

АРАБСКАЯ МАТЕМАТИКА

VII–XV вв.

1. Астрономия:

а) плоская и сферическая тригонометрия (понятия синуса, косинуса, тангенса угла);

б) вычислительные методы.

2. **Алгебра:** получила статус теоретической дисциплины со своим собственным объектом и методами.

3. Учение о параллельных линиях.

С VII в. начинается **время арабской культуры**. В Европе VI – X вв. – ранний феодализм (века невежества, экономический спад и политический хаос). Потеряны практически все связи с Восточной Римской империей.

VII век – возникновение ислама:

Магомет (Абул Казем бен Абдаллах, Мохаммед) (ок.571 –632)

жил в бедности,
выступил как пророк

622 г. – начало
мусульманской эры
– бегство Магомета из
Мекки в Медину.

630 г. – победное
возвращение

632 г. – смерть Магомета; его
преемники (халифы)
стали распространять
ислам.



Абуль-Касим **Мухаммад** ибн Абдуллах ибн Абд аль-Мутталиб (Шейба) ибн Хашим (Амр) ибн Абд Манаф (аль-Мугира) ибн Кусай ибн Килаб ибн Мурра ибн Кааб ибн Луай ибн Галиб ибн Фихр ибн Малик ибн ан-Надр ибн Кинана ибн Хузайма ибн Мудрик (Амир) ибн Ильяс ибн Мудар ибн Низар ибн Мад ибн Аднан ибн Адад ибн Мукаввим ибн Нахур ибн Тайрах ибн Иаруб ибн Яшджуб ибн Набит ибн Исмаил ибн Ибрахим ибн Азар (Тарих) ибн Нахур ибн Саруг ибн Шалих ибн Ирфхашад ибн Сам ибн Нух ибн Ламк ибн Матту Шалах ибн Ахнух (Идрис) ибн Иард ибн Махлил ибн Кайнан ибн Ианиш ибн Шис ибн Адам.

Завоеваны: 637 г. – Сирия; 642 г. – Египет;

во второй половине VII в. – вся северная Африка;

711 г. – Испания (до 10 в.),

712 г. – начало завоеваний Средней Азии, Закавказья, части Индии.

В 642 г. халиф Омар уничтожил Александрийскую библиотеку:

«Если в книгах содержится нечто, ведущее к истине, то мы имеем от Аллаха то, что еще лучше ведет к ней; а если в них содержится ложное, то они и вовсе не нужны».

«Нам после Христа не нужна никакая любознательность, после Евангелия не нужно никакого исследования» (Тертуллиан, II в. н.э.).

До VIII в. столица арабского халифата – Дамаск (Сирия). Затем империя распалась на два независимых царства:

Восточное (**Багдад**, Ирак, главные успехи в науке);

Западное (**Кордова**, Испания).

Существовали до XIII в.

I этап: VII – VIII вв. – *усвоение греческого и восточного наследия, переводы на арабский язык*

Правили: 754–775 ал-Мансур (с 762 г. столица Багдад)

786–809 Гарун ар-Рашид

Создавались библиотеки; изучались и переводились Евклид, Архимед, Аполлоний, Герон, Птолемей, Диофант, индийские трактаты, сочинения персов и вавилонян.

Язык науки – арабский, хотя не все ученые – арабы.



Н.В. Гоголь

«Ал-Мамун»:

*«...Все части этой великой империи, этого магометанского мира были связаны довольно сильно, и связь эта укреплена была волею **необыкновенного Гаруна**, который постигнул все разнообразные способности своего народа. Он не был исключительно **государь-философ, государь-политик, государь-воин или государь-литератор**. Он соединял в себе всё, умел ровно разлить свои действия на всё и не доставить перевеса ни одной отрасли над другою. **Просвещение чужеземное он прививал к своей нации** в такой только степени, чтобы помочь развитию ее собственного...*

Гарун умел ускорить весь административный государственный ход и исполнение повелений страхом своей вездесущности...»

II этап: IX – XV вв. – *собственные успехи арабских ученых.*



В правление ал-Мамуна (813–833, сына ар-Рашида) в Багдаде был основан Дом Мудрости.

К существовавшей библиотеке была добавлена обсерватория и особым вниманием стали пользоваться астрономия, география, астрология.

XI в. **Исфахан** (Иран) **Авиценна**

XIII в. **Марага** (юг Азербайджана), основал Хулагу, внук Чингисхана (обсерватория **Насир ад-Дина ат-Туси**)

XV в. **Ташкент, Бухара, Самарканд** (Узбекистан), основал **Улугбек**, внук Тимура

Н.В. Гоголь «Ал-Мамун»:

«...Ал-Мамун, государь, которого Царьград назвал великодушным покровителем наук, которого имя история внесла в число благодетелей человеческого рода и который замыслил государство политическое превратить в государство муз. Он был одарен всею живостию и способностью к долговому изучению. Его характер исполнен был благородства. Желание истины было его девизом. Он был влюблен в науку и влюблен совершенно бескорыстно: он любил науку для нее же самой, не думая о ее цели и применении. Он предался ей с исключительною страстью...»

Тогда аравитяне только что открыли Аристотеля. Многообъемлющий и точный философ Греции не мог сойтись с их воображением, слишком стремительным, слишком колоссальным и восточным, но аравийские ученые, занимаясь долгое время кропотливою работою, уже несколько привыкнули к точности и формальности и оттого принялись за него с ученым энтузиазмом.

Эти бесконечные выводы, это облечение в видимость и порядок того, что они прежде чувствовали в душе пламенными отрывками, не могли не околдовать тогдашних ученых.

*Воспитанный под их влиянием **Ал-Мамун**, исполненный истинной жажды просвещения, употреблял все старания **ввести в свое государство** этот чуждый дотоле **греческий мир**. Багдад распростер дружелюбные длани всему ученому тогдашнему свету...»*

Основные области арабской математики:

1. Астрономия:

- а) плоская и сферическая тригонометрия (понятия синуса, косинуса, тангенса угла);
- б) вычислительные методы.

2. Алгебра:

получила статус теоретической дисциплины со своим собственным объектом и методами.

3. Учение о параллельных линиях.

1. Мухаммад ибн Муса
аль-Хорезми аль-Маджуси

(около 787 – около 850)

Сохранилось 5 работ.

Самые известные:

