ДИОФАНТ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ (сер. III в. н.э.)

– алгебра, диофантов анализ и теория чисел.

О самом Диофанте практически ничего не известно.

Ученые эпохи Возрождения относили время его жизни к эпохе Антония Пия, т.е. к середине II в. н.э. Поль Таннери (1843–1904) из косвенных соображений определил, что Диофант жил в середине III в. н.э., что и было принято историками.

В Палатинской антологии сохранилась эпитафия (см. след. слайд), из которой можно подсчитать, что Диофант прожил 84 года.

Из его произведений до наших дней дошло два (оба не полностью). Это – "Арифметика" (шесть книг из тринадцати) и отрывки из трактата "О многоугольных числах". В 1972 г. были найдены еще 4 книги в арабском переводе, приписываемые Диофанту.

Прах Диофанта гробница покоит: дивись ей – и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком,
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец,
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил –
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Эпитафия из Палатинской антологии,
составленной Метродором Византийским (IV в. н.э.)

Когда же жил Диофант?

1. **Теон Александрийский** жил *во второй половине IV в. н.э.* и в своих Комментариях к "Альмагесту" Птолемея приводит отрывок из Диофанта $\Longrightarrow$ Диофант не мог жить позднее.

2. **Диофант** в книге "О многоугольных числах" упоминает александрийского математика Гипсикла – II в. до н.э.

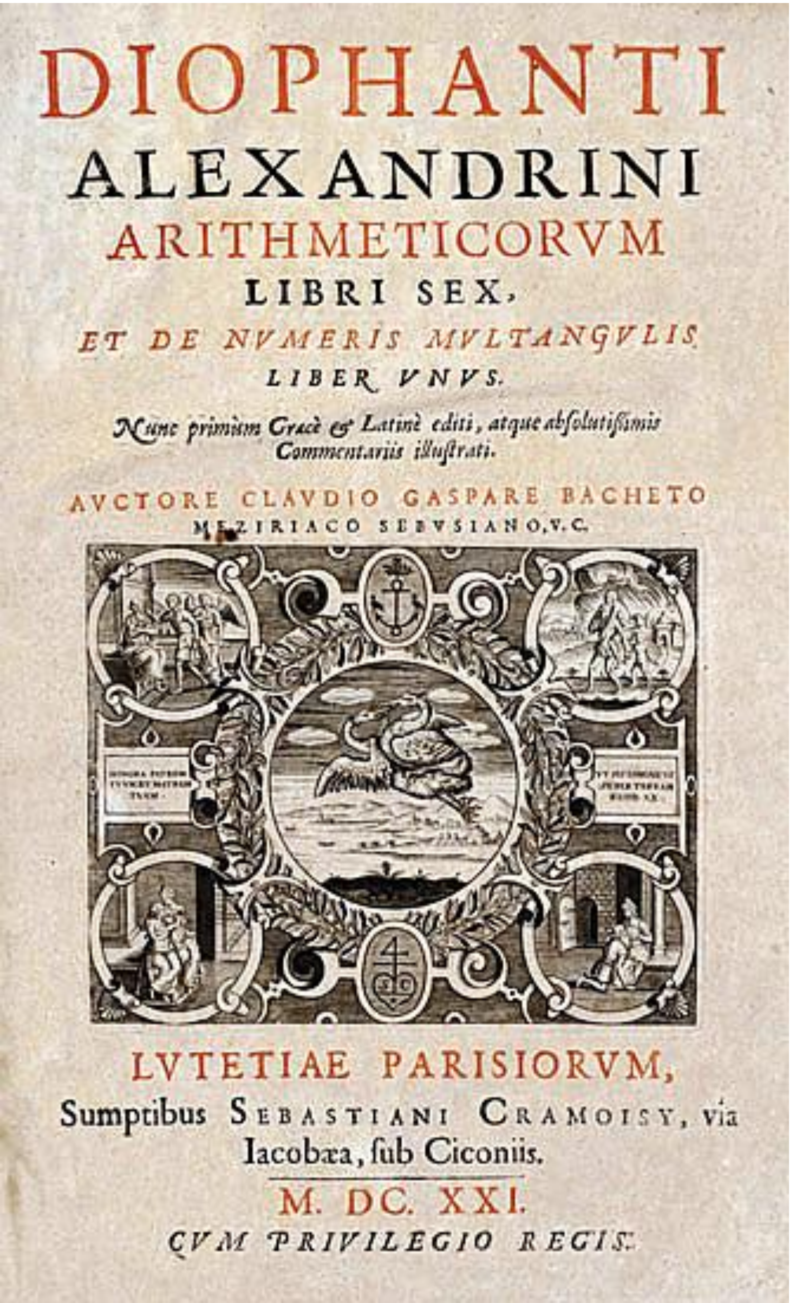
3. **П. Таннери** в библиотеке Эскориала нашел отрывок письма **Михаила Пселла** (Византия, XI в.): "*Что касается этого египетского метода, то Диофант рассмотрел его более точно, и учёнейший Анатолий, после того как собрал наиболее важные части этой науки, посвятил их своему другу Диофанту*".

4. Известно "*Введение в арифметику*" **Анатолия Александрийского**, фрагменты которого дошли до нас в передаче **Ямвлих**а (IV в. н.э.). Этот Анатолий **жил в Александрии в середине III в. н.э.**, причем покинул ее в 270 г. и стал епископом Лаодикийским (в Сирии).

$\Longrightarrow$ Если Таннери правильно расшифровал письмо Пселла, то **Диофант жил в середине III в. н.э.**

Королевская библиотека Эскориала (также известна как *Эскуриаленсе и Ла Лауретина*) — крупная испанская библиотека периода Возрождения, основанная королём Филиппом II. Расположена в городе Сан-Лоренсо-де-Эль-Эскориаль и является частью дворцово-монастырского комплекса Эскориал. Первые книги для библиотеки начали поступать в **1565** г.

«Арифметика» Диофанта – сборник задач (189), снабженных решениями.



На первый взгляд: «*...современному математику после изучения 100 решений Диофанта трудно решить 101-ю задачу. Диофант скорее ослепляет, чем приводит в восторг*» (Г. Ганкель).

Но это не так. Тщательный подбор и продуманное расположение задач направлены на то, чтобы проиллюстрировать применение вполне определенных **общих методов**.

Диофант все алгебраические задачи сводит к **уравнениям и системам**, как определенным (1 книга), так и неопределенным (все остальные). Именно для неопределенных уравнений ему потребовались обозначения степеней неизвестного, поэтому **рождение буквенной алгебры** было **связано** именно **с** нуждами **неопределенных задач**.

