

ЕВРОПА.

Средние века и эпоха Возрождения.

В 395 г. происходит **распад Римской империи** на Западную и Восточную. Столицей Восточной Римской империи остается Константинополь (столица Римской империи с 330 г.), **однако** вплоть **до конца V в.** эти два государства могут рассматриваться **как единое целое**. В IV в. христианство становится государственной религией сначала Восточной, а затем и Западной Римской империй, и с 391г. язычество оказывается там под запретом. На смену рабовладельческому строю приходит феодализм.

Эпоха господства феодализма: с V–VI вв. до XV в.

- 1) раннее Средневековье (конец V– середина XI вв.) – века невежества, экономический спад и политический хаос; потеряны практически все связи с Восточной Римской империей.;
- 2) высокое или классическое Средневековье (середина XI–XIII вв.);
- 3) позднее Средневековье или раннее Новое время (XIV–XVI вв.).

В период раннего Средневековья происходит создание новых государств, тщетные попытки создать империи (империя Карла Великого распалась со смертью ее создателя). Исключением здесь становится Священная Римская империя, которая просуществовала с 962 по 1806 гг. Она была основана германским королем Оттоном I и в разные годы включала территории современных Австрии, Германии, Чехии, некоторых регионов Италии и Франции.

В это время общество носило примитивный аграрный характер. Практически все связи с Востоком были прерваны (арабы лишили Византию выхода к Средиземному морю), церковь объявила культуру греков и римлян порождением язычества. В IV-V вв. ведется преследование светских школ и ученых, однако **позже** христианство все же **принимает науку**, и именно **монастыри становятся новыми центрами просвещения**, хотя церковь по-прежнему преследует научную и философскую мысль, отличающуюся от ортодоксальных.

В раннем Средневековье было написано несколько книг о **Семи свободных искусствах** – тривиум (риторика, грамматика, диалектика) + квадривиум (арифметика, геометрия, гармония, астрономия).



Автор наиболее популярных учебников по квадривиуму **БОЭЦИЙ (480–524 г.)** был государственным деятелем при дворе остготского короля Теодориха Великого и философом-неоплатоником. Учился в Афинах в Академии платоников, был казнен по обвинению в государственной измене.

В тюрьме написал очень популярное в Средние века философское сочинение «Утешение в философии» и перевел на латинский язык «Арифметику» Никомаха и часть «Начал» Евклида; в перевод Никомаха он включил свои числовые примеры, а в книге Евклида довольствовался геометрическими примерами и не приводил строгих доказательств.

Одним из первых математиков Западной Европы был ирландский монах **БЕДА Достопочтенный (ок. 673—735)**. Он был автором хронологического трактата, посвященного вычислению дня Пасхи.

Пасха празднуется в первое воскресенье после полнолуния, приходящегося на день весеннего равноденствия или ближайший вслед за этим день, поэтому вычисление даты Пасхи приводит к решению в целых числах системы неопределённых линейных уравнений.

Определённый день недели приходится в разные годы на разные числа, повторяясь с 28-летним циклом (солнечный круг), фазы Луны повторяются с периодом в 19 лет (лунный круг) \Rightarrow итоговый период Пасхи — 532 года (великий круг).



ALCUIN PRESBYTER DE
Charlemagne. Chap. 65.



Епископ АЛКУИН (735–804 гг.) – англо-саксонский учёный, богослов и поэт, один из вдохновителей Каролингского Возрождения.

Работал при дворе Карла Великого. Уроженец Йорка, был учеником друга Беды Достопочтенного. Организатор школ и автор ряда руководств. Из них наибольший интерес представляют «Задачи для оттачивания молодого ума» (*Propositiones ad acuendos juvenes*), среди которых имеется ряд задач индийского происхождения.

In this painting by *Jules Laure*, **Charlemagne** is surrounded by his principal officers as he welcomes **Alcuin** who shows him manuscripts.



X век – начало изменений в Европе.

1. Герберт (940 – 1003) – воспитатель, затем советник императора Оттона III, впоследствии – **папа Сильвестр** (999–1003);

– путешествовал в **Испанию** (967–969), посетил там арабские школы и познакомился с индо-арабской системой счисления;

– в 972–982 гг. преподавал в Реймсе предметы квадривиума. Занимался математикой, логикой, философией и астрономией. Около 994 г. соорудил в Магдебурге солнечные часы.

– построил (возродил) счетную доску абак, ему приписываются работы *«Книга о делении чисел»* и *«Правила счета на абаке»*; умение делить любые большие числа в глазах церкви свидетельствовало о том, что он продался дьяволу.

– *его бумаги собирались разбирать в Москве Воланд.*



2. Важную роль в сохранении и передаче научных знаний играла **Сицилия**, остававшаяся в привилегированном положении:

– **коренная культура**: Сицилия с древнейших времен была эллинской колонией (IX–VIII вв. до н.э.) с богатыми культурными городами. Эллинская традиция сохранялась здесь и после завоевания Римом (конец III до н.э.) и во времена византийской оккупации (с 535 г.);

– сарацины высадились в Сицилии в 827 г. и к 878 г. завершили ее покорение. Они были вытеснены оттуда норманнами (1060–1092), которые и основали Сицилийское королевство. Но и арабы, и норманны проявляли **религиозную терпимость**, поэтому на острове свободно исповедовались христианская и мусульманская религия, **были в ходу четыре языка**: греческий, латинский, арабский и древнееврейский.

