

# **МАТЕМАТИКА В ЭПОХУ ЭЛЛИНИЗМА**

**330е г. до н.э. – 30 гг. до н.э.**



## Новая эпоха античного мира

началась с завоеваний Александра Македонского, который, продолжая дело своего отца — знаменитого полководца Филиппа, перенес войну за пределы Греции и за 332-323 гг. до н. э. покорил Египет, Вавилон, Персию, Согдиану и Бактрию, и даже часть Индии до реки Инда.

После смерти Александра его огромная империя распалась, полководцы Александра разделили между собой его завоевания: под властью Птолемеев оказался Египет, Месопотамия и Сирия — под властью Селевкидов, Македония — под властью Антигона и его преемников. Даже в долине Инда были греческие князья.

Так в истории человечества началась **эпоха эллинизма**, продлившаяся до 30 гг. до н. э., когда Египет — последняя греческая колония — покорилась римлянам.



Характерной чертой этой эпохи было подражание эллинским образцам во всем — в искусстве, в науке, в культуре.

Государственным языком был греческий. Ученые разных стран легко общались и воспринимали традиции, сохранившиеся в науке этих, ранее обособленных, стран, но обычные люди не понимали этого языка, на котором велись научные разговоры или создавались литературные произведения.

Если в древней Греции научные проблемы пользовались большой популярностью, то в Александрии дело обстояло иначе — основная часть населения — египтяне — не понимала греческого языка. Эта изоляция губительно сказалась на художественной литературе. Ничего сравнимого с трагедиями Эсхила, Софокла и Еврипида или с комедиями Аристофана создано не было.

**Развивались филология, критические и исторические исследования. И особенный расцвет в III—II вв. до н. э. получили точные науки.**

Птолемей I Сотер основал знаменитый **Мусейон** — храм Муз, покровительниц науки и искусства, ставший высшим культурным и научным учреждением, центром научной мысли эпохи эллинизма.

### **Отличия Мусейона от древнегреческих школ:**

- поддержка государством + жалование (и, как следствие, появление профессоров — профессиональных преподавателей). Академия Платона, Ликей Аристотеля — независимы от правителей;
- лишен самостоятельности: главный жрец назначается Птолемеем;
- огромная библиотека  $\Rightarrow$  основа обучения — книга;
- изоляция от основной массы населения (язык науки — греческий).

В III—II вв. до н. э. особенный **расцвет** получили **точные науки**:

- **астрономия**: в результате синтеза достижений греческих и вавилонских ученых (первые греческие астрономические теории и модели солнечной системы и вавилонские таблицы астрономических наблюдений) возникают новые модели Вселенной. Так, **Аполлоний** для объяснения видимого движения планет построил **теорию эпициклов и эксцентрических окружностей**, на основе которых позже **Гиппарх и Клавдий Птолемей** создали **геоцентрическую систему мира**.
- **статика и гидростатика**: **Архимед** применил математические методы и построил с их помощью начала этих наук.
- **геометрическая оптика** развивалась в работах **Евклида, Архимеда и Аполлония**.
- Евклид занимался **теорией музыки**.
- **география**: ученый энциклопедист **Эратосфен** из Кирены (математик, географ, историк, филолог и поэт — пентатлос=пятиборец, III в. до н. э.) сделал новое измерение длины градуса меридиана, что позволило установить более точные размеры Земли.

Рафаэль САНТИ. **АФИНСКАЯ ШКОЛА.** 1509–1511.

