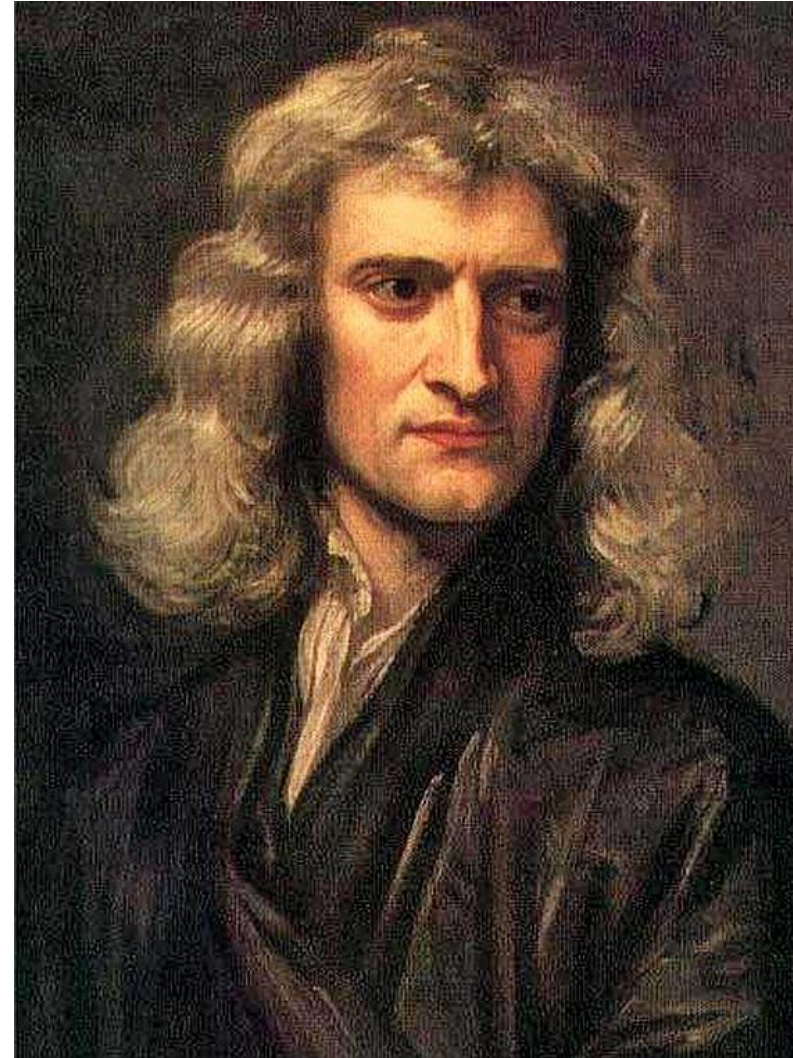


СОЗДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
в трудах Исаака **НЬЮТОНА**
и Готфрида Вильгельма **ЛЕЙБНИЦА**

**Исаак БАРРОУ
(1630–1677):**



**Исаак НЬЮТОН
(1643–1727)**



Исаак НЬЮТОН (1643–1727)

Из фермерской семьи в дер. Вулторп (75 км от Кембриджа)

1661–65 учеба в Тринити Колледже \Rightarrow бакалавр

1668 магистр

1669 кафедра (после Барроу), холостяк

Слушал лекции Барроу, но в рукописях их даже не упоминает. Самостоятельно изучал Декарта, Виета, Валлиса (в **1665** – основное внимание разработке аналитической геометрии и анализа, включая теорию рядов, что абсолютно чуждо Барроу).

Зима 1664–65 прекращены занятия из-за чумы \Rightarrow **первые результаты:**

- бином Ньютона;
- основные идеи механики Ньютона (*«падение земных и движение небесных сил управляется единой силой – силой тяготения»*);
- оптика (открыл дисперсию света, 1668 – первый рефлектор).