3. В X в. контакты с Востоком еще редки, но в XI–XIII вв. приобретают системный характер, чему немало способствуют **Крестовые походы**. Постепенное **развитие ремесел служит прогрессу науки и культуры**.

XI–XII вв. – пробуждение Европы.

Цивилизация упрочилась, демографический подъем, отсюда – освоение новых земель, развитие городов.

Эпоха всемогущества церкви, ее монашеских орденов, которые стали первыми культурными центрами христианского Запада.

Церковь возводила величественные соборы, открывала первые школы.



Латынь – язык официальной церкви – стала языком эрудитов и позже **научным языком**.

До XII в. поддерживалась атмосфера догматизма, мистицизма и рабского следования слову Священного писания. Преобладали учения о грехе, аде, о спасении, а не исследования и наблюдения природы. Цель – подготовка к потусторонней жизни.

Появление университетов

Конец XI в. – Италия:

Салерно (Schola Medica Salernitana), основа – медицина, существует до сих пор;
университет в **Болонье**.

1088

Уже в **1117** г. **Оксфордский** университет обучал студентов.

Конец XII в. **Парижский** университет;

1209 г. **Кембридж** и затем др.

(Саламанка, Монпелье, Падуя, Неаполь, Тулуза...)

XIV в. Прага, Краков, Вена, Гейдельберг, Лейпциг, Базель...

Во всех университетах было 4 факультета: **искусств, богословия, права и медицины**. Сначала все студенты 3-4 года учились на факультете искусств, а потом еще 8 лет по выбору.

Семь свободных искусств: тривиум (грамматика, риторика, логика) + квадривиум.



ХII век – век великих переводов

1. **АДЕЛАРД** из Бата (1075–1160) англичанин, автор «Правил абаки», переводил с арабского на латынь “Начала” Евклида, “Альмагест” Птолемея, астрономические таблицы Аль-Хорезми.
2. В Испании существовало много центров перевода с арабского на латынь (напр., в Толедо).
3. **Роберт** из Честера, работая в Сеговии, перевел “Алгебру” Аль-Хорезми (1145).
4. **Платон из Тиволи** (ХII в.) перевел с арабского на латынь «Четверокнижие» Птолемея.
5. **ГЕРАРДО КРЕМОНСКИЙ** (1114–1187) – автор перевода более 80 рукописей с арабского (переводы Сабита ибн Корры “Начал” и “Данных” Евклида, трудов Архимеда, Аполлония, Менелая, Птолемея, Гиппократы, Галена, Аристотеля и др.) Работал в Ломбардии.

Леонардо ПИЗАНСКИЙ (около 1180 – после 1250)

Леонардо родился в большом торговом городе-республике Пизе. Его часто называют **ФИБОНАЧЧИ**, т.е. сын Боначчи — Доброго. Настоящая его фамилия была, по-видимому, Биголло.

Отец Леонардо был нотариусом республики Пиза. Вскоре после рождения сына он был послан со служебным поручением в Алжир. Когда Леонардо исполнилось 12 лет, отец выписал его к себе, чтобы познакомить с делами, особенно коммерческими расчетами.