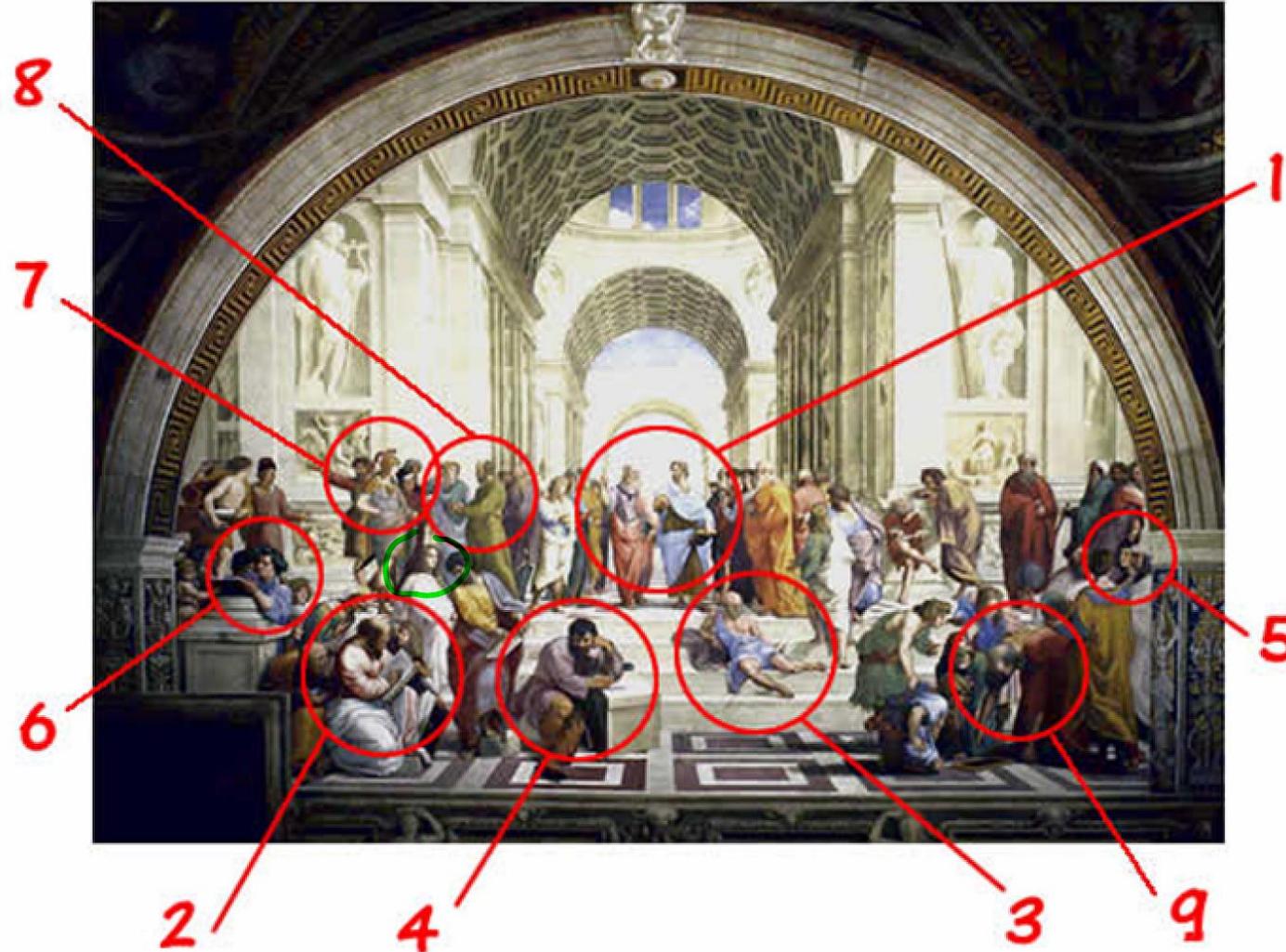
Название «Афинская школа» придумал Джованни Пьетро Беллори в 1672.





The School of Athens  
by Raphael

# Станца делла Сеньятура. Фреска в кабинете Папы римского



1 – Леонардо да Винчи в образе Платона и Аристотель; 2 – Пифагор; 3 – Диоген Синопский;  
4 – Микеланджело в образе Гераклита; 5 – автопортрет; 6 – Эпикур; 7 – Александр Македонский;  
8 – Сократ; 9 – Евклид или Архимед со студентами; 10 – Гипатия.

