АЛГЕБРА
XVIII–XIX вв.

В развитии алгебры этого периода можно выделить **два основных направления** исследований, в процессе которых сформировались понятия группы и поля: это – исследования Эйлера, Лагранжа и Гаусса, относящиеся к **основной теореме алгебры**, и исследования по общей теории алгебраических уравнений, связанные с **попытками решения уравнений степени выше четвертой в радикалах**.

В ходе последних изысканий **на первый план вышло понятие группы** и были установлены первые важные теоремы теории групп (теорема Лагранжа о порядках конечной группы и ее подгрупп, теорема о возможности представления коммутативной группы в виде прямого произведения циклических, содержащаяся уже в работах Гаусса по теории уравнения деления круга и др.).

1. Основная теорема алгебры.

1572 Рафаэль **БОМБЕЛЛИ** комплексные числа

1591 (оп. 1646) Франсуа **ВИЕТ**

– буквенное исчисление;

– формулы связи между корнями и коэффициентами для *n=2,3,4,5*;

– построил уравнение 5й степени, имеющее 5 корней и *«этот метод можно распространить на любую степень»*

1629 Альбер **ЖИРАР** «***Новое изобретение в алгебре***»:

«Все уравнения алгебры получают столько решений, сколько их показывает наименование высшей величины».

Без доказательства. Учитываются невозможные корни.

Обобщил утверждения Виета о связи корней с коэффициентами.

1637 Рене **ДЕКАРТ**:

«… всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений…

…Как истинные, так и ложные корни могут быть или действительными, или воображаемыми (imaginaire)».

Эта теорема «основная», т.к. до середины 19 века **алгебра ≡ «анализ уравнений»**: вычисление корней, их оценки, различные правила о числе корней, их знаках и т.п.

Вначале пытались установить общие формулы корней, а не доказать их существование. Проблема существования и необходимость доказательства возникла из задачи интегрирования рациональных дробей методом Лейбница и Бернулли (разложение правильной дроби в сумму простейших зависит от поля, в котором мы его ищем).

Формулировка основной теоремы алгебры в XVIII в.

1742 **ЭЙЛЕР**:

Любой алгебраический многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных или квадратных множителей.

1746 (оп.1748) **ДАЛАМБЕР**

«Исследования по интегральному исчислению».

Это утверждение надо рассматривать на правах теоремы.

Доказательство Даламбера – первое, аналитическое, нестрогое.

Доказательство Даламбера ***аналитическое***:

Опирается на рассмотрение кривых и бесконечных последовательностей. Состоит из трех теорем и трех следствий к первой теореме.

Для кривой $y = f(z)$ в окрестности комплексной точки $z = 0$ Даламбер задает сходящийся ряд по дробным степеням с действительными, монотонно возрастающими коэффициентами

$$y = a_1 z^{\frac{m}{n}} + a_2 z^{\frac{r}{s}} + \cdots$$

Т.к. z мало, то в этом ряду Даламбер отбрасывает все члены кроме первого и затем показывает, что этот ряд есть действительное или комплексное число в зависимости от четности-нечетности знаменателя в степени неизвестного. При этом утверждает, что сумма будет тоже либо действительной, либо комплексной величиной.

В дальнейшем использует также утверждение о достижении алгебраической функции своих *sup* и *inf* .

Доказательство Даламбера Основной теоремы алгебры.

Теорией уравнений в то время не занимался, целью было получение аналитического результата. Опирается на рассмотрение кривых и бесконечных последовательностей.

1746 (оп. 1748) "***Исследования по интегральному исчислению***"

Теорема 1. Пусть *TM* – некоторая кривая, координаты которой *TP = z* и *PM = y* (т.е. рассматривается функция *y = f(z)*). Пусть при *z* = 0 *y* = 0 или ∞.

Тогда любому бесконечно малому значению *z* соответствует либо действительное, либо комплексное значение *y*.

В своем доказательстве Даламбер *предполагает*, что в окрестности *z* = 0 переменную *y* можно задать сходящимся рядом

$$y = a_1 z^{\frac{m}{n}} + a_2 z^{\frac{p}{q}} + \cdots \qquad (*),$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, показатели $\in \mathbb{Q}$ и монотонно возрастают.

Т.к. z бесконечно мало, то в (*) можно отбросить все члены кроме первого. Затем Даламбер показывает, что в зависимости от четности-нечетности знаменателя n в показателе первого слагаемого $a_1 z^{\frac{m}{n}}$ оно будет действительным или комплексным числом, учитывая при этом, что отброшенные члены в сумме тоже будут либо действительной, либо комплексной величиной, бесконечно малой по отношению к первому слагаемому. Теорема 1 доказана.

Отсюда Даламбер выводит три следствия:

Следствие 1. Если для этой кривой действительной точке z_0 соответствует комплексное y_0, то для любого z, бесконечно мало отличающегося от z_0, соответствующее значение y тоже будет комплексным.

Доказательство использует параллельный перенос (y_0, z_0) в (0,0) и теорему 1.

<u>Следствие 2</u>. Теорема 1 верна не только для бесконечно малого z, но и для некоторого конечного z.

Доказательство Следствия 2 опирается на утверждение о том, что любое конечное значение можно исчерпать бесконечно малыми значениями. (*Рассуждения о бесконечно малых нестрогие!*)

<u>Следствие 3</u>. Любому действительному значению z соответствует либо действительное, либо комплексное значение y.

Доказательство: Пусть при некотором комплексном y существует z_1 такое, что $P(y; z_1) = 0$, а z_2 не удовлетворяет этому уравнению, причем $z_2 > z_1$.