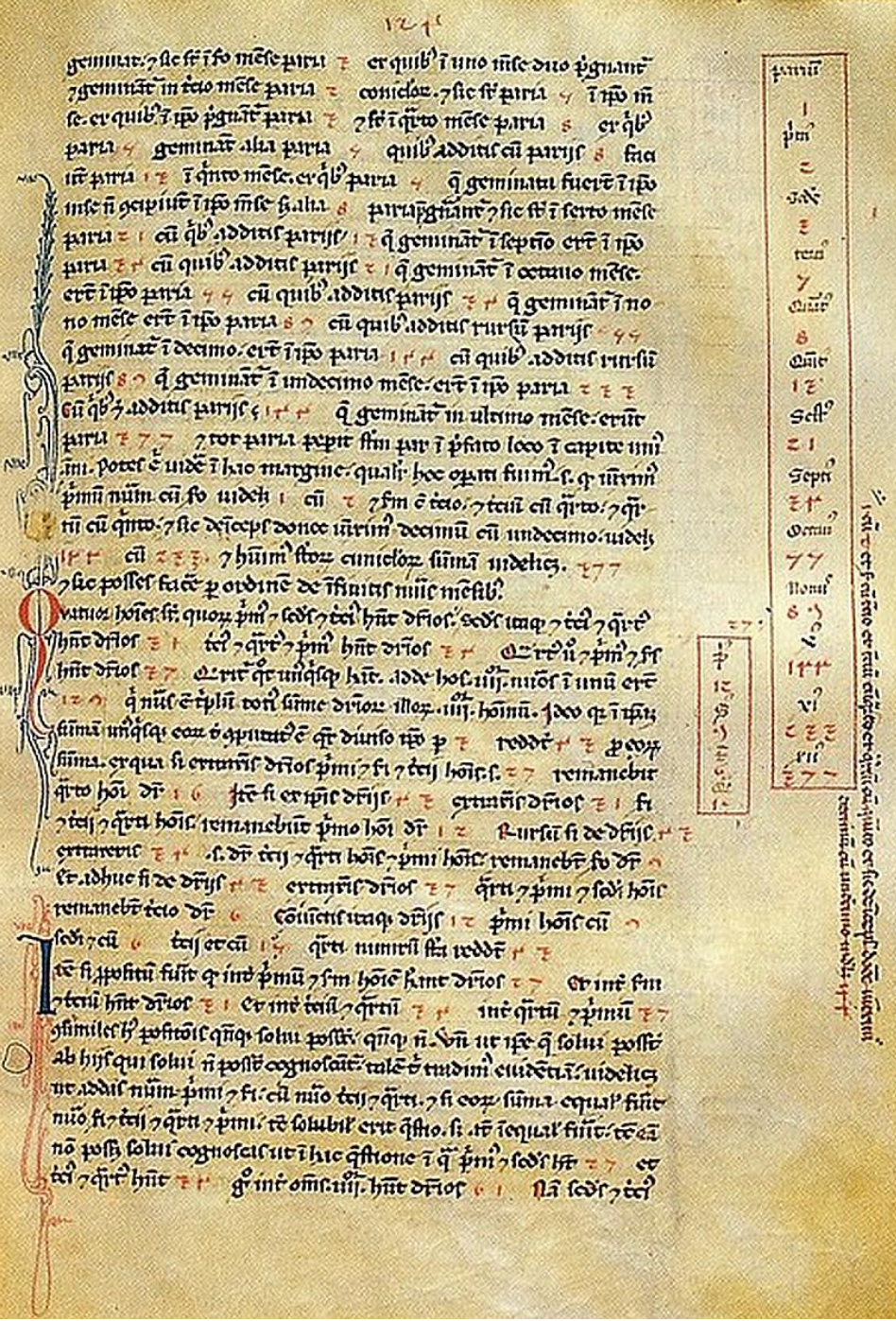


Леонардо совершил путешествие в Египет, Сирию, Грецию, Сицилию и Прованс, знакомясь с различными способами счета и началами алгебры. Он убедился, что счет по десятичной позиционной системе (который он называл индийским) намного превосходит все другие. Вернувшись в Пизу, он более серьезно занялся математикой. Он познакомился с “Началами” Евклида, и, соединив эти знания с тем, что узнал от арабов, составил в **1202 г. “LIBER ABACI”**.

1202 г. "LIBER ABACI" – энциклопедия математических знаний

- вводится индийская позиционная система счисления с нулем;
- рассматриваются ряды (арифметические и геометрические прогрессии);
- вводится ряд Фибоначчи: $1+1+2+3+5+8+\dots+144=376$ – первый возвратный ряд;
- квадратные уравнения по аль-Хорезми;
- неопределенные уравнения (новые приемы для некоторых задач Диофанта);
- терминология как перевод с арабского.

Уровень знаний в книге намного превышает знания той эпохи.



В «Книге абака» 15 (книг) глав:

1-5 посвящены арифметике целых чисел на основе новой нумерации. Фибоначчи отмечает преимущество индо-арабских цифр над римскими, а также приводит признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 7 и 11.

6, 7 посвящены действиям над смешанными числами и дробями. Дроби приводятся к общему знаменателю рациональнее, чем у арабов — через НОК.

8-10 содержат приемы решения задач коммерческой арифметики, основанные на пропорциях.

11 посвящена задачам на сплавы и смешение. Решение дается в форме рецептов.

12 содержат задачи на суммирование рядов: арифметическая и геометрическая прогрессии, ряд квадратов и первый возвратный ряд: *сколько пар кроликов родится в год от одной пары, если каждая пара приносит ежемесячно по паре, способной в свою очередь через месяц к размножению, и ни одна пара не погибает.*

В **13 книге** решаются различные задачи, приводящие к **линейным** уравнениям. Для их решения используются метод ложного положения, словесно-алгебраическое решение и прямое решение, про которое Леонардо пишет, что оно арабского происхождения.

В **14 книге** на числовых примерах излагаются способы извлечения квадратных и кубических корней.

В **15 книге** решаются задачи на применение теоремы Пифагора и **квадратные уравнения**. Излагаются методы решения квадратных уравнений **по аль-Хорезми**.

Впоследствии математики широко черпали из «Книги абака» задачи и приемы решения, которые в XV–XVI вв. разошлись по многочисленным рукописям. Примечательно, что задачи Леонардо можно встретить и в знаменитой «Алгебре» Л. Эйлера (1768).

