ПАРАДОКСЫ БЕСКОНЕЧНОГО

VI—V вв. до н.э.

Вместе с открытием несоизмеримых величин в греческой математике появилось понятие **бесконечности**.

До этого в основе определения отношения двух отрезков был ***алгоритм Евклида*** **–** алгоритм попеременного вычитания (см. след. слайд), позволяющий находить для двух отрезков конечную (для соизмеримых) или **бесконечную** (для несоизмеримых) последовательность чисел $\Rightarrow$ **первый критерий несоизмеримости**:

отрезки соизмеримы $\Leftrightarrow$ существует некоторая общая мера f (которую можно найти с помощью алгоритма Евклида) такая, что $a=\boldsymbol{n}f$, $b=\boldsymbol{m}f$, и тогда отношение отрезков выражается как отношение чисел $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m}$.

К понятию бесконечности приводят и некоторые задачи на вычисление площадей и объемов (круг, конус, цилиндр).

Алгоритм попеременного вычитания (Евклида)

Найти отношение двух отрезков $a:b$ ($a > b$).

1) Сколько раз укладывается меньший отрезок b в большем a? — $\boldsymbol{n_0}$

Разность между a и n_0b есть число $b_1 = a - n_0b$.

2) Сколько раз в отрезке b укладывается разность b_1? — $\boldsymbol{n_1}$

Разность между b и b_1 есть число $b_2 = b - n_1b_1$.

3) Сколько раз в отрезке b_1 укладывается разность b_2? — $\boldsymbol{n_2}$

Разность между b_1 и b_2 есть число $b_3 = b_1 - n_2b_2$. И т.д.

$$\frac{a}{b} = \boldsymbol{n_0} + \frac{b_1}{b} = \boldsymbol{n_0} + \frac{1}{\frac{b}{b_1}} = \boldsymbol{n_0} + \frac{1}{\boldsymbol{n_1} + \frac{b_2}{b_1}} =$$

$$= \boldsymbol{n_0} + \frac{1}{\boldsymbol{n_1} + \frac{1}{b_1/b_2}} = \boldsymbol{n_0} + \frac{1}{\boldsymbol{n_1} + \frac{1}{\boldsymbol{n_2} + b_3/b_2}} = \ldots$$

$$\Longrightarrow \quad a : b = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}}$$

Именно таким образом **непрерывные дроби** появились в математике.

Итак, ***отношение двух отрезков всегда можно представить последовательностью натуральных чисел*** $n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots$

Если заданные отрезки соизмеримы (что всегда верно для положительных рациональных чисел древних пифагорейцев), то эта последовательность конечна.

Для несоизмеримых отрезков процесс **бесконечен**.

В V в. до н.э. – две философские теории:

1) <u>континуалистская</u> концепция (*Анаксагор* из Ионии): ***деление до бесконечности возможно*** (квадратура круга софиста Антифона: окружность есть многоугольник с бесконечным числом сторон);

2) <u>атомистическая</u> концепция (*Демокрит* и др.): ***существуют неделимые элементы***.

Трудности с понятиями бесконечного и непрерывного привели к глубокому кризису основ античной науки. Вскрыть их и показать, сколь еще несовершенны представления об этих понятиях, удалось **ЗЕНОНУ Элейскому** – выдающемуся ученику Парменида Великого.

ПАРМЕНИД Великий (V в. до н.э.) – глава школы элеатов, **родоначальник логики**.

Стал первым строить философию на основе логических рассуждений, высказал некоторые логические законы.

“*Прежние же* (до него мыслители), — писал Симпликий (VI в. н.э.), опираясь на текст Евдема Родосского, — *высказывали свое мнение без логических доказательств*”.

Платон называл Парменида мыслителем “*действительно необыкновенной глубины*” и оставил его впечатляющий портрет в диалоге, названном его именем.

Известно, что все свои рассуждения Парменид излагал в стихах.