Рассмотрим z_0 – максимальное из z, удовлетворяющих уравнению кривой $P(y; z_1) = 0$. По Следствию 1 все z из окрестности z_0 удовлетворяют этому уравнению, следовательно, существует z' такое, что $z_0 < z' < z_2$, но по условию z_0 – максимальное значение z, следовательно, получено противоречие, доказывающее следствие 3. (*Алгебраическая функция не обязана достигать своих граней.*)

Теорема 2. Если многочлен

$$y^m + a_1 y^{m-1} + \cdots + a_{m-1} y + a_m \neq 0$$

для любого действительного y, то существует корень вида $p + q\sqrt{-1}$.

Доказательство вытекает из Следствия 3: пусть

$$z = P(y) = y^m + a_1 y^{m-1} + \cdots + a_{m-1} y$$

задает кривую из Теоремы 1 (т.к. при $y = 0$ $z = 0$). В силу Следствия 3 любому действительному z соответствует y действительное или комплексное, но из условия Теоремы 2 получаем, что y – комплексное. Положив $z = -a_m$, получим теорему 2.

Теорема 3. Любой многочлен может быть разложен в произведение линейных или квадратичных множителей.

Для этого Даламбер устанавливает: если $p + q\sqrt{-1}$ – корень, то $p - q\sqrt{-1}$ – тоже корень.

Уже в **1799** г. **Гаусс** критиковал это доказательство Даламбера: алгебраическая функция не обязана достигать своей верхней и нижней граней, рассуждения нестрогие!

На основе этих идей Даламбера Гаусс дает свое первое доказательство ОТА в диссертации "***Новое доказательство теоремы о том, что всякая алгебраическая целая рациональная функция от одной переменной может быть разложена на действительные множители первой или второй степени***".

После этого интерес к доказательству Даламбера был утрачен и оно было забыто. Лемма Даламбера, которая часто используется в доказательстве ОТА в современных учебниках, была доказана **Ж.Р. Арганом** в **1806** г. в работе "*Опыт некоторого способа представления мнимых величин в геометрических построениях*", содержащей известную интерпретацию комплексного числа как точки на плоскости.

<u>*Лемма Даламбера*</u>: Если какое-либо значение многочлена $f(z_0) \neq 0$, то существует сколь угодно близкое к z_0 значение z_1, для которого $|f(z_1)| < |f(z_0)|$.

Доказательство Эйлера Основной теоремы алгебры.

В **1748** г., когда было опубликовано доказательство ОТА Даламбера, Эйлер **представил** в Берлинскую академию наук свое доказательство. Оно было включено в мемуар "Исследования о мнимых корнях уравнений", вошедший в "Записки Берлинской академии за 1749 г.", опубликованные в 1751 г.

Это – **первая попытка чисто алгебраического доказательства**, **НО** она содержит два топологических предложения:

1. Любое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.
2. Любое уравнение четной степени с действительными коэффициентами и отрицательным свободным членом имеет по крайней мере два действительных корня.

Все остальные утверждения в доказательстве алгебраические.

Напомним, что **в XVIII в. предполагалось**, что любой многочлен *n-й* степени всегда представим в виде произведения множителей первой степени вида $(x-\alpha_i)$, где α_i – некоторые символы, о которых известно, что **арифметические операции с ними производятся так же, как и с действительными числами**. Поэтому ОТА заключалась в доказательстве утверждения, что **все** $\boldsymbol{\alpha_i}$ – действительные или комплексные.

Пусть задано уравнение

$$P_n(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots + N = 0.$$

Эйлер: припишем этому уравнению *n* корней:

$$P_n(x) = (x+\alpha)(x+\beta)\ldots(x+\nu), \qquad (*)$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ – действительные, комплексные или **любые другие мнимые** величины, с которыми **можно оперировать по обычным правилам**.

В этих предположениях **ОТА** состоит в доказательстве того, что **все "мнимости" имеют вид** $\boldsymbol{p + q\sqrt{-1}}$.

Эта постановка традиционна для XVIII века (Лагранж, Лаплас и др.). Перемножив скобки в правой части (*), получим утверждения теоремы Виета:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \cdots + \nu = A & (1) \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \cdots + \mu\nu = B & (2) \\ \ldots \quad \alpha\beta \ldots \nu = N & (N) \end{cases}$$

Эйлер: 1. Поскольку любой многочлен нечетной степени всегда имеет действительный корень, то нужно рассматривать многочлены четной степени $n = 2l$.

2. Он утверждает, что любой многочлен четной степени $P_n(x)$ с действительными коэффициентами всегда можно представить в виде

$$P_{2l}(x) = f_l(x)\, g_l(x),$$

где $f_l(x)$ и $g_l(x)$ – многочлены степени l с действительными коэффициентами.

Эйлер замечает, что достаточно рассмотреть уравнения $P_n(x)$ при $n = 2^k$ (так как именно в них сосредоточена вся трудность).

Действительно, если $n \neq 2^k$, то найдем такое k, что $2^{k-1} < n < 2^k$, и домножим многочлен $f_n(x)$ на $2^k - n$ множителей, например, $x^{2^k-n} = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ ($2^k - n$ раз используем корень $x = 0$).

В этом случае $P_{2^k}(x) = P_{2^{k-1}}(x)\, Q_{2^{k-1}}(x)$ – произведение двух многочленов с неопределенными коэффициентами, которые можно искать из теоремы Виета.

Идея дальнейшего доказательства Эйлера состоит в проведении редукции, сводящей решение уравнения степени $2^k m$, где m нечетно, к уравнению степени $2^{k-1} m_1$, где m_1 нечетно.

Эйлер доказывает теорему для $P_n(x)$ при $n = 4, 8, 16$, а затем переходит к общему случаю $n = 2^k$.