Весна 1665 первый вариант исчисления бесконечно малых – *метод флюксий*

Октябрь 1666 первое систематическое изложение (напечатано 300 лет спустя) «*To resolve Problems by Motion these following Propositions are sufficient*»

3 работы по исчислению бесконечно малых

1669 (оп. 1711) «*Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов*»

(**основа всего анализа – ряды!** + инфинитезимальная концепция)

1670 (оп. 1736) «*Метод флюксий и бесконечные ряды*» (не нашел издателя, давал почитать)

1690–91 (оп. 1704) «*Рассуждение о квадратуре кривых*»

Существуют еще два больших письма к Лейбницу (**1676**), в которых изложены главные результаты в учении о рядах, но о методе флюксий – лишь две знаменитые анаграммы:

1. *По данному уравнению, содержащему сколько-либо флюэнт, найти флюксии, и обратно.*

ба сс d ae 13 e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x

2. Один метод состоит в нахождении флюэнты из уравнения, заключающего вместе с ней и ее флюксию.

«Другой же заключается в употреблении вместо какой-либо неизвестной величины ряда, из которого можно удобно вывести остальные, и в сопоставлении однородных членов результирующего уравнения для определения членов взятого ряда.»

Расшифровал в письмах к Валлису (**1692**) после первых статей Лейбница.

Ньютон мало публиковал, т.к. не любил вступать в полемику:

1671 Новый экземпляр зеркального телескопа в Королевское общество.

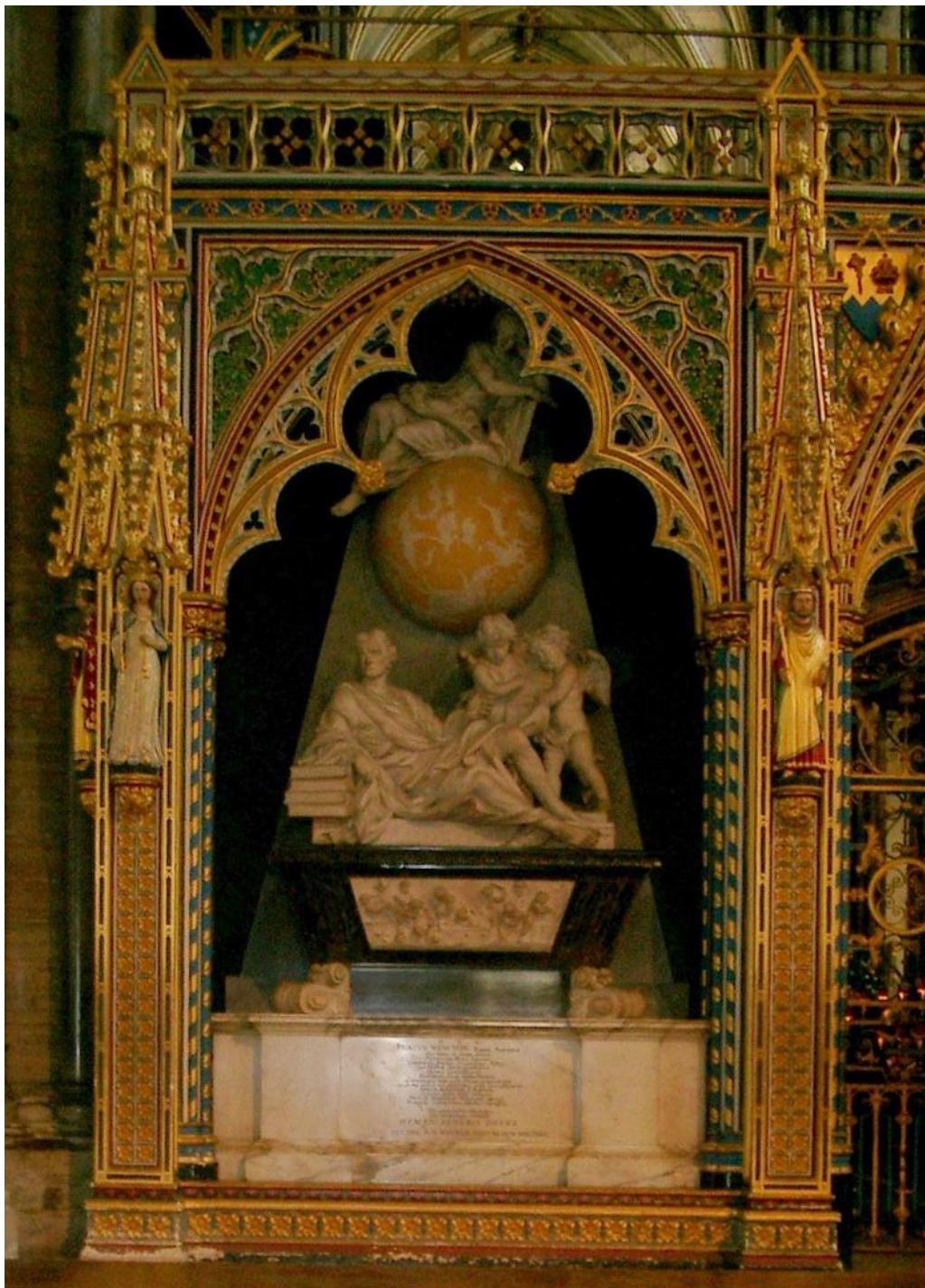
1672 Член Королевского общества и вскоре работа по теории света и цветов. Против выступили Гук, Гюйгенс и др. \Rightarrow Ньютон был очень угнетен.