Парменид, а следовательно, и все элеаты, признавал «два естества»:

1) «**истинно сущее**» – постигается только разумом, с помощью логики: то, что можно получить строгой дедукцией, даже если оно сильно отличается от видимого мира. Именно оно вечно, неподвижно, едино и неделимо (например, теоремы евклидовой геометрии);

2) «**мнимо существующее**» – существует лишь во мнении, основано на ощущениях, носит вероятностный характер.

«**Существовать**» означает «**быть непротиворечивым**»!

Благодаря такому отказу от ощущений уже в Древней Греции и возникли гелиоцентрические системы мира в астрономии, а позже в 19 веке в Европе – и неевклидовы геометрии.

Элеаты систематически пользовались доказательствами путем приведения к абсурду. Так поступал и **Зенон**, прозванный за мастерское владение диалектикой “двуязыким”. Было известно более 40 его апорий, до нас дошло 9 (Аристотель, «Физика»).

Апория меры

"*Если сущее множественно, то оно одновременно должно быть большим и малым, притом большим до безграничности и малым до исчезновения*".

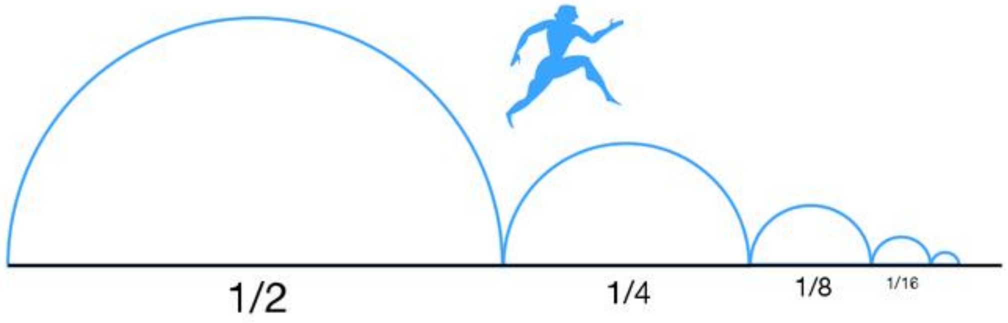
Симпликий (VI в.н.э.):

Доказав, что, "если вещь не имеет величины, она не существует", Зенон прибавляет: "Если вещь существует, необходимо, чтобы она имела некоторую величину, некоторую толщину и чтобы было некоторое расстояние между тем, что представляет в ней взаимное различие".

То же можно сказать о предыдущей, о той части вещи, которая предшествует по малости в дихотомическом делении. Итак, это предыдущее должно также иметь некоторую величину и свое предыдущее. Сказанное один раз можно всегда повторять. Таким образом, никогда не будет крайнего предела, где не было бы различных от друга частей. Итак, если есть множественность, нужно, чтобы вещи в одно и то же время были велики и малы, и настолько малы, чтобы не иметь величины, и настолько велики, чтобы быть бесконечными.

Дихотомия.

Движущееся тело никогда не достигнет конца пути, поскольку сначала оно должно дойти до середины пути, потом — до середины остатка и т.д. Значит, прежде чем дойти до конца, оно должно “отсчитать” бесконечное число середин, а значит, до конца дойти ему не удастся.