«Арифметика» Диофанта – поворотный пункт в развитии алгебры и теории чисел.

– окончательный отказ от геометрической алгебры;

– рождение буквенной алгебры.

В начале первой книги – **краткое алгебраическое введение**, которое можно считать первым изложением основ алгебры.

1. Построение поля рациональных чисел.

2. Введение буквенной символики и формулировка правил оперирования с уравнениями.

Позже (в XI в.) **аль-Караджи**, опираясь на это введение, написал большой трактат по алгебре.

1. На протяжении всех книг Диофант каждое **положительное рациональное** решение называет словом $\alpha\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$ – «число».

Аксиоматически вводит **отрицательные** числа:

определяет новый объект, который называет «**недостатком**», формулируя правила действий с ним.

«*Недостаток, умноженный на недостаток, дает наличие; недостаток же, умноженный на наличие, дает недостаток; знак же недостатка – укороченная и опрокинутая буква* ψ».

Применяет отрицательные числа только в промежуточных вычислениях.

Всякий раз, когда это необходимо, проводит **дополнительный анализ** условий задачи, чтобы существовало положительное решение.

2. Буквенная символика Диофанта.

Обозначения для неизвестного и его степеней: первых шести положительных и отрицательных, а также нулевой.

Таблица умножения степеней и специально выделенные два правила, которые мы теперь называет теоретико-групповыми свойствами операции умножения.

Нет знаков сложения и умножения, важен порядок членов уравнения.

Знак вычитания и знак равенства.

Знак неопределенного квадрата.

В результате **Диофант получает возможность записывать уравнение** или систему уравнений.

Формулирует **два правила оперирования с уравнениями** $\Longrightarrow$ у Диофанта уже не арифметика, а **АЛГЕБРА как наука о решении уравнений**! И в ней появляются свои методы, которые можно выделить.

Буквенная символика Диофанта

Обозначения для неизвестной

x^1	ς	$\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$			
x^2	Δ^{υ}	$\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$			
x^3	K^{υ}	$K\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$			
x^4	$\Delta^{\upsilon}\Delta$	x^5	$\Delta^{\upsilon}\mathrm{K}$	x^6	$\mathrm{K}^{\upsilon}\mathrm{K}$
x^0	M^{o}	x^{-2}	$\Delta^{\upsilon}\mathrm{X}$		

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

$$\mathrm{K}^{\upsilon}\bar{\alpha}\varsigma\bar{\eta} \pitchfork \Delta^{\upsilon}\bar{\varepsilon}\mathrm{M}^{o}\bar{\alpha} \;\; \iota\sigma \;\; \varsigma\bar{\alpha}$$

Неизвестное – число, обозначаемое концевой сигмой ς.

Вводит обозначения для первых шести положительных и шести отрицательных + нулевой степеней неизвестной величины ⇒ порывает с геометрической алгеброй.

Составляет таблицу умножения степеней, специально перед формулировкой правил действий с отрицательными степенями выделяя два правила о существовании единичного элемента (теоретико-групповые свойства операции умножения).

Есть знак равенства, знак вычитания, знак неопределенного квадрата □ ⇒ появилась возможность записывать УРАВНЕНИЕ или систему.

Фактически до Диофанта никаких уравнений не было. Рассматривались задачи, которые мы теперь можем свести к уравнениям.

Уже во Введении **Диофант** формулирует два основных правила оперирования с уравнениями (перенос и приведение подобных членов), т.е. **занимается не арифметикой, но алгеброй** – наукой о решении уравнений!

При этом создает **общие методы решения**, уделяя основное внимание неопределенным уравнениям.

Содержание первой книги "Арифметики" не выходит за пределы решения задач, сводящихся к определённым уравнениям (см. след. слайд), для которых все те **обозначения**, что ввёл Диофант, **не требуются**. Поэтому появление новых обозначений было обусловлено задачами, сводящимся к **неопределённым уравнениям**, и именно с ними мы и связываем **рождение буквенной алгебры**!

1. $\begin{cases} X+Y=a, \\ X-Y=b. \end{cases}$

2. $\begin{cases} X+Y=a, \\ X=kY. \end{cases}$

3. $\begin{cases} X+Y=a, \\ X-\dfrac{Y}{k}=b. \end{cases}$

4. $\begin{cases} Y=kX, \\ Y-X=a. \end{cases}$

5. $\begin{cases} X+Y=a, \\ \dfrac{X}{m}+\dfrac{Y}{n}=b. \end{cases}$

6. $\begin{cases} X+Y=a, \\ \dfrac{X}{m}-\dfrac{Y}{n}=b. \end{cases}$

7. $\dfrac{X-a}{X-b}=k.$

8. $\dfrac{X+a}{X+b}=k.$

9. $\dfrac{a-X}{b-X}=k.$

10. $\dfrac{a+X}{b-X}=k.$

11. $\dfrac{X+a}{X-b}=k.$

12. $\begin{cases} a=X+Y=U+V, \\ \dfrac{X}{U}=k, \quad \dfrac{V}{Y}=l. \end{cases}$

13. $\begin{cases} a=X+Y=U+V= \\ \qquad =S+T, \\ \dfrac{X}{U}=k, \dfrac{V}{S}=l, \dfrac{T}{Y}=m. \end{cases}$

14. $\dfrac{XY}{X+Y}=k$, ограничение: $Y>k$.

15. $\dfrac{X+a}{Y-a}=k, \quad \dfrac{Y+b}{X-b}=l.$

16. $\begin{cases} X_1+X_2=a, \\ X_2+X_3=b, \\ X_3+X_1=c, \end{cases}$

ограничение: $\dfrac{a+b+c}{2}>a, b, c.$

17. $\begin{cases} X_1+X_2+X_3=a, \\ X_2+X_3+X_4=b, \\ X_3+X_4+X_1=c, \\ X_4+X_1+X_2=d, \end{cases}$

ограничение: $\dfrac{a+b+c+d}{3}>a, b, c, d.$

18. $\begin{cases} X_1+X_2-X_3=a, \\ X_2+X_3-X_1=b, \\ X_3+X_1-X_2=c. \end{cases}$

19. $\begin{cases} X_1+X_2+X_3-X_4=a, \\ X_2+X_3+X_4-X_1=b, \\ X_3+X_4+X_1-X_2=c, \\ X_4+X_1+X_2-X_3=d, \end{cases}$