**ЕВКЛИД**

**IV в. до н.э.**

# Математическое творчество Евклида

1. **“Начала”**
2. **“Ложные заключения”** — посвящено логическим основам математики. (До нас не дошло).
3. **“Данные”** — каково должно быть минимальное число заданных величин, чтобы задача стала определенной. (Дошло в отрывках)
4. **“Конические сечения”** (не дошло).
5. **“Феномена”** — элементарная сферическая астрономия.
6. **“Оптика”** — учение о перспективе.
7. **“Сечение канона”** — теория музыки.

## НАЧАЛА

**Прокл** (V в.н.э.): составляя “Начала”, Евклид “включил в них многое из Евдокса, усовершенствовал многое из Теэтета и дал неопровержимые доказательства того, что его предшественники показали нестрого”.

«Начала» нельзя называть полной энциклопедией античной математики. В них **не вошли** три знаменитые задачи древности, теоремы о “квадрируемых луночках” Гиппократы Хиосского. Нет упоминания о конических сечениях. Не рассматриваются вопросы приближенных вычислений.

**Цель Евклида** была иной – **дать описание тех главных элементов**, или **начал**, на основе которых могут быть развиты все разделы математики.

## **Строго логическое изложение материала:**

Евклид придерживается аристотелевских принципов построения науки, согласно которым, наука должна начинаться с определений тех объектов, существование которых доказывать не нужно.

Все остальное следует доказывать, опираясь на выбранную систему определений, аксиом и постулатов. Доказательством служит построение. Поэтому, излагая геометрические предложения, Евклид сначала формулирует их в общих выражениях, а затем конкретно указывает на чертеже то, что дано, и то, что требуется доказать или построить.

После приведенного доказательства следует заключение, повторяющее начальную формулировку и заканчивающееся словами: “что и требовалось доказать” или “что и требовалось сделать”.

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ (с интуитивным характером)

- Точка — то, что не имеет частей (дословно: *точка есть то, часть чего ничто*).
- Линия — длина без ширины.
- Концы же линии — точки.
- Прямая линия есть та, которая **равно** расположена по отношению к точкам на ней.
- Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
- Границы поверхности суть линии.
- Плоская поверхность есть та, которая **равно** лежит относительно прямых на ней...

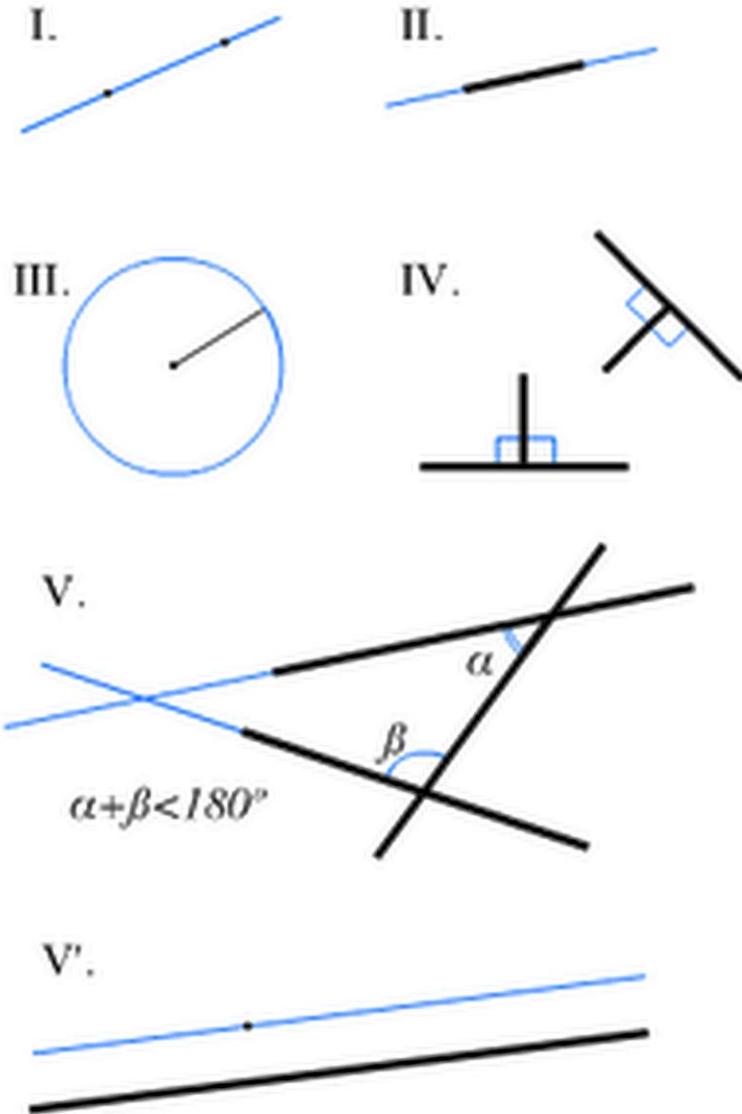
Можно критиковать.

