

Леонард ЭЙЛЕР (1707–1783)



Родился в Базеле (Швейцария).

1720–1724 Учеба в университете Базеля.

1727–1741 СПб АН свыше 50 работ
опубликовано и около **80** подготовлено.

1736 Механика 2 тома

1738 географические карты России

1741–1766 Берлинская АН около 260
работ

1744 Трактат о вариационном
исчислении

1748 Введение в анализ бесконечных
(2 тома)

1755 Дифференциальное исчисление

1765 Механика

В последующие два года юный Эйлер написал несколько научных работ.

Одна из них, «Диссертация по физике о звуке», была представлена на конкурс для замещения неожиданно освободившейся в Базельском университете должности профессора физики (1725).

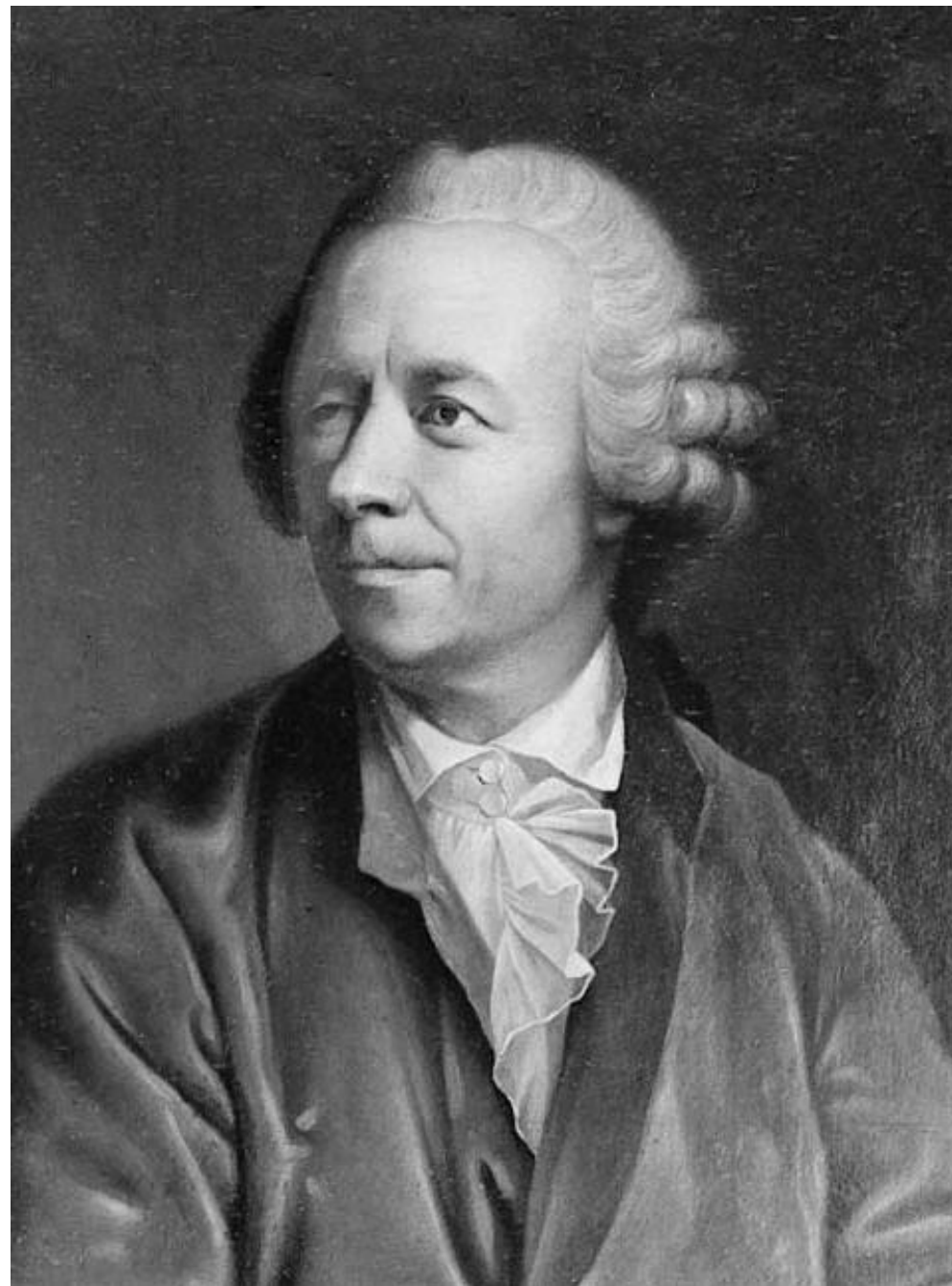
Несмотря на положительный отзыв, 19-летнего Эйлера сочли слишком юным, чтобы включить в число кандидатов на профессорскую кафедру.

Справа: **Эйлер Иоганн Альбрехт** (1734–1800) — старший сын Леонарда Эйлера.



В 1735 г. Академия получила задание выполнить срочное и очень громоздкое **астрономическое вычисление**. Группа академиков просила на эту работу три месяца, а Эйлер взялся выполнить работу за 3 дня — и справился самостоятельно. **Перенапряжение в работе с вычислениями и географическими картами** не прошло бесследно: он заболел и через три года потерял зрение на правый глаз.