**1. Трактат по арифметике
«Об индийском счете»**

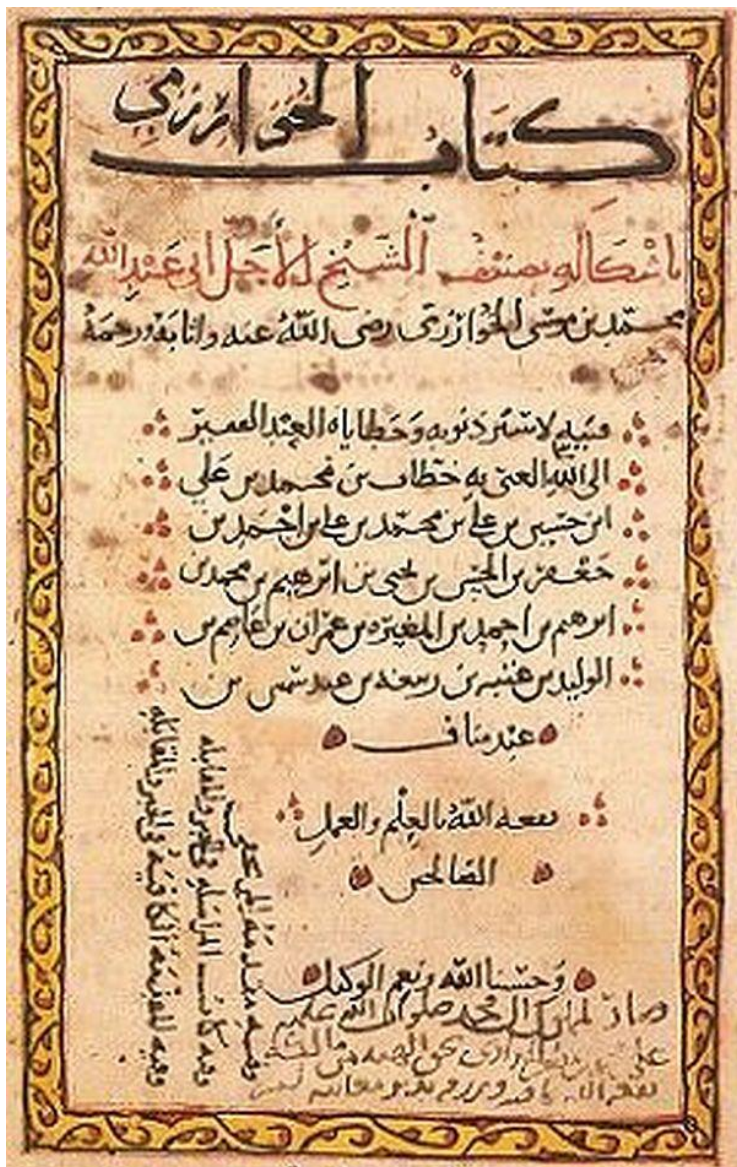
(существует только на латыни,

десятичная позиционная система счисления и операции в ней, есть символ для нуля)

«Когда я увидел, что индийцы составляли из девяти букв любое свое число благодаря расположению, я пожелал раскрыть, если будет угодно Аллаху, что получается из этих букв, для облегчения изучающему...»



2. «Краткая книга об аль-джабр и аль-мукабале» («Аль-китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-джебр ва-ль-мукабала»)



Аль-Хорезми: «...здесь содержится простейшее и полезнейшее в арифметике, постоянно необходимое людям в случаях наследования, завещаний, раздела имущества, судебных тяжб и торговли и в любых сделках друг с другом или когда речь идет об измерении земель, рытье каналов, геометрических расчетах и других вещей разных сортов и типов».

Самое важное: систематическое развитие методов решения уравнений с некоторой неизвестной величиной.

Алгебра чисто риторическая, без символики.

Рассматриваются три вида величин:

- просто числа – дирхем \equiv свободный член;
- неизвестная – вещь (шай), корень (джизр);
- квадрат неизвестной – имущество (маал).

Первая классификация уравнений:

1. Квадраты равны неизвестным:
($ax=b$, $x=0$ – не корень до XVIIв.); $ax^2 = bx$
2. Квадраты равны числу: $ax^2 = c$
3. Неизвестная равна числу: $bx = c$
4. Квадраты и неизвестные равны числу: $ax^2 + bx = c$
5. Квадраты и число равны неизвестным:
(у греков были задачи на приложение площадей $(a \pm x)x = S$). $ax^2 + c = bx$
6. Неизвестные и число равны квадратам: $bx + c = ax^2$

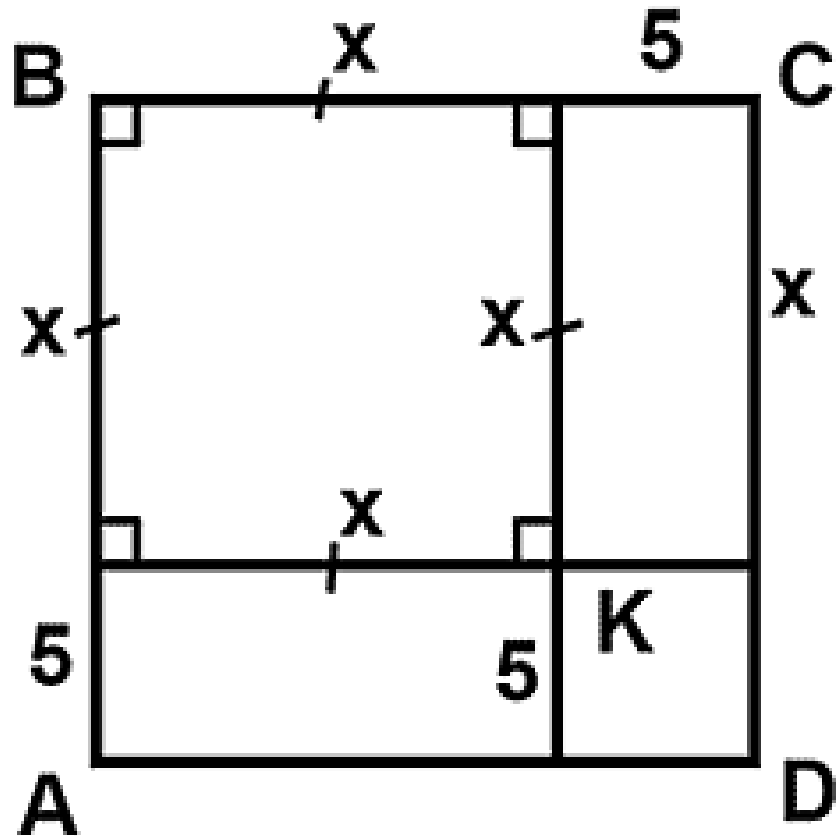
Рассмотрим тип 4. Сначала Аль-Хорезми дает решение числового квадратного уравнения методом «приведения к полному квадрату»:

$$x^2 + 10x = 39$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$



После этого решения следует геометрическое обоснование, которое годится для любого уравнения типа $x^2 + ax = b$, совершенно **отличное от того, что есть у древних греков**: строится квадрат на стороне x и с двух его сторон до гномона добавляются два прямоугольника со сторонами x и 5 (площадь каждого $5x$), который достраивается до полного квадрата площадью 64 .

Операции *аль-джабр* и *аль-мукабала* используются также для приведения заданного уравнения к одному из типов:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

$$2x^2 - 20x + 100 = 58$$

аль-джабр: $2x^2 + 100 = 58 + 20x$

$$x^2 + 50 = 29 + 10x$$

аль – мукабала: $x^2 + 21 = 10x$

Получено уравнение типа 5 для которого существует правило.

$$x^2 + 21 = 10x$$

Правило:

«...раздвой число корней, получится 5.

Умножь это на равное, будет 25.

Вычти из этого 21, останется 4.

Извлеки из этого корень, будет 2.

Вычти это из 5, получится 3. Это и будет корень, который ты искал.

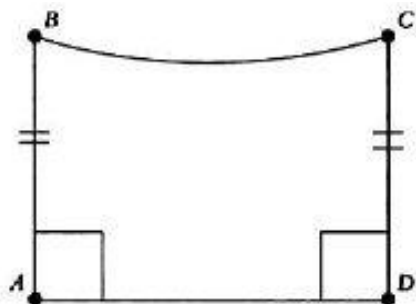
Если хочешь прибавить этот корень к половине числа корней, будет 7. Это – тоже корень, который ты искал».

