Неопределённые уравнения в греческой математике

В теоретических сочинениях **V–III вв. до н.э.** встречаются два вида неопределенных уравнений: **пифагорово уравнение** и **уравнение Пелля**

$$\boldsymbol{x^2 - Ny^2 = \pm 1}, \qquad (1)$$

где N – целое неквадратное число. В обоих случаях речь идет об отыскании целых положительных решений.

Формулы пифагорейских троек предлагали ранние пифагорейцы, Платон, самое общее решение содержится в «**Начала**х» **Евклида**.

Также в «Началах» рассматривается уравнение Пелля для N=2 и доказывается, что из одного решения уравнения $y^2 = 2x^2 \pm 1$ можно получить новое решение по формулам

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \qquad y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$$

(см., например, *Б.Л. Ван дер Варден*. Уравнение Пелля в математике греков и индийцев // УМН. 1976. Т. 31, вып. 5(191). С. 57–70).

Архимед в письме к александрийским ученым поставил свою знаменитую «**задачу о быках**», которая сводится к уравнению Пелля при $N = 410\ 286\ 423\ 278\ 424$. Наименьшее решение этого уравнения записывается в десятичной позиционной системе с помощью 206 545 цифр, т.е. выписать его практически невозможно. Архимеда интересовал, не ответ, а общий алгоритм нахождения наименьшего решения этого уравнения.

В задаче требуется узнать число быков и коров в четырёх стадах, принадлежащих богу Солнца Гелиосу.

Сколько у Солнца быков, найди для меня, чужестранец.
(Ты их, подумав, считай, мудрости если не чужд.)

Как на полях Тринакрийской Сицилии острова тучных
Их в четырех стадах много когда-то паслось.

Цветом стада различались: блистало одно млечно-белым,
Темной морской волны стада другого был цвет,
Рыжим третие было, последнее пестрым. И в каждом
Стаде была самцов множеством тяжкая мощь,

Все же храня соразмерность такую: представь, чужестранец,
Белых число быков в точности было равно
Темных быков половине и трети и полностью рыжим;

Темных число быков четверти было равно
Пестрых с прибавлением пятой и также полностью рыжим;

Пестрой же шерсти быков так созерцай число:
Части шестой и седьмой от стада быков серебристых
Также и рыжим всем ты их число поравняй.

В тех же стадах коров было столько: число белошерстных
В точности было равно темного стада всего
Части четвертой и третьей, коль сложишь ты обе их вместе;

Темных число же коров части четвертой опять
Пестрого стада равнялось, коль пятую долю добавишь
И туда же быков в общее стадо причешь.

Те же, чья пестрая шерсть, равночисленны множеством были
Рыжего стада частям пятой и с нею шестой.

Рыжих коров же считалось количество равным полтрети
Белого сада всего с частию взятой седьмой.

Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты скажешь,
Нам раздельно назвав тучных быков число,
Также раздельно коров, сколько каждого цвета их было,
Не назовет хоть никто в числах невеждой тебя,
Все ж к мудрецам причислен не будешь.
Учти же, пожалуй,
Свойства такие еще Солнца быков числа.

Если быков среброшерстных ты с темными вместе смешаешь
Так, чтобы тесно они стали бы в ширь и в длину
Мерою равной, тогда на обширных полях Сицилийских
Плотным квадратом они площадь большую займут.

Если же рыжих и пестрых в одно ты смешаешь стадо,
Лесенкой станут они, счет с единицы начав,
Так что фигуру они треугольную нам образуют;

Цвета иного быков нам нет нужды добавлять.

Если ты найдешь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что в этой мудрости ты все до конца превзошел.

Условие задачи Архимеда состоит из двух частей. Первая часть приводит к решению в натуральных числах системы из семи линейных уравнений с восемью неизвестными. К этой части Архимед даёт такой комментарий:

Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты скажешь,

Нам раздельно назвав тучных быков число,

Так же раздельно коров, сколько каждого цвета их было,

Не назовёт хоть никто в числах невеждой тебя,

Всё ж ***к мудрецам причислен не будешь***.

