ПРЕДЫСТОРИЯ СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

Создание дифференциального и интегрального исчисления – основное событие математики XVII века

В XVII веке происходит расцвет *инфинитезимальных методов*, поскольку изучение законов движения приводит к появлению большого числа новых задач:

1) в механике изучается мгновенная скорость и направление движения ($\Rightarrow$ касательная);

2) артиллерия $\Rightarrow$ траектория движения снаряда;

3) движение планет, небесная механика $\Rightarrow$ длина траекторий, спрямление кривых;

4) оптика: свет сквозь линзу $\Rightarrow$ угол между световым лучом и нормалью и т.п.

Интегральное исчисление начиналось с:

(I) – греческого метода исчерпывания;

(II) – методов квадратур XVII века.

I: Арабы овладели *методом исчерпывания* еще в IX в. (Сабит ибн Корра *(n=1/2)*, Аль-Хайсам *(n=4)*), но в Европе он почти не был известен, лишь:

1586 **Симон Стевин** (1548–1620, фламандский инженер) свободно пользовался методом Архимеда для определения центров тяжести плоских криволинейных фигур, опуская доказательство от противного единственности предела;

Лука Валерио (1552–1618) (ученик венецианского издателя трудов Архимеда) сформулировал общую теорему вместо доказательства от противного.

IIa Метод неделимых

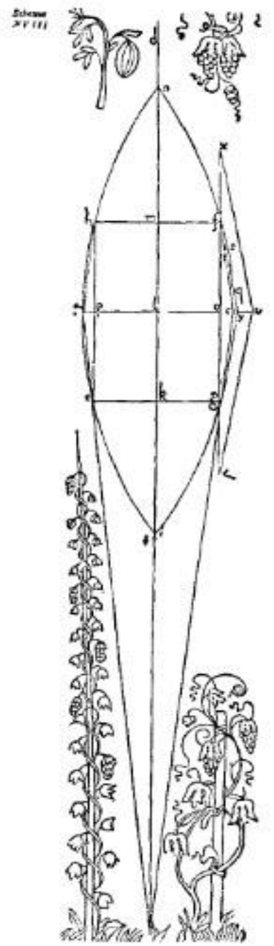
Иоганн КЕПЛЕР (1571–1630) отбросил классические методы и в духе Николая Кузанского обратился к интуитивным приемам (без обоснований).

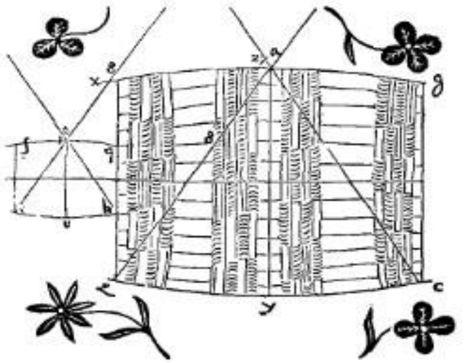
Например, окружность – правильный многоугольник с бесконечным числом сторон, площадь которой есть бесконечная сумма площадей бесконечно малых треугольников.

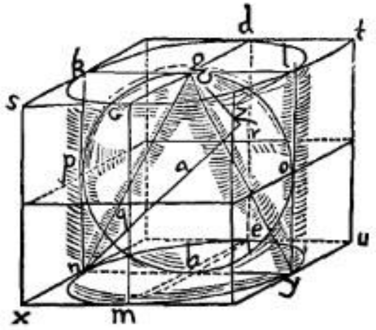
В общем случае у Кеплера **площадь (объем)** есть ***бесконечная сумма бесконечно малых элементов <u>той же</u> размерности*** (идеи Демокрита).

1615 ***«Новая стереометрия винных бочек,*** *преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки. С присоединением дополнения к архимедовой стереометрии****»***

Свой метод Кеплер применил к вычислению объема тел вращения (конус, шар, тор, яблоко, груша, айва, земляника и т.д.) и нашел объемы 92 тел вращения:







– объем ШАРа как бесконечное множество конусов, сходящихся вершинами в центре, с основаниями, являющимися точками на поверхности шара;

– объем ТОРа как площадь сечения, умноженная на серединную окружность;

– объем ЛИМОНа получается при вращении кругового сегмента и т.п.