До написания третьей работы по исчислению б.м. в **1687** Ньютон пишет свои знаменитые «**Математические начала натурфилософии**», в которых есть ряд предложений по теории пределов.

1696 переезд в Лондон, хранитель Лондонского монетного двора (с 1699 – директор, выдающийся администратор).

С 1703 – бессменный Президент Лондонского Королевского общества (\Rightarrow публикация работ, написанных ранее).

С 1699 – спор с Лейбницем о приоритете. Как следствие – отказ англичан от алгоритма Лейбница и невнимание на континенте к достижениям школы Ньютона (более 100 лет).



Эпитафия:
«Пусть радуются смертные, что
существовало такое украшение
рода человеческого»

A. Pope
“Nature and Nature’s laws
lay hid in night,
God said: Let Newton be!
And all was light!”

Ньютон был скромн:

“Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь мальчиком, играющим на морском берегу и развлекающимся тем, что время от времени он находит более блестящий камушек или более красивую ракушку, чем обыкновенно, между тем как весь великий океан истины лежит передо мной неисследованным”.

«Если я и видел дальше других, то только потому, что стоял на плечах гигантов».

Биографии Ньютона на русском языке:

Н.Н. Маракуев 1890 (4 издания),

С.И. Вавилов 1943 (3 издания)

<http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=188&ArticleId=809>

П. Акرويد 2007.

3 работы по исчислению бесконечно малых

1. 1669 (оп. 1711) «*Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов*» (основа всего анализа – ряды!, инфинитезимальная концепция)

2. 1670 (оп. 1736) «*Метод флюксий и бесконечные ряды*» (не нашел издателя, давал почитать)

Флюэнты – функции от независимой переменной (времени), траектории движения.

Флюксии – скорости движений, их порождающих.

Бесконечно малое приращение – момент величины (суть дифференциал).

Позже в бумагах Ньютона нашли все правила дифференциального исчисления.

Ньютон:

«я буду называть флюэнтами, или текущими величинами, величины, которые рассматриваю как постепенно и непрерывно возрастающие; обозначать я их буду последними буквами алфавита...

Скорости, с которыми возрастают вследствие порождающего их движения отдельные флюэнты (и которые я называю флюксиями, или просто скоростями, быстротами) я буду обозначать теми же буквами, но пунктированными...»