Тем самым Архимед показывает, что первая часть представляет не очень сложную задачу. Гораздо больший интерес представляет вторая часть задачи о быках.

Первая попытка решить эту задачу была опубликована в **1880** г. немецкими математиками Амтором и Крумбигелем. Решив соответствующую неопределенную систему уравнений, они нашли, что

число белых быков	10 366 482 *n*,	белых коров	7 206 360 *n*,
черных быков	7 460 514 *n*,	черных коров	4 893 246 *n*,
рыжих быков	4 149 387 *n*,	рыжих коров	5 439 213 *n*,
пестрых быков	7 358 060 *n*,	пестрых коров	3 515 820 *n*,

где n – любое положительное число.

Дополнительные условия из второй части требуют, чтобы общее число белых и черных быков было квадратным, а число желтых и пестрых быков было треугольным.

Напомним, что треугольными называются числа, полученные суммированием последовательных натуральных чисел, начиная с единицы; k-ое треугольное число равно $k(k + 1)/2$.

Наименьшее решение неопределённой системы первой части получается при $n=1$, поэтому приходим к требованию *найти такое квадратное число, которое, будучи взято M = 51 285 802 909 803 раз, окажется равным некоторому треугольному числу*

(или на языке уравнений: $\boldsymbol{Mx^2 = k(k + 1)/2}$).

О сложности решения второй части задачи Архимед говорит так:

Если ты это найдёшь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
*Что **в этой мудрости ты всё до конца превзошёл**.*

«*Найти такое квадратное число, которое, будучи взято M раз, окажется равным некоторому треугольному числу*» в современных обозначениях можно привести к уравнению вида

$$\boldsymbol{y^2 - Nx^2 = 1}. \qquad (1)$$

Действительно, обозначим сторону искомого квадратного числа за x, сторону искомого треугольного числа за k. По условию

$$Mx^2 = k(k + 1)/2.$$

Нетрудно видеть, что восемь треугольных чисел с добавлением единицы

$$8Mx^2 + 1 = 4k(k + 1) + 1 = (2k + 1)^2 = y^2$$

дают квадратное число со стороной $y = 2k + 1$.

Таким образом, необходимо найти хотя бы одно целочисленное решение уравнения

$$y^2 = Nx^2 + 1$$

при $N = 8M =$ **410 286 423 278 424**.

Крумбигель и Амтор обнаружили, что наименьшие целые числа, удовлетворяющие этому уравнению, приводят к общему количеству крупного рогатого скота, выраженному целым числом из 206 545 цифр, которое начинается с цифр 776.

В докомпьютерную эру задача Архимеда рассматривалась в качестве примера такой задачи, которая хотя и имеет решение, но физически не может быть решена.

Первое полное компьютерное решение задачи Архимеда было получено в **1965**, для чего потребовалось **7 часов 49 минут** работы вычислительной машины IBM 7040. Компьютер Cray 1 проделал ту же работу в **1981 за 10 минут**. Существенно более быстрые вычислительные алгоритмы для решения задачи Архимеда были разработаны Айланом Варди (1998, США) и Антти Нюгреном (2001, Финляндия). Формулы последнего используют только целочисленную арифметику и требуют всего нескольких секунд работы персонального компьютера Pentium II.

Первые и последние пятьдесят цифр наименьшего решения:

77602714064868182695302328332138866642323224059233

...

05994630144292500354883118973723406626719455081800

https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Solution2.html

Надо думать, что Архимед, предлагая задачу о быках Эратосфену и другим александрийским математикам, отдавал себе отчёт в её непосильности, ведь он сам тоже не был способен выписать её ответ!

Естественно предположить, что он поставил эту задачу не ради того, чтобы продемонстрировать своё превосходство, а **для обсуждения общего метода решения уравнений** вида (1), которым он сам владел и изложения которого он ожидал от александрийских математиков, пусть и на более простых примерах, требующих разумного объёма выкладок.