2. Сабит ибн КОРРА Абу-л-Хасан Сабит-ас-Саби ал-Харрани (836 – 901)

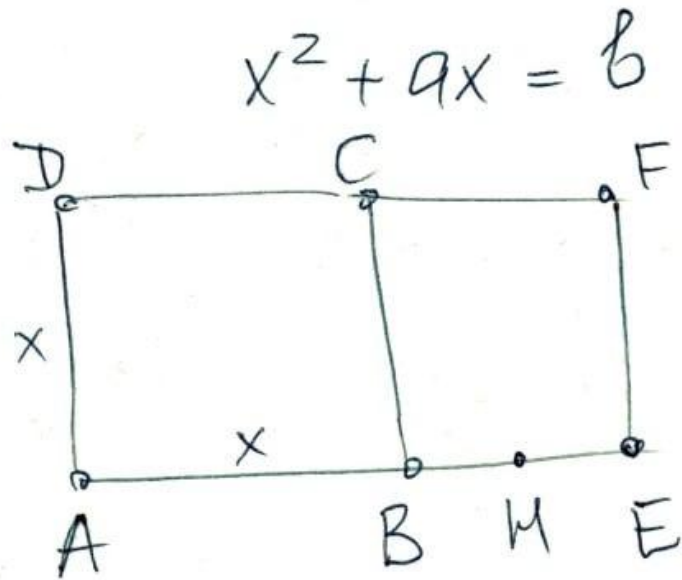
– багдадский ученый

– астроном, **переводчик** и комментатор Архимеда, Аполлония, Евклида, Птолемея, Менелая и др.

1. Трактат о квадратных уравнениях
2. Трактат по теории параллельных линий: рассмотрел четырехугольник Саккери и доказал равенство углов:



Сабит ибн Корра (836 - 901)



- 1) пусть $ABCD = x^2$
- 2) пусть $BE = a \Rightarrow BEFC = ax$
 \Rightarrow по условию
 $AEFD = b$ — известен

- 3) обозначим M — середина $BE \Rightarrow$ Евклид II₆:

$$\underbrace{AE \cdot AB + BH^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{известны}}} = AM^2$$

$\Rightarrow AM$ — известен

$$\Rightarrow x = AM - BM$$

3. Коста ибн Лука аль-Баалбакки (Константин из Гелиополя **820–912**) – уроженец Гелиополя (совр. Баальбек) в средневековой Сирии, ученый-*христианин*, писавший на арабском языке.

Философ, математик, астроном, врач, знаток греческой науки, он работал в «Доме мудрости» в Багдаде и в Армении у патриарха Абу-л-Гитрифа.

Является одной из ключевых фигур в передаче знаний античности к арабо-мусульманскому науке. Константин собирал, переводил с греческого на арабский и комментировал труды многих античных писателей: перевёл составленные Гипсиклом XIV и XV книги «Начал» **Евклида** и написал трактат «О трудных местах книги Евклида»; перевёл труды **Аристотеля**, **Автолика** Питанского, «Механику» **Герона** Александрийского и «Арифметику» **Диофанта** Александрийского. Особенно важно, что в переводе на арабский язык собрания текстов Диофанта (обнаружен в 1972 г. в Мешхеде) Константин частично сохранил считавшиеся давно утраченными комментарии Гипатии Александрийской к «Арифметике» Диофанта.

Сам Константин написал на арабском языке достаточно много математических и научных трактатов: 7 по математике, 4 по астрономии, 2 по физике, 1 по философии и 1 о явлениях природы (о ветре и его причинах). По математике:

– *Книга доказательства действия исчисления двух ошибок (об обосновании правила двойного ложного положения с помощью геометрической алгебры в трех случаях больше-меньше);*

– *Введение в геометрию;*

– *Комментарии к трем статьям и половине книги Диофанта о числовых задачах;*

– *О предложении о шаре и цилиндре;*

– *Книга о сомнительных местах книги Евклида;*

– *Трактат об извлечении задач арифметики из третьей книги Евклида;*

– *Книга о встречном исчислении методом алгебры и алмукабалы.*

В китайской математике (*Математика в девяти книгах*, II до н.э.) :

7. «Избыток и недостаток» – решение линейных уравнений и систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными с помощью правила двух ложных положений. Это **правило позже встречается и у арабов**, и в Западной Европе.

Для уравнения $ax = b$:

Для вычисления значения x на счетной доске выкладывалась

| | | |
|---------|-------|-------|
| таблица | X_1 | X_2 |
| | Y_1 | Y_2 |

Преимущества:

- не требует алгебраических методов;
- удобно и легко запоминается.

Пусть x_1, x_2 – два «ложных» значения x , обычно $x_1 < x < x_2$.

Тогда ошибки легко вычисляются:

«избыток» $y_1 = ax_1 - b$ (>0)

«недостаток» $y_2 = ax_2 - b$ (<0)

Т.к. $b = ax$, то очевидно $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x}$

откуда правило

$x = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}$ – формула

линейной интерполяции, точная лишь для уравнения первой степени.

4. Абу Камил Шуджа ибн Аслам ибн Мухаммад аль-Хасиб аль-Мисри (ок. 850 – ок. 930)

родом из Египта, развивал методы аль-Хорезми
(*аль-Хасиб аль-Мисри* = египетский вычислитель).

«Китаб аль-джабр валь-мукабала»

– вводит высшие степени неизвестного по аддитивному принципу (отказ от принципа однородности древних греков) и рассматривает некоторые уравнения более высоких, чем аль-Хорезми, степеней (биквадратные);

– исследует иррациональности и их преобразования, применяет формулу суммы квадратных корней и даже использует их в качестве коэффициентов уравнений;

– занимается диофантовыми уравнениями:

а) впервые (**до перевода на арабский язык**) появляются **38 задач на методы Диофанта** для задач 8–9 II книги «Арифметики» + «двойные равенства» и др.;

б) опираясь на те же задачи Диофанта, исследует вопрос о разрешимости уравнения $y^2 = -x^2 + ax + b$:

$b + a^2/4$ должно быть суммой двух квадратов.

Абу Камил (850 - 930):

1) отказ от принципа однородности

$$2) \sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

$$3) y^2 = -x^2 + ax + b$$

$$y^2 = -\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) + b + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \underbrace{b + \frac{a^2}{4}}$$

Диофант Π_9 : Σ двух квадратов

Задачи Диофанта у Абу Камила:

1. $x^2 + 5 = y^2$.
2. $x^2 - 10 = y^2$.
3. $x^2 + 3x = y^2$.
4. $x^2 - 6x = y^2$.
5. $x^2 + 10x + 20 = y^2$.
6. $x^2 - 8x - 30 = y^2$.
7. $x^2 + x = y_1^2$,
 $x^2 + 2x = y_2^2$.
8. $x^2 + x = y_1^2$,
 $x^2 + 3x = y_2^2$.
9. $x^2 - 2x = y_1^2$,
 $x^2 - 3x = y_2^2$.
10. $x - x^2 = y^2$.
11. $x + x^2 = y_1^2$,
 $x - x^2 = y_2^2$.
12. $5 = x^2 + y^2$.
13. $x_1 + x_2 = 10$,
 $20 + x_1 = y_1^2$,
 $50 - x_2 = y_2^2$.
14. $x_1 + x_2 = 10$,
 $20 + x_1 = y_1^2$,
 $50 + x_2 = y_2^2$.
15. $2 + x = y_1^2$,
 $3 - x = y_2^2$.
16. $20 - x = y_1^2$,
 $10 - x = y_2^2$.
17. $30 + x = y_1^2$,
 $20 + x = y_2^2$.
18. $10 + x = y_1^2$,
 $10 - x = y_2^2$.
19. $-x^2 + 8x + 109 = y^2$.
20. $8x + x^2 = y_1^2$,
 $2x - x^2 = y_2^2$.
21. $-x^2 + 2x + 49 = y^2$.
22. $x^2 + x = y_1^2$,
 $x^2 - x = y_2^2$.
23. $x^2 + 2x = y_1^2$,
 $x^2 - 3x = y_2^2$.
24. $-x^2 + 10x - 8 = y^2$.
25. $-x^2 - 6x + 260 = y^2$.
26. $x^2 + 2x = y^2$,
 $y^2 + 3y = z^2$.
27. $x^2 + 3x = y^2$,
 $y^2 + 6y = z^2$.
28. $x^2 + 2x = y^2$,
 $y^2 + y = z^2$.
29. $x^2 + 4x = y^2$,
 $y^2 + 2y = z^2$.
30. $x^2 - 4x = y^2$,
 $y^2 - 2y = z^2$.
31. $x^2 + x = y_1^2$,
 $x^2 + 1 = y_2^2$.
32. $x^2 - 5 = y^2$,
 $y^2 + y = z^2$.
33. $x^2 + 4x = y^2$,
 $x^2 - 2x - 1 = z^2$.
34. $x^2 - 2x = y^2$,
 $y^2 + y = z^2$.
35. $x^2 + 3x + 1 = y_1^2$,
 $x^2 - 3x + 2 = y_2^2$.
36. $x^2 - x + 1 = y_1^2$,
 $x^2 + x - 1 = y_2^2$.
37. $x^2 - x + 2 = y_1^2$,
 $x^2 + x - 3 = y_2^2$.
38. $x^2 + x + 1 = y_1^2$,
 $x^2 + 2x + 2 = y_2^2$.