1. Фактически Ньютон работает с одним уравнением, связывающим x , y , z ..., и находит **производную неявной** функции, т.к. работает с одним уравнением $F(x, y, z, \dots) = 0$ и потом рассматривает отношение приращения этой функции к моменту времени:

$$\frac{F(x + \dot{x}0, y + \dot{y}0, z + \dot{z}0, \dots) - F(x, y, z, \dots)}{0} = 0$$

Мы сейчас эту мысль излагаем с помощью частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \dots = 0$$

2. Ньютон считал, что интегрирование обратное дифференцированию, поэтому **сначала** вводит понятие **первообразной функции** и **неопределенного интеграла**, а потом уже определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Ньютон предполагал, что каждая флюэнта (функция) может быть разложена в ряд по степеням (необязательно целым) других переменных, и разрабатывал методы и приемы, позволяющие находить любое число таких разложений. В этом **новаторство Ньютона**: применение бесконечных рядов, а следовательно, есть **общий метод + технический прием** интегрирования (почленное).

НО: нет соображений сходимости, хотя и использует разные разложения для разных областей:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

Но
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} \dots \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

3. 1690–91 (оп. 1704)

«Рассуждение о квадратуре кривых»

Здесь Ньютон развивает метод первых и последних отношений в попытке устранить малейший след бесконечно малых. Это – попытка возврата к евклидовой модели: надо рассматривать не флюксию, а лишь отношение приращений.

Большого значения обозначениям Ньютон не придавал, позже стремился перенять их у Лейбница.

Готфрид Вильгельм ЛЕЙБНИЦ (1646 – 1716)

Родился в семье профессора морали
Лейпцигского университета.

1661–66 изучал философию и
юриспруденцию в Лейпциге и Йене;
познакомился к натурфилософией
Декарта \Rightarrow интерес к математике.

1666 Диссертация на звание доктора
юридических наук; стал юристом
(советником) при дворе герцога в
Майнце.

1672 Поездка в Париж с
дипломатическим поручением,
знакомство с французскими
математиками, первые результаты в
теории бесконечных рядов.



1673 Поездка в Лондон, возвращение в Париж и к осени 1675 (в 29 лет!) освоил основные принципы и символику математики.

1676 Ганновер – библиотекарь и советник герцога (составление истории дома Гвельфов, зав. библиотекой, советник по различным вопросам).

1684 Первая заметка о дифференциальном исчислении: опубликовал свое дифференциальное исчисление в серии **коротких статей** в журнале “*Acta Eruditorum*” (Лейпциг)

1700 Первый президент Берлинской АН + иностранный член Парижской АН.

1711–16 Встречи с Петром Великим.



Старость, спор о приоритете, холодные отношения с третьим герцогом Ганноверским, холост, болезни \Rightarrow смерть (14.11.1716) не заметили...

Основная движущая пружина творчества Лейбница: создание общей науки – *Scientia universalis*. Эта задача имела много аспектов и некоторые из них привели его к математическим открытиям. Поиски «всеобщей характеристики» положили начало его занятиям комбинаторикой и символической логикой. Размышления о «всеобщем языке», в котором все ошибки мысли проявлялись бы как ошибки вычислений, стали источником не только идей в символической логике, но и к поразительным новациям во введении новых математических символов. С этих позиций **изобретение им дифференциального и интегрального исчисления также видится как изобретение универсального языка, выражающего математическую сущность изменения и движения.**

Свое исчисление он **изобрел** где-то **между 1673 и 1676** гг. по ходу его бесед с Гюйгенсом, изучая труды Декарта и Паскаля. Его мысль протекала в связи с идеей характеристического треугольника (dx, dy, dz) – сам термин принадлежит ему, хотя идея возникла у Паскаля, а ещё раньше у Архимеда.

Метод флюксий Ньютона, опубликование которого задержалось на многие годы, оставалось тогда Лейбницу неизвестным.

Своими открытиями Лейбниц делился сперва лишь с немногими друзьями. В письме от 11 июня 1677, посланном Г. Ольденбургу для Ньютона, он изложил свои достижения, в частности, приемы дифференцирования некоторых алгебраических функций и применения дифференциалов к отысканию касательных и к квадратуре площадей.