ограничение: $\dfrac{a+b+c+d}{2}>a, b, c, d.$

20. $\begin{cases} a=X+Y+Z, \\ \dfrac{X+Y}{Z}=b, \\ \dfrac{Z+Y}{X}=c. \end{cases}$

21. $\begin{cases} X-Y=\dfrac{Z}{k}, \\ Y-Z=\dfrac{X}{l}, \\ Z-\dfrac{Y}{m}=a, \end{cases}$

$X>Y>Z.$

22. $X-\dfrac{1}{n}X+\dfrac{1}{m}Z=$
$=Y+\dfrac{1}{n}X-\dfrac{1}{l}Y=$
$=Z+\dfrac{1}{l}Y-\dfrac{1}{m}Z.$

23. $X-\alpha X+\delta U=$
$=Y-\beta Y+\alpha X=$
$=Z-\gamma Z+\beta Y=$
$=U-\delta U+\gamma Z.$

24. $X+\alpha(Y+Z)=$
$=Y+\beta(Z+X)=$
$=Z+\gamma(X+Y).$

25. $X+\alpha(Y+Z+U)=$
$=Y+\beta(Z+U+X)=$
$=Z+\gamma(U+X+Y)=$
$=U+\delta(X+Y+Z).$

26. $\begin{cases} aX=U, \\ bX=U^2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} X+Y=a, \\ XY=b. \end{cases}$

28. $\begin{cases} X+Y=a, \\ X^2+Y^2=b. \end{cases}$

29. $\begin{cases} X+Y=a, \\ X^2-Y^2=b. \end{cases}$

30. $\begin{cases} X-Y=a, \\ XY=b. \end{cases}$

31. $\begin{cases} X=kY, \\ \dfrac{X^2+Y^2}{X+Y}=l. \end{cases}$

32. $\begin{cases} X=kY, \\ \dfrac{X^2+Y^2}{X-Y}=l. \end{cases}$

33. $\begin{cases} X=kY, \\ \dfrac{X^2-Y^2}{X+Y}=l. \end{cases}$

34. $\begin{cases} X=kY, \\ \dfrac{X^2-Y^2}{X-Y}=l. \end{cases}$

35. $\begin{cases} Y=kX, \\ X^2=lY, \end{cases} \quad X<Y.$

36. $\begin{cases} Y=kX, \\ X^2=lX, \end{cases} \quad X<Y.$

37. $\begin{cases} Y=kX, \\ X^2=l(X+Y), \end{cases} \quad X<Y.$

38. $\begin{cases} Y=kX, \\ \dfrac{X^2}{Y-X}=l, \end{cases} \quad X<Y.$

39. Найти такое X, чтобы числа $(a+b)X$, $(b+X)a$, $(x+a)b$ имели одинаковые разности.

Начиная со второй книги, Диофант исследует неопределённые уравнения второго порядка от двух неизвестных

$$F_2(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Для них он фактически доказал **утверждение**:

Если $F_2(x, y) = 0$, где $F_2(x, y)$– многочлен с рациональными коэффициентами, имеет хотя бы одно рациональное решение, то это уравнение имеет бесконечное множество таких решений, причем x и y можно задать рациональными функциями одного параметра.

Для уравнений выше второй степени это утверждение неверно.

В декартовых координатах уравнение (1) задает коническое сечение. Рациональным решениям уравнения соответствуют рациональные точки кривой. Сам Диофант геометрической терминологией не пользовался, но нам будет удобно таким образом интерпретировать действия Диофанта.

Свой метод для решения таких уравнений Диофант сначала демонстрирует на первых задачах второй книги, постепенно усложняя условия, в результате подстановки постепенно усложняются и принимают все более общий вид.

Для нахождения подстановки необходимо знание одного рационального решения, причем обычно это решение не из области положительных рациональных чисел, поэтому Диофант использует его, явно не выписывая.

Из-за отсутствия символики для свободных параметров Диофант использует для них конкретные числовые значения, используя тем самым число в роли алгебраического символа. Иногда Диофант явно оговаривает, что может быть взято любое число.

Вывод: *подбор и расположение задач подчинены изложению общего метода, который неоднократно применяется в дальнейшем*.

Сформулирован этот метод в двух леммах книги VI.

Лемма 2 к задаче VI12. *Для двух данных чисел, сумма которых составляет квадрат, можно найти бесконечное число квадратов, каждый из которых, умноженный на одно из данных [и сложенный с другим числом], образует квадрат.*

Лемма сводится к уравнению Пелля $$ax^2 + b = y^2, \qquad (2)$$

при этом выполняется условие $$a + b = m^2,$$

равносильное тому, что уравнение имеет рациональные решения $(1, m), (1, -m), (-1, m), (-1, -m)$ (m – рациональное число).

Тогда, утверждает Диофант, уравнение имеет бесконечное число решений. И, чтобы доказать это, он делает подстановку

$$x = t + 1, \quad y = kt - m,$$

равносильную проведению прямой через исходную рациональную точку $(1, -m)$. После этого он получает $t = 2\frac{a+km}{k^2-a}$ и рациональные функции от параметра *k* для *x* и *y*. **ДЗ 1а.Выпишите их явным образом.**

Лемма к задаче VI15. *Даны два числа; если некоторый квадрат, помноженный на одно из них, после вычитания другого дает квадрат, то можно найти и другой квадрат, бóльший упомянутого и производящий то же самое.*

На современном языке: если уравнение $ax^2 - b = y^2$ (3) имеет некоторое рациональное решение (p, q), то можно найти другое, бóльшее решение (p_1, q_1), отправляясь от которого можно найти бесконечную последовательность решений (p_n, q_n), причем

$$p < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$$

Диофант проводит доказательство для *a*=3, *b*=11. За исходное решение он принимает (5,8). Сделав подстановку $x = t + p,\ y = q - kt,$ находит

$t = 2\frac{ap+kq}{k^2-a}$. При $k^2 > a$ имеем $t > 0$ и $p_1 = t + p > p$.

ДЗ 16: Продемонстрируйте это доказательство, опираясь на оригинальный текст Диофанта.

Диофант «Арифметика».

Задача 8 книги II

Заданный квадрат разложить на два квадрата.

Пусть надо разложить 16 на два квадрата. Положим, что первый равен x^2, тогда второй будет $16 - x^2$; следовательно, $16 - x^2$ тоже равно квадрату.

Составляю квадрат из некоторого количества x минус столько единиц, сколько их найдется в стороне 16-ти; пусть это будет $2x - 4$. Тогда сам этот квадрат равен $4x^2 + 16 - 16x$; он должен равняться $16 - x^2$.