К сожалению, **мы не знаем** ни того, **как решал это уравнение сам Архимед**, ни того, получил ли он какой-нибудь ответ от Эратосфена.

В дошедших до нас античных математических текстах **общие подходы к решению уравнения (1) нигде не обсуждаются**.

Диофант Александрийский (III в. н.э.) в своей “Арифметике” рассматривает частные случаи уравнения Пелля для *N* = 26 (Книга V, задача 9) и *N* = 30 (Книга V, задача 11) и находит наименьшее решение **с помощью специального приёма**:

Пусть $\boldsymbol{N = n^2 + m}$, где n — наибольшее число, квадрат которого не превосходит N. Тогда можно использовать подстановку $\boldsymbol{y = nx + 1}$:

(1): $$(nx+1)^2 = (n^2+m)x^2 + 1$$

или $$n^2x^2 + \boldsymbol{2nx} + 1 = n^2x^2 + \boldsymbol{mx} + 1,$$

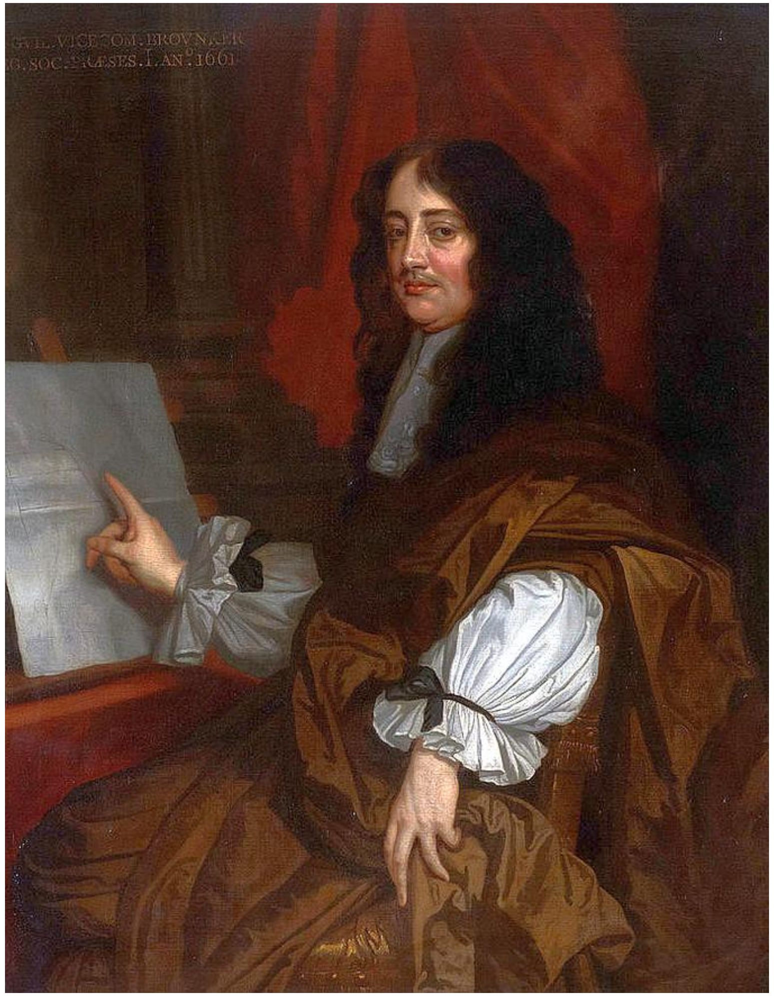
что даёт ответ $\boldsymbol{x = 2n/m}$.

Однако этот частный приём не слишком много говорит нам о том, как древнегреческие математики могли решать уравнение (1) при произвольном *N*.