Чтобы пояснить методы Эйлера, рассмотрим вслед за ним случай n=4. Пусть задано уравнение $P_4(x) = x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$

Методом неопределенных коэффициентов разложим многочлен на множители вида: $(x^2 + ux + d)(x^2 - ux + f) =$ (*)

$$= x^4 + x^2(d + f - u^2) + x(f - d)u + df.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях и решая возникающую при этом систему, получаем:

$$u^6 + 2au^4 + (a^2 - 4c)u^2 - b^2 = 0$$

– уравнение четной степени с отрицательным свободным членом, следовательно, у него существует два действительных корня. Возьмем один из них в качестве *u* и подставим в (*), используя *f, d,* рационально выраженные через *u* в процессе решения системы методом неопределенных коэффициентов*:* $f = \varphi(u) \epsilon \mathbb{R}$, $d = \psi(u) \epsilon \mathbb{R}$,

таким образом найдено искомое разложение $P_4(x) = f_2(x)\, g_2(x)$ с действительными коэффициентами.

Чтобы обобщить свое утверждение на любое уравнение степени 2^k, Эйлер получает те же результаты из общих соображений, без вычислений. При этом **без доказательства (!) применяет**:

(А) Любая рациональная симметрическая функция корней уравнения является рациональной функцией от коэффициентов этого уравнения (*основная теорема о симметрических функциях)*.

(Б) Рациональная функция корней уравнения $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая при всех возможных перестановках корней ровно *k* различных значений, удовлетворяет уравнению степени *k*, коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения.

(А) и (Б) стали позже центральными утверждениями в теории Лагранжа и у Галуа.

Из общих соображений Эйлер находит и уравнение для u:

Пусть уравнение $P_4(x) = x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Тогда u должно быть суммой каких-нибудь двух из них, т.к. u – коэффициент при первой степени в одном из двух квадратных трехчленов разложения. Следовательно, u может принимать $6 = C_4^2$ различных значений и (по (Б)) определяется уравнением 6-й степени.

Поскольку рассматривалось уравнение без кубического слагаемого, то сумма всех корней равна 0: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$

Тогда возможными значениями для u будут

$u_1 = \alpha + \beta = p$ $\quad$ $u_2 = \alpha + \gamma = q$ $\quad$ $u_3 = \alpha + \delta = r$

$u_4 = \gamma + \delta = -p$ $\quad$ $u_5 = \delta + \beta = -q$ $\quad$ $u_6 = \alpha + \gamma = -r$

Следовательно, искомое уравнение для имеет вид:

$$(u^2 - p^2)(u^2 - q^2)(u^2 - r^2) = 0.$$

Это – уравнение четной степени с отрицательным свободным членом, равным $-p^2q^2r^2$, где $pqr \in \mathbb{R}$, т.к. $pqr = (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)$ не меняется ни при каких перестановках корней и поэтому рационально выражается через коэффициенты уравнения $a, b, c \in \mathbb{R}$. Итак, из общих соображений доказано, что **коэффициент *u* можно выбрать действительным.**

Доказательство случая *n* = 2^k (теорема 7) у Эйлера только намечено.

Многочлен

$$f_n(x) = x^{2^k} + Bx^{2^k-2} + Cx^{2^k-3} + \ldots \quad (4)$$

он представляет в виде произведения двух множителей степени 2^{k-1} с неопределенными коэффициентами

$$(x^{2^{k-1}} + ux^{2^{k-1}-1} + \lambda x^{2^{k-1}-2} + \ldots)(x^{2^{k-1}} - ux^{2^{k-1}-1} + \lambda' x^{2^{k-1}-2} + \ldots).$$

Этих коэффициентов будет $2^k - 1$, столько же, сколько определяющих соотношений.

Поскольку u является суммой 2^{k-1} корней из всей совокупности 2^k корней, то число различных значений, которое может принимать u, равно $C_{2^k}^{2^{k-1}} = 2N$, где N — нечетное. Показав это, Эйлер заключает, что u удовлетворяет уравнению степени $2N$ с действительными коэффициентами. Это уравнение, как нетрудно видеть, будет иметь ту же структуру, что и уравнение (3), а именно:

$$(x^2 - p_1^2)(x^2 - p_2^2)\dots(x^2 - p_N^2) = 0.$$

Эйлер рассматривает его свободный член — $p_1^2 p_2^2 p_3^2 \dots p_N^2$ и утверждает, что он будет отрицательным (что нетрудно показать). Отсюда он заключает, что u можно выбрать действительным. Относительно остальных коэффициентов λ, μ, . . ., λ', μ', . . . Эйлер утверждает, что они могут быть выражены рационально через u и коэффициенты многочлена (4) B, C, D... Трудно сказать с определенностью, каковы были соображения, приведшие Эйлера к этому заключению.

Строгому доказательству действий Эйлера посвятил свою работу **1772** "***О форме мнимых корней уравнений***" Ж.-Л. **Лагранж**, полностью воспринявший точку зрения Эйлера о том, что любому уравнению можно приписать *n* корней-символов, с которыми оперируют обычным образом.

В частности, для доказательства утверждения Эйлера о возможности рационально выразить $\lambda, \mu, \ldots, \lambda', \mu'$ через u и коэффициенты многочлена (4) Лагранж привлекает свою теорию подобных функций, изложенную им в 1771 г. в его знаменитых «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений»

С другой стороны, ряд математиков XVIII в. старались упростить редукцию Эйлера. Первым из них был Д. де Фонсене (1759), за ним последовал Лаплас (1795) и др. Однако все они безоговорочно принимали постановку вопроса, данную Эйлером, т. е. полагали, что, какова бы ни была степень уравнения

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + N = 0,$$

его всегда можно представить в виде

$$(x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \ldots (x + \alpha_n) = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — символы, над которыми, однако, можно оперировать по тем же правилам, что и над вещественными числами.

