ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ
VI в. до н.э. – VI в.н.э.

Наука в ее современном понимании возникла в Древней Греции.

«*Во всем мире нет ничего более удивительного и ничего более трудного для понимания, чем* ***внезапное возникновение цивилизации в Греции****. Многое из того, что создает цивилизацию, уже существовало в течение тысячелетий в Египте и Месопотамии и распространилось оттуда в соседние страны. Но некоторых элементов недоставало, пока они не были восполнены греками.*

Чего они достигли в искусстве и литературе, известно каждому, но то, что они сделали в чисто интеллектуальной области, является еще более исключительным. ***Они изобрели математику, науку и философию****; на место простых летописей они впервые поставили историю; они свободно рассуждали о природе мира и целях жизни, не обремененные путами какого-либо традиционного ортодоксального учения...*»

Б. Рассел «История западной философии»

Государство нового типа – *демократия.*

Полисы – Милет, Спарта, Афины и др.

Самоуправление – отвергается любое правление сверху, вопросы решаются сообща, поэтому важно уметь ***убедить***, ***доказать*** $\Rightarrow$ появляется **доказательство**:

1) установление истинности *(все доказать нельзя, поэтому нужны* ***аксиомы****)*;

2) установление связи между предложениями *(на Востоке – как решить задачу?, в Греции – почему?)*;

3) для открытия новых теорем *(*$\sqrt{2}$*, функция Вейерштрасса)*.

Источники: До наших дней дошло 45 математических текстов.

Периодизация математики Древней Греции

1. <u>Архаическая</u> эпоха – до середины V в. до н.э.: – самое начало!

– школы: Фалес, Пифагор, Парменид Великий…

– реконструируется по Геродоту (V до н.э.), Традициям семи мудрецов, сочинениям Платона, Аристотеля, Эвдема Родосского.

– появляется доказательство!!!

– **ματηματα и древнегреческий квадривиум**:

арифметика, геометрия, гармония и астрономия.

2. **<u>Классическая</u> эпоха**: 450 до н.э. – 330 до н.э.

– развитие прозы, техники, истории, философии, математики;

– идентификация проблемы с именем исследователя;

– ощутимый прогресс в математических науках:

Гиппократ Хиосский, Архит из Тарента, Евдокс Книдский, Феодор из Кирены, Теэтет Афинский и др.;

– первый очерк истории арифметики, геометрии и астрономии Эвдема Родосского.

3. **<u>Эллинизм</u>**: 330 до н.э. – 30 до н.э.

– первые полностью сохранившиеся математические рукописи

– 1й период расцвета Александрийской школы:

Евклид, Архимед, Апполоний Пергский, Эратосфен, Никомед, Гиппарх…

4. **<u>Римская</u> эпоха**: 30 до н.э. – 250 н.э. и
<u>Поздняя</u> эпоха: 250 н.э. – 550 н.э.

– 2й период расцвета Александрийской школы:

Герон, Птолемей, Менелай, Диофант, Папп, Теон, Гипатия.

– Прокл Афинский, Евтокий Аскалонский, Симпликий Киликийский…

Архаическая Греция
(VI в.до н.э. – 450 г. до н.э.)

Самые знаменитые школы:

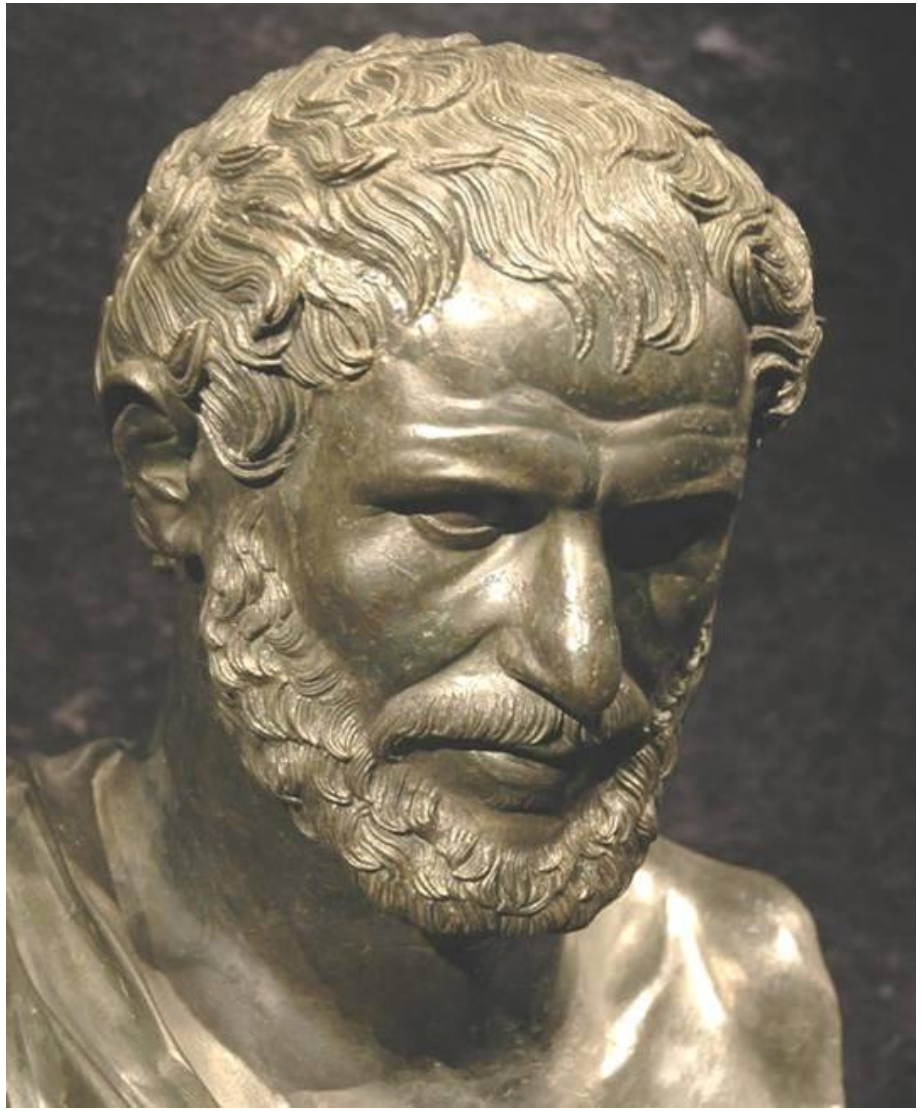
ФАЛЕС	ок. 624 до н.э. – 548 до н.э.
ПИФАГОР	ок. 570 до н.э. – 500 до н.э.
ПАРМЕНИД	ок. 540(?) до н.э. – 470 до н.э.

Философы: Анаксимандр, Анаксимен, Гераклит, Эмпедокл…

Поэты: Архилох, Сафо…

Трагедии: Фриних, Эсхил…

Фалес Милетский
ок. 637/624 до н.э. – 548/558 до н.э.



– прожил почти 90 лет;

– купец, политический деятель, философ, математик, астроном;

– один из семи мудрецов;