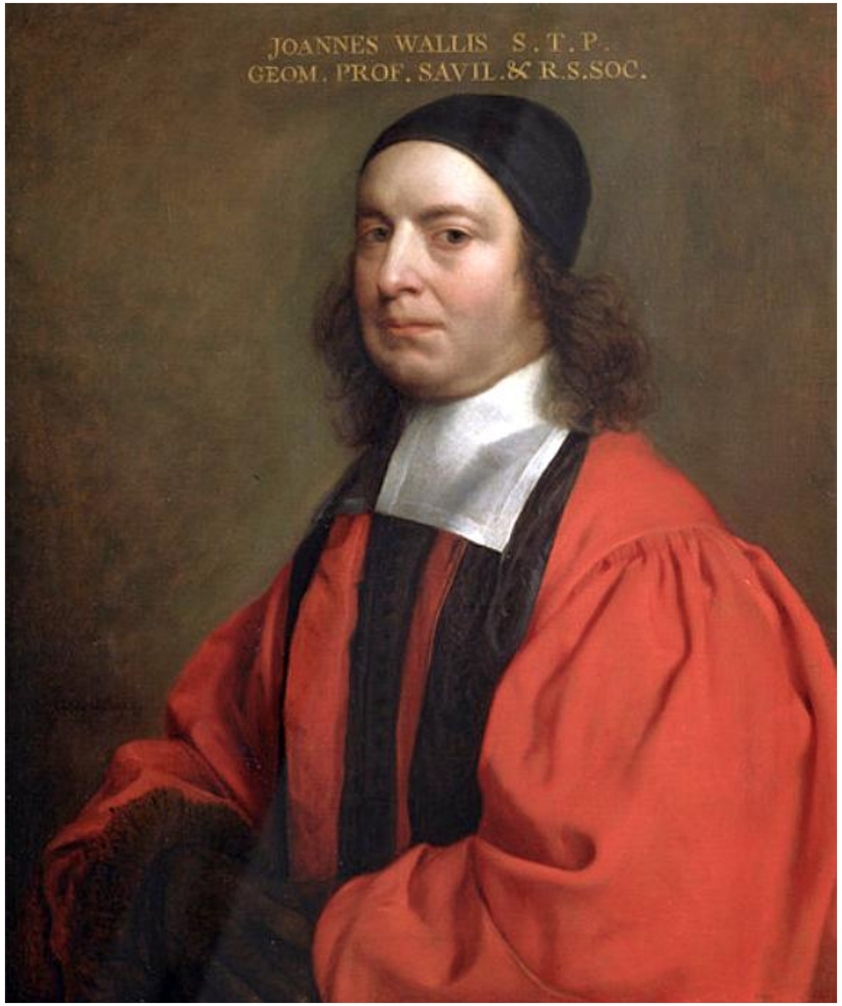
История уравнения (1) в Новое время начинается с вызова, который **Пьер Ферма** (1601–1665) бросил в 1657 современным ему математикам:

«Пусть дано любое неквадратное число, требуется найти бесконечное число квадратов, которые при умножении на данное число и увеличении на единицу составят квадрат...

Найти, например, квадрат, который при умножении на 149, или 109, или 433 и при увеличении на единицу составит квадрат».



Этот вызов приняли английские математики **Уильям Броункер** (1620–1684) и **Джон Валлис** (1616–1703), представившие свои решения.



Как решали уравнение (1) Ферма и Броункер, мы в точности не знаем. Методы, применявшиеся Валлисом, рассмотрены учеником И.Г. Башмаковой А.А. Антроповым.

С уравнением (1) связан известный исторический курьёз — Леонард Эйлер по ошибке назвал его ***уравнением Пелля,*** хотя английский математик Джон Пелль (1611–1685) никогда этим уравнением не занимался, правильнее было бы назвать его ***уравнением Ферма*** (во французской математике оно именно так и называется). Однако в остальной математической литературе закрепилось неправильное название. Общую историю уравнения Пелля рассматривали

Леонард Диксон (1874–1954) и Андре Вейль (1906–1998).