## АКСИОМЫ

**Аристотель:** *Аксиомы — это такие очевидные вещи, которые “необходимо иметь каждому, кто будет что-то изучать”.*

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавить равные, то и целые будут равны.
3. Если от равных отнять равные, то и остатки будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. Целое больше части.

# ПОСТУЛАТЫ



1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжить по прямой. *(Из первых двух постулатов следует существование прямой).*
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг *(следовательно, окружность существует).*
4. Все прямые углы равны между собой *(следовательно, существует единственное продолжение прямой).*
5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых *(что обеспечивает существование точки пересечения двух прямых, удовлетворяющих указанному условию).*

## СОДЕРЖАНИЕ «НАЧАЛ»

I книга: планиметрия прямолинейных фигур — основные свойства треугольников, параллелограммов, трапеций; теорема Пифагора и обратное ей предложение.

Теоремы формулируются в терминах равенств: например, треугольник равнобедренный половине прямоугольника, имеющего с ним равные основания и высоту.

II книга: основы геометрической алгебры. Здесь устанавливаются основные тождества и доказывается дистрибутивность умножения относительно сложения.

Обе первые книги восходят к **ПИФАГОР**ейцам.

III книга посвящена свойствам круга, его касательных и хорд — вопросам, которые были исследованы **Гиппократом Хиосским** или ранее.

В IV книге строятся правильные  $n$ -угольники при  $n=3,4,5$ , и полученные из них удвоением сторон —  $6, 8, 10, 12, \dots$

Исключительно изящное построение правильного 15-угольника принадлежит самому **Евклиду**. Построения правильного 7-угольника у Евклида нет — еще не знали, можно ли построить его циркулем и линейкой.

*В первых четырех книгах все теоремы доказываются без использования пропорциональности, т.е. без теории отношений, которая появляется лишь в 5 книге. Считается, что эти книги — обработка «Начал» **ГИППОКРАТА** Хиосского.*

Книга V содержит **общую теорию отношений** величин **ЕВДОКСА**, которую многие современные ученые считают первой теорией действительного числа, очень строгой и логически завершенной, во многом напоминающей теорию сечений Дедекинда.

В VI книге Евклид строит *учение о подобии* и применяет его к задачам о «приложении площадей», равносильным геометрическому решению *квадратных уравнений*.

Книги VII–IX посвящены **АРИФМЕТИКЕ**, т.е. теории целых и рациональных чисел, которая также была известна древним пифагорейцам не позднее V в. до н.э.

Помимо теорем, относящихся к сложению и умножению целых чисел и умножению их отношений, в них рассматриваются и вопросы теории чисел: вводится алгоритм Евклида, излагаются основы теории делимости целых чисел, доказывается знаменитая **теорема Евклида** о том, что простых чисел бесконечно много.