Иногда объясняют тем, что ряд степеней ½

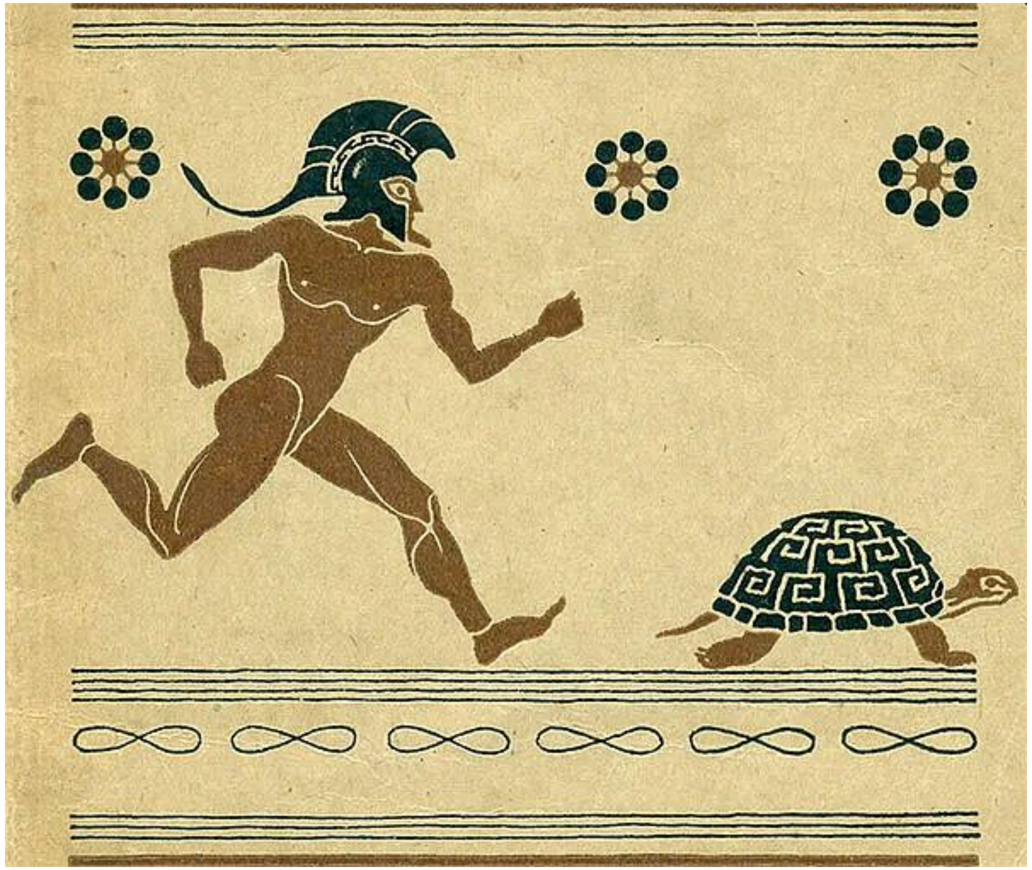
$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\ldots=1$$

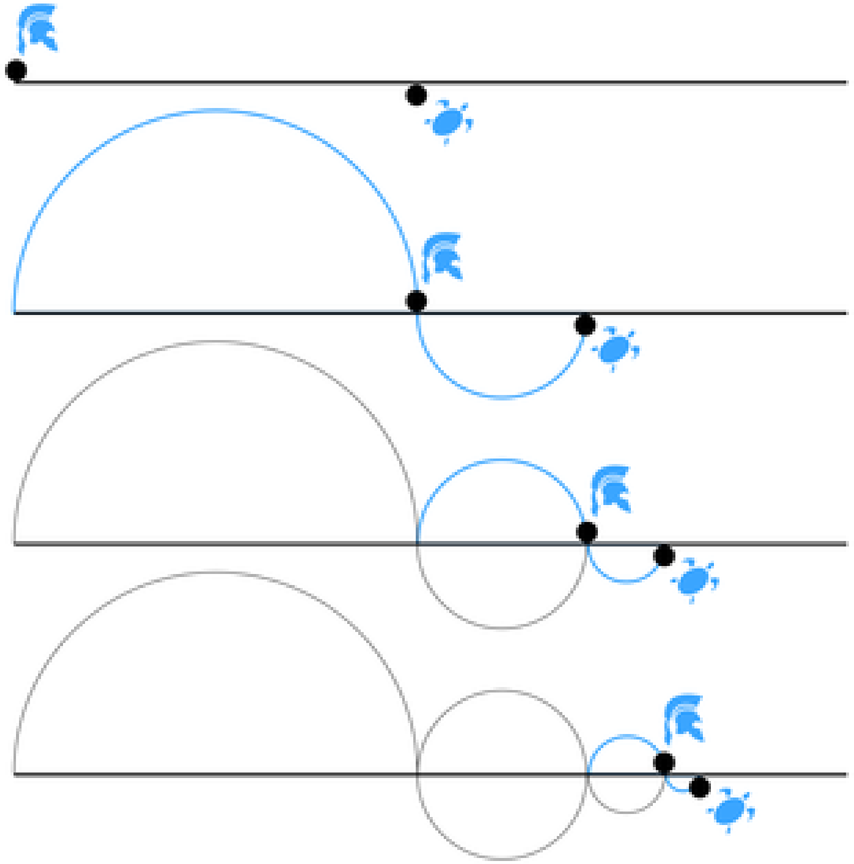
сходится, но это истолкование поверхностно. Проблема в том, что невозможно за конечное время пересчитать весь «натуральный» ряд.