Прибавим к обеим частям равенства недостающее и вычтем подобные из подобных. Тогда $5x^2 = 16x$ и x окажется равным 16/5.

Один квадрат 256/25, а другой 144/25; сложенные вместе они дают 400/25, или 16, и каждый будет квадратом.

На современном математическом языке требуется решить уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (*)$$

Фактически Диофант делает подстановку

$$\begin{cases} x = t \\ y = kt - a \end{cases}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Q}.$$

Тогда (*): $t^2 + (kt - a)^2 = a^2$, откуда находим

$$x = t = a\frac{2k}{k^2+1},$$

$$y = a\frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Геометрически подстановку Диофанта можно рассматривать как пучок прямых с угловым коэффициентом *k*, проходящих через точку (*0; –a*) данной окружности (*).

В задаче 19 книги III Диофант отмечает, что существует бесконечно много решений.

Ферма (XVII): для кубов и более высоких степеней это утверждение неверно.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιϛ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛϛ. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μο ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ ιϛ μο πλευρά. ἔστω ϛϛ β λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μο ιϛ λείψει ϛϛ ιϛ. ταῦτα ἴσα μονάσι ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ εἰκοσοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοσοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοσόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Издание 1670 г.

Данное число, которое складывается из двух квадратов, подразделить на два других квадрата.

Пусть число 13, составленное из квадратов 4 и 9, надо подразделить на два другие квадрата.

Возьмем стороны 2 и 3 упомянутых квадратов и положим стороны искомых квадратов: одну равной *x+2*, а другую нескольким *x* минус столько единиц, сколько их будет в стороне другого квадрата: 3. Пусть она будет *2x-3*. И получатся квадраты: один x^2+4x+4, а другой $4x^2+9-12x$.

Остается лишь сделать, чтобы два сложенных квадрата дали 13. Но два сложенных дают $5x^2+13-8x$ это равно 13; и оказывается *x* = 8/5.

К подстановкам: Я положил сторону первого *x+2* ; она будет 18/5.

Сторона же второго *2x-3* ; она будет 1/5. А сами квадраты будут: один 324/25, а другой 1/25. И оба сложенные дадут 325/25, что сводится к заданному 13.

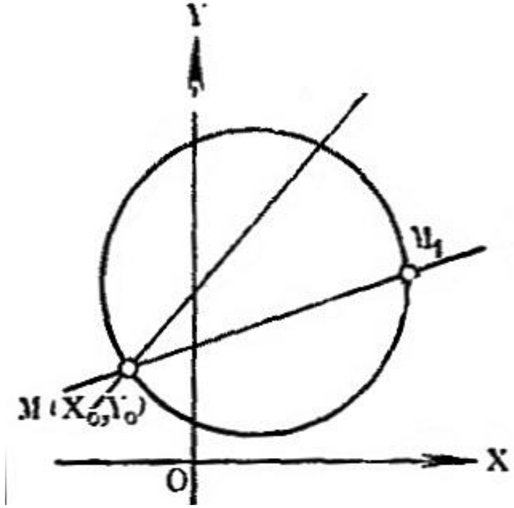
Таким образом, Диофант владел общим методом нахождения рациональных решений неопределенных уравнений 2 степени с двумя неизвестными, если дано одно рациональное решение. $\boldsymbol{F_2(x,y)=0}$

I. $y^2 = ax^2 + bx + c,\ \ c = m^2$

Подстановка $y = kx \pm m$ дает пучок рациональных прямых, проходящих через точку $(0, \pm m)$ (*первая подстановка Эйлера*) $\Longrightarrow$ существует бесконечно много решений.

II. $y^2 = ax^2 + bx + c,\ \ c \neq m^2,$

но существует некоторое рациональное решение.
В этом случае рациональные прямые проводятся через это решение.



III. $y^2 = ax^2 + bx + c,\ \ a = \alpha^2$

Тогда используется *вторая подстановка Эйлера* $y = \alpha x \pm k$, которая соответствует нахождению точки пересечения прямой и конического сечения на бесконечности.

$y^2 = ax^2 + bx + c$, $a = \square = \alpha^2$

Тогда $y = \alpha x \pm k$ (2я подстановка Эйлера)

$\Rightarrow (\alpha x + k)^2 = ax^2 + bx + c \Rightarrow$

$$x = \frac{c - k^2}{2\alpha k - b} \ ; \ y = \alpha \cdot \frac{c - k^2}{2\alpha k - b} + k$$

Покажем, что в этом случае прямая $y = \alpha x + k$ пересекает коническое сечение на ∞.

Перейдем в проективные координаты:

$x = \frac{u}{w}$, $y = \frac{v}{w}$ ($w = 0 \mapsto \infty$)

$$\Rightarrow \begin{cases} v^2 = \alpha^2 u^2 + buw + cw^2 & (1) \\ v = \alpha u + kw & (2) \end{cases}$$

Кривая (1) пересекает беск. удал. прямую $w=0$ в двух (разнон.) точках: $(1; \alpha; 0)$ и $(1; -\alpha; 0)$

Прямая (2) как раз и проходит через первую из них.

Диофант полностью проанализировал **неопределенные уравнения второй степени от двух неизвестных**, и его анализ впоследствии послужил образцом для исследования вопроса о рациональных точках на кривой рода 0.

Для решения уравнений и систем более высоких степеней Диофант разработал **еще более тонкие и сложные методы**, которые привлекали внимание многих европейских математиков Нового времени. Впервые выделены они были итальянскими и французскими математиками в 16-17 вв.