Все 38 проблем Абу Камила сводятся к задачам отыскания рациональных точек на алгебраических кривых. Первые 25 задач имеют дело с плоскими и пространственными кривыми рода 0, остальные – с пространственными кривыми рода 1 – поразительный принцип классификации для того времени. По-видимому, у Абу Камила были какие-то свои эквиваленты этого алгебро-геометрического инварианта.

1. Плоским кривым рода 0 отвечают задачи 1–6, 10, 12, 21, 24, 25. Метод Абу Камила состоит в проведении через заранее известную рациональную точку прямой, пересекающей заданную кривую в другой рациональной точке.

Исходная рациональная точка может быть либо **конечной**, либо **бесконечной**, и, обращая внимание на порядок следования задач, можно утверждать, что Абу Камил эти два случая различает:

1a. Задачи 1–6: подстановка $y = x \pm t$ отвечает проведению прямой через бесконечно удалённую точку.

16. Задачи 10, 12, 21, 24, 25: подстановка Абу Камила отвечает проведению прямой через конечную рациональную точку кривой, которую нужно угадать. Расположены эти задачи по степени трудности этого угадывания.

2. Задачи 7–9, 11, 15–18, 20, 22, 23 имеют дело с кривыми рода 0 в трёхмерном пространстве, задачи 13 и 14 – в четырёхмерном пространстве.

Задачи 15–18 Абу Камил решает так же, как и Диофант, сводя их к "*двойным равенствам*". Остальные задачи о кривых рода 0 в трёхмерном пространстве Абу Камил сводит к уравнениям типа $u^2 = \pm v^2 + bv + c$, рассмотренным им ранее.

3. Остальные задачи – о нахождении рациональных точек на кривых рода 1 в трёхмерном пространстве можно разбить на два класса:

3а. Задачи 31, 33, 35–38 – системы уравнений типа

$$\begin{cases} x^2 + b_1x + c_1 = u^2 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + b_2x + c_2 = v^2 & (2) \end{cases}$$

36. Задачи 26–30, 32, 34 – системы уравнений типа

$$\begin{cases} x^2 + bx + c = y^2 \\ y^2 + dy = z^2 \end{cases}$$

Однако метод, который для их решения применяет Абу Камил, не отличается от метода Диофанта для решений "двойных равенств", начинающегося с подстановки вида $u = v + p$ ($z = x + p$), позволяющей получить некоторое линейное уравнение связи (на примере **3а**):

$$(1): \quad \begin{aligned} x^2 + b_1x + c_1 &= v^2 + 2vp + p^2 = x^2 + b_2x + c_2 + 2vp + p^2 \\ b_1x + c_1 &= b_2x + c_2 + 2vp + p^2 \\ 2vp &= (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2 + p^2) \end{aligned}$$

После возведения этого линейного уравнения в квадрат с учётом (2)
получаем: $(b_1 - b_2)^2 x^2 + 2(b_1 - b_2)(c_1 - c_2 + p^2)x + (c_1 - c_2 + p^2)^2 = 4v^2 p^2 = 4p^2 x^2 + 4p^2 b_2 x + 4p^2 c_2$

Если коэффициенты при x^2 будут равными, т.е. при $p = \pm \frac{b_1 - b_2}{2}$, мы получим рациональное решение системы **3а**:

$$x = \frac{(c_1 - c_2 - p^2)^2 - 4p^2 c_2}{4p^2 b_2 - 2(b_1 - b_1)(c_1 - c_2 - p^2)}.$$

Если в это выражение подставить полученное условие на параметр p :

$p^2 = \frac{(b_1 - b_2)^2}{4}$, то выражение для неизвестной x будет выглядеть как

$$x = \frac{16(c_1 - c_2)^2 - 8(c_1 + c_2)(b_1 - b_1)^2 + (b_1 - b_1)^4}{8(b_1 - b_1)(b_1^2 - b_2^2 - 4(c_1 - c_2))}.$$

Ж. Сезиано (Jacques Sesiano, род. 1944) дал этому решению Абу Камила алгебро-геометрическую интерпретацию: в однородных координатах (X, U, V, W) , где $x = X/W, u = U/W, v = V/W$, система **3a** имеет вид

$$\begin{cases} X^2 + b_1 XW + c_1 W^2 = U^2 & (1') \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^2 + b_2 XW + c_2 W^2 = V^2 & (2') \end{cases}$$

и определяет кривую L рода 1, имеющую четыре рациональные бесконечно удалённые точки $M_1(1, 1, 1, 0), M_2(1, -1, 1, 0), M_1(1, 1, -1, 0), M_1(1, -1, -1, 0)$.

Подстановка $u = v + p$, или в однородных координатах $U = V + pW$, определяет пучок плоскостей, проходящих через две рациональные бесконечно удалённые точки M_1 и M_4 .

При подходящем выборе p одна из плоскостей пучка (обозначим её Π) будет касаться L в одной из этих точек (у нас – M_1) и притом обязательно рациональной.

Тогда в точках M_1 и M_4 кратность пересечения кривой L с плоскостью Π будет, соответственно, равна 2 и 1. Учитывая, что порядок кривой равен 4, а точки M_1 и M_4 и плоскость Π рациональны, получаем, что плоскость Π пересечёт кривую L ещё в одной и притом рациональной точке, которая и соответствует найденному решению системы **3а**.

Аналогичными рассуждениями Сезиано показал, что в случае **3б** подстановка Абу Камила соответствует проведению рациональной плоскости через две бесконечно удалённые точки и касающейся заданной кривой в одной из этих точек. Как и в предыдущем случае эта плоскость пересечёт кривую в ещё одной рациональной точке.

Домашнее задание: Дать аналогичное объяснение методу Абу Камила для решения задач типа **36** (задачи 26–30, 32, 34):

$$\begin{cases} x^2 + bx + c = y^2 \\ y^2 + dy = z^2 \end{cases}$$

с помощью подстановки $z = x + p$.