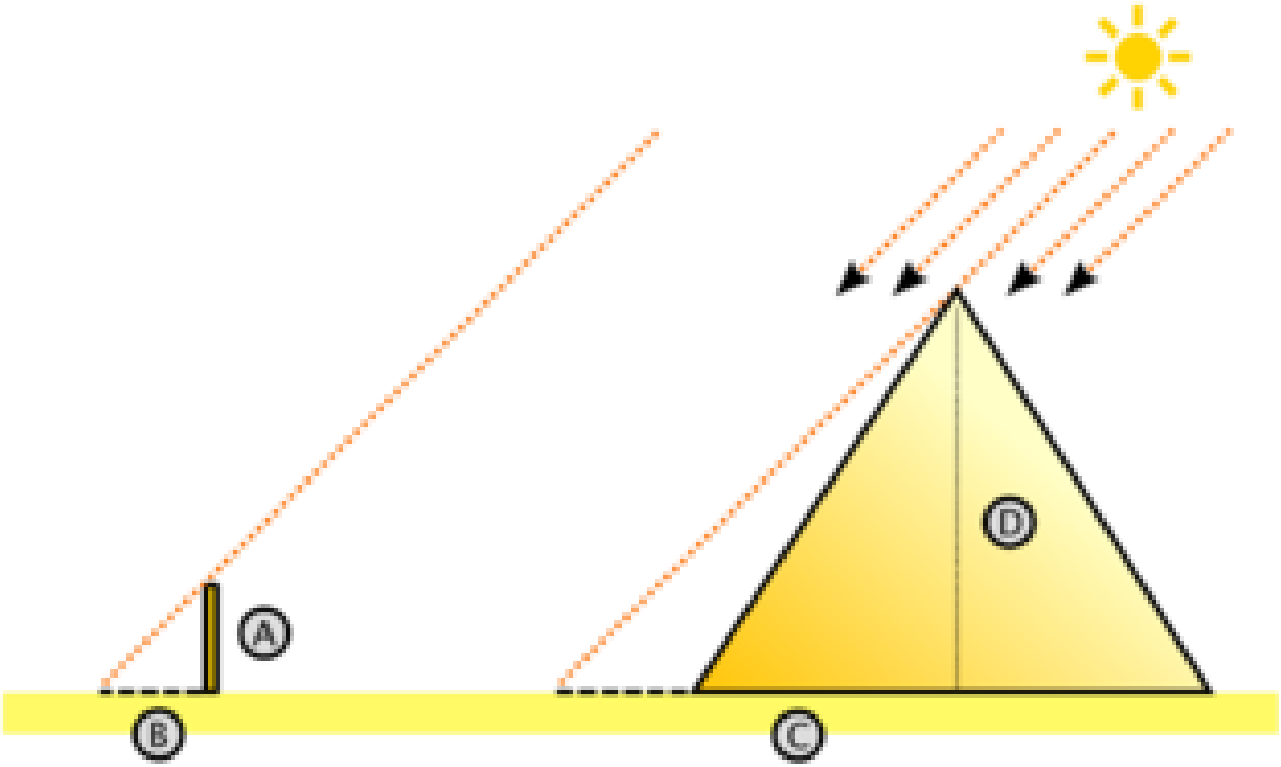
– предсказал затмение Солнца 585 г. до н.э.

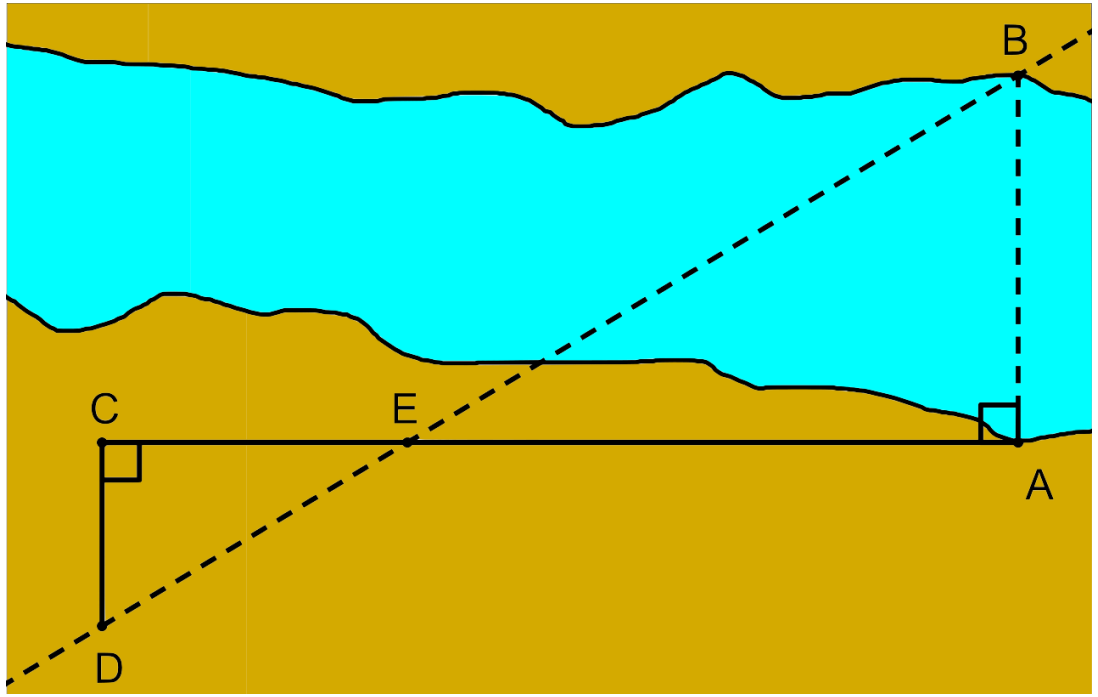
– основатель Ионийской натурфилософской школы (Анаксимандр, Анаксимен…; попытки рационального объяснения математики), взгляды которой излагает Аристотель.