Однако учёный отнёсся к несчастью с величайшим спокойствием: ***“Теперь я меньше буду отвлекаться от занятий математикой”*** , — философски заметил он.





Обращение Иоганна Бернулли к Леонарду Эйлеру:

1728: *«ученейшему и даровитейшему юному мужу Леонарду Эйлеру»*

1731: *«славнейшему и ученейшему господину профессору, дражайшему другу»*

1741: *«знаменитейшему и превосходнейшему мужу»*

1746: *«главе математиков Леонарду Эйлеру».*



1725–1744	15%	всех сочинений Эйлера
1745–1764	35%	
1765–1783	50%	

В **1762** г. на русский престол вступила Екатерина II, которая была готова на все, чтобы вернуть Эйлера в Россию: предложила управление математическим классом, звание конференц-секретаря Академии и оклад **1800** рублей в год.

«А если не понравится, – говорилось в её письме, – благоволит сообщить свои условия, лишь бы не медлил приездом в Петербург».

В июле **1766** г. 60-летний Эйлер, его семья и домочадцы (всего 18 человек) прибыли в российскую столицу теперь уже навсегда.

Императрица встретила его как мировую знаменитость и осыпала милостями: пожаловала **8000** рублей на покупку дома на Васильевском острове, предоставила на первое время одного из своих поваров и поручила подготовить соображения о реорганизации Академии.

1766–1783

Возвращение в Россию, в Санкт-Петербург

еще 416 книг и статей (под диктовку)

1768–1770 **Интегральное исчисление** (3 тома) (в 1794 г. издан 4й том, посмертно)

1768–1769 Трактат по алгебре (2 тома)

1768–1772 Трактат по натурфилософии (3 тома) –

«Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе», на франц. языке

12 франц. изданий, 9 англ., 6 нем., 4 русск., 2 голл.,
2 швед., 1 итал., 1 исп., 1 дат.

1768–1772 Диоптрика (3 тома)

1772 Новая теория исчисления лунной орбиты

1778 Теория кораблестроения и навигации

1909 – принято решение об издании ПСС из 72 томов;

в сентябре **2022** – «*Opera omnia*»: 29 томов по математике, 31 – по механике, 12 – по физике, 9 – переписка. Таким образом сейчас ПСС насчитывает **81** том, из которых опубликовано 80 (последний том переписки готовится к публикации). В сентябре 2022 она стала доступна он-лайн (ссылки в английской Википедии).

В процентном отношении работы по математике распределяются так: анализ – 60%, геометрия – 17%, теория чисел – 13%, алгебра – 7%, теория вероятностей – 3 %.

Внутри анализа особенно большое место занимают работы по интегральному исчислению – 33 %; дифференциальным уравнениям посвящено 25%, рядам – 22% и вариационному исчислению – 11%. В остальные 9% входят «Дифференциальное исчисление» и «Введение в анализ бесконечно малых».

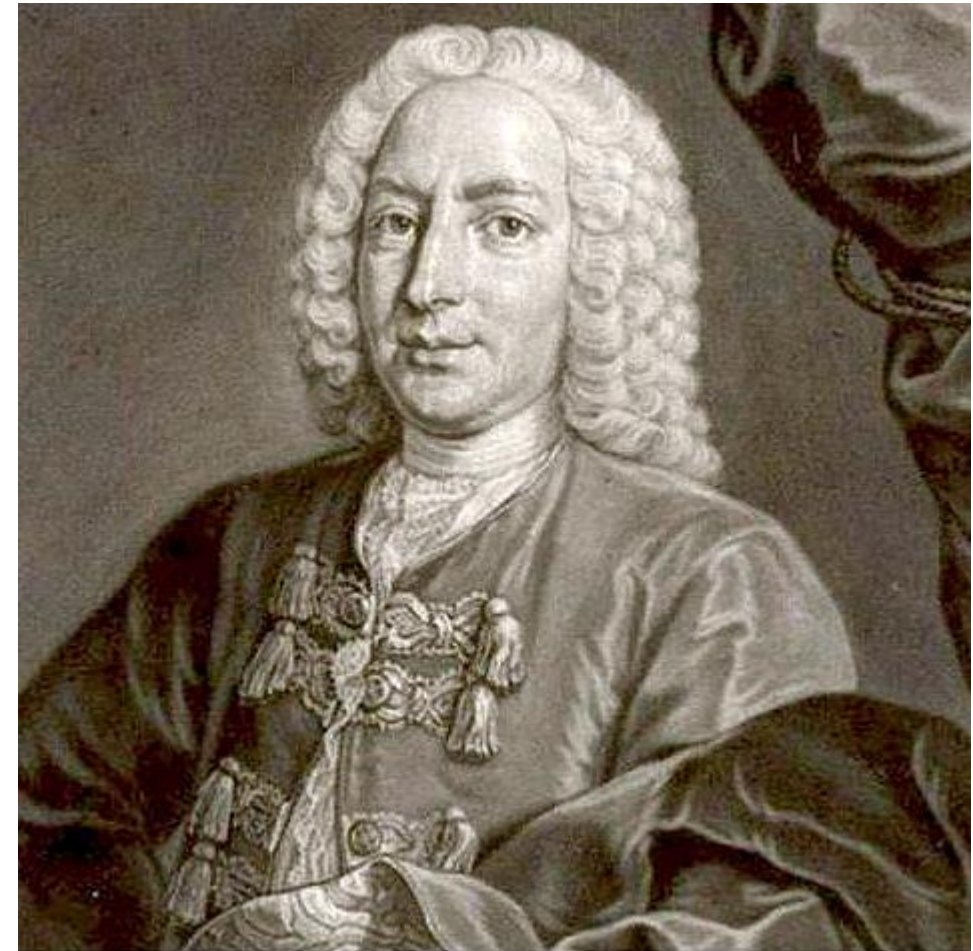
Научная деятельность Эйлера носила алгоритмический характер: от конкретных прикладных задач (около 40 % всех работ) к общей теории.