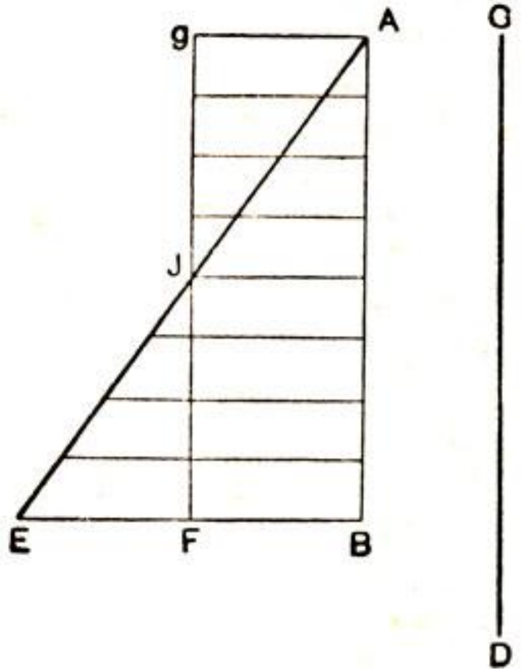
ВАЖНО: методы у Кеплера **НЕСТРОГИЕ**!

Галилео Галилей (1564–1642)

Задумал математический труд о неделимых, но… ***парадокс***: «*целых квадратов столько же, сколько и целых чисел*».

Отсюда **вывод**: «*свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где идет дело о бесконечности*».

Тем не менее Галилей использовал неделимые в некоторых рассуждениях, не называя явно:



1638 «***Беседы***»

Теорема: «*При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью путь проходится за то же время, что и при равномерном со скоростью, равной половине конечной скорости при равноускоренном движении*».

Здесь AB – время, горизонтальные отрезки – моменты скорости ⇒ путь – площадь (как сумма линий).

Бонавентура КАВАЛЬЕРИ (1598–1647)

1635 «***Геометрия,*** *изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного*»

<u>Определения непрерывных нет</u>: это просто бесконечно малые элементы, составляющие площади и объемы:

«*Линия образована из точек как ожерелье из жемчужин, площадь из линий – как ткань из нитей, а тело из плоскостей – как книга из страниц*».

Отдавал отчет в трудностях при суммировании бесконечного числа бесконечно малых величин, но о природе бесконечного не рассуждал и **не** пытался площадь заменить **бесконечной суммой бесконечно малых элементов**. Вместо этого определял **<u>отношение</u>** площадей фигур, неделимые которых находятся в постоянном отношении.

Пример: теорема о площади параллелограмма: диагональ параллелограмма делит его на два треугольника в отношении 1:1.

Разницу подходов Кеплера и Кавальери можно проиллюстрировать на примере квадратуры круга…

Кавальери первым все **задачи на квадратуры свел к площади криволинейной трапеции.**

В отличие от Кеплера считал свои неделимые ***лишенными*** всякой ***толщины***. Тогда криволинейная трапеция есть **сумма всех ординат**, и таким образом Кавальери вычислил интеграл от степенной функции на отрезке *[0, a]* **для первых девяти** показателей.

Недостатки: – отсутствие символики;

– громоздкость и искусственность приемов;

– требование, чтобы «неделимые» находились на равном расстоянии.

Последователи: Э. Торричелли (1608–1647), Д. Валлис (1616–1703).

II б Другие методы

Пьер ФЕРМА (1601–1665)

В 1621 появился перевод на латинский язык Диофанта (Де Мезириак). Ферма увлекся, ограничив область решений множеством целых чисел.

Около **1629** «***Квадратура любых кривых***»

$y = x^k$ ($k \in \mathbf{N}$) – письмо Жилю Робервалю.