Так называемый циклический метод, с помощью которого за тысячу лет до Ферма и его современников **уравнение Пелля решали математики древней Индии**, рассмотрен в статье Б. Л. ван дер Вардена «Уравнение Пелля в математике греков и индийцев» (*УМН*. 1976. Т.31, вып. 5(191). С. 57–70).

Bartel Leendert van der Waerden

(1903–1996)

Творчество Евклида, Архимеда и Аполлония было вершиной античной математики. После Аполлония начался **спад**. Все исследования, которые проводились в последующие два столетия, не выходили из описанного круга проблем. Среди них не встречается ни новых идей, ни новых теорий.

Во второй половине 1 века до н.э. исследования по математике практически прекращаются, наступает **перерыв в передаче научной традиции**.

Причины затухания развития математики в I в. до н.э.

I. **Внутренние**: Диспропорция между высоким уровнем теории и низким уровнем математического аппарата (арифметико-алгебраический аппарат не развит, нужны новые функции, новые соотношения, геометрическая алгебра и её принцип однородности сковывают развитие науки)

II. Внешние: 1. Разрушительные войны с середины II в. до н.э.:

1) Пунические войны (Рим и Карфаген)
2) войны Рима с Малой Азией
3) падение Египта

Великие прежде страны потеряли независимость, стали провинциями Рима.

2. Гражданские войны в Римской империи.

Экономическая и культурная жизнь в эллинистических странах замерла. Измученные страданиями и горем люди потянулись к мистике Востока, к религии, которая обещала другую, лучшую жизнь. Абстрактное мышление, логические рассуждения отодвинулись на второй план.

В диалоге Цицерона “О государстве” один из участников предлагает обсудить вопрос о том, **почему на небе были видны два Солнца**. Но эта тема отвергается, так как “если мы по этому вопросу и приобретаем величайшие познания, все же **благодаря этим знаниям не сможем стать ни лучше, ни счастливее**”.

II–I вв. до н.э. стали временем стремительного возвышения Рима.

В 30-м г. до н.э. пало последнее из эллинистических государств – Египет, и была основана Римская империя. В результате этого положение бывших государств коренным образом меняется: прекращаются разорительные войны и прямой разбой, что приводит к более устойчивому экономическому положению.

Греческая наука оживает. В первые века нашей эры **Александрия** остается научным и культурным центром древнего мира.

Рим никогда не мог сравниться с ней в этом отношении. Он так и не приобщился к глубинам эллинской мысли. Практическому складу римского ума стремление к теоретическому познанию, столь характерное для греческой научной мысли, было чуждо. Из среды римлян не вышло ни одного сколько-нибудь значительного математика или физика, хотя Рим дал миру великолепных поэтов, замечательных историков, блестящих ораторов.

Наиболее глубоким умом, которого породила римская культура, был **Цицерон**: «*Римляне в отличие от греков не ценили геометрии; они ограничивали ее, как и арифметику, узкопрактическими знаниями. Математика вообще не была у них в почете. Даже денежными расчетами и межеванием земель, как и астрономическими наблюдениями, должны были заниматься не римляне, а греки, сирийцы и другие покоренные народы*».

Цицерон «Тускуланские беседы».

"… Он посвятил, наконец, большую часть своей жизни своей серенькой философии, которой он предавался в виде отдыха от государственных забот. Это была эклектическая философия, никому не обидная, принаровленная к потребностям Рима: немножко теории познания — для того, чтобы подчеркнуть скептическое отношение к метафизике; предпочтение морали всем физическим проблемам; центр тяжести — в скромном изяществе изложения; ***Цицерон собрал жалкие остатки меда с благоуханных цветов великого греческого мышления; с цветов, беспощадно раздавленных грубым колесом римской телеги****…"*

Александр ***БЛОК***. **Катилина**.

Вергилий

Тоньше другие ковать будут жизнью дышащую бронзу,
Верю тому, – создадут из мрамора лики живые,
Красноречивее будут в судах, движение неба
Тростью начертят своей и вычислят звезд восхожденья,
Ты же, римлянин, знай, как надо народами править.