Прокл Афинский, V в. н.э.:

***Ионийцы первыми** в Элладе занялись **геометрией**.*

1. Любой диаметр делит круг пополам.
2. Вертикальные углы равны.
3. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
4. (*Эвдем Родосский*, ?) Если сторона и два прилегающих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилегающим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
5. (*Памфила Эпидаврская*, эпоха Нерона, I в. н.э., ?) Любой вписанный треугольник, опирающийся на диаметр, прямоугольный.


A
B
C
D


B
C
E
A
D

ПИФАГОР и его школа

Родился около 570 г. до н.э. на острове Самос. Умер в 477 г. до н.э.

Отец – камнерез Мнесарх, чужестранец; мать – Партения, из знатной семьи.

Много путешествовал, после возвращения на Самос пришлось уехать в Кротон (Великая Греция), где основал ***Пифагорейский Союз***.

Самые известные пифагорейцы – **Архит** из Тарента, **Феодор** из Кирены.

Пророк и чудотворец.

*Так называемые **пифагорейцы**, занявшись математическими науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них, стали считать их начала началами всех вещей. Но в области этих наук **числа** занимают от природы первое место, а у чисел они усматривали, казалось им, много сходных черт с тем, что существует и происходит, – больше, чем у огня, земли и воды, например, такое-то свойство чисел есть справедливость, а такое-то – душа и ум, другое – удача, и, можно сказать, в каждом из остальных случаев точно так же.*

*Кроме того, они **видели в числах свойства и отношения, присущие гармоническим сочетаниям**. Так как, следовательно, все остальное явным образом уподоблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, **элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю Вселенную [признали] гармонией и числом**.*

Аристотель. «Метафизика»

$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$
$\tau\alpha \quad \mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\alpha$

арифметика, геометрия, гармония, астрономия

Арифметика среди прочих наук выделяется совершенством знания. Архит

По Пифагору математику нужно строить так:

1) все фигуры абстрактны, их свойства устанавливаются не измерениями, а рассуждениями;
2) должна быть система из конечного числа ***аксиом*** и некоторого числа **определений**.

1. АРИФМЕТИКА

Основа – число (**αριθμος**) – множество единиц $\Rightarrow$ сначала $\mathbb{N}$.

1. Единица **НЕДЕЛИМА**, дробей нет, а рассматриваются лишь отношения двух целых чисел. Начало теории рациональных чисел. Казалось, что этого достаточно для построения геометрии.
2. Платон: «*Арифметика есть* ***учение о четном и нечетном***» («Начала» Евклида, IX книга, предл. 21–34).

   Первая теорема теории делимости:
   «*Произведение двух чисел* ab *четное* $\Leftrightarrow$ *либо* a, *либо* b *четное*».

3. Учение о ***совершенных*** числах.

Совершенные числа – это числа, равные сумме всех своих делителей без самого числа:

6 = 1+2+3, **28** = 1+2+4+7+14, **496** = 1+2+48+16+31+62+124+248, 8 128 (Никомах, II в. до н.э.), 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328…

Сейчас известно 47 таких чисел. Неизвестно, бесконечно ли их количество.