Второе издание книги в 1228 г. Леонардо посвятил своему другу *Микеле Скотто* (*Майкл Скот*, ок.1180–ок.1235), придворному астроному и астрологу императора **Фридриха II**, тому самому, которого впоследствии Данте поместил в своем “Аде” в “*Божественной комедии*” в четвертый ров вместе с другими обманщиками, выдававшими себя за прорицателей:

*А следующий, этот худобокой,
Звался Микеле Скотто и большим
В волшебных плутнях почитался докой.*

(Песнь XX, строфы 115–117)

Боккаччио (1313–1375) упомянул его как некроманта в “*Декамероне*”:

“...был в нашем городе великий мастер некромантии, по имени Микеле Скотто, ибо он был из Шотландии; именитые люди, из которых лишь немногие остались теперь в живых, оказывали ему великие почести”.

До наших дней дошло лишь второе издание “*Liber abaci*”.



Это посвящение говорит также о связи Леонардо с Сицилийским двором Фридриха II Гогенштауфена (1194–1250), первого из просвещенных деспотов Италии, которыми впоследствии было так богато Возрождение.

Но даже в то жестокое время Фридрих прославился своей жестокостью — рассказывали, что он разрешал проводить анатомические исследования на преступниках (живых людях). Но наряду с этим он покровительствовал литературе и наукам и сумел окружить себя учеными и философами.

Связь Леонардо с сицилийским двором весьма примечательна, так как **Сицилия наряду с Испанией играла большую роль в передаче арабской науки в Западную Европу.** Но в отличие от Испании здесь имели место и непосредственные контакты и с эллинской наукой.



Friedrich der Zweite. 1215—1250.

При блестящем дворе Фридриха устраивались научные диспуты. В одном из них прославился Леонардо Пизанский. Придворный философ Фридриха II – магистр Иоганн Палермский предложил ему два вопроса, которые в современных обозначениях выглядят так:

1) найти корень уравнения $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$;

2) найти рациональные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5 = u^2 \\ x^2 - 5 = v^2 \end{cases}$$

Леонардо провел тщательные исследования обеих задач и написал две книги “*Flos*” (Цветок) и “*Liber quadratorum*” (Книга квадратов), вышедшие в 1225 г. и посвященные решению соответственно первого и второго вопросов. Хотя эти книги были изданы типографским способом только в 1862 г., они были хорошо известны математикам Средневековой Европы, которые почти дословно повторяли изыскания Леонардо.

“Flos” : Найти корень уравнения $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$

1. Перепишем уравнение в виде $\frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5} + x = 2$.

Очевидно, что существует нецелый положительный корень, больший 1, но меньший 2.

2. Он не может быть дробным.

Пусть $x = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, тогда $p^3 = 20q^3 - 10pq^2 - 2p^2q$.

Все члены правой части делятся на q , следовательно, p делится на q , что противоречит выбору p и q .

Отметим, что метод доказательства Леонардо вполне общий. С его помощью в алгебре позже была доказана важная теорема теории целых алгебраических чисел:

Приведенное алгебраическое уравнение с целочисленными коэффициентами, не имеющее целого корня, не имеет дробных (рациональных) корней.

3. Корень не может иметь вид \sqrt{n} .

Представим корень в виде $x = 2 \frac{10-x^2}{10+x^2}$.

Если бы $x = \sqrt{n}$, то имеем $\sqrt{n} = 2 \frac{10-n}{10+n}$,

т.е. иррациональное число должно равняться рациональному, что невозможно.

4. Леонардо показывает, что корень не может иметь вид $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ или $\sqrt{n} - \sqrt{m}$.

5. Леонардо дает ответ с точностью до шестого шестидесятеричного знака:

$$x = 1; 22^I 7^{II} 42^{III} 33^{IV} 4^V 40^{VI} .$$

Каким способом Леонардо вычислил это значение до сих пор остается неизвестным. Однако этот результат только примерно на $1 \frac{1}{2}$ сексты, т.е. на $3 \cdot 10^{-11}$, превосходит истинное значение корня.

Сегодня Пизанским университетом создан сайт с форумом, посвящённый исследованию этой работы Леонардо Пизанского



UNIVERSITÀ DI PISA



BIBLIOTECA AMBROSIANA

Flos - Edizione Elettronica

EXTRA

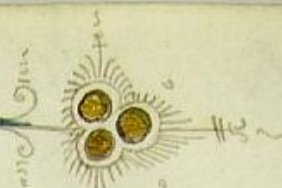


-- r1 --

- 1 **INCIPIT** flos Leonardi bigolli pisani su^o solutionib^{us} qua^{er}dam
- 2 questionum ad nūm vī et ad geomet'am vī ad ut^{rum} ^qu^ontinētium.
- 3 INTELLECTO beate p^{at}ris et d^{omi}ni venerande R. dei g^{ra}
- 4 s^{an}c^{ti}e Ma^{ri}e. In cosmidin diac. Card. dignissime qd meo^o
- 5 o^{mn}ium copiam nō p^{ro}ceptive saltim qd vos magis decebat,
- 6 sed simpliciter petere fuistis ^{et} litt^{er}as v^{ost}re s^{ci}entatis dignati,
- 7 nihilominus t^{ame}n petitionem ip^{sa}m reverent^{er} ^{et} suscipiēs
- 8 ī mandatis, nō solum parere voto v^{ost}ro sattegi devotius
- 9 in hac parte, ve^{rum} et de qua^{er}da^m solutionib^{us} q^uo^{er}nu^m a qui-
- 10 busdam ph^{il}os^oph^o serenissimi d^{omi}ni mei C^{ar}ol^o et alijs ^{et} testib^{us}
- 11 pora m^{ul}ti oppōita^{et} et pl^{ur}imum que subtilius ^{et} in lib^{ro} maiori de nūo
- 12 que^{er}ta^{et} ^{et} posui st^{at}im solute, ac de multis q^uas ip^{se} met ad inveni,
- 13 ex diffusa ^{et} idem multitudine co^{mp}ilans hunc libellum
- 14 ad laudem et gl^{ori}am no^{str}is v^{ost}ris ^{et} positum flore^{re} ideo volui