Критика Гаусса

1799 Докторская диссертация «***Новое доказательство теоремы о том, что всякая алгебраическая целая рациональная функция от одной переменной может быть разложена на действительные множители первой или второй степени***»

– критика доказательства Даламбера,

– дал целиком аналитическое доказательство;

– критика постановки вопроса у Эйлера.

1815 «***Второе доказательство теоремы о том, что***…»

– безупречно строгое в алгебраической части доказательство, близкое к доказательству Эйлера;

– обвинил Эйлера в порочном круге:

«Это предложение [о возможности разложения многочлена на множители], по крайней мере в том месте, где речь идет об общем доказательстве этой разложимости, есть не что иное, как Petitio principii»

Из докторской диссертации К.Ф. Гаусса (1799):

«Так как, помимо действительных и мнимых количеств a+b√–1, нельзя представить никаких других видов количеств, то не совсем ясно, чем отличается то, что надо доказать, от того, что предполагается в качестве основного предложения; но даже если бы можно было придумать еще и другие виды количеств, как F, F’, F’’,…, то и тогда нельзя было бы принять без доказательства, что каждое уравнение удовлетворяется либо действительным значением x, либо значением вида a+b√–1, либо вида F, либо вида F’ и т.д. Поэтому это основное предложение может иметь только такой смысл:

каждое уравнение может удовлетворяться либо действительным значением неизвестной, либо мнимым вида a+b√–1, либо, может быть, некоторым значением другого, еще неизвестного вида, либо значением, которое не содержится ни в каком виде. Как эти количества, о которых мы не можем составить никакого представления, – эти ***тени теней****, – должны складываться или умножаться, этого нельзя понять с ясностью, требующейся в математике.»*

К.Ф. **ГАУСС**

исходил из того, что **поле комплексных чисел заранее определено**, и доказывал, что у каждого алгебраического уравнения с действительными коэффициентами в этом поле имеется корень, или что то же самое, доказывал, что разложимость соответствующего многочлена на действительные множители 1й или 2й степени (без предположения о существовании корней).

Обвинение Эйлера в порочном круге несправедливо, т.к. можно строить **поле разложения многочлена**, не предполагая заранее существования поля комплексных чисел. Такое построение есть конструкция Л. **КРОНЕКЕР**а (**1882**). Тогда основная теорема алгебры будет состоять в том, что построенное поле разложения многочлена есть подполе поля комплексных чисел или изоморфно его подполю.

В доказательстве Гаусса 1815 г. содержится конструкция поля разложения многочлена, но в очень завуалированной форме.

Независимо от Гаусса О.-Л. **КОШИ** построил поле разложения многочлена $x^2+1 = 0$.

Герман Вейль (1885–1955) назвал точку зрения Эйлера характерной для алгебры, а точку зрения Гаусса в его первых доказательствах ОТА – характерной для анализа в комплексной области.

К XX веку оба доказательства были приняты.

2. Решение алгебраических уравнений в радикалах

В XVIII в. занимались:	Э.В. Чирнгауз	(1651–1708),
	Л. Эйлер	(1707–1783),
	Э. Безу	(1730–1783),
	Ж.Л. Лагранж	(1736–1813),
	А.Т. Вандермонд	(1735–1796) и др.

1683 Чирнгауз

Путь: найти подстановку вида $x = y^{n-1} + \alpha y^{n-2} + \cdots + \beta$,

уничтожающую два, три, … , ***n – 1*** слагаемое, чтобы получить двучленное уравнение типа $y^n \pm A = 0$.

Чирнгаузу удалось сделать это в случае кубического уравнения. Для ***n=4*** удалось сделать **Эйлер**у, но для *n=5* степень резольвенты выросла до 24. В результате:

1) много работ по **приближенному вычислению корней** (Лопиталь, Стирлинг, Бернулли, Ньютон, Крамер и др.);

2) найдены некоторые **специальные классы уравнений, разрешимых** в радикалах: уравнения 5-й степени, которые мы можем охарактеризовать как уравнения с циклической группой Галуа (**Эйлер**) и один из классов уравнений с полуметациклической группой (**Эйлер**).

Эйлер также нашел общий вид корней уравнения 5-й степени, если оно разрешимо в радикалах. Впоследствии этот результат стал отправной точкой для исследований Абеля.

Переломный момент:

1771–72 **Ж.Л. ЛАГРАНЖ**

«Размышления об алгебраическом решении уравнений»

1. Исследовал все методы предшественников:

«Я намереваюсь исследовать различные методы алгебраического решения уравнений, которые встречались до сих пор, свести их к общим принципам и показать априори, почему эти методы приводят к успеху для третьей и четвертой степени и непригодны для более высоких степеней.»

2. Показал, что все прежние методы сводились к отысканию **рациональных функций корней**, которые при всех возможных перестановках корней принимали бы ***k*** $(< n)$ различных значений.

Свел вопрос о решении уравнений в радикалах к рассмотрению группы подстановок корней и ее подгрупп.

Лагранж рассматривал *множество подстановок* корней уравнения, в котором определил, что такое подстановка, произведение двух подстановок, единичная подстановка и обратная подстановка, резольвента. Таким образом, фактически Лагранж рассматривает **группу подстановок корней**, не используя термин «группа» (он появился позднее), и его рассмотрение имеет абсолютно общий характер.