Получена методом интегральных сумм Архимеда:

– устраивает разбиение отрезка с малым коэффициентом;

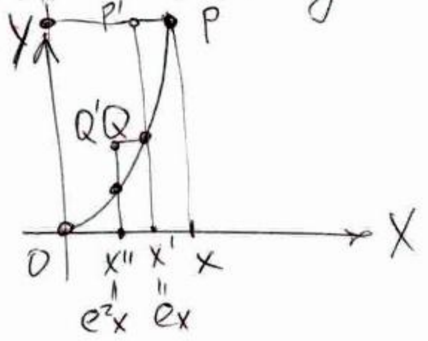
– вычисляет площади нужных прямоугольников и показывает, что их сумма – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой легко вычисляется.

– чтобы толщина прямоугольников равнялась 0, нужно взять коэффициент = 1, откуда вытекает нужное выражение для площади.

~ 1629 Квадратура любых кривых $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
(письмо Робервалю)

методом инт. сумм Архимеда

Пример $n = 2$



1) устроим разбиение $[0; x]$;

x; $x' = ex$; $x'' = e^2x$; ...

где $0 < e < 1$

2) Вычислим площади прямоугольников:

$$S_{xx'P'P} = S_{OxPY} - S_{Ox'P'Y} = x \cdot x^2 - ex \cdot x^2 = x^3(1-e)$$

$$S_{x'x''Q'Q} = ex \cdot (ex)^2 - e^2x \cdot (ex)^2 = (ex)^3(1-e)$$

$$\Rightarrow \overline{S} = x^3(1-e)(\underbrace{1 + e^3 + e^6 + \ldots}_{\text{беск. уб. геом. прогр.}}) = x^3(1-e) \cdot \frac{1}{1-e^3} =$$

$$= \frac{x^3}{1+e+e^2}$$

3) Чтобы толщина прямоуг. $= 0$, нужно $e = 1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{x^3}{3}$$

Уже здесь у Ферма: – присутствует понятие ***системы координат***

– каждой кривой ставится в соответствие некоторое ***уравнение*** как ее «специфическое свойство» (рождение аналитической геометрии 1636–37 гг.!);

– используется символика Виета, поэтому можно геометрические задачи формулировать в терминах алгебраических уравнений $\Rightarrow$ *характер* методов Ферма ***ОБЩИЙ***.

В **1642** г. Ферма получил **обобщение** этого результата для ***любого положительного рационального*** показателя (сообщил Кавальери в 1644, но метод в секрете!), применив кроме своего разбиения новый вычислительный прием, использующий оценку с помощью двух сумм:

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^{m} k^n$$

В результате Ферма вычислил (**1642** г.)

$$\int_0^x x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad \forall\alpha \neq -1, \qquad \alpha \in \mathbb{Q}$$

Полное изложение метода Ферма – после **1657** г. (опубликовано в 1679, после смерти):

«***О преобразовании уравнений мест… с приложением способа употребления геометрической пропорции к квадрированию бесчисленных парабол и гипербол***».

Назвал его **логарифмическим**.

Таким же образом Ферма вычислил и площадь под гиперболой:

$$\int_{x}^{+\infty} x^{-\frac{p}{q}}\,dx = \frac{q}{p-q}\,x^{\frac{q-p}{q}},$$

Метод Ферма – наиболее общий и содержит все необходимое для введения определенного интеграла, **НО** всякий раз вычисляет *конкретную* площадь, ни разу не пользуется пределом. И все же это – шаг вперед.

В этом духе интеграционные методы развивали:

Блез Паскаль (1623–1662);

Джеймс Грегори (1638–1675).

Работы последователей Ферма снизили интерес к методу неделимых.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

к началу XVII в. были разработаны гораздо слабее.

Задачи о касательных и экстремумах появляются позже задач о квадратурах. У древних касательная имеет с кривой одну общую точку, но в XVII в. взгляд на нее меняется: *касательная – предельное положение секущей*, диагональ подвижного параллелограмма скоростей.