Помимо результатов **Теэтета Афинского** излагаются также и исследования непрерывной пропорции **Архита из Тарента**, условия существования средних пропорциональных. Встречаются логические ошибки.

В книге X на основании учения о целых и рациональных числах Евклид, следуя **ТЕЭТЕТУ**, приводит **классификацию квадратичных иррациональностей**, которые возникают при решении цепочек квадратных уравнений.

В этой книге намечено построение *пифагорова* поля  $\Omega$ , т.е. минимального поля, в котором разрешимо любое уравнение вида  $x^2 = a^2 + b^2$ .

Также здесь доказывается, что соизмеримые величины относятся друг к другу как число к числу, т.е. множество рациональных чисел вложено во множество действительных чисел  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Эта книга наиболее длинна и трудна для понимания. Особенно ощущается недостаток удобной символики, из-за отсутствия которой изложение становится очень громоздким и тяжеловесным.

**1585 г. Симон Стевин:**

*"Трудности десятой книги... привели многих в ужас, и дело дошло до того, что ее называют **"крестной казнью математиков"**, материя сия не поддается угрызению и в ней не обнаруживают ни малейшей пользы"*.

**1950 Б.Л. Ван дер Варден "Пробуждающаяся наука":**

*"До X, 28 все еще сносно, но затем с X, 29 начинаются доказательства существования: «Найти два потенциально соизмеримых выразимых отрезка так, чтобы разность построенных на них квадратов равнялась квадрату на отрезке, соизмеримом с большим из них» и т. п., и тут уже действительно не легко понять, к чему все это нужно.*

***Автор удивительно умеет скрывать ход своих мыслей;** начиная с построения, он не вводит даже понятия о биномиали, которое могло бы как-то прояснить цель его построений, и только уже в самом конце он дает разделение биномиалей на шесть видов"*.

Книга XI посвящена **стереометрии**. Она содержит основные предложения о прямых и плоскостях в трехмерном пространстве, задачи на построение (например, опустить из данной точки на данную плоскость перпендикуляр), а также теоремы о равновеликости параллелепипедов и призм.

Много результатов **Архита из Тарента**.

В книге XII с помощью **метода исчерпывания Евдокса** доказываются известные уже теоремы:

- 1) отношение площадей кругов равно отношению квадратов их диаметров;
- 2) объем пирамиды равен трети объема соответствующей призмы;
- 3) объем конуса равен трети объема соответствующего цилиндра;
- 4) отношение объемов шаров равно отношению кубов их диаметров (**новый результат Евклида**).

В книге XIII излагается учение о **пяти правильных многогранниках** (платоновых телах — тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр): **как** их можно построить, **как** можно найти длину их ребер, зная радиус описанной сферы, и **почему** других правильных тел не существует. Эти результаты исследователи относят к творчеству **Теэтета**.

Отличие от Платона — **математические объекты** изначально не обязательно существуют. **Евклид** их строит, чем и **доказывает существование**.

Позднее к “Началам” присоединили еще две книги:

Книга XIV *Гипсикл* (II в. до н.э.)

сравнение объемов и поверхностей додекаэдра и икосаэдра, вписанных в одну и ту же сферу.

Книга XV школа *Исидора* Милетского (IV в. н.э.)

некоторые предложения о правильных многогранниках.