Thumbnails navigator





INCIPIT flos Leonardi bigolli pisani sup solutionibz quazda
 nestionum ad nuz ut & ad geometriz ut ad ut qz pmetur.

INTELLECTO beate p^r & dⁿe uenerande R. dei gra
 scⁱe. Mar. Incosmidm. diac. Card. dignissime qd meoz
 opuz copiam no pceptiue saltim qd uos magis decebat.
 sed simpliciter petere fuitis pluttas uice scitatis dignati.
 nihilominus tn petitionem ipam reuerent^r suscipies
 i mandatis no solum parere uoto uro sattegi deuotius
 in hac parte. vey et de quazda solutionibz qonm a qui
 busdam phis serenissimi dⁿi mei Cesaris & alijs pte
 pora m oppoltary & phuz que subtilius q milib; denno i maiori

et qz cu eqlib equalia addut oia fuit eqlia. si utq parti
 addant cae $\frac{9}{15}$ z & rnt dragme $\frac{1}{20}$ 12 & $\frac{11}{10}$ unius rei
 equalis cas $\frac{9}{15}$ z & dragms. 17. & qz cuz ab equalibz
 eqlia auferant q remanet se eqlia. si ab utq parte
 auferit dragme $\frac{1}{20}$ 12 remanebut $\frac{11}{10}$ unius rei eqles
 cas $\frac{9}{15}$ z & dragms qz min' xxx un' dragme qz ut
 reducere h in equalitate un' rei tm. int casu cas $\frac{9}{15}$ z
 dragmas qz min' xxx p. 10. & diuisi ut cadq mltatioez
 p. 11. & mueni qd resuma eqt cas z min' xxx t^ria par
 te un' cas & dragms $\frac{20}{22}$ z. suau h. & addidi p^rmu
 nuz cu po & t^rio. f. cas un' cu dragms $\frac{1}{2}$ 8 & ca una
 min' medietate rei & cu dragms $\frac{1}{2}$ 14 & duabz t^rijs
 un' cas min' medietate un' rei & h^ru dragmas $\frac{2}{22}$

Предисловие к "*Liber Quadratorum*"

“Когда, о знаменитейший князь господин Фридрих, магистр Доминик привел меня в Пизе к ногам Вашего величества, магистр Иоганн Палермский, встретив меня, предложил мне вопрос, о котором я напишу ниже и который не менее относится к геометрии, чем к числам, а именно, найти квадратное число, которое будучи увеличено или уменьшено на пять, всякий раз порождало бы квадратное число.

После размышления над решением этого вопроса, которое я уже нашел, я увидел, что источники этого решения лежат во многих вещах, которые относятся к квадратным числам самим по себе и в их отношении друг к другу. Кроме того, узнав из разговоров в Пизе и других, которые дошли до меня из императорского двора, что Ваше величество соблаговолило прочесть книгу, которую я написал о числах, и что Ему иногда доставляет удовольствие слышать изящные рассуждения, относящиеся к геометрии, я вспомнил о вопросе, который я сформулировал и который был мне предложен при Вашем дворе Вашим философом.

Я взял этот вопрос в качестве темы и предпринял составление настоящей работы, которую решил назвать “Книгой о квадратных числах”. Теперь я прошу Вашей снисходительности в том случае, если книга содержит что-либо более или менее верное и необходимое, так как помнить обо всем и ни в чем не ошибаться свойственно божественному уму более, чем человеческому, и нет никого, кто свободен от недостатков и способен учесть все”.

Задача Иоганна Палермского состояла в нахождении квадрата, который после прибавления к нему 5 или вычитания 5 из него, давал бы снова квадраты. Для нас это означает, что нужно в поле рациональных чисел решить систему

$$\begin{cases} x^2 + 5 = u^2 \\ x^2 - 5 = v^2 \end{cases}$$

Прежде, чем приступить к решению системы, Леонардо решает две задачи из “Арифметики” Диофанта (II8 и II9):

- (1) Разложить квадрат на два других квадрата.
- (2) Разложить сумму двух квадратов, не являющуюся квадратом, в сумму двух других квадратов.

Диофант «Арифметика».

Задача 8 книги II

Заданный квадрат разложить на два квадрата.

Пусть надо разложить 16 на два квадрата. Положим, что первый равен x^2 , тогда второй будет $16 - x^2$; следовательно, $16 - x^2$ тоже равно квадрату.