Математические трактаты Абу Камила:

- **Книга об алгебре и алмукабале** (= Исчисление плоских фигур);
- Совершенная (охватывающая) книга об алгебре и алмукабале;
- Редкости арифметики (неопределенные линейные уравнения с несколькими неизвестными – китайские задачи про покупку птиц, полностью перечисляются все решения, в одном случае – все 2676!);
- Измерение пятиугольника и десятиугольника;
- Завещание с помощью корней (деление наследства с помощью квадратных уравнений);
- Завещание с помощью алгебры и алмукабалы;
- Книга о неопределенных задачах (1й и 2й степеней);
- Измерение земель;
- Книга о двух ошибках (не сохранилась);
- Достаточная книга (не сохранилась).

В X веке на средневековом Востоке появляются исследования, связанные с важными проблемами теории чисел:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{в } \mathbb{Z} \qquad (2) \quad \begin{cases} x^2 + k = u^2 \\ x^2 - k = v^2 \end{cases} \quad \text{в } \mathbb{Q}.$$

Сохранилось три трактата: а) автор неизвестен и утеряно начало;

б) автор двух других – **Абу Джафар Мухаммад ибн ал-Хусайн**.

Ал-Хусайн упоминает **Абу Мухаммада ал-Худжанди**, занимавшегося теми же проблемами, но получившего неполные, а иногда и неверные результаты. Кроме этого, трактат ал-Хусайна представляет собой обработку первого трактата, автор которого утверждает, что до него еще никто этими вопросами не занимался, и по тексту видно, что автор первого трактата еще не знаком с работами Косты ибн Луки.

Ал-Хусайн не только знаком с методами Диофанта, но даже дает им дальнейшее развитие. При этом решение (1) – нахождение целочисленных прямоугольных треугольников – вспомогательная ступень к решению (2).

5. Абу Махмуд Хамид ибн Хидр ал-Худжанди (умер ок. 1000) – уроженец Ходжента, работал в Рее. Лично был знаком с ал-Бируни, который писал, что ал-Худжанди представлял собой «исключительное явление своей эпохи в деле изготовления астролябий и других инструментов».

– Различные геометрические задачи.

– Арифметический трактат, который цитируется в «Трактате о построении прямоугольных треугольников с рациональными сторонами» Мухаммада ибн аль-Хусайна, который утверждает, что **ал-Худжанди доказал**, что **«сумма двух кубических чисел не является кубическим числом» (!)**.

Имена Мухаммад и Махмуд в арабском языке отличаются одной лишней буквой + ал-Хусайн в 970 г. пишет об ал-Худжанди как о покойном («да смилостивится над ним Аллах»), поэтому возникла **гипотеза, что это два разных человека**. *Живших в одно время с одинаковой фамилией???* Источники не подтверждают существование двух таких ученых.

В каталоге Матвиевской и Розенфельда есть (не ал-Хусайн!):

Абу Джафар Мухаммад ибн **ал-Хасан ал-Хазин** ал-Хурасани (умер между 961 и 971 гг.) – персидский астроном и математик, уроженец Хорасана, работал в Рее; «хазин» – библиотекарь.

- Комментарии к десятой книге сочинения Евклида;
- Книга об изображении сферы на плоскости;
- Доказательство седьмого предложения книги Бану Муса;
- Частичные исследования склонения частичных склонений и восхождений в прямой сфере (сферическая теорема синусов);
- **Трактат о решении кубического уравнения с помощью конических сечений** (упоминает Хайям и др.: ал-Хазин решил уравнение ал-Махани);
- Книга о числовых задачах;
- Книга начал геометрии;
- Книгу о расстояниях и объёмах;
- Книгу о наблюдательных инструментах;
- Зидж тимпанов;
- Большое введение в науку о звёздах;
- Книгу об уравнении Солнца...

6. Абу Джафар Мухаммад ибн ал-Хусайн ал-Харис (X в.)

Математические трактаты:

- Трактат о построении прямоугольных треугольников с рациональными сторонами
- О нахождении двух средних пропорциональных между линиями методом неподвижной геометрии;
- Трактат о доказательстве того, что невозможно, чтобы корни двух квадратных чисел, сумма которых является квадратом, были бы нечетными, но оба они четные или один из них четный, а другой – нечетный.
- Усовершенствование «Книги о конических сечениях».

970 – 1170

НОВАЯ ВОЛНА ИССЛЕДОВАНИЙ вознесла
зарождающуюся алгебру на еще большую высоту.

2 течения:

– *арифметико-алгебраическое*

(аль-Караджи и ученики);

– *геометрическое*

(аль-Хайсам, аль-Хайями, Шараф-ад-Дин ат-Туси,
Насир-ад-Дин ат-Туси и др.).

7. Абу Бакр Мухаммад ибн аль-Хусайн АЛЬ-КАРАДЖИ (X– начало XI в.)

Родом из Персии, недалеко от Тегерана. Автор «Достаточной книги по арифметике», «Аль-Фахри», «Аль-Бади» (о неопределенных задачах).

В «Достаточной книге» есть алгебраическая часть, в которой разбираются шесть канонических типов уравнений. Аль-Караджи **впервые** сгруппировал перед каждой задачей элементы алгебраического исчисления, которые необходимы для ее решения: преобразование иррациональных величин, тождества и т.п. – т.е. книга приобретает **вид теоретического учебника**.

Главный труд – «*Аль-Фахри*» (посвящение Фахру аль-Мулку – визирю Багдада) – написан с той же теоретической направленностью. Определена **цель** этого исчисления как **определение неизвестных величин при помощи известных**. Алгебра явным образом **сделалась арифметикой неизвестного**. Определен ее предмет и был расширен круг методов и алгоритмов для работы с неизвестными величинами.

В этой работе аль-Караджи:

1) вводит бесконечный ряд степеней неизвестного:

$$1: x = x: x^2 = x^2: x^3 = \dots$$

$$1: (1/x) = (1/x): (1/x^2) = \dots$$

2) воспринял отрицательные числа Диофанта (автор арабского перевода «Искусство алгебры» – Коста ибн Лука (820–912)), повторяет аксиоматическое правило знаков при умножении + добавляет правило для вычитания:

$$\text{а) } ax^k - bx^k = (a - b)x^k, \quad \text{если } a > b,$$

$$\text{либо } = -(b - a)x^k, \quad \text{если } a < b$$

$$\text{б) } ax^k - (-bx^k) = (a+b)x^k$$

3) строит алгебру многочленов, но ограничивается делением на одночлены;

4) суммирует некоторые конечные арифметические ряды (например, сумма кубов, сумма квадратов:

$$\sum_1^n k^3 = \left(\sum_1^n k \right)^2, \quad \sum_1^n k^2 = \left(\sum_1^n k \right) \left(\frac{2}{3}k + \frac{1}{3} \right);$$

5) работа с иррациональными величинами – сумма и разность кубических корней на числовых примерах.

6) треугольник Паскаля до $n = 12$

(в 1265 г. Насир-ад-Дин ат-Туси помещает правило построения для любого n);

7) неопределенные уравнения Диофанта (есть еще один трактат на эту тему «Аль-Бади»);

Ученики и последователи: ас-Самавал, аш-Шахразури.

Проблемам неопределенного анализа у **аль-Караджи** в «Аль-Фахри» посвящена глава 11 «Истикра» (последовательный подбор). Аль-Караджи этот термин использует так же, как название определенного метода решения уравнений вида $ax^2 + bx + c = y^2$ (левая часть здесь не является полным квадратом).

«Истикра применяется в арифметике, когда тебе предложена сумма одного, двух или трех последовательных видов и эта сумма по формальному выражению не составляет квадрата, но ее значение должно быть квадратом, и ты хочешь узнать его корень».

Аль-Караджи формулирует достаточное условие разрешимости такого уравнения: число квадратов или свободный член должны быть положительными квадратными числами. Для этого он применяет подстановку Диофанта, которая есть и у Абу Камила, но впервые явно формулирует его в общем виде, а не на конкретных примерах:

Если $a = \alpha^2$, то $y = \alpha x + \beta$. Если $c = \gamma^2$, то $y = \beta x + \gamma$.