В задачах физики и техники с великим искусством выделял собственно математическое содержание и переходил к разработке приемов в возможно более общей и широкой форме.

Д. Бернулли прежде всего – физик, обращался к математике в меру необходимости, часто ограничиваясь лишь физическими соображениями, не развивая найденные аналитические приемы.

Д. Бернулли о занятиях Эйлера теорией чисел:

«... дань чрезмерной утонченности вкусов XVIII столетия».



Идеи Эйлера на будущее:

- предварил исследования Гаусса по внутренней геометрии поверхностей;
- в топологии – впервые сформулирована теорема о топологической характеристике многогранников;
- впервые в теории чисел применены методы анализа – создание аналитической теории чисел.

Множество переоткрытий: например, в задаче о колебании круглой мембраны мы используем **уравнение Бесселя** (1784–1846) – линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами, которое **Эйлер** получил в 1766 и решил с помощью бесконечного ряда, выражающего цилиндрические функции 1-го рода и любого порядка.

УЧЕНИЕ О ФУНКЦИИ



Центром математических исследований XVIII века стал **математический анализ, рассматриваемый как мощное орудие миропознания.**

Лейбниц в сентябре **1691** писал Х. Гюйгенсу:

«Я хочу, чтобы мы могли ещё в этом веке довести до завершения анализ чисел и линий (то есть математический анализ – sic!), по крайней мере, в главном, дабы избавить от этой заботы человеческий род, чтобы отныне вся проницательность человеческого разума обратилась к физике».

Но довольно скоро стало ясно, что надежды на столь быстрое построение анализа (даже только в главном) оказались преждевременными. В **1708** тот же Лейбниц предупреждал:

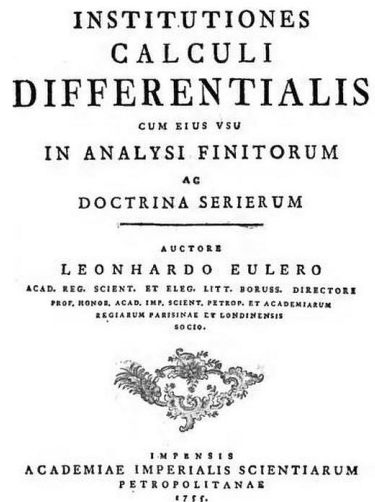
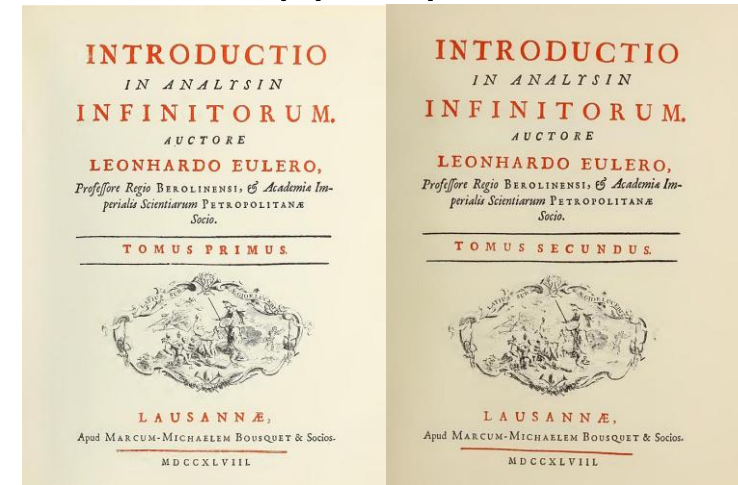
«Не следует удивляться, что анализ бесконечно малых делает только первые шаги и что мы совсем не хозяева положения ни в квадратурах, ни ещё менее в обратной задаче касательных и, в ещё меньшей мере, при решении дифференциальных уравнений...».