Пифагорейцы: если сумма 1+2+4+…+$2^k = p$ – простое число, то $2^k p$ – совершенное.

Эйлер: Других четных совершенных чисел не существует.

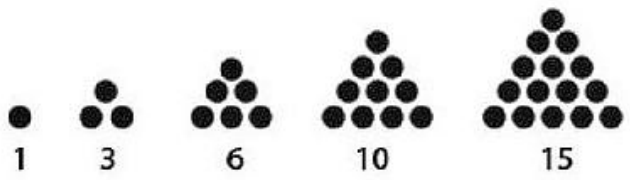
До сих пор не найдено ни одного нечетного совершенного числа.

4. ***Дружественные*** числа – числа, каждое из которых равно сумме делителей другого. Например, 284 и 220.

Ферма нашел такие сложные как 17296 и 18416.

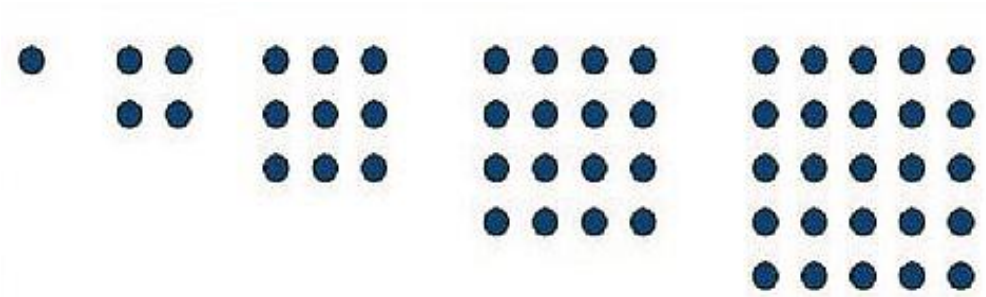
4. ***Фигурные*** числа и их свойства.

Треугольные числа обладают следующими свойствами:

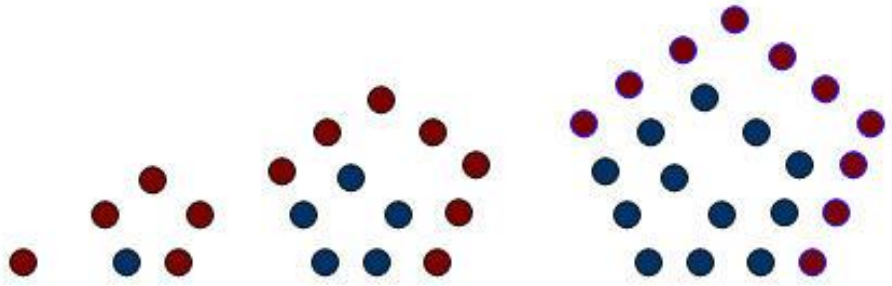


1. Сумма двух последовательных треугольных чисел дает полный квадрат – квадратное число.
2. Четность элемента последовательности меняется с периодом 4: нечетное, нечетное, четное, четное...
3. Каждое четное совершенное число является треугольным.