После **1637** **Ферма**

«Метод отыскания максимумов и минимумов»

Формулирует **правило**: пусть $f(x)$ – целый алгебраический многочлен.

Затем: 1) составляется $f(x+h)$;

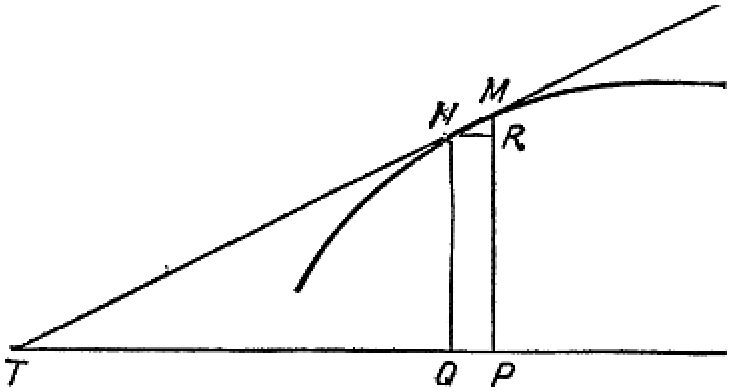
2) пусть h – мало, тогда $f(x+h) \approx f(x)$;

3) в получающемся уравнении сокращаются равные члены;

4) обе части делятся на h и все, что содержит h как множитель, отбрасывается;

5) **оставшееся уравнение и дает экстремумы.**

Приведя простой пример задачи на максимум, Ферма пишет: «***Отыскание касательных в данных точках каких-либо кривых мы приводим к вышеизложенному***» и дает пример построения касательной к параболе, изложенный очень сжато:



аргументу функции *x* давалось приращение *h* , а затем *f(x+h)* «приравнивалось» к расстоянию до касательной MP. Тогда $\frac{f(x+h)}{TQ+h} = \frac{f(x)}{TQ} \Longrightarrow$

$$f(x+h) = \left(1 + \frac{h}{TQ}\right) f(x)$$

$$f(x) + A(x)h + B(x)h^2 + \cdots = \left(1 + \frac{h}{TQ}\right) f(x)$$

Отсюда Ферма получает $A(x) = \frac{f(x)}{TQ}$ или $TQ = \frac{f(x)}{A(x)}$.

Поскольку Ферма работал с многочленами, то разложение в ряд было конечным и все действия можно обосновать строгими неравенствами.

<u>Общего правила **НЕ** формулирует</u>.

Даже Декарт не совсем точно понял метод Ферма, и была обширная переписка, полная как резких и даже несправедливых обвинений, так и новых мыслей и идей.

Ферма объяснял и обобщал свой метод:

1640 с помощью строгих неравенств доказал, что «допускается замена ординат кривых ординатами их касательных»;

1660 установил эквивалентность двух бесконечно малых величин: элемента дуги и элемента касательной $\Rightarrow$ мог проводить касательную к любым кривым, а не только алгебраическим.

Методы Ферма имели большой успех в Англии, где широко использовались бесконечные ряды $\Rightarrow$ **тенденция к *арифметизации* математики**:

– Джон **Валлис** (1616–1703) создал почленное интегрирование;

– Джеймс **Грегори** (1638–1675): «Узнав о рядах Ньютона, посылаю свои ряды».

Противник тенденции **Исаак БАРРОУ** (1630–1677): – желал вернуться к геометрической точке зрения и евклидовой строгости: разработал способ нахождения касательной более общий, чем у Ферма;

– первым заметил: **задачи о касательных и о квадратурах взаимнообратны**!

– получил аналог нашей теоремы, позволяющей вычислять интегралы при помощи первообразных, НО в громоздкой геометрической формулировке.

ИТАК: к середине XVII века **Ферма разработал аналитические методы,** а **Барроу обнаружил фундаментальную связь задач.**

Оставалось упорядочить.