Конец I и II в.н.э. обычно называют **ГРЕЧЕСКИМ ВОЗРОЖДЕНИЕМ**, имея в виду, что это было время жизни и творчества таких великих писателей, как Плутарх и Лукиан.

Такой же расцвет происходил и в естественных науках:

– в I в. в Александрии работал прекрасный математик и талантливый инженер-изобретатель **Герон**, первым открывший движущую силу пара,

– в конце века – математик и астроном **Менелай**, создатель системы геометрии и тригонометрии на сфере (первой неевклидовой геометрии),

– во II в. знаменитый астроном и математик **Клавдий Птолемей**, создавший геоцентрическую модель Солнечной системы, просуществовавшую до XV–XVI вв.

В творчестве этих ученых наметился поворот к вычислительной математике, **к расширению понятия числа, к отказу от геометрической алгебры**. За основу снова берется число, что приводит к **арифметизации математики**, происходит **выделение и самостоятельное построение алгебры**.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ У ГЕРОНА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО.

Герон Александрийский – инженер, изобретатель, математик и астроном. Преподавал в Мусейоне. В «Диоптре» описал лунное затмение 62 г. ⇒ жил в I в. н.э.? Также здесь изложены правила земельной съемки в прямоугольных координатах.

Изобрел ряд пневматических устройств и автоматов (автоматические двери, театр марионеток, автомат для продаж и др.), паровую турбину, некоторые измерительные инструменты (водяные часы, древний одометр для измерения протяженности дорог и др.)

Занимался геометрией, механикой, гидростатикой, оптикой. Писал комментарии к «Началам» Евклида. Составил «***Метрику***» – сборник различных (точных и приближенных) формул для измерения фигур и других вычислений. Доказательства есть не всегда, но всегда являются строгими. **Зато здесь имеется цикл задач, эквивалентных неопределенным уравнениям. Появляются первые обозначения для неизвестной величины**.

Об изобретениях Герона:
https://www.youtube.com/watch?v=Em6mCdU0ykg

1. Найдите два прямоугольника таких, чтобы периметр второго был равен трем периметрам первого, а площадь первого была равна трем площадям второго:

$$\begin{cases} a(x+y) = u + v \\ xy = a\,uv \end{cases}, \text{ где } a = 3.$$

Для решения этой задачи Герон предлагает следующее:

$3^3 = 27$	a^3
$27 \cdot 2 = 54$	$2a^3$
$54 - 1 = 53$ и это будет	$2a^3 - 1 = y$
одна сторона прямоугольника. Другая же сторона этого прямоугольника равна 54.	$2a^3 = x$
$53 + 54 = 107$	$P_1 = x + y$
$107 \cdot 3 = 321$	$P_1 \cdot a = P_2$
$321 - 3 = 318$ и это сторона второго прямоугольника, другая сторона которого равна 3.	$P_2 - a = u$ $a = v$

Каким образом могут быть получены формулы для вычисления *x* и *y* ?

Почему *v* = *a*?

2. Найдите два прямоугольника таких, чтобы периметр первого был равен периметру второго, а площадь первого равнялась четырем площадям второго:

$$\begin{cases} x + y = u + v \\ xy = buv \end{cases} \quad b=4$$

Для решения этой задачи Герон предлагает другой алгоритм:

$4^3 = 64;$	b^3
$4^3 - 1 = 63$ и это – полупериметр обоих прямоугольников;	$b^3 - 1 = P$
$4 - 1 = 3$ и это – сторона второго прямоугольника;	$b - 1 = u$
$63 - 3 = 60$ – другая его сторона;	$P - u = v$
$4 \cdot 4 = 16;$	
$16 - 1 = 15$ – сторона первого прямоугольника;	$b^2 - 1 = x$
$63 - 15 = 48$ – его вторая сторона.	$P - x = y$

Этот тип задачи можно привести к общему виду с задачей 1:

$$\begin{cases} a(x + y) = u + v \\ xy = b\,uv \end{cases}$$, где $a = 1$, $b = 4$.