Составляю квадрат из некоторого количества x минус столько единиц, сколько их найдется в стороне 16-ти; пусть это будет $2x - 4$. Тогда сам этот квадрат равен $4x^2 + 16 - 16x$; он должен равняться $16 - x^2$.

Прибавим к обеим частям равенства недостающее и вычтем подобные из подобных. Тогда $5x^2 = 16x$ и x окажется равным $16/5$.

Один квадрат $256/25$, а другой $144/25$; сложенные вместе они дают $400/25$, или 16, и каждый будет квадратом.

На современном математическом языке требуется решить уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (*)$$

Фактически Диофант делает подстановку

$$\begin{cases} x = t \\ y = kt - a \end{cases}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Q}.$$

Тогда (*): $t^2 + (kt - a)^2 = a^2$, откуда находим

$$x = t = a \frac{2k}{k^2+1},$$

$$y = a \frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Геометрически подстановку Диофанта можно рассматривать как пучок прямых с угловым коэффициентом k , проходящих через точку $(0; -a)$ данной окружности (*).

В задаче 19 книги III Диофант отмечает, что существует бесконечно много решений.

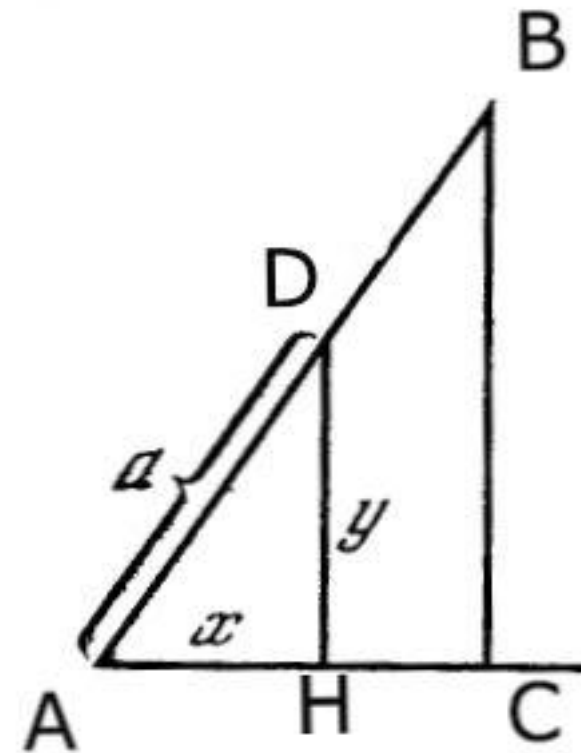
Ферма (XVII): для кубов и более высоких степеней это утверждение неверно.

Метод решения этих задач у Леонардо отличен от решения Диофанта и является совершенно оригинальным.

Для нахождения рациональных решений уравнения (1) $x^2 + y^2 = a^2$ Леонардо предлагает взять любой прямоугольный треугольник ABC с целыми или рациональными сторонами (p, q, r) и, отложив на гипотенузе отрезок, равный стороне заданного квадрата, через подобие треугольников получает одно из возможных решений задачи.

Поскольку прямоугольных треугольников бесконечное число, то и решений будет бесконечное множество.

После решения этой задачи Леонардо **формулирует в общем виде формулу композиции**, которая была известна и в древнем Вавилоне, и Диофанту, и арабским математикам. Чтобы использовать ее в решении второй задачи Диофанта, Леонардо впервые **ДОКАЗЫВАЕТ** ее с помощью геометрической алгебры.



Он формулирует ее следующим образом:

«Если предложены четыре непропорциональные числа и если первое меньше второго, а третье меньше четвертого, и если сумму квадратов первого и второго умножить на сумму квадратов третьего и четвертого и ни одна из сумм не будет квадратом, то возникшее число ровно двумя способами равно двум квадратным числам».

На современном математическом языке:

пусть $x < u$, $u < v$, тогда

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) =$$
$$= (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 \quad (*)$$

и существует ровно два способа разложить произведение, стоящее в левой части, в сумму квадратов, если $x^2 + y^2$ и $u^2 + v^2$ не являются квадратами.

После громоздкого геометрического доказательства Леонардо продолжает изучение этого утверждения:

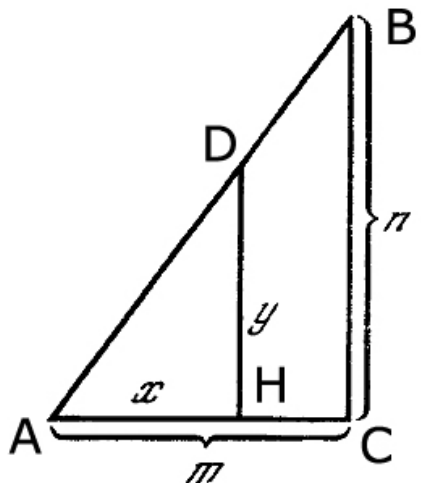
а) если $x^2 + y^2 = z^2$, то существует три способа разложения в сумму квадратов, т.к. к уже выведенным двум можно добавить еще один