Аристотель: существует актуальная и потенциальная бесконечности. В математике недопустимо пользоваться актуальной бесконечностью.

Ахиллес и черепаха.

Быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, если даст ей хотя бы маленькую фору. Ведь, пока он пробежит расстояние форы, черепаха уползет на другое расстояние, и пока Ахиллес добежит до этого места, она уползет еще дальше, и так до бесконечности.





Кроме «отсчитанной» бесконечности, здесь содержится еще один парадокс «***часть равна целому***»:

Запишем путь Ахиллеса:

$$S_A = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \dots$$

и путь черепахи: $S_ч = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \dots$, где a – «фора», $k = v_A/v_{Ч.}$

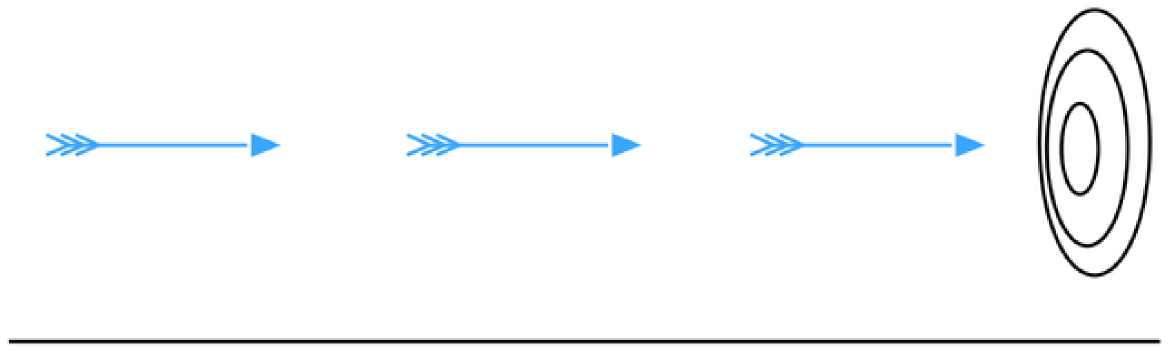
Число слагаемых в этих суммах есть число отрезков пути, и в случае встречи у Ахиллеса и у черепахи эти числа должны совпадать как равные числу отрезков времени движения. Мы видим, что каждому отрезку пути черепахи всегда найдется равный ему отрезок пути Ахиллеса. Если обозначить число слагаемых в сумме черепахи через N, то у Ахиллеса с этой точки зрения число слагаемых должно быть на единицу больше, т.к. есть еще отрезок a: $\Rightarrow N = N + 1$.

Позже у Галилея: «*квадратов столько, сколько и чисел*», у Николая Кузанского и др.

Бернард Больцано: «*Любое бесконечное множество можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с его правильной частью*».

Стрела.

Если предположить, что время и пространство состоят из неделимых частиц, то летящая стрела неподвижна, т.к. в каждый неделимый момент времени она занимает равное себе положение, т.е. покоится, и поскольку отрезок времени представляет собой сумму неделимых моментов, то никакого движения не происходит.



Эта апория направлена против существования неделимых элементов.