Математический анализ в 18 веке:

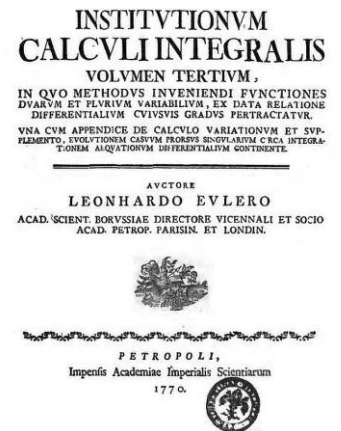
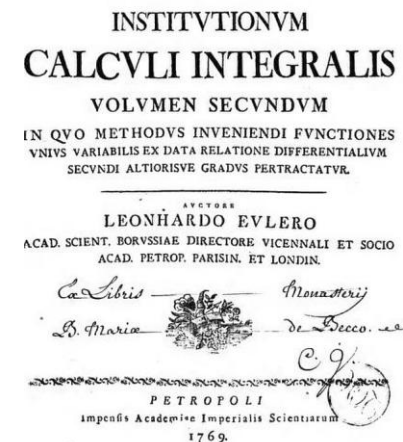
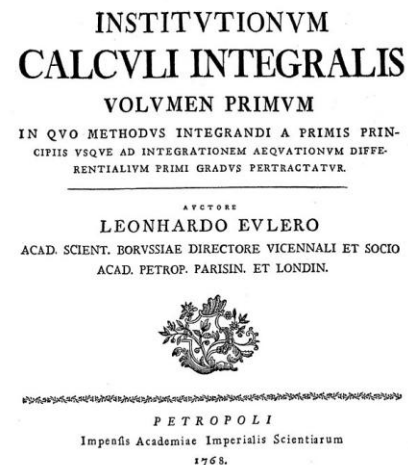
в начале века – исчисление со множеством приложений,
в конце века – совокупность достаточно разработанных дисциплин.

Классическая трилогия Эйлера:

1748 Введение в анализ бесконечных
(2 тома, второй том посвящен
аналитической геометрии)



1755 Дифференциальное исчисление



1768–1770
Интегральное исчисление
(3 тома)

У Эйлера анализ – единая система, объединенная концепцией функции: «Весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных величин и их функций».

«До Эйлера математический анализ был лишь системой методов, служивших для решения вопросов, системой слабой, без прочной внутренней связи – самостоятельного абстрактного объекта.

Эйлер нашел такой объект в понятии функции – великой идее Лейбница и Бернулли – и тем положил основание математического анализа как отдельной книги». И.Ю. Тимченко (1862–1939)

Математический язык и система обозначений Эйлера близки к современному. Изложение чисто аналитическое, независимое от геометрии и механики.

Ещё при жизни Ньютона и Лейбница стало очевидно, что созданное исчисление – лишь преддверие новой области математики, ее элементарная часть. Самой главной трудностью стала **необходимость такого представления функциональной зависимости, которое позволяет применять операции нового исчисления.** Поэтому первой задачей анализа бесконечно малых стала **задача создания теории функций.**

1637 Рене Декарт: **Функция – это уравнение** \Rightarrow ограничивал лишь алгебраическими выражениями.

1668 Николай Меркатор открыл разложение в **бесконечные ряды**:

Логарифм – это площадь под гиперболой (Ферма 1642–1657!):

т.к. $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$, то $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

1668 Джеймс Грегори, Джон Валлис: $\ln \frac{1+x}{1-x}$, $\ln \frac{1}{1-x}$.

1670е Исаак Ньютон:

Функция – это ряд, но необязательно по целым степеням неизвестной

(бином Ньютона): 1) нашел ряд для $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{p/q}$;

2) исследовал обратные тригонометрические функции и нашел их ряды;

3) обращением рядов получил ряды для e^x , $\sin x$, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, для дуг эллипса и др.;

\Rightarrow разрабатывал методы и приемы оперирования с бесконечными рядами (спец. аппарат). Таким образом **открыты и изучены новые трансцендентные функции.**

Лучшее определение функции в то время: Дж. Грегори 1667

Функция – это величина, полученная из других величин с помощью последовательности алгебраических операций или **«любой мыслимой операции»**.

Впервые термин «функция» появился у Лейбница в 1673 в неизданной работе «Обратный метод касательной или рассуждения по поводу функций»:

*«Я называю **функциями** всякие части прямых линий, которые получают, проводя бесконечные прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой, каковы: абсцисса, ордината, хорда, касательная или нормаль, подкасательная или поднормаль... и бесконечное множество других, какие можно себе представить и построение которых более сложно...»*

⇒ геометрический подход, кривая как синоним «одновременного изменения».

В математику вошла задача поиска неизвестных законов изменения.

Жак Адамар: **«Число перестало быть главным математическим объектом, им стал закон изменения, функция»**.

1718 Иоганн Бернулли:

«Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Обозначил φx .

