbol{S = \frac{\pi}{3}OA^2}.$$

2. Касательная к спирали $\boldsymbol{\rho = \varphi}$: Чтобы построить касательную в точке ***P*** с координатами $(\rho;\varphi)$, достаточно знать подкасательную **$OT = \rho\varphi$**.



Подкасательной называется второй катет *OT* прямоугольного треугольника *POT*, где катет *PO* – радиус-вектор, соединяющий заданную точку *P* с полюсом *O*, а гипотенуза *PT* – отрезок искомой касательной.

1) Архимед: Пусть точка *P* терпит бесконечно малое приращение $\Delta\varphi$. Проведем окружность радиуса ρ : $OR = OP = \rho$, $QR = \Delta\rho$, дуга $RP = \rho\Delta\varphi$. Получим треугольник *FRP*, в котором криволинейный угол *FRP* – прямой, а криволинейный угол $FPR = \alpha +$ б.м. Таким образом, можно считать, что треугольники *FRP* и *POT* «почти подобны» $\Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha = \frac{FR}{RP} \approx \frac{PO}{OT}$, откуда можно искать подкасательную

$$OT = PO \cdot \frac{RP}{FR}.$$

2) Также в силу малости можно считать, что «почти подобны» и треугольники *FRP* и *QRP* , а, следовательно, $\frac{FR}{RP} \approx \frac{QR}{RP} = \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi}$.

Можно сказать, что Архимед в этом месте с помощью специальных лемм обосновывает переход к пределу

$$tg\alpha = \frac{PO}{OT} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi},$$

с помощью которого получает правило для вычисления подкасательной:

$$OT = OP \cdot \frac{RP}{QR} = \rho \cdot \frac{\rho\Delta\varphi}{\Delta\rho} = \rho^2 \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta\rho} = \rho^2\ ,$$

т.к. уравнение спирали $\rho = \varphi$.

Ответ: $\boldsymbol{OT = \rho\varphi}$.

Отыскание экстремумов

Древние пифагорейцы нашли, что уравнение $x(a-x) = S$ имеет корни $\Leftrightarrow$ $S \leq a^2/4$.

В работе «**О шаре и цилиндре**» Архимед решает задачу: «Разбить шар на две части в заданном отношении».

Обобщил: *Рассечь отрезок так, чтобы при заданных S и c выполнялось соотношение $S : (x^2) = (a-x) : c$*.

От пропорции Архимед переходит к кубическому уравнению, которое формулирует через объемы:

$$x^2(a-x) = c \cdot S = c \cdot bp,$$

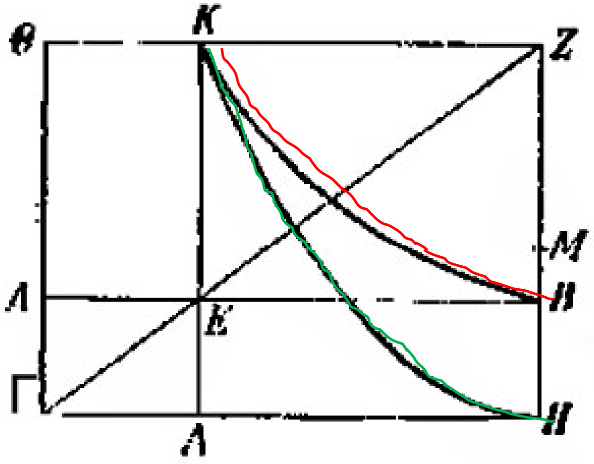
которое не всегда разрешимо среди положительных чисел $\Rightarrow$ «*Задача требует диоризма*».