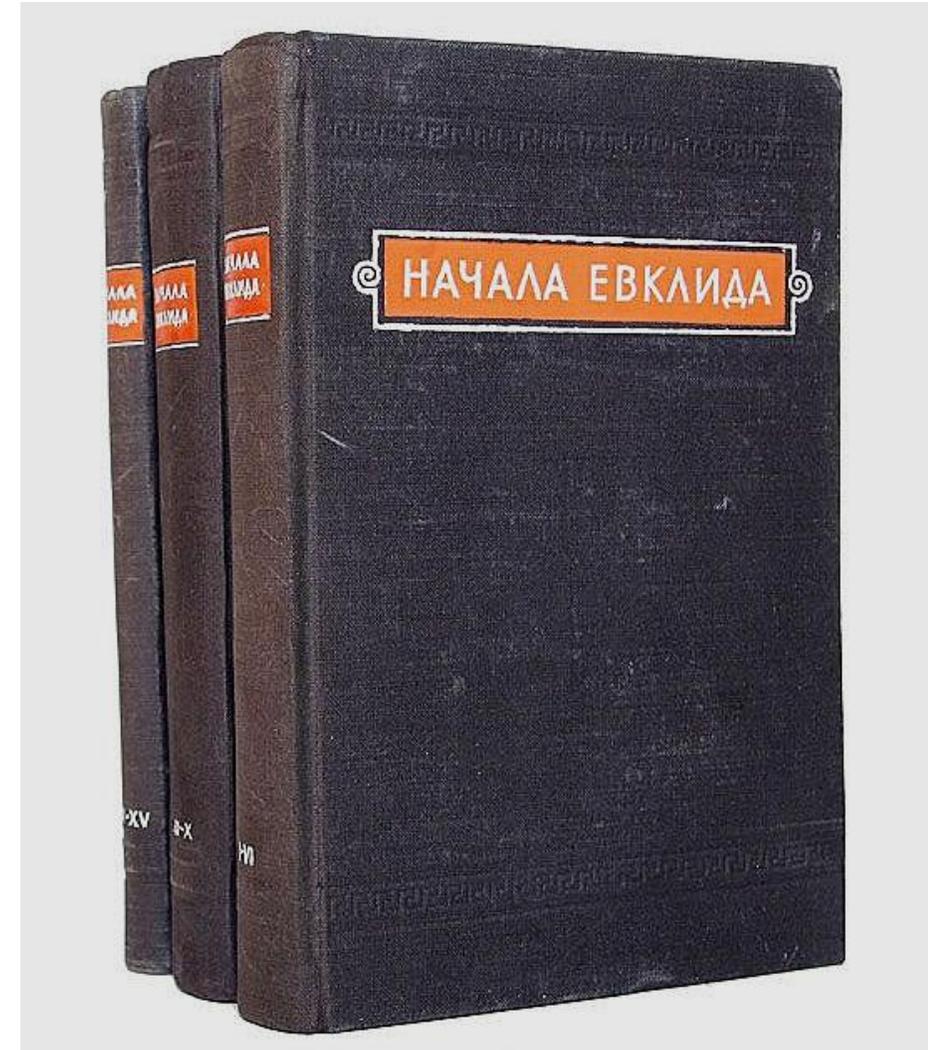
Оригинальная рукопись “Начал” долгое время сохранялась в Александрийской библиотеке, однако до наших дней все же не дошла.

В настоящее время тексты дошедших до нас копий не совпадают полностью.

Древнейшая *греческая* копия “Начал” Евклида датируется 75–125 гг. н.э. *Арабские* копии датируются VIII–IX вв. Древнейшая из *латинских* копий относится к XI в.

После изобретения книгопечатания в XV в. “Начала” по числу изданий уступают лишь Библии.

На русском языке первое издание “Начал” вышло в 1739 г., последнее – в 1948-50 гг.



## **А. Эйнштейн:**

*“Это удивительнейшее произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением”.*

## Аксиоматизация геометрии в XIX веке

1882 – М. Паш

1889 – Дж. Пеано

1899 – Д. Гильберт «Основания геометрии»

Вводятся объекты трёх видов – «точки», «прямые» и «плоскости», связанные отношениями типа «принадлежит», «между» и «конгруэнтен». Введённые аксиомы (их 5 групп: 1) аксиомы, определяющие понятие «принадлежит», 2) определяющие понятие «между», 3) аксиомы, необходимые для введения отношения конгруэнтности, 4) аксиома параллельности, 5) группа аксиом непрерывности) служат косвенными определениями первоначальных объектов и отношений.

Содержательная аксиоматизация: аксиомы суть выражения абсолютных свойств мира (С. Клини)