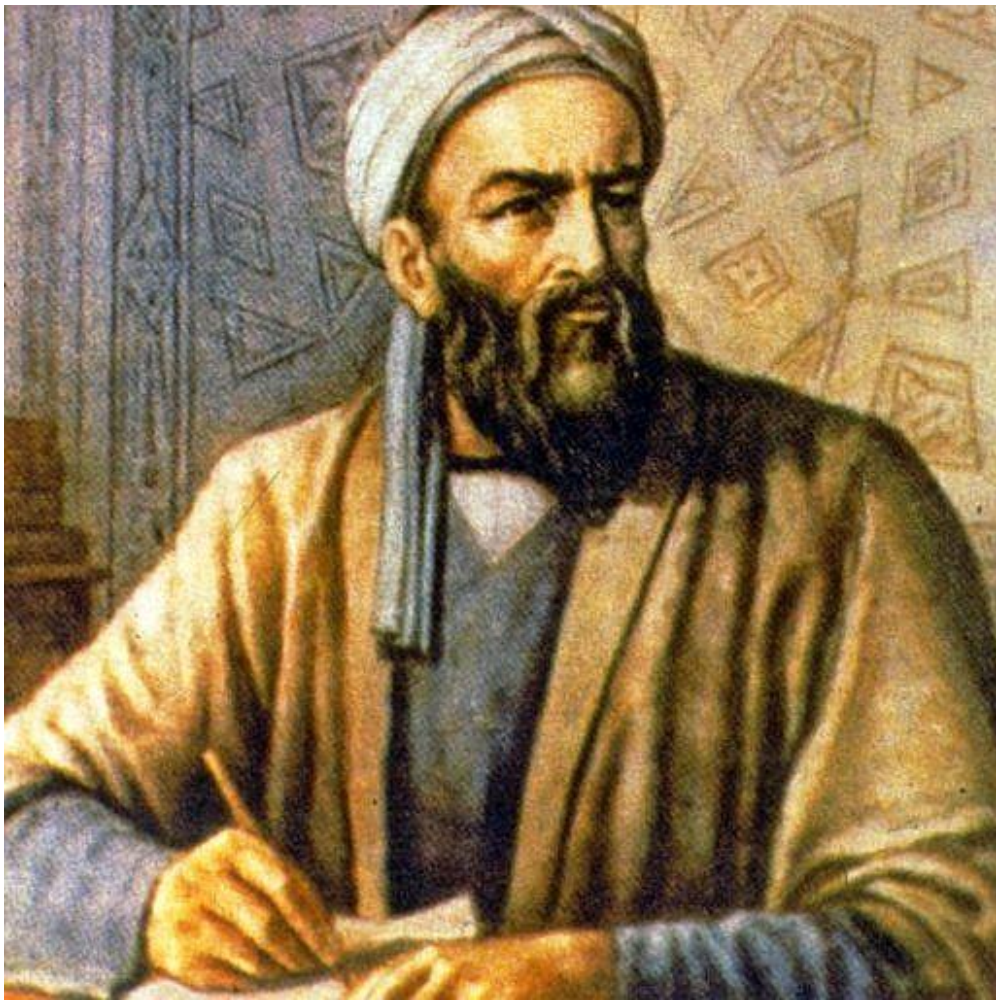
Кроме того, аль-Караджи ставит вопрос о существовании рациональных решений уравнений, разбираемых ранее Абу Камилем, и повторяет его критерий разрешимости (см. рукописный слайд ранее).

Аль-Караджи приводит и примеры неразрешимых в рациональных числах уравнений такого типа:

$$10x - (x^2 + 1) = y^2; \quad 2x^2 + 10x + 10 = y^2$$

В конце этой главы аль-Караджи пишет: «Этого в этом месте будет достаточно, но я, конечно, возвращусь к этому в комментариях к моей работе, которая относится к кубам, квадрато-квадратам и последующим степеням. Я написал также работу, в которой метод «истикра» рассматривается в развернутом виде».

По-видимому, здесь аль-Караджи имеет в виду свой другой трактат, посвященный диофантовым уравнениям, «Аль-Бади», в котором действительно этот метод находит более развернутое изложение.



8. Абу-р-Рейхан аль-БИРУНИ из Хорезма (973 – около 1050)

История, география, филология, астрономия, математика, геодезия, минералогия, геология, фармакология и др.

«*Канон Масуда*» посвящен астрономии и звездам.

– в отличие от других зиджей в нем есть математические доказательства всех утверждений;

– в задаче о стороне правильного девятиугольника возникают кубические уравнения $x^3+1 = 3x$, $x^3 = 3x+1$, и аль-Бируни указывает, что эта задача неразрешима с помощью циркуля и линейки, т.к. сводится к трисекции угла. Поскольку интересует лишь численное решение, то отказ от геометрического пути и метод последовательных приближений.

Работы аль-Бируни по тригонометрии:

1. Об определении хорд в круге при помощи вписанной в него ломаной линии.
2. Об индийских рашиках (содержит тройное правило).
3. «Сферика».
4. «Книга жемчужин о плоскости сферы».

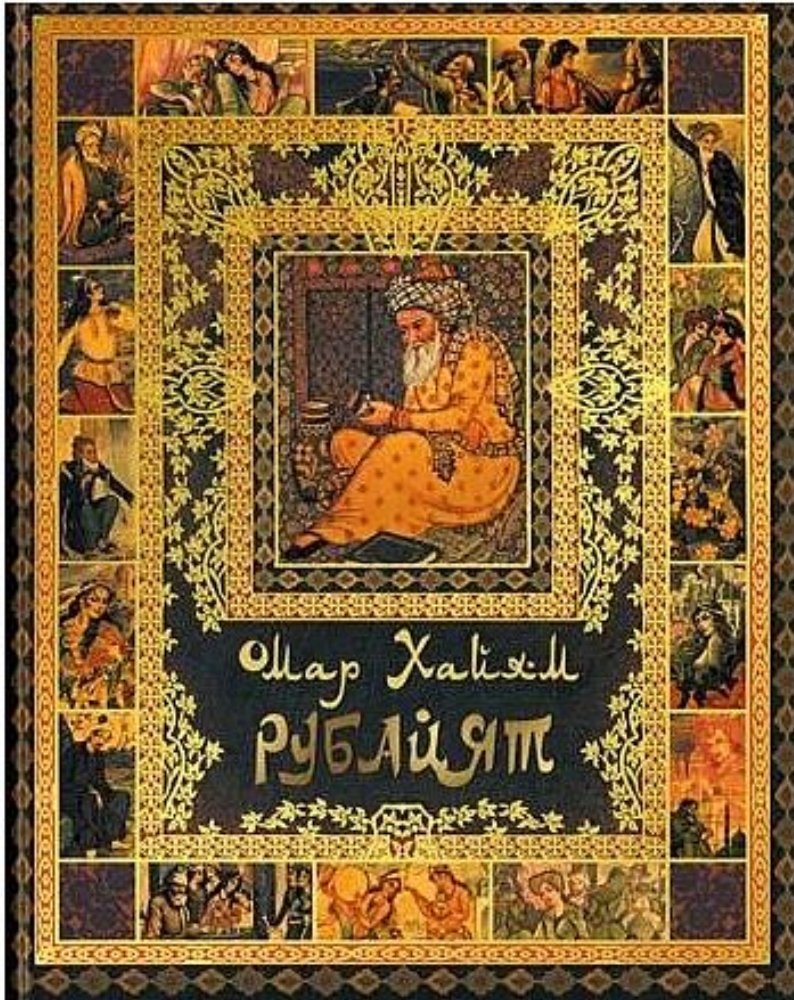


Уже в IX в. на арабском Востоке уже появились понятия синуса, косинуса, тангенса, были известны основное тригонометрическое тождество, формулы синуса суммы или разности, формулы приведения.