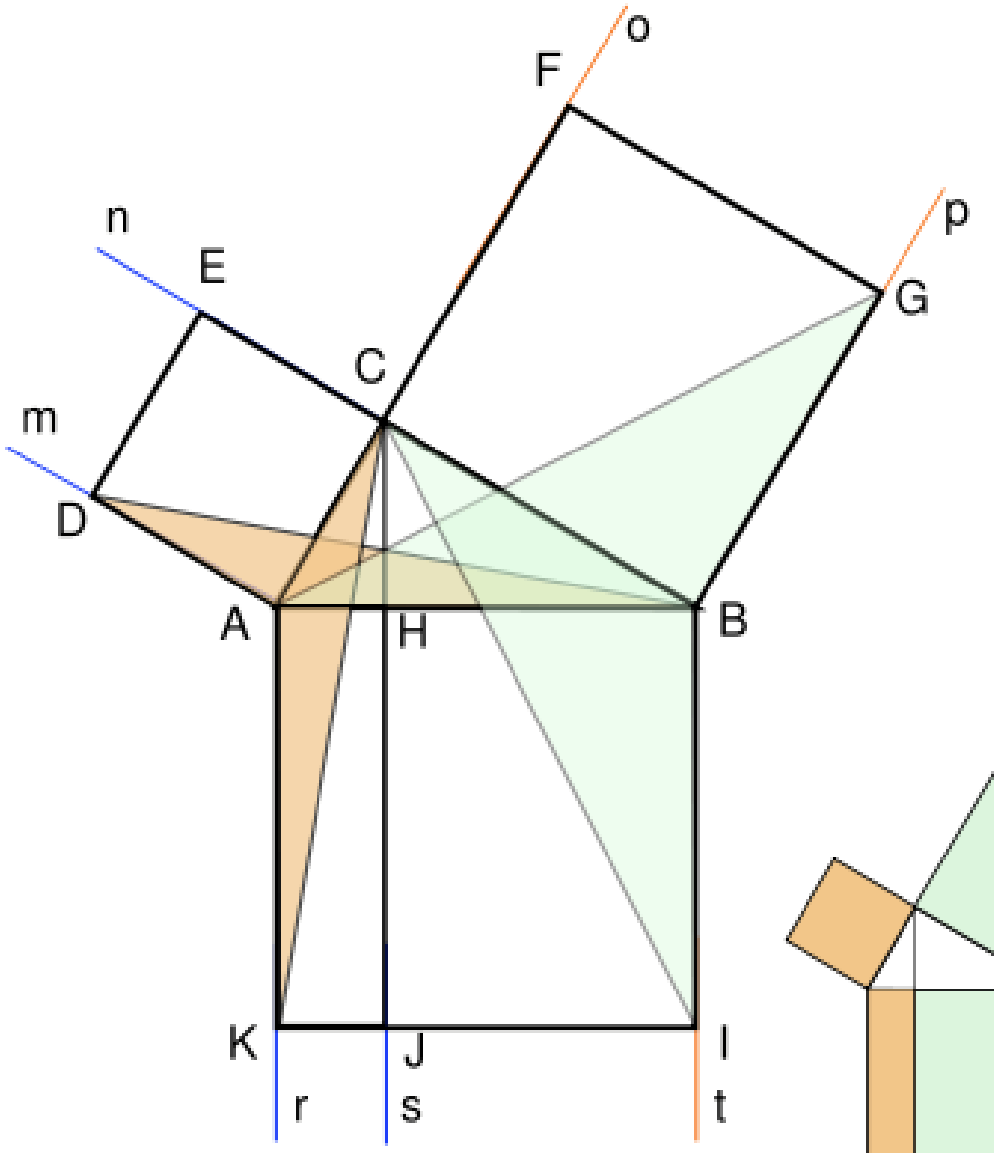
Квадратные числа

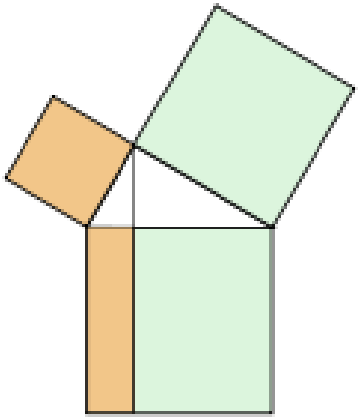


Пятиугольные *числа*



2. Геометрия основывалась на арифметике.





1. Развита вся планиметрия. Венец – теорема Пифагора. Все изложено в книге I «Начал» Евклида.
2. Развита теория подобия. Предполагали, что все отрезки соизмеримы, поэтому метрическая геометрия сводится к арифметике рациональных чисел.
3. Знали правильные пятиугольники – пентагон и пентаграмму, которые приводят к золотому сечению.

3. Теория музыки.

Звук зависит от длины струны.

С помощью двух струн разной длины можно получать разные **гармонические** созвучия: октава, квинта, кварта $\Rightarrow$ все музыкальные созвучия могут быть выражены через число $\Rightarrow$ мистика числа:

«***Все есть число***».