Изучая **подстановки, при которых не меняется** введенная им рациональная функция корней уравнения, Лагранж получил, что такие подстановки образуют подгруппу исходной группы и отсюда следует теорема Лагранжа о том, что порядок подгруппы делит порядок группы.

«***Подстановки являются истинной метафизикой решения алгебраических уравнений***… *Весьма сомнительно, что эти методы могли бы дать решение уравнения 5й степени и более высоких степеней».*

Вывод Лагранжа:

Если такая (k < n) нетривиальная **подгруппа существует, то** исходное **уравнение разрешимо**.

Для доказательства этого факта в случае уравнения 5й степени ему не хватало:

1) установить, что S_5 не имеет подгрупп индексов от 2 до 5;

2) доказать, что всякий промежуточный радикал является рациональной функцией корней уравнения.

В процессе создает учение о подобных функциях, которое устанавливает ***соответствие между подгруппами группы перестановок корней уравнения и подполями поля разложения многочлена***.

Впоследствии это соответствие стало центральным местом у Гаусса и у Галуа (заново доказал в 1829).

После Лагранжа – **два направления исследований**:

Исследование уравнений с <u>буквенными</u> коэффициентами:

Паоло **Руффини** 1799

Огюстен-Луи **Коши** 1815

Основы теории подстановок

Нильс Генрик **Абель** 1824/26

Доказательство неразрешимости уравнений с буквенными коэффициентами степени ≥ 5

Эварист **Галуа** 1832

Классы разрешимых уравнений и уравнения с <u>числовыми</u> коэффициентами:

Карл Фридрих **Гаусс** 1801

Уравнение деления круга

Нильс Генрик **Абель** 1828/29

Разрешимость нормальных уравнений и с абелевой группой

Эварист **Галуа** 1832

Теория Галуа.

Критерий разрешимости уравнения. Группы, поля.

Паоло **РУФФИНИ** (1765–1822)

1799 Рассмотрел подстановки для ***n = 5*** и их произведения; показал: если у функции от 5 переменных менее 5 различных значений, то их не больше двух $\Rightarrow$ невозможно построить резольвенту Лагранжа степени ниже 5.

НО посылка Руффини не верна: **корни резольвенты не обязательно рационально выражаются через корни исходного уравнения**.

Огюстен-Луи **КОШИ** (1789–1857)

1815 Обобщил результат Руффини на **все *n*** и доказал, что группа подстановок при $n > 5$ не имеет подгрупп индекса, большего 2 и меньше наименьшего простого числа, не превосходящего n.

На этом пути **Абель** (**1826**) получил свое **полное доказательство**.

Коши заложил основы теории подстановок: удобные обозначения (до сих пор), произведение двух подстановок, обратная подстановка, порядок подстановки и т.п.

Нильс Хенрик АБЕЛЬ (1802–1829)

– из бедной пасторской семьи;
– застенчивый, впечатлительный;

1822 начал учиться в университете в Христиании;

1823 первая работа о существовании решения уравнения 5й степени;

1825 учеба в Берлине и знакомство с Крелле;

1826 полное «Доказательство невозможности…»;

затем – путешествие в Италию, поездка в Париж, «холодный» прием…

1827 возвращение домой, болезнь обострилась…

1801 **ГАУСС** ***«Арифметические исследования»***

Нашел (1796) **первый** важный **класс уравнений, разрешимых в радикалах** – *уравнения деления круга*

$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ при *n* = $2^{2^k} + 1$ разрешимы в квадратных радикалах.

Показал, что **любого простого *n***

– уравнение неприводимо;

– корни всегда выразимы в радикалах; дал критерий разрешимости в квадратных радикалах;

– группа уравнения циклична;

– рассмотрел все ее подгруппы и построил соответствующие поля;

– сформулировал вывод о возможности обобщения.

В черновиках и дневниках Гаусса есть примеры исследования и некоторых других уравнений:

1) уравнение деления круга при составном *n*: тогда группа Галуа не циклическая, но коммутативная, следовательно, «круговые функции можно рассматривать во всей всеобщности»;
2) деление лемнискаты на *n* равных частей приводит к уравнению степени n^2 , подстановки ≡ коммутативная группа;

Но **не публиковал**.

Дж. Стиллвелл: «*Ответ на задачу деления лемнискаты на n равных частей найден **Абел**ем (1827), который **преобразовал туманность Гаусса в кристальную ясность**: деление с помощью линейки и циркуля возможно для точно такого же n, как и для круга. Этот удивительный результат служит, возможно, лучше, чем любой другой, подчеркиванию объединяющей роли эллиптических функций в геометрии, алгебре и теории чисел*».

1829 **Н.Х. АБЕЛЬ** ***«Мемуар об одном особом классе алгебраических разрешимых уравнений»***

– ввел «***область рациональности***» уравнения – множество всех величин, которые рационально выражаются через коэффициенты уравнения и рациональные числа (т.е. множество рациональных функций от коэффициентов уравнения).

Мы: *алгебраическое расширение поля*, полученное присоединением коэффициентов и корней уравнения, основное поле.

– **нашел** (еще один, после уравнений деления круга) специальный, очень широкий **класс уравнений любой степени, разрешимых в радикалах**:

1) ***нормальное*** уравнение, т.е. любой корень рационально выражается через какой-нибудь один;

2) группа подстановок корней ***коммутативна***: $\vartheta_i(\vartheta_j(x_1)) = \vartheta_j(\vartheta_i(x_1))$.