Другие типы уравнений из задач Диофанта:

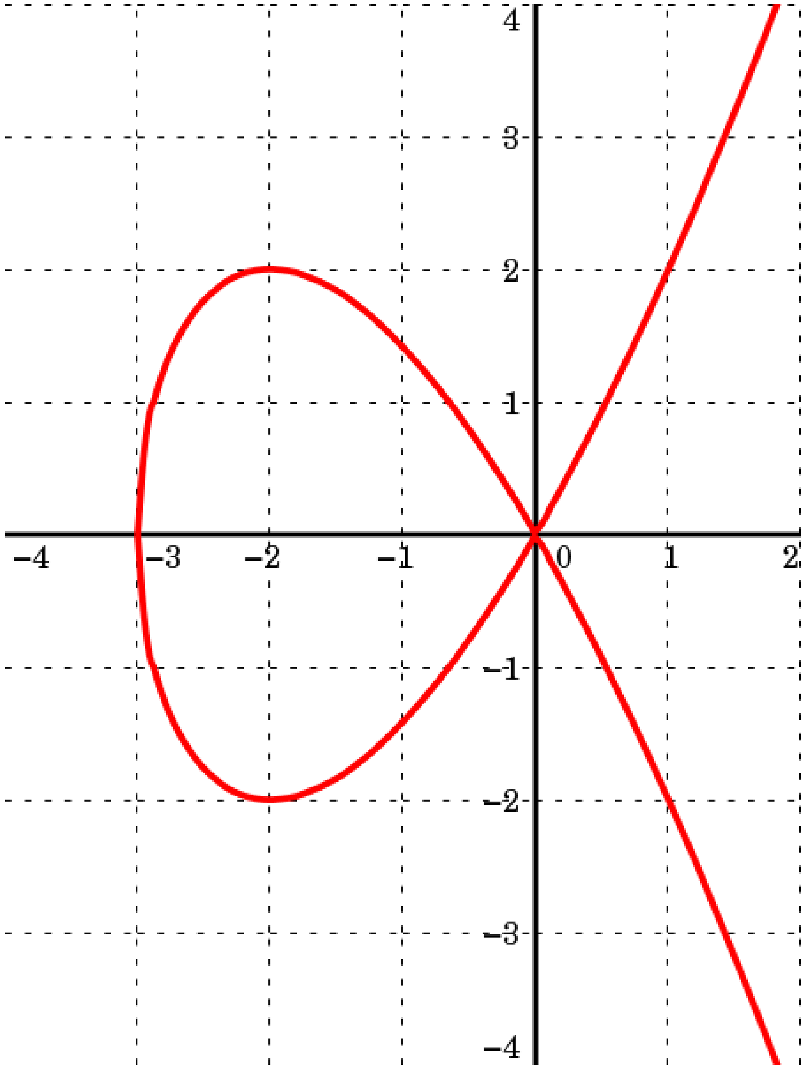
$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y^3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y^4 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$\begin{cases} y^2 = ax^2 + bx + c \\ z^2 = a_1x^2 + b_1x + c_1 \end{cases}$$

Уравнения третьего порядка рассматриваются в книге IV. Анализ этой и последующих книг выявил (И.Г. Башмакова) наличие у Диофанта **метода касательной** и **метода секущей**:



1) если касательная с рациональным угловым коэффициентом, проведенная в рациональной точке алгебраической кривой, пересечет кривую, то эта точка рациональная;

2) если прямая, проведенная через две рациональные точки кривой, имеет точку пересечения с заданной кривой, то эта точка – рациональная.

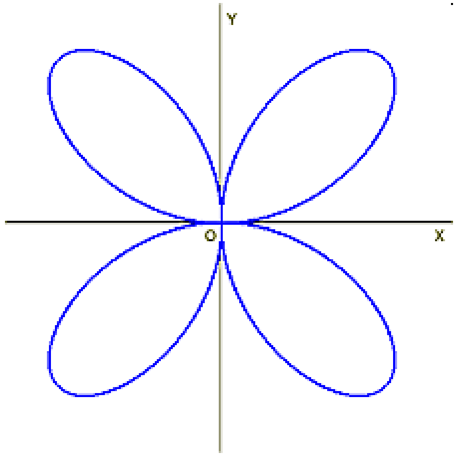
Эти методы были переоткрыты позже: первый в XVII в. **Пьером Ферма**, второй в XIX в. **Огюстеном-Луи Коши**.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ $F_3(x, y) = 0$

Любое алгебраическое уравнение определяет на евклидовой плоскости некоторую кривую. Рациональное решение такого уравнения принято называть рациональной точкой этой кривой. **Порядком кривой** называется максимальный порядок многочлена в левой части. Однако для целей диофантова анализа такая классификация оказалась слишком грубой. Более тонкой является **классификация по родам**, введенная в XIX веке Абелем и Риманом, учитывающая число особых точек кривой.

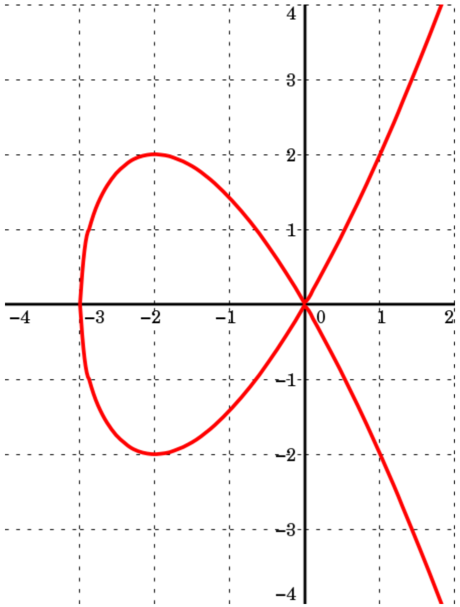
Будем считать, что многочлен в левой части неприводим над полем рациональных чисел. **Особой точкой кривой** называется точка, в которой обе частные производные многочлена обращаются в ноль и $\Rightarrow$ не существует единственной касательной к графику в этой точке. Таких точек у алгебраической кривой может быть только конечное число.

Наиболее простыми особыми точками являются двойные точки, в которых хотя бы одна из частных вторых производных отлична от нуля. Простейшей двойной точкой называется точка, в которой кривая имеет две несовпадающие касательные. Например, для кубики Чирнгаузена (справа) таковой является (0;0).



Возможны и более сложные кривые (слева).

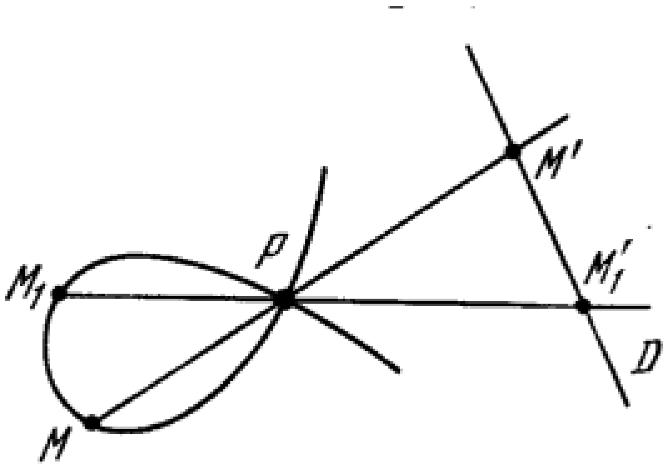
При определении рода кривой будем считать, что кривая может иметь только простейшие двойные точки.