А.С. Пушкин

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.

Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

У Зенона предполагается, что пространство в малом ведет себя так же, как пространство в большом, а это не так.

Вопрос о соотношении математической модели и реального мира очень важен!

Д. Гильберт и П. Бернайс. «Основания математики»:

“Мы вовсе необязательно должны верить, что математическое пространственно-временное представление движения имеет физическое значение для произвольно малых интервалов пространства и времени… Более того, есть все основания предполагать, что, стремясь иметь дело с достаточно простыми понятиями, эта математическая модель экстраполирует факты… в пределах того порядка величин, который еще доступен нашему наблюдению…

Бесконечность вовсе не была нам дана, а была только интерполирована или экстраполирована посредством некоторого интеллектуального процесса".

Как ответила античная наука?

1. **Протагор** (V в. до н.э.): Математические абстракции неправомерны, от них нужно отказаться! $\Rightarrow$ Отказ от науки…

2. **Демокрит** (460–380 до н.э.): Нужно составлять тела из конечного числа элементарных частей, размеры которых известны! Однако такой путь «конечной математики» не всегда работает. Например, пирамида не может быть получена из конечного числа призм. Так же, как и конус, цилиндр. Более того, этот путь непригоден для изучения непрерывных величин.

3. **Анаксагор** (V в. до н.э.): не отрицая бесконечной делимости, тем не менее мыслить бесконечный процесс законченным нельзя: «В малом нет наименьшего, но всегда есть еще меньшее» – стало общепринятой точкой зрения.

ЕВДОКС Книдский (406 до н.э. – 355 до н.э.)

Новые основы математики – ***общее учение об отношениях и строгие методы предельных переходов***

Гениальный математик, выдающийся астроном, географ, врач, философ и оратор.

Родился в Книде (на юго-западе Малой Азии) и уже в молодости побывал во многих странах. В Сицилии он учился медицине, а в Великой Греции изучал математику под руководством **Архит**а Тарентского.

Евдоксу было около 23 лет, когда он приехал в Афины — культурный центр Греции того времени. Его, как и многих других молодых людей, привлекала знаменитая Академия **Платон**а. Позже Евдокс основал собственную научную школу в Кизике на Мраморном море. Там же была построена обсерватория, в которой впервые в Элладе наблюдения велись систематически.

В Академии Платона Евдокс заинтересовался задачей сконструировать модель, в которой с помощью равномерных круговых движений можно было бы получить все видимые движения Солнца, Луны и планет, и успешно решил ее.

До этого греки считали небо состоящим из твердых прозрачных оболочек — сфер, расположенных на различных высотах от поверхности Земли и вращающихся вокруг нее. На этих оболочках неподвижно закреплены светила, которые не могут двигаться сами по себе. На самой удаленной от Земли сфере – неподвижные звезды, положение которых относительно друг друга не менялось.

Модель Евдокса состояла из 27 концентрических сфер, в центре которых находилась Земля. Для описания движения Солнца требовалось 3 сферы, для Луны — три, для каждой из пяти планет — по четыре, и последняя, внешняя, сфера была предназначена для неподвижных звезд. Каждая из сфер вращалась с постоянной скоростью. Подбирая скорости вращения, взаимное расположение сфер и углы наклона их осей, Евдокс сумел объяснить не только поведение всех планет на небе, за исключением Марса, но даже такую загадку, как петли, описываемые на небе Марсом, Юпитером и Сатурном на фоне звезд. Позже в Кизике Евдокс составил первый в Европе звездный каталог.

О движении планет, Платоне и Евдоксе см. https://www.youtube.com/watch?v=1_tcEnQf9NE (in English).

Самые глубокие исследования Евдокса относятся к анализу бесконечно малых:

– построил первую античную теорию числа — теорию отношений;

– создал “метод исчерпывания”, позволивший вполне строго совершать предельные переходы и ставший основой античной теории пределов.

Умер Евдокс около 355 г. до н.э., окруженный славой и почетом.