Но Герон предлагает совершенно другое решение. **Почему**???

Также непонятно, **почему** в качестве общего полупериметра прямоугольников Герон принимает величину $P = b^3 - 1$.

3. В прямоугольном треугольнике периметр равен 50 футам. Найти стороны:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y + z = 50 \end{cases}$$

Герон предлагает использовать «*пифагоров метод*». Сначала рассматривает треугольник 3,4,5, периметр которого 12 футов. Т.к. искомый треугольник имеет периметр 50, то стороны искомого треугольника находятся из подобия. О том, что вместо треугольника 3,4,5 можно взять любой другой прямоугольный треугольник и **получить другое решение, Герон не упоминает**.

4. Площадь прямоугольного треугольника равна 5. Найти его стороны:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ \frac{1}{2}xy = 5 \end{cases}.$$

Пифагоровы тройки:

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad m > n$$

Следовательно, минимальное решение получится при $m = 2, n = 1$ и площадь этого минимального треугольника S_{min} будет равна 12, т.е. предложенная задача 4 не имеет целочисленного решения!

Эта **задача представляет особый интерес**, поскольку позже в более сложном виде она встречается у Диофанта, у математиков арабского Востока, у Леонардо Пизанского и у Луки Пачоли.

Для решения этой задачи Герон использует утверждение о том, что **площадь прямоугольного треугольника в целых числах кратна 6** (**!!!**). Это важное свойство было доказано Леонардо Пизанским в его «Книге квадратов» в 1225 г.

Поскольку в задаче площадь треугольника равна 5, то стороны искомого не могут быть целыми, и Герон сначала ищет подобный ему треугольник с целочисленными сторонами и площадью $5k^2$, где k – коэффициент подобия. Площадь этого треугольника должна делиться на 6, а наименьший квадрат, обладающий этим свойством – 36. Поэтому уравнение, определяющее условие на параметры будет иметь вид

$$mn(m^2 - n^2) = 5 \cdot 36 .$$

Правая часть может быть разложена в произведение $4 \cdot 5 \cdot 9$ и, взяв *m=5, n=4*, Герон получает вспомогательный треугольник 9, 40, 41, с помощью которого находит решение.

Отметим, что задача нахождения прямоугольного треугольника с рациональными сторонами и заданной площадью может быть сведена к системе уравнений:

$$\begin{cases} z^2 + a = u^2 \\ z^2 - a = v^2 \end{cases}$$

и эту задачу рассматривали математики средневекового Востока, а впоследствии и Леонардо Пизанский.

Решения уравнения $2z^2 = u^2 + v^2$, к которому эту систему легко привести, – знаменитые **вавилонские тройки**, поэтому весьма вероятно, что Герон опирался на древневавилонскую традицию.

В последующих четырех задачах Герон также занимается поисками прямоугольного треугольника, на который наложены некоторые условия, **всегда начиная с треугольника 3,4,5 и нигде не отмечая, что вместо него можно взять любую другую пифагорову тройку**.

Задачи 10–13 представляют другой, не менее интересный цикл, для которого существуют различные реконструкции. В современной символике условие задач может быть записано системой:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ \frac{1}{2}xy + (x + y + z) = \Delta \end{cases}$$

Решение этой задачи в положительных рациональных числах существует не всегда, но **у Герона никакого исследования и никаких указаний на этот счет нет**.

В «Арифметике» Диофанта вся книга 6 посвящена задачам на прямоугольные треугольники, однако задач, совпадающих с задачами Герона нет. Интересно, что в своей книге **Диофант тоже часто применяет «пифагоров метод»** – использование вспомогательного треугольника 3,4,5, но в отличие от Герона **не довольствуется только одним решением**, а **отмечает, что их может быть бесконечно много**.