Всё это не было новым для Ньютона, а особенного удобства в предложенном Лейбницем знаке дифференциала d он не усмотрел. На письмо Лейбница он не ответил.

Друг Лейбница Э. фон Чирнгауз не оценил важности нового исчисления, так же как и Гюйгенс. Когда Чирнгауз сообщил некоторые результаты Лейбница, не упоминая его имени, в статьях, напечатанных в 1682–1683, Лейбниц решил поторопиться с публикацией своих открытий.

Погребысский И.Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц. 1646–1716. М.; Наука. 2004.

1. 1684 «Новый метод для максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления».

Всего 7 стр. с опечатками и ошибками.

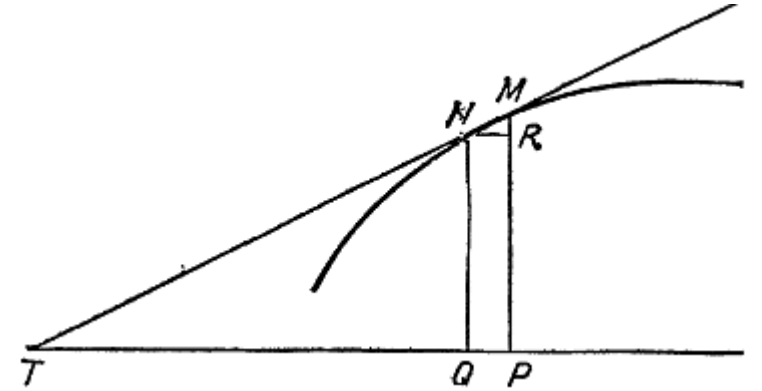
– создает **исчисление разностей** и **определяет дифференциал** с помощью характеристического треугольника **NMR**, подобного треугольнику **TNQ**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{NQ}{TQ} = \left(\frac{y}{\text{подкасательная}} \right),$$

т.е. определение дифференциала у Лейбница: $dy = \frac{y}{\text{подкасательная}} \cdot dx$

– формулирует правила дифференцирования (без доказательств): намерен создать «подлинную алгебру бесконечно малых».

– применяет все к нахождению касательных, максимумов-минимумов, точек перегиба + изучение выпуклости-вогнутости с помощью второго дифференциала.



Позднее добавил дифференциалы степени и логарифма и исследовал кривизну при помощи соприкасающейся окружности.

Ввел дифференциалы высших порядков, которыми при вычислениях пренебрегал.

2. «О глубокой геометрии и анализе неделимых и бесконечных» 1686

– опубликовал свой знак интеграла (с 1675); указал на взаимнообратный характер операторов интегрирования и дифференцирования;

– дал правила интегрирования многих элементарных функций.

ИТАК: 1) основа исчисления Лейбница – понятие дифференциала \Rightarrow фундаментальная операция – вычисление разностей;

2) Суммирование – операция обратная \Rightarrow таблицу интегралов выводит из таблицы дифференциалов. При этом площади, объемы есть суммы бесконечно малых элементов, но значение этих сумм получается обращением дифференцирования.