Родом плоской алгебраической кривой порядка *n* называется число $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, где *d* – число простейших двойных точек кривой. Для кривых порядка 1 или 2 род равен нулю. Такие кривые униформизируются в рациональных функциях.

В конце XIX века сразу несколько математиков (Д. Гильберт, А. Гурвиц и А. Пуанкаре) доказали, что всякая кривая рода 0 и порядка $n > 2$ бирационально эквивалентна кривой порядка $n–2$. Следовательно, рациональная кривая рода 0 всегда эквивалентна прямой или коническому сечению.

Если кубическая кривая имеет род 0, это означает, что у нее есть единственная простейшая двойная точка. Эта точка будет рациональной (докажите!) и, значит, прямая, проходящая через двойную точку P, обязательно пересечет кривую еще в только одной рациональной точке M.



В этом случае наша кривая бирационально эквивалентна рациональной прямой и ее можно униформизовать в рациональных функциях.

Пример: $y^2 = x^3 - 2x^2$ и двойная точка $P = (0;0)$

Проведем через нее рациональную прямую

$$y = kx \quad \Rightarrow \quad k^2x^2 = x^3 - 2x^2$$

$$\Rightarrow \quad x = k^2 + 2\,,$$

$$y = k(k^2 + 2)$$

Рассмотрим теперь **кривые рода 1**. Можно доказать, что они не могут быть униформизированы в рациональных функциях, но их можно представить в виде эллиптических функций одного аргумента, поэтому эти кривые еще называются **эллиптическими**.

Если уравнение $F_3(x,y) = 0$ определяет кривую рода 1, на которой лежит рациональная точка $P(x_0, y_0)$, то эту кривую можно привести к **вейерштрассовой нормальной форме**:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

И в этом случае *x* и *y* можно параметризовать с помощью эллиптических функций Вейерштрасса: $x = \wp_1(t),\ y = \wp_2(t)$.

ИТАК, несмотря на то, что *в общем случае точки кривой 3го порядка не могут быть выражены как рациональные функции одного параметра*, в случае, *когда известны одна или две рациональные точки кубической кривой, можно найти еще одну ее рациональную точку*. Это позволяют сделать **метод касательной** и **метод секущей**. **Диофант это делает!**

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ, задающие эллиптические кривые (т.е. рода 1), $\boldsymbol{F_3(x,y)=0}$

1. <u>Метод касательной</u>. $(\boldsymbol{IV_{24}})$

Пусть известна только одна рациональная точка $A=(x_1,y_1)$ на кривой $F_3(x,y)=0$. Через нее проводится касательная:

$$y-y_1=k(x-x_1), \qquad k=\frac{-{dF}/{dx}}{{dF}/{dy}}\Big|_{(x_1,y_1)}$$

2. <u>Метод секущей</u>. $(\boldsymbol{IV_{26-27}})$

Пусть известны две рациональные точки кривой $F_3(x,y)=0$. Тогда рациональная прямая, проходящая через них, пересечет кривую снова в рациональной точке.

Можно итерировать.

Диофант применял оба метода, трактуя их чисто алгебраически.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ,
задающие эллиптические кривые (т.е. рода 1)
$\boldsymbol{F_3(x, y) = 0}$

1. Метод секущей. $(\boldsymbol{IV_{26-27}})$

Пусть на кривой $F_3(x, y) = 0$ известны две рациональные точки. Тогда рациональная прямая, проходящая через них, пересечет кривую снова в рациональной точке. Можно итерировать.

2. Метод касательной. $(\boldsymbol{IV_{24}})$

Пусть на кривой $F_3(x, y) = 0$ известна только одна рациональная точка $A = (x_1, y_1)$. Тогда через нее проводится касательная:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad k = \frac{-{}^{dF}\!/_{dx}}{{}^{dF}\!/_{dy}}\Big|_{(x_1, y_1)}$$

Диофант применял оба метода, трактуя их чисто алгебраически.

24. Данное число разложить на два числа и сделать, чтобы их произведение было кубом без стороны.

Пусть данное число будет 6.

Положим 1-е число x; тогда остаток $6 - x$ будет 2-м числом. Остается, чтобы их произведение было кубом без стороны. Но их произведение будет $6x - x^2$; это должно равняться кубу без стороны. Образую куб на x, взятом сколько-то раз минус 1, пусть на $2x - 1$. Построенный куб без стороны будет $8x^3 + 4x - 12x^2$. Это должно равняться $6x - x^2$.

Если бы количества x в каждой стороне равенства были равными, то остались бы для сравнения члены с x^3 и x^2, и x получилось бы рациональным. Но $4x$ получается из разности $6x$ и $2x$, т. е. из утроенного $2x$; и если из утроенного $2x$ вычесть $2x$, то получится дважды $2x$. Но 6 является произвольным согласно предположению. Таким образом, я вынужден отыскивать число, как это $2x$, которое, будучи взято 2 раза, давало бы 6. Это число есть 3.

Я ищу $6x - x^2$, равное кубу без стороны. Теперь сторону этого куба я беру $3x - 1$; построенный на ней куб без своей стороны будет

$$27x^3 + 6x - 27x^2 = 6x - x^2;$$

и x получается равным 26/27.

К подстановкам. 1-е число будет 26, а 2-е 136 [двадцать седьмых долей].

1. <u>Метод касательной</u>. (IV_{24})

На современном математическом языке мы могли бы записать:

$$x(a - x) = y^3 - y \qquad (1).$$

Это уравнение имеет рациональные решения (0;1) и (0;–1). Диофант делает подстановку: $\begin{cases} x = t \\ y = kt - 1 \end{cases}$ (2).

Сначала он берет k=2, но анализ условий показывает, что k не может быть произвольным.

Мы в общем виде после подстановки (2) в (1) получим:

$$k^3t^3 - (3k^2 - 1)t^2 + (2k - a)t = 0 \ .$$

Чтобы t рационально выражалось через k, Диофант полагает $2k - a = 0$, откуда $k = a/2$.

Нетрудно видеть, что при таком выборе прямая, задаваемая подстановкой (2), будет касательной к кривой, задаваемой уравнением (1). В общем виде действия Диофанта мы могли бы записать как:

сделаем подстановку $\begin{cases} x = t + a \\ y = kt + b \end{cases}$ в уравнение $F_3(x, y) = 0$ и получим

$$F_3(t + a, kt + b) \\ = F(a, b) + P(a, b)t + Q(a, b)kt + R(a, b, k)t^2 + S(a, b, k)t^3 = 0$$

По условию $F(a, b)$ =0. Чтобы получить рациональное решение t, достаточно приравнять нулю коэффициент при t , откуда

$$k = -\frac{P(a, b)}{Q(a, b)} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(a, b).$$

2. Метод секущей. (IV_{26-27})

26. Найти такие два числа, чтобы их произведение, сложенное с каждым из них, давало куб.