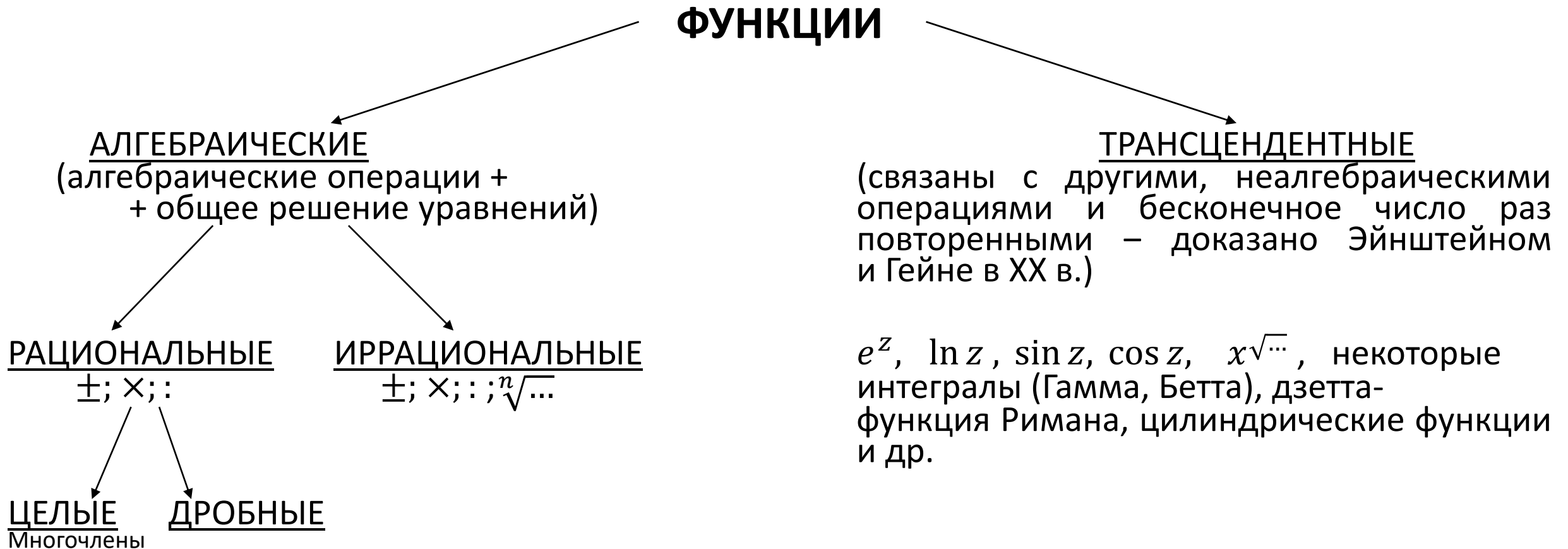
Леонард **ЭЙЛЕР** понимал функцию в двух смыслах: узком и широком.

1748 «Введение в анализ бесконечных»

- первый трактат, в котором в основу положено понятие функции;
- порывает с геометрическими кривыми: «весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций»;
- в узком смысле: *«**Функция переменного количества есть аналитическое выражение**, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств».*

«Основное различие функций состоит в способе составления их из переменного количества и количеств постоянных» \Rightarrow

Классификация функций по Эйлеру:



Эта классификация распространяется и на теорию функций комплексного переменного: целые функции – не имеют особых точек в конечной части плоскости, дробно-рациональные – имеют только полюса, иррациональные алгебраические – помимо полюсов имеют точки ветвления конечного порядка.

У Эйлера **все функции представлены числовыми степенными рядами:**

$$Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \dots,$$

где для большей общности $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ – любые числа.

На этой основе строит теорию элементарных функций, изучает их свойства с помощью алгебры, оперирует с бесконечными (!) выражениями, **не заботясь об их сходимости** (степенные ряды, бесконечные произведения, непрерывные дроби).

Для того, чтобы продемонстрировать **общность выводов**, рассматривает **не только действительные, но и комплексные числа**.

Свою классификацию Эйлер дополняет **свойствами**: однозначность-неоднозначность; четность-нечетность.

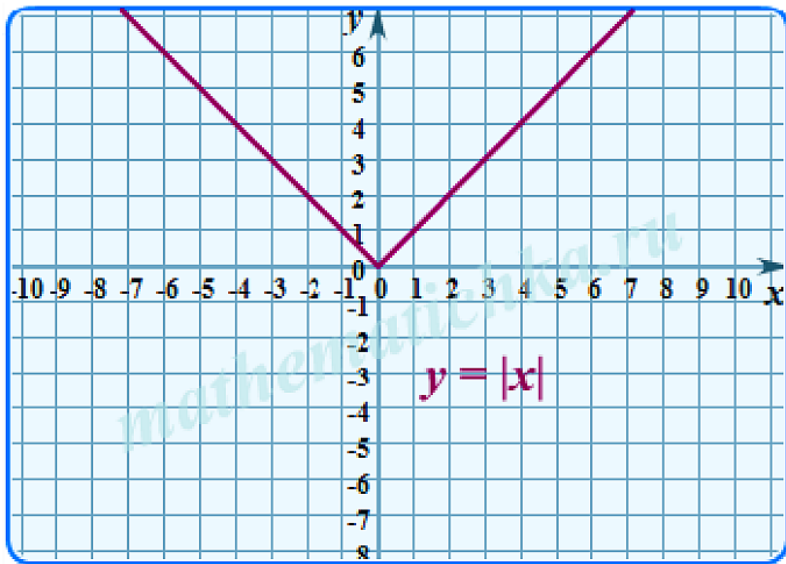
Рассматривает **многозначную неявную функцию** y : если дано алгебраическое уравнение $f(x, y) = 0$, где f – многочлен степени n по y , то, разрешив его относительно y , получим явную функцию. И **«лишь недостаточное развитие алгебры не позволяет нам сделать это сейчас...»**

Поскольку все функции y Эйлера аналитические, то **сначала определение непрерывности y Эйлера** своеобразное:

*«Из вышеизложенного представления о кривых линиях тотчас же следует их деление на **непрерывные** и **прерывные** или **смешанные**. А именно, **непрерывная** линия строится так, что ее природа выражается с помощью одной определенной функции от x . Но если кривая линия построена таким образом, что различные ее части... выражаются с помощью различных функций..., то этого рода кривые линии мы будем называть прерывными или **смешанными** и **неправильными**, т.к. они не образуются на основе единого неизменного закона, а состояются из частей различных непрерывных кривых».*

Так, функция $y = \frac{1}{x}$ считалась непрерывной,





в то время как функция $y = |x|$ рассматривалась как разрывная, так как на различных участках области определения задавалась разными аналитическими выражениями, то есть задавалась разными «законами». Наша непрерывность у Эйлера называлась **связностью**.