Sit $dy = x y dx$ fit $y = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$

Quando fit y infinita. scribitur ergo

Sit $dy = y dx$ fit $y = \int y dx$ et pro

y substituendo valorem fit $y = \int y dx dx$ et rursus

substituendo valorem fit $y = \int \int y dx dx dx$ Ergo

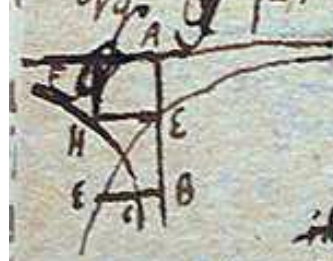
continuando in infinitum fit

$y = \int \int \int \int \dots dx dx dx dx dx$

Sed $\int dx = x$ et $\int dx dx = \frac{1}{2} x^2$

et $\int dx dx dx = \frac{1}{6} x^3$

Ergo per 5, $y = \frac{x^{10}}{10!}$



erit HC hyperbola. fit $v = 1/y$

Dabit esse BE = summa omnium BC

et hoc si y ponatur crescere a nihilo

sed si y ponatur crescere a nihilo

Sit $x = \int dy$ fit $y = \int dx$

Itaq; si y incipit a nihilo (scilicet ab A) seu si $y = \int dx$

ut possumus in aequ. 2. derivanda ex aeq. 1. fit $x = \int y dx$ in finem

sed si v incipiat alicubi ab aliqua quantitate affinita

У Ньютона в основе неопределенный интеграл (площади, объемы вычисляются исходя из скорости их изменения). **У Лейбница** – определенный интеграл.

До 1690 г. его исчисление называлось «сумматорным», лишь позже Иоганн I Бернулли ввел термин «интеграл». Но отчетливое понимание неопределенного интегрирования присутствует. Так, в 1694 г. при интегрировании дифференциального уравнения ввел произвольную константу, которую нужно находить из начальных условий.

Сильные стороны метода Лейбница:

- 1) простота алгоритма;
- 2) элегантные обозначения;
- 3) продуманный формализм действий, позволяющий не думать о природе объектов.

«То, что человек, сведущий в этом исчислении может получить прямо в трех строках, другие ученейшие мужья принуждены были искать, следуя сложными обходными путями»

Спор за приоритет.

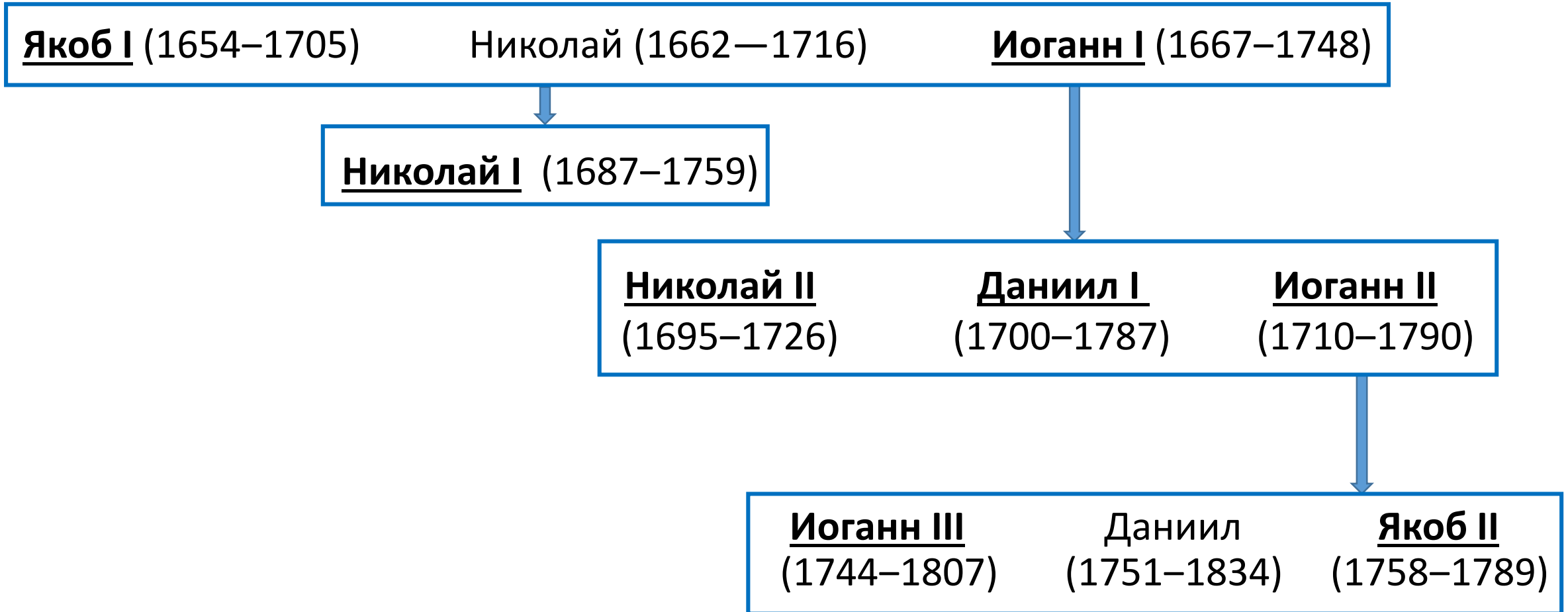
Английская школа (Беркли, Маклорен, Тейлор, Симпсон, Ланден) проясняла понятия бесконечно малой величины и т.п.