Составляю 1-е число из кубического количества x-ов [1]); пусть оно будет $8x$; 2-е полагаю $x^2 - 1$; одно условие удовлетворено: их произведение, сложенное с 1-м числом, дает куб.

Остается лишь, чтобы их произведение вместе со 2-м числом давало куб. Но это произведение, сложенное со 2-м числом, будет

$$8x^3 + x^2 - 8x - 1,$$

оно должно равняться кубу. Строю этот куб на стороне $2x - 1$; и x будет $14/13$.

К подстановкам. 1-е число будет $112/13$, 2-е $27/169$.

Задача эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_1 = u^3 \\ x_1x_2 + x_2 = v^3 \end{cases}$$

Диофант полагает:

$$\begin{cases} x_1 = a^3x \\ x_2 = x^2 - 1 \end{cases}$$

Тогда первое уравнение системы выполняется, а второе превращается в уравнение $a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1 = v^3$.

Кривая, задаваемая этим уравнением, имеет рациональную точку (0;–1), и Диофант проводит прямую через эту точку $\begin{cases} x = t \\ v = at - 1 \end{cases}$ и находит рациональное решение (**выпишите формулы явно**).

Каков же геометрический смысл этой подстановки? Почему прямая встречает кривую третьего порядка еще только в одной точке?

Переходя к однородным координатам $x = \frac{\tau}{z}, v = \frac{y}{z}$ получим уравнение (3): $a^3\tau^3 + \tau^2 z - a^3\tau z^2 - z^3 = y^3$ и (4): $y = a\tau - z$.

Полагая z=0 , получим, что кривая (3) и прямая (4) проходит через одну и ту же бесконечно удаленную рациональную точку (1, a,0).

Итак, здесь применяется метод секущей для случая, когда одна из известных рациональных точек является конечной, а другая – бесконечно удаленной.

Все последующие математики XVI-XVII вв. от Виета до Ферма применяли метод секущей к той же ситуации, что и Диофант, т.е. когда одна из рациональных точек была бесконечно удаленной. Почему это так?

Оказывается, случай двух рациональных точек приводит к более сложным алгебраическим подстановкам и, кроме того, необходимо было бы знать уравнение прямой, проходящей через две точки. Даже Эйлер ограничился случаем Диофанта.

Ньютон излагал методы нахождения рациональных точек геометрически, поэтому такой проблемы у него не возникло и он для проведения секущей сразу рассматривал две конечные рациональные точки.

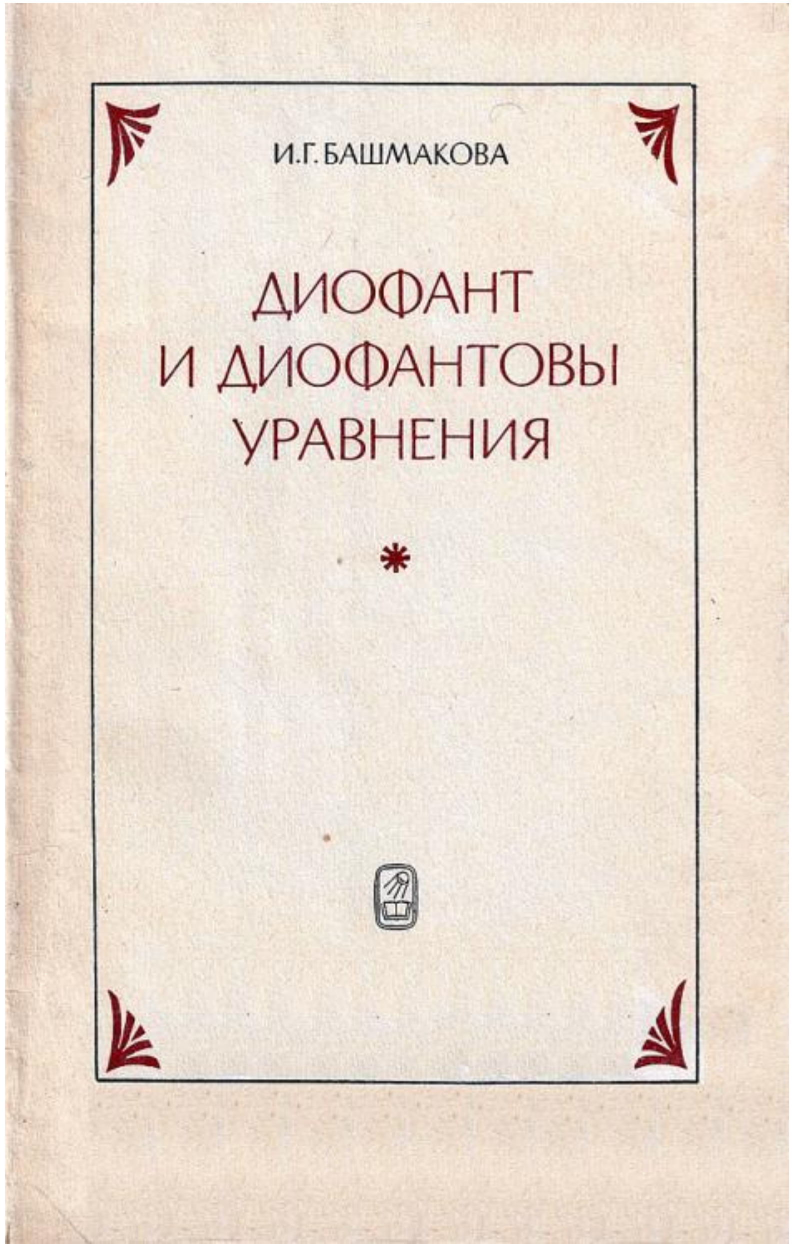
По-видимому, также Диофант пришел к убеждению, что для неопределенных уравнений 3й степени неизвестные нельзя выразить как рациональные функции параметра, поэтому он сразу дал метод нахождения еще одного рационального решения уравнения, если известно одно или два таких решения.