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (z^2)(u^2 + v^2) = (zu)^2 + (zv)^2;$$

б) если же $x^2 + y^2 = z^2$ и $u^2 + v^2 = w^2$, то существует четыре способа разложения в сумму квадратов, т.к. добавить можно еще два:

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (zu)^2 + (zv)^2 = (xw)^2 + (yw)^2.$$

Для решения другой задачи Диофанта (2) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \neq \square$ Леонардо использует кроме данного еще два прямоугольных треугольника: с помощью треугольника с катетами a и b и некоторого другого (не подобного данному) рационального треугольника (p, q, r) он строит



прямоугольный треугольник с катетами из формулы (*): $n = ap + bq$, $m = |aq - bp|$, на гипотенузе которого откладывает отрезок $AD = \sqrt{a^2 + b^2}$, тогда катеты получившегося треугольника и есть искомые величины.

Решение задачи Иоганна Палермского Леонардо проводит без вспомогательного прямоугольного треугольника, хотя арабские математики, в отличие от Диофанта, при решении системы «двойных равенств» типа

$$\begin{cases} x^2 + y = u^2 \\ x^2 - y = v^2 \end{cases} \quad (**)$$

использовали прямоугольный треугольник с гипотенузой x и его учетверенную площадь, поскольку если взять $x^2 = p^2 + q^2$, а $y = 4S = 2pq$, то, очевидно, что уравнения системы выполняются.

В задаче Иоганна Палермского $y = 5$. Леонардо провел теоретико-числовое исследование вопроса, какие значения может принимать выражение площади S прямоугольного треугольника, стороны которого являются **натуральными** числами: она должна делиться на 6 (докажите это сами!), а значит, y должно делиться на 24. Но число 5 на 24 не делится \Rightarrow целочисленного решения не существует.

Чтобы получить рациональное решение, Леонардо сначала использует представление квадрата суммой последовательных нечетных чисел (!):

Пусть
$$v^2 = \sum_{n=1}^v (2n - 1), \quad x^2 = \sum_{n=1}^{v+k} (2n - 1), \quad u^2 = \sum_{n=1}^{v+k+l} (2n - 1)$$

Из уравнений системы (***) следует $v = u^2 - x^2 = x^2 - v^2$, откуда $(v + k + l)^2 - (v + k)^2 = (v + k)^2 - v^2 \Rightarrow$ можно искать решение в виде $v = |l^2 + 2lk - k^2|$, $x = l^2 + k^2$, $u = k^2 + 2lk - l^2$ и $y = 4lk(k + l)(k - l)$.

Это выражение для y и есть вышеупомянутая учетверенная площадь прямоугольного треугольника арабских математиков. Леонардо это выражение называет **конгруумом** и изучает его свойства. Минимальное значение конгруума 24 получается при $k = 2, l = 1$.

Возвращаясь к задаче Иоганна Палермского ($y = 5$), Фибоначчи для отыскания рациональных решений ищет конгруум вида $5\alpha^2$. Он требует, чтобы $l, 5 + l, 5 - l$ были квадратами, что выполняется для $l = 4 \Rightarrow \alpha^2 = 144 \Rightarrow$

$$\begin{cases} (12x)^2 + 5 \cdot (12)^2 = (12u)^2 \\ (12x)^2 - 5 \cdot (12)^2 = (12v)^2 \end{cases} .$$

Формулы для решений этой системы при $k=5, l=4$ дают

$$12x = k^2 + l^2 = 41, \quad 12u = k^2 + 2kl - l^2 = 49, \quad 12v = l^2 + 2lk - k^2 = 31,$$

откуда получается рациональное решение задачи: $x = 41/12, u = 49/12, v = 31/12$.

Но Леонардо на этом не останавливается, а ставит вопрос: «При каком значении конгруума задача имеет рациональные решения?» и утверждает, что конгруум, который равен $4S$, а, значит, и сама **площадь прямоугольного треугольника, не может быть квадратом!**

Нетрудно показать, что это утверждение эквивалентно **Великой теореме Ферма для четвертых степеней**. Леонардо пытался доказать свое утверждение, однако это ему не удалось.

Нам важно заметить, что это утверждение было **открыто за 400 лет до Ферма!** Вопросом о том, какие значения может принимать конгруум, интересовались многие математики XVIII-XIX вв. (А. Дженокки, Э. Люка и др.)

Интересно, что Ферма сформулировал это предложение так же, как и Леонардо: в своих замечаниях на полях *“Арифметики”* Диофанта он записал: **“Площадь прямоугольного треугольника в числах не может быть квадратом”**.

Ферма привел полное доказательство этой теоремы, и это единственное теоретико-числовое доказательство, которое дошло до нас от Ферма. Проведено оно *“методом спуска”*.