НО вскоре Эйлер вышел за рамки своей классификации и **обобщил понятие функции** (идея рассматривать функции, начертанные «свободным движением руки», **даже если они не задаются степенным рядом**).

Уже при печатании «Введения в анализ бесконечных» Эйлер утверждал, что одних аналитических функций для построения анализа недостаточно.

Особенно ясно необходимость расширения определения функции как аналитического выражения стала после знаменитого спора о звучащей струне.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ У ЭЙЛЕРА

1. Впервые вводит и разъясняет понятие логарифма так, как это делаем мы сейчас.

Затем выводит экспоненту и определяет **натуральный** логарифм, в том числе для комплексного аргумента.

Экскурс: 1729 Д. Бернулли в письме к Гольдбаху обсуждает задачу:

При каком x достигается максимум $x^{\frac{1}{x}}$?

Ответ Бернулли: $x_{max} = \left(\frac{A+1}{A}\right)^A$, $A \equiv \infty$.

И здесь же: $x_{max} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$

1731 Эйлер ввел символ **e** и

в **1743** показал $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$.

Здесь (у Эйлера) **i** – символ для бесконечности.

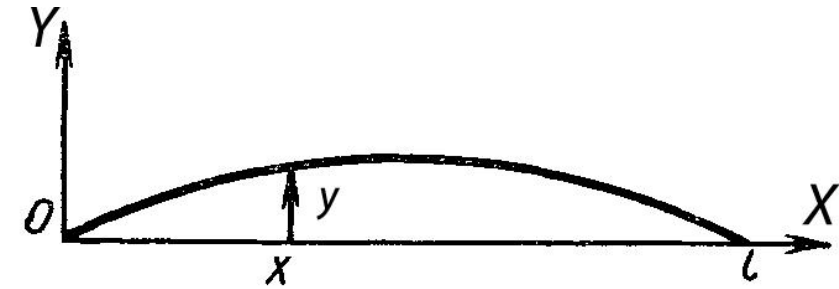
2. Тригонометрические функции Эйлер называет «*трансцендентными количествами, получающимися из круга*». Вводит их аналитически и исследует их свойства:

- 1) окончательная ясность в вопросах о знаках с помощью формул приведения;
- 2) рассматривает эти функции как безразмерные числовые количества;
- 3) из теорем о синусе-косинусе суммы или разности выводит формулы Муавра для натуральных n .
- 4) из полученных формул выводит разложения синуса и косинуса в ряд (не так, как Ньютон!).

1748 тождество Эйлера: «*синусы, косинусы и дуги выводятся из самих логарифмов и показательных величин, когда те содержат мнимые количества*».

Владел этим уже около 10 лет, т.к. это есть в статье **1739** в «Комментариях СПб АН» и в статье 1743 в «Докладах Берлинской АН».

СПОР О ЗВУЧАЩЕЙ СТРУНЕ



1715 Тейлор «*Methodus incrementorum directa et inversa*»: свел задачу к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -b^2 y, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -(ab)^2 y$$

и предложил свой способ решения.

1747 (оп. 1749) Даламбер свел задачу к привычному нам уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

исследовал его и получил **решение** в виде: $y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x)$,

где f – произвольная, **периодическая** функция, определяемая только начальными условиями: $y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0$.

Работа написана без использования существовавшей символики, исключительно словесно, для каждой производной вводится свой символ. Произвела большое впечатление на Эйлера.

1748 (оп. 1750)

Эйлер

«О колебании струны» :

Предложил свой метод интегрирования уравнения и в конце:

т.к. положение струны определяется ее начальными условиями и начальным распределением скоростей, то *даламберову функцию можно выразить через две других:*

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(-x) = \varphi(x)$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) + f(-x) = \frac{1}{\alpha} \int \psi(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x) + \frac{1}{\alpha} \int \psi(x) dx \right)$$

Поскольку струна сплошная, то для существования решения достаточно потребовать, чтобы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ были связными, т.е. **$f(x)$ не обязательно непрерывна** в соответствии с предложенным (узким) определением непрерывности. Поэтому нужно рассматривать **любые** кривые, «**начертанные свободным движением руки**», даже если они и являются «разрывными».

Даламбер НЕ согласен: **1750 (оп. 1752)**

Действия исчисления применимы только к функциям «непрерывным» в старом смысле, каковыми и должны быть начальные условия, поэтому решения уравнений в частных производных должны быть ограничены более узким классом функций:

«Во всех других случаях проблема не может быть разрешена, по крайней мере, моим методом, и я не знаю также, не превосходит ли она силы известного анализа».