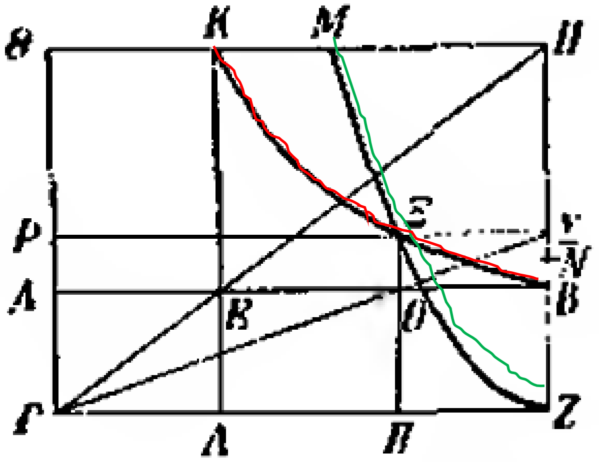
Решение Архимеда было утеряно до VI в. н.э. Нашел Евтокий: задача имеет решение (положительный корень существует), если правая часть не превышает максимума левой части: $Sc \leq \max x^2(a-x)$, где $x \in [0,a]$.

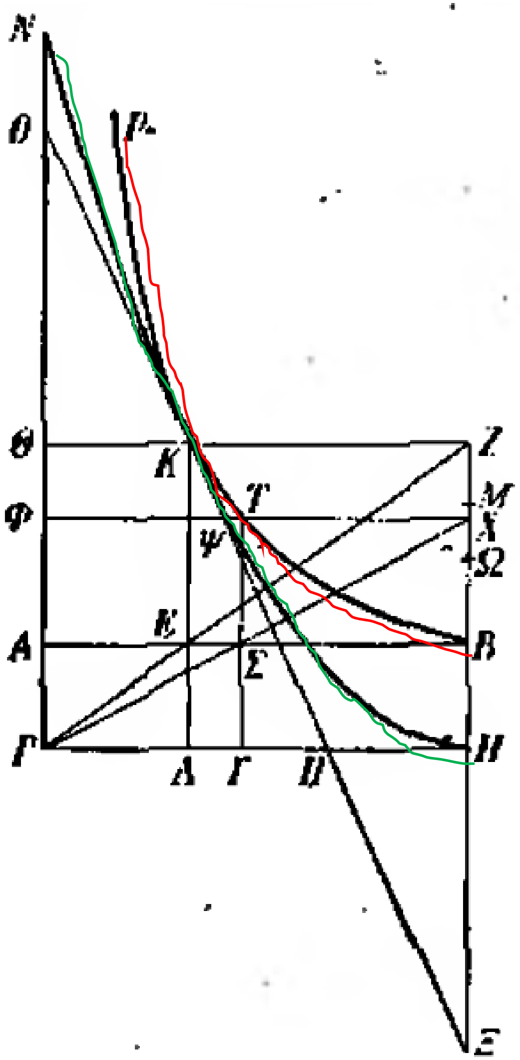
Из найденного Евтокием текста, который он приписывает Архимеду, следует, что Архимед решает кубическое уравнение с помощью конических сечений и утверждает при этом, что **искомый максимум достигается при** $\boldsymbol{x = (2/3)a}$. Это утверждение им доказывается с помощью инфинитезимальных методов.

Для нахождения максимума произведения двух функций Архимед рассматривает две кривые, которые получаются разведением в разные стороны множителей, и ищет такое их расположение, при котором они будут иметь общую касательную.

В рукописи имеются чертежи, на которых представлены разные случаи расположения получающихся в этой задаче параболы и гиперболы:







Поскольку Архимед отслеживает равенство **отрезков**, то мы могли бы записать соответствующие уравнения кривых в виде: $y = \frac{x^2}{p}$ и $y = \frac{bc}{a-x}$ (ось OX в данном случае направлена влево).

Затем Архимед устанавливает, что при $x = \frac{2}{3}a$ максимальное значение функции $x^2(a-x) = \frac{4}{27}a^3$ и, поскольку у кривых в этом случае есть единственная точка пересечения, то и решение будет единственным.

При $Sc < \frac{4}{27}a^3$существуют два решения.

При $Sc > \frac{4}{27}a^3$ решений нет.

Затем Архимед показывает, что его первоначальное уравнение решения не имеет.

Такого полного и глубокого анализа не встречается вплоть до 19 века, хотя этот способ решения кубического уравнения с помощью конических сечений встречается позже у арабских математиков (например, у Омара Хайяма (1048–1131)).