4. Астрономия

покоилась на модели, состоящей из 9 или 10-ти концентрических сфер со светилами (Солнце и планеты), вращающихся вокруг общего **центра Мира**, который мог быть разным в ***<u>различных</u>*** системах (в отличие от Вавилона): космос – живой, Земля – шар *посреди* Вселенной (уже пифагорейцы знали о **шар**ообразности Земли и объясняли смену дня и ночи ее **вращение**м).

Платон излагает представления **пифагор**ейцев в «Тимее»:

Земля в центре и совершает полный оборот за сутки. Вокруг нее еще 8 концентрических сфер – Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн, Солнце, Луна, неподвижные звезды.

Позже у **Филалая** (см. Аристотеля) в центре не Земля, а **центральный огонь**, свет и тепло которого передается Солнцем – прозрачным шаром, и есть Противоземлие.

У **Аристарха** Самосского в центре – Солнце.

Движение планет сводилось пифагорейцами к числовым соотношениям.

Тела, перемещаясь в пространстве, производят звуки, причем быстро движущееся тело издает более высокий звук, чем движущееся медленно. Согласно пифагорейской астрономии, чем больше расстояние от планеты до Земли, тем быстрее планета движется. Следовательно, звуки, издаваемые планетами, изменяются в зависимости от их удаленности от планеты до Земли, а все звуки подчиняются определенной гармонии. Как и всякая музыка, такая «**музыка сфер**» может быть сведена к числовым соотношениям.

Открытие несоизмеримых отрезков

– удар по всей стройной системе знаний пифагорейцев.

Аристотель, «*Первая аналитика*»: Если бы сторона и диагональ квадрата были бы соизмеримы, то нечетное равнялось четному.

Здесь – **первое доказательство от противного**:

Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, что эквивалентно равенствам

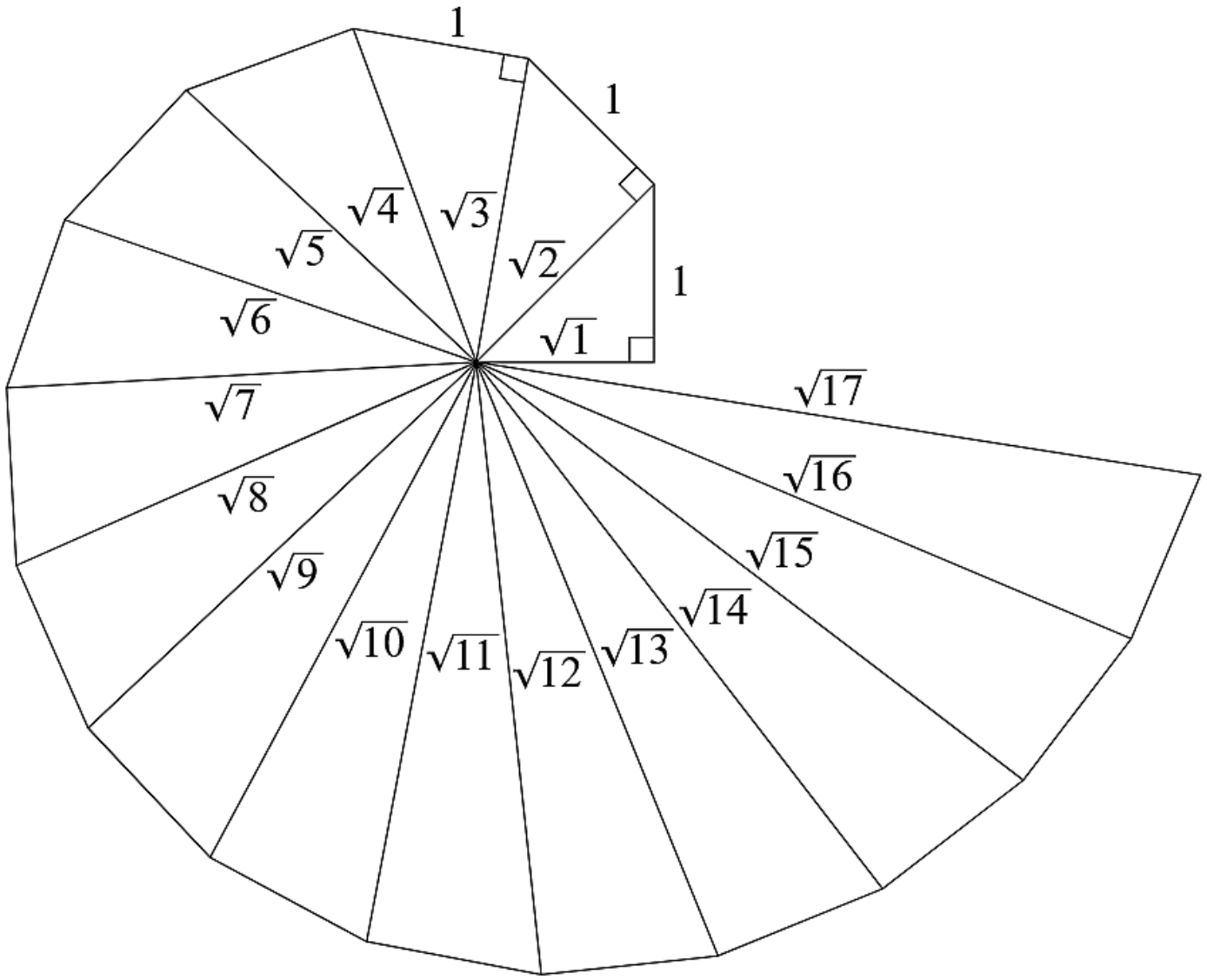
$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Из последнего равенства следует, что m^2 четное число. Значит и m четно, так как если бы m было нечетным, то и m^2 было бы нечетным. Тогда m^2 кратно 4, например $m^2 = 4l^2$, и $n^2 = 2l^2$ четное число, откуда следует, что и число n четно. Таким образом, предположение о том, что $\sqrt{2}$ можно представить в виде несократимой дроби, привело к противоречию.