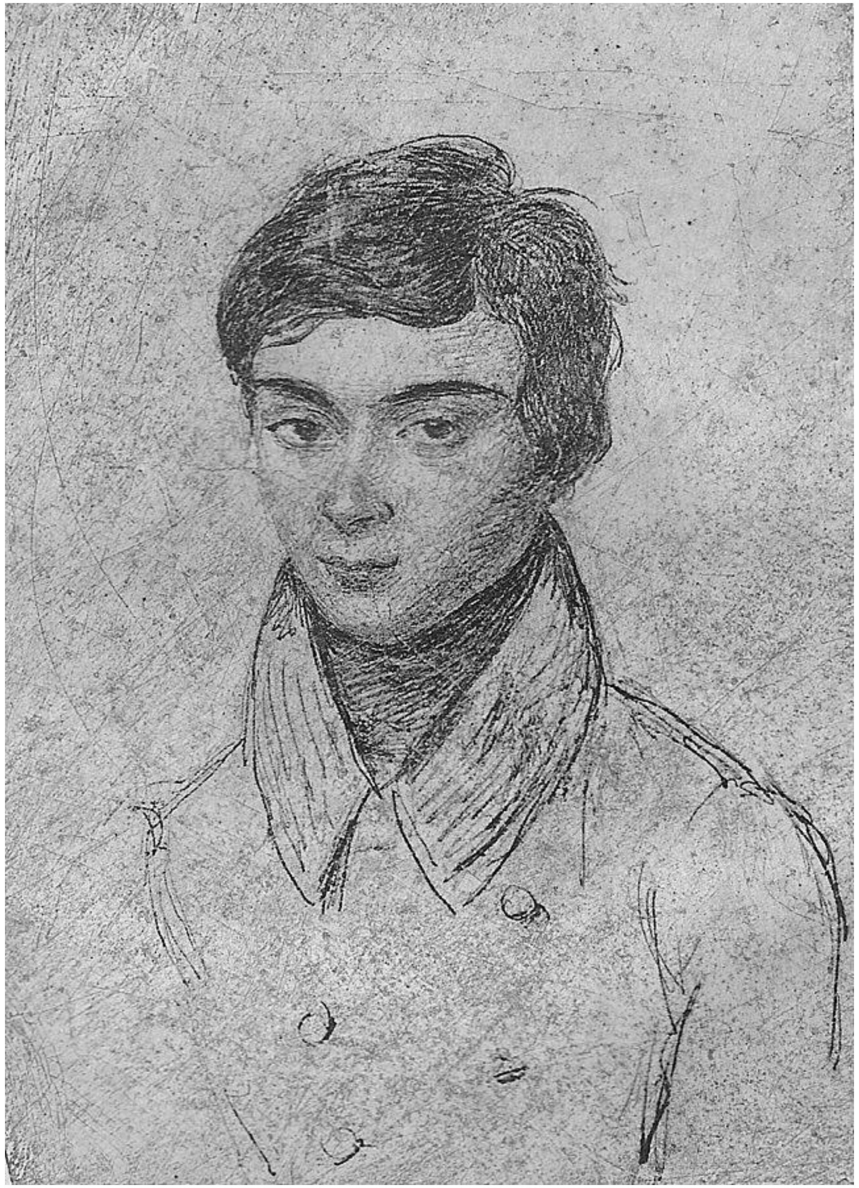
Фактически **АБЕЛЬ исследовал структуру коммутативных групп** и доказал, что они являются произведением циклических.

НО понятий группы и терминов нет.

Последний год своей жизни искал общий критерий разрешимости в радикалах любого уравнения с заданными числовыми коэффициентами, но не успел.

Полное решение – **Эварист <u>ГАЛУА.</u>**

Эварист ГАЛУА (1811–1832)



– из семьи мэра г. Бур-ла-Рен;

В 12 лет уехал в Париж, поступил в Королевский коллеж Луи-ле-Гран, где с 15 лет изучал труды Лежандра, Лагранжа, Гаусса, Коши.

1828–1829 – тяжелые испытания: самоубийство отца; два раза провалился на экзаменах в Политехническую школу.

Принят в Нормальную школу. Активная политическая деятельность.

1831 – исключение из школы; аресты и заключение в тюрьму Сен-Пелажи.

1832 – лечебница Фольтрие, дуэль.

В **1829** он отправил на рецензию **Коши** свою работу в двух частях, и она была одобрена Коши, но затем **утеряна** и не попала в Парижскую Академию на конкурс математических работ.

В **1830** он послал **Фурье** мемуар о своих открытиях для участия в конкурсе на приз Академии, но спустя несколько дней Фурье неожиданно **умер**, так и не успев им заняться, а сама **рукопись** мемуара **исчезла** — в оставшихся после смерти ученого бумагах она не была обнаружена. Приз получил Абель. Все же 3 статьи с изложением основ своей теории Галуа опубликовать удалось.

Позже статья, посланная **Пуассон**у, была отвергнута со следующей резолюцией:

«*Во всяком случае, мы сделали все от нас зависящее, чтобы понять доказательство г-на Галуа. Его рассуждения не обладают ни достаточной ясностью, ни достаточной полнотой для того, чтобы мы могли судить об их точности, поэтому мы не в состоянии дать о них представление в этом докладе*».

Критика Галуа работы научных учреждений:

«Тщетно хотят аналитики скрыть это от самих себя: они не доказывают, а комбинируют, составляют…»

«Нужно стать на почву выкладок; группировать операции, сортировать их по трудности, а не по форме – такова, по-моему, миссия будущих геометров; таков путь, на который я выхожу в этой работе…»

Из работы по интегралам от алгебраических функций, написанной в тюрьме Сен-Пелажи, 1831 г.

Из письма Э. Галуа к О. Шевалье от 29 мая 1832 г.