Полемика продолжалась более 50 лет. Практически все знаменитые математики принимали в ней участие. По ходу дискуссии **Даламбер** уточнял свою позицию – от требования «непрерывности» начальной функции до условия, что она должна быть дважды непрерывно дифференцируема, что является необходимым требованием для существования **классического** решения.

Эйлер же по сути ведет речь об **обобщённом** решении дифференциального уравнения, но никак его не определяет. Таким образом, **говоря о решении уравнения колебания струны, Даламбер и Эйлер понимают под этим, с нашей точки зрения, разное.**

Понять правильно идеи каждого мешала свойственная математике того времени **неотделимость в сознании исследователя физического феномена от его математической интерпретации**, а также отсутствие разработанного понятийного аппарата анализа, смутные представления о его основаниях. Поэтому в качестве аргументов в споре использовались как чисто математические соображения, так и идеи, вытекающие из анализа физической реальности.

В то время решение уравнения колебания струны (т.е. **математическая модель** процесса колебания) и **физическая реальность** колеблющейся реальной струны **не различались**. Решение уравнения колебания струны не нуждается в специальном определении – оно реализуется в единственном наблюдаемом нами процессе. Потому увидеть, что **Даламбер и Эйлер говорят о разных решениях** (классическом и обобщённом), даже не приходит в голову – решение только одно, т.к. реальная колеблющаяся струна одна.

Не приходит в голову ни им самим и никому другому из их гениального окружения – ни Лагранжу, ни Монжу, ни Лапласу.

Понимая резонность возражений Даламбера, Лагранж и Лаплас пытались спасти конструкцию Эйлера:

J. Lagrange – Misc. Taurinensia 1759, 1760-61, 1762-65;

P. Laplace – Mem. Acad. Sci. Paris 1779(82).

Первым, кому удалось обойти трудности в случае, когда начальная форма струны имеет угловые точки был, по-видимому, ученик Дирихле **Элвин Бруно КРИСТОФФЕЛЬ (1829–1900)**, который в своих лекциях, опубликованных в **1877**, **заменял дифференциальное уравнение физической проблемы соответствующим интегральным уравнением**. Построение теории обобщённых решений стало делом уже XIX столетия (К. Фридрихс, С.Л. Соболев).



У спора о звучащей струне был ещё один аспект – теоретико-функциональный, который обнаружился в связи с решением, предложенным **Даниилом Бернулли**:

1753 (оп.1755)

Звук струны складывается из основного тона и бесконечного множества обертонов:

$$y = \alpha \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots,$$

где $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$... – функции времени,

т.е. для **любой** гладкой функции всегда можно подобрать такой **тригонометрический** ряд.

Против позиции Бернулли выступили и Даламбер, и Эйлер, и Лагранж.

Ясность внес **Ж.Б. ФУРЬЕ**
1807 (оп.1822)

«Аналитическая теория тепла»

Показал, что многие функции, разрывные по Эйлеру, могут быть представлены на всем отрезке единым тригонометрическим рядом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$



После этого встал вопрос об **условиях разложимости** в тригонометрический ряд, оказавший огромное влияние на всё последующее развитие теории функций (Лежен-Дирихле, Лобачевский, Риман, Кантор, Лебег, Лузин, Меньшов и др.).

Интересно, что в разное время разные математики вычисляли коэффициенты тригонометрического ряда, не подозревая друг о друге:
1759 **Клеро**, 1777(оп. 1798) **Эйлер**, 1807(оп. 1822) **Фурье**.

ИТАК:

1. **Эйлер ошибался** в определении непрерывности: функции, заданные в разных местах разными степенными рядами, могут быть выражены одной формулой на всей своей области определения.

2. **Эйлер прав**, настаивая на необходимости расширения понятия функции, т.к. не всегда «начертанная свободным движением руки» функция представима *степенным* рядом (существуют функции непрерывные и дифференцируемые, но не аналитические).

⇒ в **1755 ЭЙЛЕР** в «**Дифференциальном исчислении**»

даёт **новое определение функции в широком смысле – как соответствия:**

«Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых.

Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других.