Эпоха ВОЗРОЖДЕНИЯ:

- | | |
|------------------------|-----------------------------------|
| 1) Проторенессанс | 2-ая половина XIII вв. – XIV в. ; |
| 2) Раннее Возрождение | начало XV – конец XV в.; |
| 3) Высокое Возрождение | конец XV – первые 20 лет XVI в.; |
| 4) Позднее Возрождение | середина – конец XVI в. |

Рост городов-республик привёл к росту влияния сословий, не участвовавших в феодальных отношениях: мастеров и ремесленников, торговцев, банкиров. Всем им была чужда иерархическая система ценностей, созданная средневековой, во многом церковной культурой, и её аскетичный, смиренный дух. **Отличительная черта эпохи Возрождения** — светский характер культуры, расцвет интереса к античной культуре, **«возрождение»** её **высоких идеалов гуманизма и антропоцентризма**, рассматривающих человека, его личность, его свободу, его активную, созидательную деятельность как высшую ценность и критерий оценки общественных институтов.

В это время зарождается буржуазия, возникает мануфактурное производство, книгопечатанье; в Европе появляется дешёвая бумага, порох, компас, часы. Это — эпоха Великих Географических открытий, расширения торговли.

Томас БРАДВАРДИН, архиепископ Кентерберийский (ок.1290–1349)

учился и преподавал в Оксфордском университете. Известны три его сочинения по математике и одно по механике:

1. Теоретическая арифметика — сокращенная арифметика Боэция.
2. Теоретическая геометрия — более оригинальная работа. Ее высоко ценили математики XIV-XV вв., она выдержала три издания. Здесь рассматриваются звездчатые многоугольники, получаемые из правильных выпуклых многоугольников (начиная с пятиугольника) путем продолжения их сторон до пересечения; изопериметрические свойства многоугольников, круга и шара, а также учение о пропорциях.
3. Трактат о континууме — написан между 1328 и 1335 г., посвящен учению о непрерывном и дискретном: приводит пять различных концепций континуума.
4. Трактат об отношениях или об отношениях скоростей при движениях — работа по механике.



Николай ОРЕМ (ок.1323–1382) преподавал в одном из колледжей в Париже, с 1377 г. – епископ в Лизьё. Один из первых математиков, писавших не на латыни, а на французском языке. Автор переводов на французский. Написал ряд трудов по астрономии, механике, математике, философии, натурфилософии.

Математические работы:

1. «Вычисление пропорций» (*Algorismus proportionum*). Впервые использовал дробные показатели степеней и фактически подошёл к идее логарифмов.

2. «Вопросы по геометрии Евклида» (*Questiones super geometriam Euclidis*). Помимо геометрических вопросов исследует бесконечные ряды и прогрессии, приводит остроумное доказательство расходимости гармонического ряда.

3. «Трактат о конфигурации качеств» (*De configuratione qualitatum*) содержит «теорию широт форм», первые примеры геометрической фигуры, имеющей бесконечную протяжённость, но тем не менее конечную площадь. Спустя три века теорию таких фигур начали строить Ферма и Торричелли.

Распространение новых идей проходило медленно.

- Университеты находились под патронажем церковных организаций, старавшихся сохранить существующие представления о мире и противившихся влиянию идей гуманизма.
- Ученые работали в одиночку.
- Латынь – язык науки – была доступна далеко не всем. (*Пачоли, Галилей и Декарт сознательно писали свои работы на разговорных языках*).

Огромное значение для распространения новых знаний имели:

1434 г. – изобретение **книгопечатания**

1478 г. Тревизо «Коммерческая арифметика»;

1482 г. Евклид «Начала»;

1494 г. Лука Пачоли «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности».

1453 г. – падение **Византии** и переезд ученых на Запад.

Иоганн Мюллер (Региомонтан) (1436–1476)

выдающийся немецкий астролог, астроном и математик; учился в Лейпцигском и Венском университетах. Основал в Нюрнберге **научную типографию** и одну из первых в Европе обсерваторий.

«***О всех видах треугольников***» (оп. 1533) – **первый** в Европе **труд по тригонометрии**. Первая книга посвящена решению плоских треугольников. Во второй книге – теорема синусов для плоских треугольников и рассматривается ряд задач, приводящих к квадратным уравнениям. Третья книга излагает основы сферической геометрии. Её содержание в значительной мере совпадает со «Сферикой» Менелая и др. арабских авторов. Центральная теорема четвёртой книги – сферическая теорема синусов. В пятой книге доказывается теорема, эквивалентная сферической теореме косинусов.



Никола Шюке (ок.1450— ок.1490) – французский математик, оказавший влияние на развитие алгебры. Наиболее известен введением в общее употребление названий больших чисел: *биллион*, *триллион* и т. д.

В его работе «**Наука о числах в трех частях**» (1484), написанной по-французски, изложены правила работы с рациональными и иррациональными числами, а также учение об уравнениях. Шюке сопоставил арифметическую и геометрическую прогрессию: записав их друг под другом, он заметил, что произведению нижних членов (геометрическая прогрессия) соответствует сумма членов, стоящих над ними — **предвосхищение свойств логарифмов**. Развитие идеи логарифмов продолжил Михаэль Штифель и завершил Джон Непер.

Шюке также первым предложил использовать отрицательные и нулевые показатели степени и обозначать показатели степени неизвестной величины малыми литерами справа вверху. **Символика Шюке богаче и ближе к современной**, чем обозначения его современника Луки Пачоли.