«*Я в своей жизни часто позволял себе высказывать предложения, в которых не был уверен, но все, что я написал здесь,* ***уже около года*** *в моей голове, и слишком в моих интересах не ошибиться, чтобы меня могли заподозрить в том, что я объявляю теоремы, для которых не имел бы полного доказательства.*

Ты публично попросишь ***Якоби*** *или* ***Гаусса*** *дать их заключение, не о справедливости, но* ***о важности*** *этих теорем.*

После этого будут, я надеюсь, люди, которые найдут свою выгоду в расшифровке всей этой путаницы».

1832 (оп. 1846) **Эварист ГАЛУА**

«Мемуар об условиях разрешимости уравнения в радикалах»

*...можно условиться рассматривать как **рациональности** все рациональные функции от некоторого числа определенных количеств, предположенных a priori известными.*

*Например, можно выбрать некоторый корень из целого числа и рассматривать как рациональности все рациональные функции от этого радикала. Тогда, когда мы уславливаемся рассматривать как известные некоторые количества, мы говорим, что мы их **присоединяем** к уравнению, о решении которого идет речь. Мы говорим, что эти количества присоединены к уравнению.*

*Положив это, мы будем называть **рациональным** всякое количество, которое будет выражаться рациональной функцией от коэффициентов уравнения и некоторого числа произвольно выбранных присоединенных количеств.*

Когда мы будем пользоваться вспомогательными уравнениями, они будут рациональными, если их коэффициенты рациональны в нашем смысле.

Галуа о группе уравнения:

«*Пусть дано уравнение и a,b,c,... суть m его корней. Существует всегда группа перестановок букв a,b,c,... , обладающая следующими свойствами:*

1) всякая функция от корней, инвариантная относительно подстановок этой группы, рационально известна;

2) обратно, всякая рационально определяемая функция от корней инвариантна относительно этих подстановок».

Следовательно, не нужно исследовать все перестановки корней, а достаточно некоторой подгруппы из S_n , которую образуют подстановки, сохраняющие все соотношения между корнями и, следовательно, все многочлены от корней, значения которых принадлежат основному полю.

Основные результаты Галуа:

– уточнил **понятие основного поля**; **ввел** «примитивный элемент», «группу подстановок», «смежные классы», «композиционный ряд», «разрешимую группу»;

– установил **соответствие между подгруппами группы Галуа уравнения и подполями поля разложений многочлена**, которые состоят из элементов, инвариантных относительно подстановок этих подгрупп;

– вывел **общий критерий** разрешимости на основе рассмотрения группы подстановок корней уравнения, не меняющих рациональных отношений, существующих между корнями (группа Галуа):

уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда разрешима его группа Галуа, т.е. существует цепочка вложений

$$G \supset H_{p_1} \supset H_{p_2} \supset \cdots \supset H_{p_k},$$

где H_{p_i}—нормальные делители с простыми индексами.

Такое рассмотрение группы вместе со множеством ее инвариантов стало ведущим в математике XIX в.

Н.Г. Чеботарев:

«*Полученные результаты позволяют решить для всякого заданного уравнения при помощи конечного числа действий вопрос, решается ли оно в радикалах. Но несравненно большую ценность для математики имеет построенный им аппарат, при помощи которого он достиг своих результатов.*

Выражаясь современным языком, ***Галуа предложил изучать структуру алгебраических полей, сопоставляя с ними структуру групп конечного числа символов*** *(подстановок), допускающих своеобразные законы действий с ними*».

А.Н. Колмогоров:

«***На смену алгоритму формул пришел алгоритм понятий***».

1846 Ж. **Лиувилль**

собрал и опубликовал все работы Галуа со своими комментариями.

1854 Ж. **Серре**

изложил теорию Галуа в своем учебнике «Курс высшей алгебры» (был известен в Англии, Германии)

1870 **Камиль ЖОРДАН (1838–1922)** (ученик Серре)

«Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях»

С 1865 интересовался исследованиями Галуа.

В трактате 1870 **впервые** **теория групп подстановок** излагается **полно** и систематично. Приводятся ее **приложения** к геометрии, теории эллиптических функций и алгебре.

Жордан определяет полугруппу, НО **общую теорию конечных групп развивает <u>на примере группы подстановок</u>**.

Явно вводит «нормальный делитель», «простую группу», «мериэдрический изоморфизм», «голоэдрический изоморфизм».

Доказывает, что смежные классы по нормальному делителю образуют группу «по модулю особой подгруппы» (**фактор-группа** с 1873).

Вводит понятие композиционного ряда

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_i \ldots \supset G_m \supset \{e\},$$

где каждая подгруппа G_{i+1} – нормальный делитель G_i , причем все фактор-группы G_i / G_{i+1} простого порядка. Доказывает, что число членов одинаково с точностью до порядка следования и порядки те же.

В специальной главе начал рассмотрение **представления** группы подстановок **с помощью матриц** – с помощью линейных подгрупп обратимых квадратных матриц с элементами из полей $\mathbf{F}_q$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Таким образом была заложена основа теории представлений и доказана возможность **приведения матрицы к нормальной форме** – основная теорема линейной алгебры.

Новый уровень абстракции и **определение абстрактной группы** у английских символистов.

1854 Артур **КЭЛИ** (1821–1895) ***«О теории групп, зависящих от символического уравнения $\vartheta^n=1$»***

– понятие группы не зависит от конкретных объектов, над которыми они определены:

« Множество символов 1,α,β, …, отличных друг от друга и таких, что произведение любых двух из них (неважно, в каком порядке) или произведение одного из них на самого себя принадлежит множеству, назовем ***группой****».* Термин «группа» в честь Галуа.

– операция умножения не обязательно коммутативна, но всегда ассоциативна;

– при умножении всех символов группы на один из них (слева/справа) вновь получается вся группа;

– существует нейтральный элемент.