9. ОМАР ХАЙЯМ (1048 – 1131)

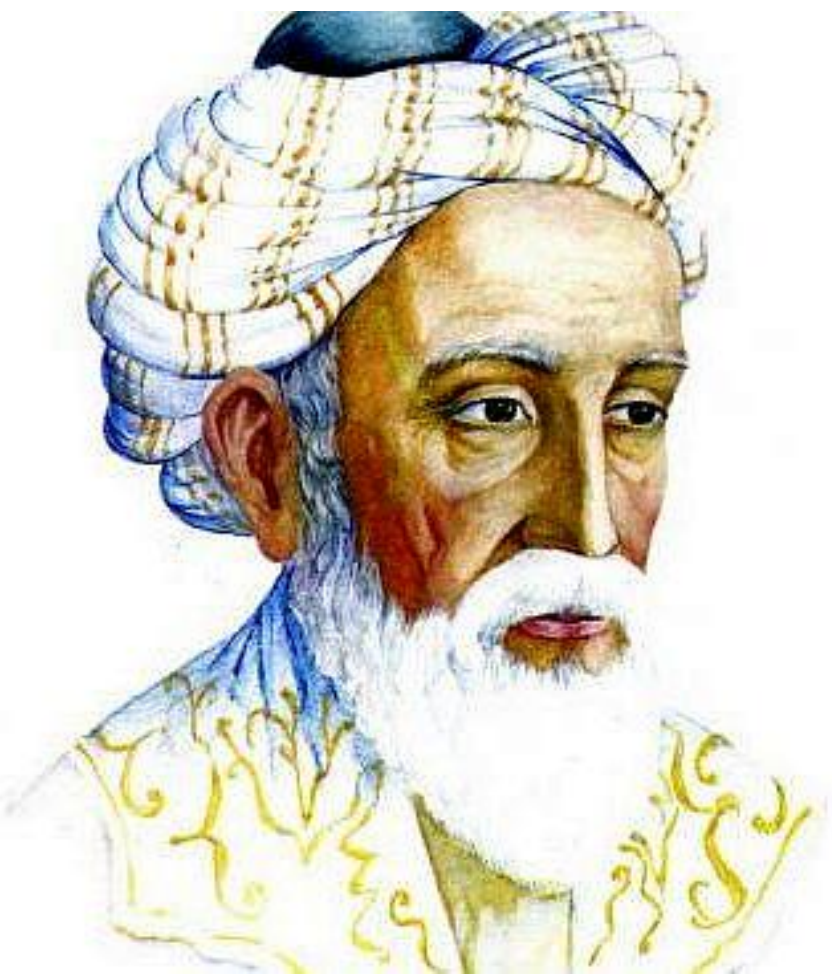
*Гияс-ад-Дин Абу-л-Фатх **Омар** ибн Ибрахим ал-**Хайям***

Известный персидский поэт; родом из Хорасана. Часто переезжал, работал в Исфахане, Самарканде и др.



Чтоб мудро жить прожить, знать надобно
немало,
Два важных правила запомни для начала:
Ты лучше голодай, чем что попало есть,
И лучше будь один, чем вместе с кем попало.

Знайся только с достойными дружбы
людьми,
С подлецами не знайся, себя не срами,
Если подлый лекарство нальет тебе – вылей!
Если мудрый подаст тебе яду – прими!



Мне мудрость не была чужда земная,
Разгадки тайн ища, не ведал сна я.
За семьдесят перевалило мне,
И что ж узнал я? – Что ничего не знаю.

Я познание сделал своим ремеслом,
Я знаком с высшей правдой и с низменным злом.
Все тугие узлы я распутал на свете,
Кроме смерти, завязанной мёртвым узлом»

Вино запрещено, но есть четыре «но»:
Смотря кто, с кем, когда и в меру ль пьет вино.
При соблюдении сих четырех условий
Всем здравомыслящим вино разрешено.

А. Суханов. Романс о старости.

<https://www.youtube.com/watch?v=irhtTlC-aZg>

Омар **ХАЙЯМ** – математик:

развивал геометрическое направление. Образец – Архимед, придерживался принципа однородности древних греков.

Особое внимание уделял теории отношений, теории параллельных (четырёхугольник Саккери).

«О доказательствах задач алгебры и мукабалы»

содержит геометрическую теорию кубических уравнений:

– утверждает, что их невозможно решить с помощью циркуля и линейки;

– дает классификацию кубических уравнений и для каждого случая геометрическое доказательство существования решения с помощью окружности и конического сечения.

НО: нигде не отметил, что возможны три различных решения. Есть ошибки.

Ко времени Хайяма математики арабского Востока уже осознали, что **решение уравнений составляет отдельную науку:**

Я говорю, с помощью Аллаха и при его прекрасной поддержке, что искусство алгебры и алмукабалы есть научное искусство, предмет которого составляют абсолютное число и измеримые величины [6], являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-нибудь известной вещи, по которой их можно определить. Эта вещь есть или количество или отношение, но связанное ни с чем другим. В это ты должен глубоко вникнуть. Цель этого искусства состоит в нахождении соотношений, связывающих его предмет с вышеуказанными данными. Совершенно этого искусства состоит в знании методов изучения, посредством которых можно постигнуть способ определения вышеупомянутых неизвестных, как числовых, так и геометрических.

ТРАКТАТ ДОСТОЧТИМОГО УЧЕНОГО
ГИЯСЭДИНА АБУ-Л-ФАТХА ОМАРА
ИБИ ИБРАГИМА ХАЙЯМА ИЗ НИШАПУРА

(Да освятит Аллах его драгоценную душу!)

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ
И АЛМУКАБАЛЫ¹⁾

Во имя Аллаха всемилостивого, всемилосердного!
Хвала Аллаху, господину миров, добрый конец добродетельным, никакой вражды ко всем, кроме несправедливых, и благословение всем пророкам, в особенности Мохамеду и всему его святому потомству.

Один из поучительных вопросов, необходимый в разделе философии, называемом математикой, это искусство алгебры и алмукабалы [1], имеющее своей целью определение неизвестных, как числовых, так и измеримых. В нем встречается необходимость в некоторых очень сложных видах предложений, в решении которых потерпело неудачу большинство этим занимавшихся. Что касается древних, то до нас не дошло сочинение, в котором они рассматривали бы этот вопрос: может быть они искали решение и изучали этот вопрос, но не смогли преодолеть трудностей, или их исследования не требовали рассмотрения этого вопроса, или, наконец, их труды по этому вопросу

¹⁾ Рисалат ал-хаким ал-фадил Гийас ад-дин Аби-л-Фатх 'Умар иби Ибрахим ал-Хайям ан-Нишабурй фи-л-баракхйн 'ала масали ал-джабр ва-л-мукабала.

Я говорю, с помощью Аллаха и при его прекрасной поддержке, что искусство алгебры и алмукабалы есть научное искусство, предмет которого составляют абсолютное число и измеримые величины [6], являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-нибудь известной вещи, по которой их можно определить. Эта вещь есть или количество или отношение, но связанное ни с чем другим. В это ты должен глубоко вникнуть. Цель этого искусства состоит в нахождении соотношений, связывающих его предмет с вышеуказанными данными. Совершенство этого искусства состоит в знании методов изучения, посредством которых можно постигнуть способ определения вышеупомянутых неизвестных, как числовых, так и геометрических.