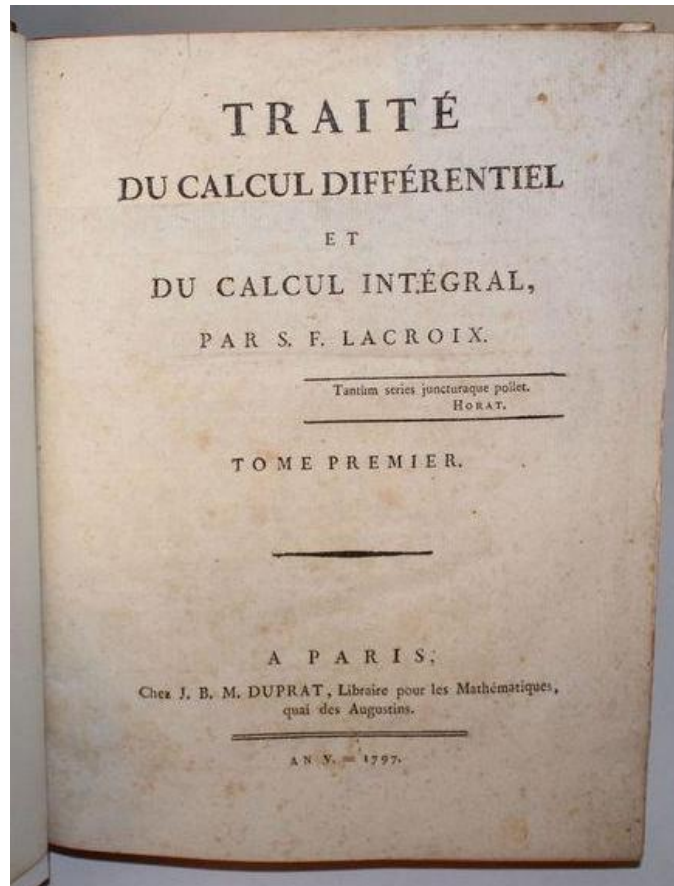
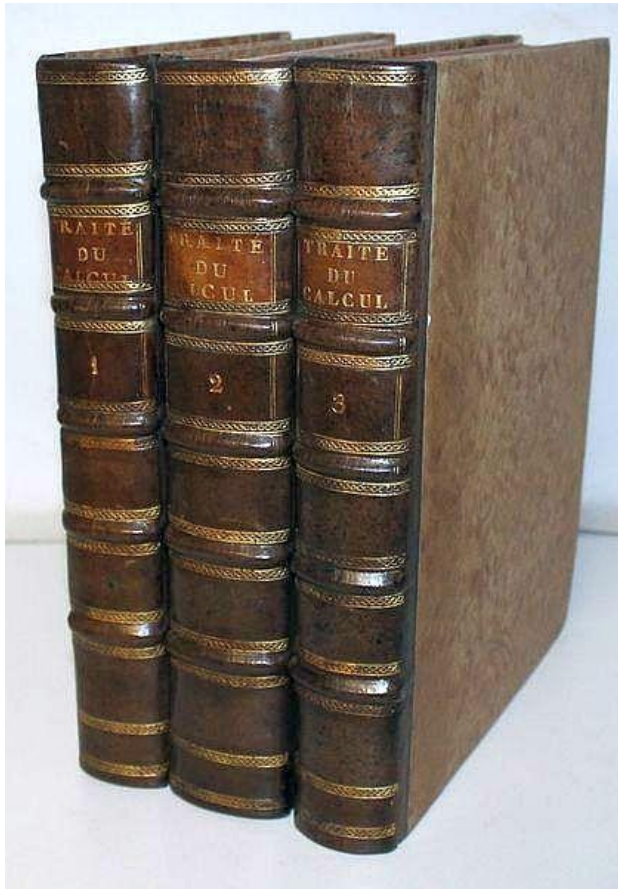
Итак, ... все количества, которые как-либо зависят от x , т.е. определяются им, называются его функциями».

Это определение было охотно воспринято, т.к. всё чаще встречались функции, аналитическое выражение которых оставалось неизвестным.

С.Ф. Лакруа 1797

«Трактат дифференциального и интегрального исчисления»:

«Величина, как-либо зависящая от другой, называется её функцией независимо от того, известны или неизвестны действия, позволяющие вычислять функцию по её аргументу».



К определению Эйлера 1755 г. восходят определения функции

О.-Л. Коши 1821,

Ж.Б. Фурье 1822,

Н.И. Лобачевского 1834,

Г. Лежен-Дирихле 1837.

Определение функции у Лобачевского (1834):

*«Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое даётся для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. **Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подаёт средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной...***

Кажется, нельзя сомневаться ни в истине того, что всё в мире может быть представлено числами; ни в справедливости того, что всякая в нём переменная и отношение выражается аналитической функцией. Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе».

На основе нового определения понятия функции в «**Дифференциальном исчислении**» (1755) Эйлер излагает начала теории конечных разностей, приемы дифференцирования функций одного и нескольких переменных, а также приложения дифференциального исчисления, в том числе к изучению поведения функций – необходимые и достаточные условия экстремума и др.

В основе всего – «**исчисление нулей**»: Эйлер предлагает считать, что отношение нулей имеет смысл: $\frac{0}{0}$ может быть любым числом n , так как $n \times 0 = 0$. Дифференциалы dx и dy он рассматривает как нули: $dx = dy = 0$, но их отношение, вообще говоря, не является неопределенным.

Например, пусть $y = 5x$. Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{d(5x)}{dx} = \frac{5dx}{dx} = 5$.

Эйлер выписывает правила раскрытия таких неопределенностей либо в форме отбрасывания бесконечно малых, либо в форме, соответствующей переходу к пределу:

$$a \pm ndx = a \quad \text{и} \quad \frac{a \pm ndx}{a} = 1,$$

а также при $n > m$

$$adx^m \pm bdx^n = adx^m \quad \text{и} \quad \frac{adx^m \pm bdx^n}{adx^m} = 1.$$

В «**Интегральном исчислении**» Эйлера (1768–1770, три тома) содержится не только собственно интегральное исчисление, но и теория обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, а также вариационное исчисление.

Вывод: Формальная и алгебраическая концепция функции, долгое время стимулировавшая развитие анализа, в XVIII в. превратилась в тормозящий фактор.

Новый подъём анализа совершило следующее поколение математиков, в работах которых на первый план выходят:

- 1) новый уровень математической строгости;
- 2) задачи физики и вопросы представимости функций тригонометрическими рядами.