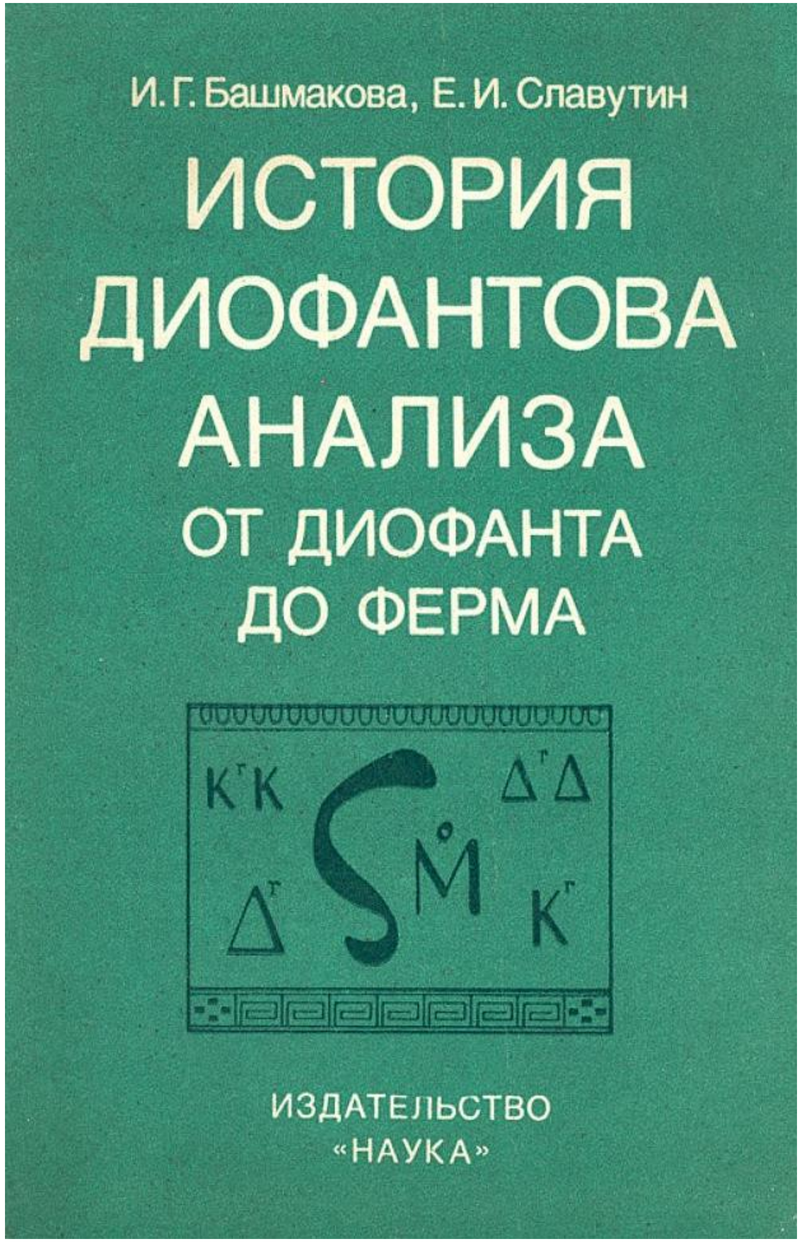
ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ДИОФАНТА

1. Всякое простое число вида $4n+1$ представляется суммой квадратов $(\boldsymbol{III_{19}}, \boldsymbol{V_9})$.
2. Целое число представимо суммой квадратов, если после выделения наибольшего квадрата оно не имеет простых делителей вида $4n-1$ $(\boldsymbol{V_9})$.
3. Если целое число разложимо в произведение вида $(4n+1)(4m+1)$, то существует два способа для представления этого числа суммой квадратов и четыре способа для разложения его квадрата в сумму квадратов $(\boldsymbol{III_{19}})$.
4. Любое целое число представимо суммой четырех квадратов $(\boldsymbol{IV_{29-30}}, \boldsymbol{V_{14}})$.
5. Никакое число вида $24n+7$ не может быть представлено суммой трех квадратов $(\boldsymbol{V_{11}})$.

Нигде никаких доказательств нет. Реконструкции были предложены **К.Г. Якоби** в 1847 г.

Изабелла Григорьевна БАШМАКОВА (1921–2005)





Труды Диофанта имели столь же фундаментальное значение для развития алгебры и теории чисел, как и труды Архимеда для развития исчисления бесконечно малых.

С именем Диофанта связано появление и развитие алгебраической геометрии, проблемами которой занимались Эйлер, Якоби, Сильвестр и др. Наиболее глубокое применение методы Диофанта нашли в работах А. Пуанкаре, в которых на основе этих методов строится арифметика алгебраических кривых.

Диофант был последним великим математиком древности. После него работали только более или менее талантливые комментаторы. Условия для математических исследований были крайне неблагоприятными. Возникшее христианство выступало против языческой культуры и науки.

«*Нам после Христа не нужны никакая любознательность, после Евангелия не нужно никакого исследования*…» (Тертуллиан).

Закат античной математики

Христианство выступало против языческой науки и культуры: «*Нам после Христа не нужна никакая любознательность, после Евангелия не нужно никакого исследования*» (Тертуллиан).

Папп Александрийский (начало IV в. н.э.)

Математическая коллекция

Теон Александрийский (конец IV в. н.э.)

В 391 г. была сожжена значительная часть знаменитой Александрийской библиотеки.

Гипатия Александрийская (ум. 415) занималась коническими сечениями и задачами диофантова анализа.

Прокл Афинский (410–485)

Евтокий (VI в. н.э.)

Симпликий (VI в. н.э.)

Гипатия Александрийская – первая женщина-математик, механик, философ и астроном.

Гипатия принимала участие в александрийской городской политике. Она была хорошо известна как среди язычников, так и среди христиан, не участвовала ни в каких стадиях конфликта. У неё была безупречная репутация мудрого советника. Но потом неожиданно против Гипатии поднялась волна обвинений в чародействе. Во время Великого поста **в марте 415 г**. «люди с горячими головами» подстерегли женщину при возвращении домой и растерзали ее.

«Агора» 2009

https://www.youtube.com/watch?v=nVJEf8kIbQ8

Наиболее известны работы Гипатии:

– комментарий к «Арифметике» Диофанта;

– редакция третьей книги комментариев Теона к «Альмагесту» Птолемея;

– редакция комментариев Теона к «Началам» Евклида;

– комментарии к «Коникам» Аполлония Пергского;

– «Астрономический канон».

Обнаруженная в конце XX века арабская рукопись «Арифметики» Диофанта по мнению исследователей была переводом сочинения Диофанта с комментариями, сделанными Гипатией.