Школа Лейбница (братья Бернулли, Лопиталь, Даламбер, Эйлер) встала на формальную точку зрения: **дифференциальное исчисление связали с идеей функции**, на этой основе его стали развивать \Rightarrow появились дифференциальные уравнения (обыкновенные и с частными производными), дифференциальная геометрия и т.п.

- 1) широкая гласность;
- 2) удобная символика;
- 3) детальная разработка оперативной стороны анализа;
- 4) персональный фактор: забота о пропаганде и готовность к общению.

В 1696 г. появляется первый учебник исчисления, автором которого выступил маркиз Г.Ф. де Лопиталь (1661–1704)– *«Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий»*.

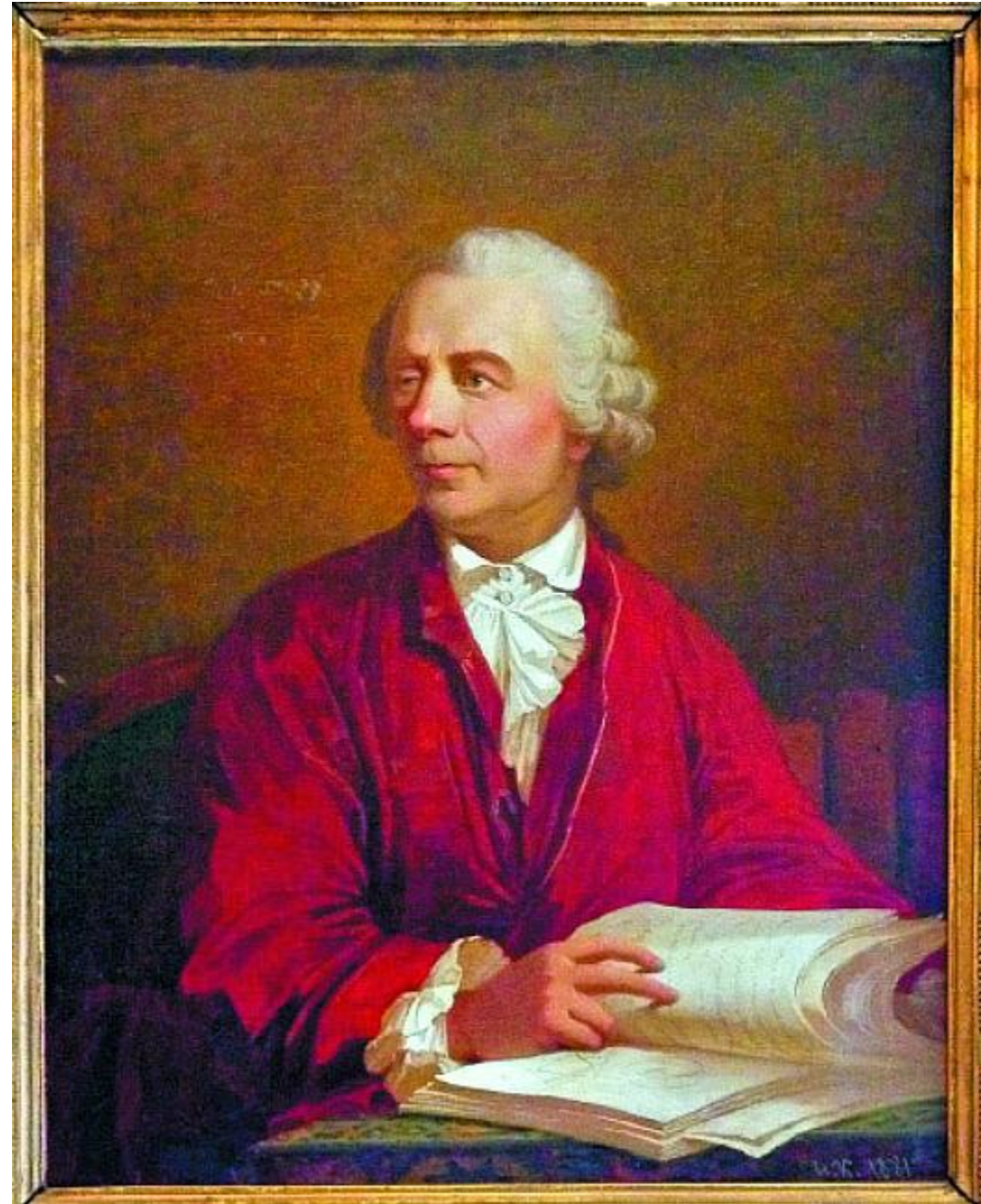
Николай **БЕРНУЛЛИ** (1623–1708)
городской советник в Базеле