Сложные уравнения бывают трехчленные и четырехчленные. Видов трехчленных уравнений двенадцать, три первые из которых суть:

1. Квадрат и корни равны числу,
2. Квадрат и число равны корням,
3. Корни и число равны квадрату [12].

Эти три вида упоминаются в сочинениях алгебраистов и доказываются там геометрическим, а не числовым способом.

Вторые три вида суть:

1. Куб и квадраты равны корням,
2. Куб и корни равны квадратам,
3. Корни и квадраты равны кубу [13].

Алгебраисты говорят, что три вторые вида пропорциональны трем первым, каждый—своему соответственному, т. е. уравнение: куб и корни равны квадратам—равносильно уравнению: квадрат и число равны корням [14] и также по отношению к двум другим. Но они не доказали этого, когда предметы задач суть измеримые количества.

10. Насир ад-Дин ат-Туси

(конец XII – 1213)

Родился в Мараге (Азербайджан), жил в Иране.

Составлял астрономические таблицы и в них **сферическая тригонометрия** наконец отрывается от астрономии, **становится самостоятельной дисциплиной.**

В алгебре – последователь Хайяма + добавил систематическое исследование существования положительных корней, используя рассуждения, напоминающие вычисление первой производной.

Много занимался поиском численных решений кубических уравнений.





GHYATH-AL-DIN JAMSHID KASHANI
(14–15) A. C.

11. Гияс ад-Дин АЛЬ-КАШИ (умер в 1429 г.)

Крупный математик, вычислитель и астроном. Работал в обсерватории Улугбека (Самарканд) в период ее наивысшего расцвета (1394–1449).

«*Ключ к арифметике*» – ввел десятичные дроби.

«*Трактат об окружности*» – вычислил число π с точностью до 16 верных знаков $\pi = 3,14159265358979325$ (ошибка в последнем знаке: вместо 5 должно быть 38) как полусумму периметров вписанного и описанного правильного многоугольника. Лишь 150 лет спустя Ван-Роумен улучшил этот результат.

«**Зидж Улугбека**» – астрономические таблицы высокой точности, в основе – более точное значение $\sin 1^\circ$.

В 1500 г. Мариам Челеби в комментариях к «Зиджу Улугбека»:

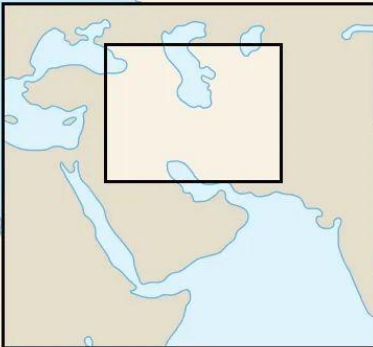
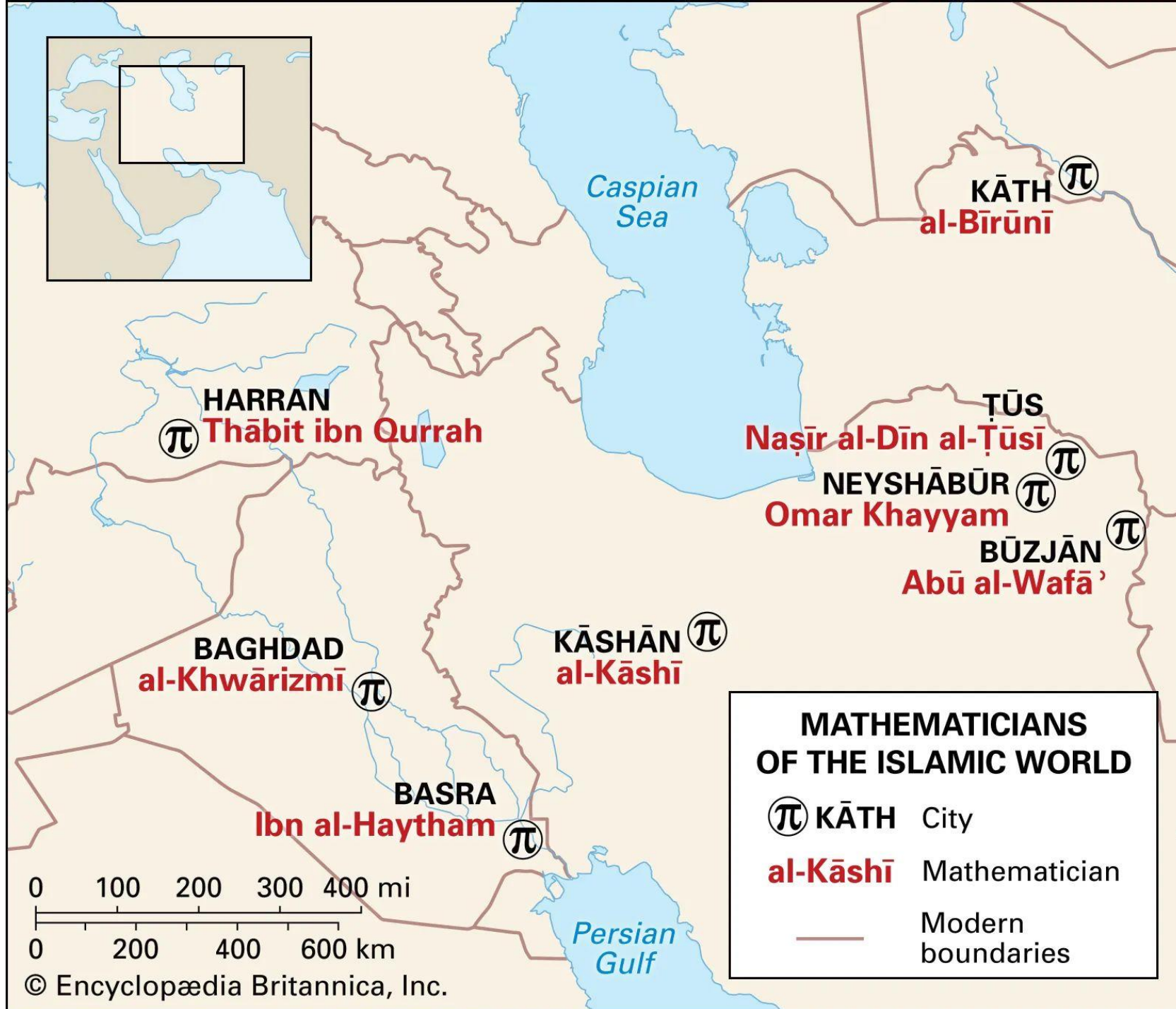
*«Перл славы и чести своего времени **Гиясэддин Джемшид**, применяя метод алгебры и алмукабалы и считая синус вещью, свел эту задачу [вычисления синуса 1° – Г.С.] к задаче: 45, умноженное на вещь, равно кубу и числу...» :*

$$45x = x^3 + 0.785\,039\,343\,364\,400\,6,$$

откуда

$$\sin 1^\circ = 0.017\,452\,406\,437\,283\,571.$$

1449 г. – Улугбек убит, научная школа распалась, исследования пошли на убыль.



Caspian Sea

KĀTH π
al-Bīrūnī

HARRAN π
Thābit ibn Qurrah

TŪS π
Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī

NEYSHĀBŪR π
Omar Khayyam

BŪZJĀN π
Abū al-Wafā'

BAGHDAD π
al-Khwārizmī

KĀSHĀN π
al-Kāshī

BASRA π
Ibn al-Haytham

Persian Gulf