Для пояснения дает таблицу:

Nearer factors \ Further factors	1	α	β	..
1	1	α	β	..
α	α	α^2	$\beta\alpha$	
β	β	$\alpha\beta$	β^2	
	$\vdots$			

that as well each line as each column of the square will contain all the symbols $1, \alpha, \beta, \ldots$. It also follows that the product of any number of the symbols, with or without repetitions, and in any order whatever, is a symbol of the group.

В каждой строке и в каждом столбце должны быть все символы.

В этой работе **КЭЛИ**

– рассмотрел задание групп различного порядка как с помощью таблиц умножения, так и с помощью образующих соотношений;

– показал, что существуют две различные группы 4го порядка, две – шестого, пять – восьмого;

– показал, что для любого простого порядка *p* существует единственная циклическая группа порядка *p*.

Однако не все сразу восприняли идеи Кэли, **перелом** случился лишь после его новой работы по теории групп **1878** г.

1882 Вальтер **фон Дик** (1856–1934) (ученик Клейна)

«***Исследования по теории групп***»

дал **определение свободной группы**, пригодное как **для конечных,** так **и** для **бесконечных** групп.

Общепринятая аксиоматика теории групп изложена:

1898 Генрих **Вебер** (1842–1913)

«***Курс алгебры***» (3 тома)

Группа **G** – множество элементов **произвольной** природы, в котором:

1) задана операция;

2) существует нейтральный элемент;

3) операция ассоциативна;

4) для любого элемента существует обратный.

ПОБЕДНОЕ ШЕСТВИЕ ТЕОРИИ ГРУПП

К. **Жордан** (1871 г. и позже)

построил для линейных **дифференциальных** уравнений теорию, аналогичную теории Галуа, в которой роль группы Галуа алгебраического уравнения играет **группа монодромии** соответствующего дифференциального уравнения. Эта теория была завершена Э. Пикаром.

Ф. **Клейн** (1872)

применил группы в своей Эрлангенской программе **для классификации геометрий**.

А. **Пуанкаре** (80–е годы)

ввел **фундаментальные группы в топологию**. Затем были введены **группы гомологий** (А. Пуанкаре, впоследствии П.С. Александров, А.Н. Колмогоров).

А. **Пуанкаре** (80–е годы)

ввел **группы** в математический анализ для исследования **автоморфных функций** (также Ф. Клейн, Л. Шварц).

С. **Ли** и Ф. **Клейн** (с 1870 г.)

начали развивать **теорию непрерывных групп**, которые играли для дифференциальных уравнений с частными производными ту же роль, что и группы подстановок в теории Галуа.

К. **Жордан**

начал рассматривать представление групп матрицами. Общая **теория представлений групп** построена Ф.Э. **Молиным** и Ф.Г. **Фробениусом** (90–е годы).

Г. **Вейль** (начал), Л.С. **Понтрягин** (главные результаты, 30е годы XX века)

построили дифференциальное и интегральное исчисление на топологических группах (**гармонический анализ**).

Е.С. **Федоров** (1890)

дал **классификацию** (с помощью теории групп) правильных пространственных систем точек (**кристаллов**). Оказалось, что на плоскости (задача узоров) существует 17 федоровских групп, а в пространстве – 230.

В. **Паули** (20е годы XX в.)

теория групп **в современной квантовой физике** принадлежит "к наиболее мощным инструментам современной физики", плодотворность этих идей "далеко еще не исчерпана". Матрицы Паули — это набор из трёх эрмитовых и одновременно унитарных 2×2 матриц, составляющий базис в пространстве всех эрмитовых 2×2 матриц с нулевым следом. Были предложены для описания спина электрона.

Теория Галуа явилась толчком для
широкого развития алгебры в середине и второй половине XIX в.

1. Появилась **теория полей** алгебраических чисел и полей алгебраических функций, **теория идеалов**:

Э. Куммер, Л. Кронекер, Р. Дедекинд, Е.И. Золотарев, Г.Ф. Вороной.

2. Возникла **теория гиперкомплексных систем** ≡ теория алгебр:

Дж. Буль (1815–1864)	алгебра логики
У.Р. Гамильтон (1805–1865)	векторы и кватернионы
Г. Грассман (1809–1877)	теория гиперкомплексных систем
А. Кэли (1821–1895)	алгебра матриц, октавы Кэли
Ф.Э. Молин (1861–1941)	теория высших комплексных чисел

3. Работы Р. Дедекинда и Д. Гильберта по **аксиоматизации алгебры** привели в XX в. к созданию школы Э. Артина и Э. Нетер, в которой алгебра стала наукой, изучающей алгебраические структуры.

Многое в лекции не затронуто. Например:

1) линейная алгебра (Сильвестр, Кэли);
2) алгебра многочленов (Лобачевский, Гурвиц);
3) начала создаваться алгебраическая геометрия (М. Нетер, Пуанкаре).

Вольфганг Эрнст ПАУЛИ (1900–1958) вошёл в историю не только как блестящий немецкий физик-теоретик, пионер в области квантовой механики и лауреат Нобелевской премии по физике 1945 года, но и как

человек, чьим именем названо загадочное и малопонятное явление – «**эффект Паули**», суть которого состоит в том, что присутствие некоторых людей негативно влияет на ход экспериментов и работу точных приборов.

С Паули такое случалось постоянно. Его неспособность заставить работать даже самые элементарные экспериментальные приборы, а также то, что вещи и техника при его появлении ломались или входили во внештатный режим работы, стала легендарной.

https://monster-evo.ru/belinskijj/v-pauli-biografiya-i-ego-princip-biografiya-pauli-volfganga-obuchenie-i/