Еще при жизни Ньютона и Лейбница стало очевидно, что созданное исчисление – лишь преддверие новой области математики, ее элементарная часть. Самой главной трудностью стала **необходимость такого представления функциональной зависимости, которое позволяет применять операции нового исчисления.** Поэтому первой задачей анализа бесконечно малых стала **задача создания теории функций.**

В середине XVIII в. с блеском осуществил Эйлер:

«Весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных величин и их функций».



1637 Рене Декарт: **Функция** – это уравнение \Rightarrow ограничивал лишь алгебраическими выражениями.

1668 Николай Меркатор открыл разложение в бесконечные ряды:

Логарифм – это площадь под гиперболой:

т.к. $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$, то $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

1668 Джеймс Грегори, Джон Валлис: $\ln \frac{1+x}{1-x}$, $\ln \frac{1}{1-x}$.

1670е Исаак Ньютон:

Функция – это ряд, но **необязательно по целым степеням** неизвестной (бином Ньютона): 1) нашел ряд для $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{p/q}$;

2) исследовал обратные тригонометрические функции и нашел их ряды;

3) обращением рядов получил ряды для e^x , $\sin x$, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, для дуг эллипса и др.;

\Rightarrow разрабатывал методы и приемы оперирования с бесконечными рядами (спец. аппарат). Таким образом открыты и изучены новые трансцендентные функции.

Лучшее определение функции в то время: Дж. Грегори 1667

Функция – это величина, полученная из других величин с помощью последовательности алгебраических операций или «любой мыслимой операции».

Впервые термин «функция» появился у **Лейбница** в **1673** в неизданной работе «Обратный метод касательной или рассуждения по поводу функций»:

*«Я называю **функциями** всякие части прямых линий, которые получают, проводя бесконечные прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой, каковы: абсцисса, ордината, хорда, касательная или нормаль, подкасательная или поднормаль... и бесконечное множество других, какие можно себе представить и построение которых более сложно...»*

⇒ геометрический подход, кривая как синоним «одновременного изменения».

В математику вошла задача поиска неизвестных законов изменения.

Жак Адамар: *«Число перестало быть главным математическим объектом, им стал закон изменения, функция».*

1718 Иоганн Бернулли:

«Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Обозначил $f(x)$.

Леонард **ЭЙЛЕР** понимал функцию в **двух смыслах**: узком и широком.

1748 **«Введение в анализ бесконечных»**

- первый трактат, в котором в основу положено понятие функции;
- порывает с геометрическими кривыми: «весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций»;
- в узком смысле: *«Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств».*