Были найдены и другие несоизмеримые отрезки (**Феодор** из Кирены, его ученик **Теэтет**). Платон об этом пишет в диалоге «***Теэтет***»:

«*Т е э т е т. Вот Феодор объяснял нам на чертежах нечто о сторонах квадрата, [площадь которого выражена продолговатым числом], налагая их на трехфутовый и пятифутовый [отрезки] соответственно и доказывая, что по длине они несоизмеримы с однофутовым [отрезком]; и так перебирая [эти отрезки] один за другим, он дошел до семнадцатифутового.* ***Тут его что-то остановило****. Поскольку такого рода отрезков оказалось бесчисленное множество, нам пришло в голову попытаться найти какое-то их единое [свойство], с помощью которого мы могли бы охарактеризовать их все*.

Спираль Феодора из Кирены
(конец V – начало IV в. до н. э.)



В год смерти Сократа (399 г. до н.э.) **Теэтет** построил общую теорию делимости и с ее помощью выделил бесконечный класс иррациональностей вида $\sqrt{N}$, где N – натуральное число, не являющееся полным квадратом. Теэтет предложил классификацию этих иррациональностей и получил ряд результатов, изложенных позже Евклидом в **X книге «Начал»**. В этой книге намечено построение *пифагорова* поля $\mathbf{\Omega}$, т.е. минимального поля, в котором разрешимо любое уравнение вида $x^2 = a^2 + b^2$. Также здесь доказывается, что соизмеримые величины относятся друг к другу как число к числу, т.е. множество рациональных чисел вложено во множество действительных чисел.

Эта книга наиболее длинна и трудна для понимания. Особенно ощущается недостаток удобной символики, из-за отсутствия которой изложение становится очень громоздким и тяжеловесным. Совершенно неудобочитаема. В 1585 г. Симон Стевин: "*Трудности десятой книги… привели многих в ужас, и дело дошло до того, что ее называют "крестной казнью математиков", материя сия не поддается угрызению и в ней не обнаруживают ни малейшей пользы".*